ANTONIO SALAZAR PESSÔA BRANDÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA UM TEXTO PARA ECONOMISTAS

ipea
INSTITITUTO DE PLANEJAMENTO ECONÔMICO E SOCIAL

PROGRAMA NACIONAL DE PNPE PESQUISA ECONÔMICA

PROGRAMA NACIONAL DE PESQUISA ECONÔMICA (PNPE)

Criado em 1973, o PNPE tem como finalidade precípua estimular a produção científica, através da promoção da pesquisa acadêmica individual na área de Economia. As entidades promotoras do PNPE são: Instituto de Planejamento Econômico e Social — IPEA, Financiadora de Estudos e Projetos — FINEP, Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social — BNDES, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística — IBGE e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico — CNPq. A princípio, o Programa foi administrado pelo antigo BNDE e, a partir de 1975, passou a ser gerido pelo IPEA/INPES.

INSTITUTO DE PLANEJAMENTO ECONÔMICO E SOCIAL
PROGRAMA NACIONAL DE PESQUISA ECONÔMICA

Série PNPE — 3

ANÁLISE MATEMÁTICA: UM TEXTO PARA ECONOMISTAS

ANTONIO SALAZAR PESSÔA BRANDÃO

Rio de Janeiro
IPEA/INPES
1982

Capa de L. C. Dias

Brandão, Antonio Salazar Pessôa

Análise matemática: um texto para economistas. Rio de Janeiro, IPEA/INPES, 1982.

566 p (IPEA/INPES. Série PNPE, 3).

1. Matemática econômica. 2. Análise matemática. I. Instituto de Planejamento Econômico e Social. Instituto de Pesquisas. II. Programa Nacional de Pesquisa Econômica. III. Série. IV. Título.

CDD 510 ou 330.1543
CDU 501:330

Este trabalho é da inteira e exclusiva responsabilidade de seu autor. As opiniões nele emitidas não exprimem, necessariamente, o ponto de vista da Secretaria de Planejamento da Presidência da República.

* INSTITUTO DE PLANEJAMENTO ECONÔMICO E SOCIAL

Serviço Editorial

Av. Pres. Antônio Carlos, 51 — 13.º andar — Rio de Janeiro (RJ) — CEP 20.001

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este texto foi elaborado tendo em mente os estudantes de Economia, principalmente aqueles de pós-graduação e os de graduação dos últimos períodos. O principal objetivo do trabalho é apresentar o material básico de Análise Matemática com vistas às necessidades específicas de economistas e estudiosos do assunto.

A direção que a Teoria Econômica vem tomando nos últimos anos requer do profissional desta ciência um tipo de formação matemática mais sofisticada do que a tradicionalmente oferecida nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Neste sentido, é bom lembrar que esta necessidade não se prende apenas ao enfoque neoclássico da teoria, mas também àqueles que têm por base outras visões do mundo. Nesta introdução, não gostaríamos de entrar em maiores polêmicas sobre a importância ou não do uso do instrumental matemático em Economia, mas apenas indicar ao leitor a existência de vasto material que irá requerer, para sua compreensão, um bom nível de conhecimento deste assunto.

Este material, a que nos referimos no parágrafo anterior, faz uso de dois aspectos distintos da Análise Matemática: de um lado, são freqüentemente mencionados os resultados (teoremas) e, de outro, nota-se também uma crescente utilização das técnicas de argumentação, linguagem e terminologia desta ciência. É com base nestas duas faces da questão que procuraremos desenvolver este trabalho, enfatizando não somente os resultados. A apresentação do material procurará demonstrar a maioria dos teoremas, além de, em alguns casos, chamar a atenção para as suas limitações. Em outras palavras, procuraremos percorrer da maneira mais rigorosa possível todo o caminho dedutivo para chegarmos às conclusões dos teoremas, introduzindo também exemplos que ilustrem suas principais limitações.

Sendo um texto dirigido a um público específico, escolhemos os tópicos a serem cobertos de maneira bem objetiva. Com isto, procuramos tornar o assunto um pouco mais atrativo ao estudante de Economia, que de outra forma deveria recorrer aos livros usuais de Análise Matemática, escritos, em geral, com vistas às necessidades de matemáticos, estudantes de Matemática e outros cientistas exatos. Além disto, existe um assunto — Análise Convexa — de extrema importância para nós e que quase nunca é discutido com o grau de detalhamento necessário pela maioria dos textos de Análise Matemática.

Gostaríamos ainda de esclarecer que o trabalho não tem pretensões de originalidade em Matemática, pois sua contribuição maior encontra-se na escolha dos tópicos e na apresentação de aplicações gerais do material discutido. Além disto, preocupamo-nos em não omitir um número muito grande de detalhes, sacrificando às vezes a elegância da apresentação, com a finalidade de facilitar a leitura para aqueles não acostumados a este tipo de tratamento do assunto.

Não tendo como principal objetivo a originalidade em Matemática, utilizamo-nos livremente de demonstrações, exemplos e exercícios encontradiços na literatura. Uma pesquisa pela bibliografia apresentada ao final do livro indicará ao leitor as origens do material do texto, pois não há referências específicas a cada item, o que tornaria a apresentação mais cansativa.

AGRADECIMENTOS

A elaboração deste trabalho só foi possível devido à colaboração de várias pessoas. Gostaríamos de agradecer inicialmente a Elizeu Roberto de Andrade Alves e a Aluisio Pessôa de Araujo, que leram versões preliminares do texto e pacientemente apontaram erros e incorreções, além de sugerirem maneiras de melhorar a apresentação de alguns tópicos. Além deles, Elon Lages Lima influenciou bastante a forma de apresentação do material por meio de seus livros (aos quais recorremos intensamente), como também através dos cursos que tivemos com ele no IMPA.

Os alunos da Escola de Pós-Graduação em Economia (EPGE), da Fundação Getulio Vargas, aos quais ministramos os cursos de Matemática, fizeram críticas valiosas que muito contribuíram para a clareza da exposição e a correção do material.

O financiamento para a elaboração deste trabalho foi concedido pelo Programa Nacional de Pesquisa Econômica (PNPE), sendo desnecessário, portanto, dizer que nos sentimos honrados com a confiança nele depositada, esperando termos atendido às expectativas.

O Dr. Hamilton Nonato Marques e o Dr. Bernhard Beiner, do INPES, tudo fizeram para que "as coisas transcorressem normalmente" durante a execução do projeto. Esta atitude, sem dúvida, foi responsável por um maior número de acertos no trabalho.

A datilografia da primeira versão foi feita pelo pessoal da Mecanografia do INPES, a quem estendemos o nosso muito obrigado, principalmente pela paciência e boa vontade que demonstraram.

As correções finais e modificações à versão inicial do texto foram eficientemente feitas por Regina Helena Luz e Maria Helena Chung, a quem gostaríamos de estender nossos agradecimentos.

Agradecemos também ao Serviço Editorial do IPEA, principalmente a Nilson Souto Maior e Djalma Gomes, pelo dedicado trabalho de revisão final do texto para a sua impressão, e a Luiz Carlos Dias, pelo cuidadoso trabalho de confecção dos gráficos.

Por fim, Elizabeth, Marcelo, Bernardo e Carolina deram a contribuição decisiva de seu amor.

Capítulo I

CONJUNTOS E FUNÇÕES

Neste primeiro capítulo procuramos introduzir conceitos básicos de Conjuntos e Funções. Embora grande parte deste assunto deva ser do conhecimento do leitor, sua inclusão visa a dois objetivos: tornar o material do texto autocontido e apresentar uma uniformização da forma de apresentação e da notação utilizada. Além disto, procuramos dar exemplos, principalmente na parte de Funções, que serão de utilidade nas seções seguintes.

I.1 — Conjuntos

Não iremos definir precisamente um conjunto. Esta palavra será utilizada para designar uma "coleção" ou "grupo" de objetos ou de elementos, ou ainda de pontos. Alguns exemplos de conjuntos são:

a) os estudantes de Economia no Rio de Janeiro; ou

b) os livros da Biblioteca da Fundação Getulio Vargas.

Outros exemplos mais importantes para os nossos objetivos e sobre os quais voltaremos a falar mais detidamente são:

a) os números naturais: $1, 2, 3 \ldots$;

b) os números inteiros: $0, 1, -1, 2, -2 \ldots$;

c) os números racionais, isto é, os números da forma p/q, onde p e q são números inteiros e q é diferente de zero; e

d) os números reais.

Tendo em vista a importância destes conjuntos, utilizaremos a seguinte notação: N, Z, Q e R designarão os conjuntos dos números naturais, dos números inteiros, dos números racionais e dos números reais, respectivamente.

Uma relação importante na teoria dos conjuntos é a relação de pertinência. Dados um elemento qualquer x e um conjunto qualquer A, x pode ou não pertencer ao conjunto A. Se x pertence a A, indicamos: $x \in A$ (lê-se: o elemento x pertence ao conjunto A). Caso x não pertença a A, indicamos: $x \notin A$ (lê-se: o elemento x não pertence ao conjunto A).

É interessante observar que somente estas duas situações podem ocorrer, isto é, negar a proposição $x \in A$ é o mesmo que aceitar que $x \notin A$, ou, dito ainda de outra forma, $x \in A$ e $x \notin A$ é uma contradição.

Para especificarmos um conjunto, existem duas maneiras mais usuais:

a) Enumerar os seus elementos. Por exemplo:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

b) Descrevê-lo através da propriedade que caracteriza os seus elementos. Por exemplo:

$$B = \{x \in R: \ x \geqslant 0\}$$

(lê-se: B é o conjunto de todos os elementos x, pertencentes ao conjunto dos números reais, tais que x é não-negativo).[1]

Em certos casos em que o conjunto a que x pertence está suficientemente claro no contexto, costuma-se omiti-lo. Assim, poderíamos alternativamente indicar:

$$B = \{x: x \geqslant 0\}$$

Observe-se, entretanto, que quando há dúvidas quanto ao conjunto a que x pertence, este deverá ser explicitamente mencionado. No exemplo acima, se R não está claramente subentendido, temos uma

[1] A notação $x \geqslant 0$ significa que x é um número maior ou igual a zero. Voltaremos a isto na Secção I.3.

especificação incompleta, pois não se sabe se x pertence aos números inteiros ou aos números racionais ou a qualquer outro conjunto.

Passaremos agora a definir algumas operações entre conjuntos, as quais permitem construir novos conjuntos a partir de conjuntos dados e serão extensivamente utilizadas no que se segue:

Sejam A e B conjuntos quaisquer.

Definição 1 — Diz-se que *o conjunto* A *está contido no conjunto* B (ou que A é um subconjunto de B), indica-se $A \subset B$, se todo elemento que pertence a A também pertence a B.

Exemplos:

1 — Sejam: $A = \{a, e, i, o, u\}$;

$B = \{a, e, i\}$; e

$C = \{a, b, i\}$.

É fácil ver que $B \subset A$, porém C não está contido em A, pois $b \in C$, porém $b \notin A$.

2 — $Z \subset Q$, isto é, o conjunto dos números inteiros é um subconjunto do conjunto dos números racionais.

3 — Sejam: $A = \{x \in R: x < -2 \text{ ou } x > 2\}$; e

$B = \{x \in R: x < -5\}$.

Então, $B \subset A$, pois se $x \in B$, então $x < -5$ e, portanto, $x < -2$, isto é, $x \in A$.

4 — Sejam: A o conjunto do exemplo 3; e

$B = \{x \in R; -3 < x < 0\}$.

É claro que B não está contido em A, pois, por exemplo, o número $-1 \in B$, porém $-1 \notin A$.

Definição 2 — Diz-se que *o conjunto* A *é igual ao conjunto* B, indica-se $A = B$, quando A e B possuem os mesmos elementos.

Exemplo:

5 — $A = \{x \in R: x^2 > 4\}$; e

$B = \{x \in R: x < -2$ ou $x > 2\}$.

É fácil ver que $A = B$, pois $x^2 > 4$ se, e somente se, $x < -2$ ou $x > 2$.

Definição 3 — O conjunto que não possui nenhum elemento é chamado *conjunto vazio* (indica-se: ϕ).

Convenciona-se que ϕ, o conjunto vazio, é um subconjunto de qualquer conjunto, o que se justifica da seguinte forma: suponha-se que exista um conjunto P que não contém ϕ. Ora, mas então existiria um elemento em ϕ que não pertence a P. Como ϕ não possui elementos, não podemos contradizer a convenção, isto é, não podemos exibir o elemento de ϕ que não pertence a P.

Nosso próximo passo é estabelecer algumas relações entre as definições acima. Entretanto, seria interessante antes fazermos uma pequena digressão para tornar precisas as noções de *condição suficiente, condição necessária* e *condição necessária e suficiente.* Para tanto, considere-se um conjunto qualquer E e duas propriedades P_1 e P_2 que se referem a elementos de E. Estas duas propriedades definem dois subconjuntos de E:

$$E_1 = \{x \in E: x \text{ satisfaz } P_1\}$$

$$E_2 = \{x \in E: x \text{ satisfaz } P_2\}$$

Portanto, dizer que P_1 é uma *condição suficiente* para P_2 é o mesmo que dizer que $E_1 \subset E_2$, isto é, todo elemento x que satisfaz a propriedade P_1 (e, portanto, pertence a E_1) também satisfaz a propriedade P_2 (logo, pertence a E_2). A notação utilizada para indicar que P_1 é suficiente para P_2 é: $P_1 \Longrightarrow P_2$ (lê-se: P_1 é suficiente para P_2 ou P_1 implica P_2).

Vejamos agora o que vem a ser uma *condição necessária.* Diz-se que P_1 é necessária para P_2 quando $E_2 \subset E_1$, isto é, todo elemento x que satisfaz P_2 também satisfaz P_1. Ora, mas isto é o mesmo que dizer que P_2 é suficiente para P_1.

Finalmente, P_1 é necessária e suficiente para P_2 quando $E_1 = E_2$, isto é, os elementos que satisfazem a propriedade P_1 (ou P_2) são os únicos que satisfazem a propriedade P_2 (ou P_1). Indica-se: $P_1 \Longleftrightarrow P_2$.

De maneira um pouco menos precisa, porém mais intuitiva, dizemos que: a) P_1 é suficiente para P_2 quando a presença de P_1 garante a ocorrência de P_2 (note-se, entretanto, que P_2 pode ocorrer sem que P_1 ocorra, o que equivale a dizer que $E_1 \subset E_2$, porém não necessariamente $E_1 = E_2$); e b) P_1 é necessária para P_2 quando a ocorrência de P_2 somente se dá se P_1 ocorre (entretanto, a presença de P_1 não garante a ocorrência de P_2, o que, outra vez, equivale a dizer que $E_2 \subset E_1$, porém não necessariamente $E_1 = E_2$).

Vejamos um exemplo simples que ajudará o leitor a fixar melhor estes conceitos. Sejam:

$E = R$;

P_1 = ser um número par; e

P_2 = ser um número inteiro.

As propriedades P_1 e P_2 definem, respectivamente, os conjuntos:

$$E_1 = \{x \in R\colon x \text{ é par}\}$$

$$E_2 = \{x \in R\colon x \in Z\}$$

Claramente, $E_1 \subset E_2$ e, portanto, P_1 é suficiente para P_2, ou, dito de outra forma, P_2 é necessária para P_1.

Se agora consideramos P_3 = ser um número ímpar e o conjunto $E_3 = \{x \in R\colon x \text{ é ímpar}\}$, fica claro que P_3 é suficiente para P_2. Entretanto, P_3 não é necessária nem suficiente para P_1.

Retomemos agora a linha principal. Para tal, relacionaremos as Definições 1 e 2 através de:

Teorema 1 — Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Então:

a) $A \subset A$;

b) $A \subset B$ e $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$; e

c) $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$.

Prova:

O item "a" decorre diretamente das Definições 1 e 2. Para provar "b", note-se inicialmente que, se $A = \phi$, então trivialmente $A \subset C$. Se $A \neq \phi$,[2] e se $x \in A$, então $x \in B$ $(A \subset B)$ e, portanto, $x \in C$ $(B \subset C)$. Como x é um elemento arbitrário de A, segue-se que todo elemento de A pertence a C, isto é, $A \subset C$. Devemos provar "c" em duas partes. Primeiro, mostraremos que $A = B \Rightarrow A \subset B$ e $B \subset A$. Ora, mas isto é uma decorrência imediata da definição de igualdade de dois conjuntos. Mostremos agora $A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow A = B$. Como $A \subset B$, todo elemento de A pertence a B; como $B \subset A$, todo elemento de B pertence a A. Logo, A e B possuem os mesmos elementos, isto é, $A = B$.

C. Q. D.

Definição 4 — A *reunião* (ou união) dos conjuntos A e B, indica-se $A \cup B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B.

Simbolicamente, a definição acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Observa-se que o vocábulo *ou* não exclui a possibilidade de que o elemento pertença a ambos os conjuntos. E é neste sentido que o utilizaremos ao longo do texto.

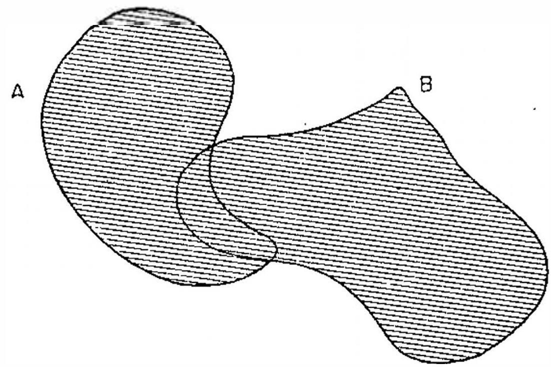
Exemplos:

6 — Se $R_+ = \{x \in R: x \geqslant 0\}$ e $R_- = \{x \in R: x \leqslant 0\}$, segue-se que $R_+ \cup R_- = R$.

7 — Se $A = \{x \in R: x^2 - 5x + 4 = 0\}$ e $B = \{x \in R: x^2 - 5x + 6 = 0\}$, então $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.

[2] $A \neq \phi$ significa que A não é o conjunto vazio. Em geral, $A \neq B$ significa que A e B são conjuntos diferentes.

O diagrama a seguir ilustra o conceito de reunião de dois conjuntos.



O conjunto $A \cup B$ é o conjunto representado pela área hachurada.

Definição 5 — A *interseção* dos conjuntos A e B, indica-se $A \cap B$, é o conjunto dos elementos comuns a A e B.

Simbolicamente, a definição acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$A \cap B = \{x\colon\ x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\}$$

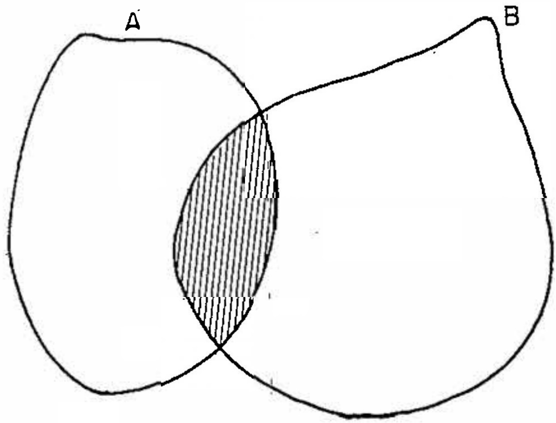
Se $A \cap B = \phi$, dizemos que A e B são *conjuntos disjuntos*. A propósito, os conjuntos disjuntos parecem-nos um bom exemplo da importância de termos definido um conjunto vazio. Caso não dispuséssemos deste conjunto, seria incorreto definir a interseção de dois conjuntos como sendo um conjunto, pois no caso em questão a definição ficaria sem sentido.

Exemplos:

8 — $R_+ \cap R_- = \{0\}$;

9 — Se $A = \{x \in R\colon 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ e $B = \{x \in R\colon 1/2 \leqslant x \leqslant 3\}$, então $A \cap B = \{x \in R\colon 1/2 \leqslant x \leqslant 1\}$.

O diagrama a seguir ilustra o conceito de interseção de dois conjuntos.



O conjunto $A \cap B$ está representado pela área hachurada.

Vejamos agora algumas das propriedades dos conjuntos a partir das Definições 4 e 5.

Teorema 2 – Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Então:

a) $A \cap A = A$;

b) $A \cup A = A$;

c) $A \cap B = B \cap A$;

d) $A \cup B = B \cup A$;

e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

f) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

g) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; e

h) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Prova: [3]

Os resultados "a"-"d" decorrem diretamente das definições.

a) Provemos agora "e". Mostraremos que $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$ e que $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$. A partir disto, conclui-se que vale a igualdade estabelecida em "e" (ver Teorema 1).

Observe-se inicialmente que, se $(A \cap B) \cap C = \phi$, então $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$, pois ϕ é um subconjunto de qualquer conjunto. Se, no entanto, $(A \cap B) \cap C \neq \phi$, seja $x \in (A \cap B) \cap C$. Segue-se que $x \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow x \in A \cap B$ e $x \in C \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$ e $x \in C \Rightarrow x \in A$ e $x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cap C)$.

Como x é um elemento arbitrário do conjunto, as implicações acima são válidas para todos os elementos deste conjunto. Portanto, podemos concluir que $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$.

Por outro lado, se $A \cap (B \cap C) = \phi$, então $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$, pois ϕ é um subconjunto de qualquer conjunto. Se, no entanto, $A \cap (B \cap C) \neq \phi$, seja $x \in A \cap (B \cap C)$. Segue-se que $x \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ e $x \in B \cap C \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$ e $x \in C \Rightarrow x \in A \cap B$ e $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$.

Como x é arbitrário, as implicações acima são válidas para todos os elementos do conjunto. Portanto, $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$

Temos, finalmente, que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

b) Provemos agora "f". Deixando a cargo do leitor os casos em que $(A \cup B) \cup C = \phi$ ou $A \cup (B \cup C) = \phi$, tem-se que

$x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ ou $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$.

[3] Na prova deste resultado procuraremos explicitar o mais possível as diversas passagens do raciocínio. A vantagem deste procedimento é poder mostrar — no contexto de uma demonstração bastante simples — aspectos da argumentação que, de modo geral, se desenvolve para provar um teorema. A sua desvantagem é que as demonstrações se tornam excessivamente longas, muitas vezes dificultando o acompanhamento da linha principal do argumento. Em face disto, aos poucos iremos tornando as demonstrações mais diretas, deixando a cargo do leitor os aspectos mais simples ou menos essenciais.

Donde conclui-se que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Convém observar que esta demonstração é feita segundo a mesma estratégia adotada no caso anterior. Apenas, no presente caso, as duas etapas anteriores foram feitas de uma só vez, tirando proveito da notação $\Longleftrightarrow$. Sugere-se ao leitor refazer a demonstração em duas etapas separadamente para se certificar do resultado.

c) Provemos agora "g". Deixamos a cargo do leitor considerar os casos em que $A \cap (B \cup C) = \phi$ e $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \phi$.

$x \in A \cap (B \cup C) \Longrightarrow x \in A$ e $x \in B \cup C$. Se $x \in B$, então $x \in A \cap B$; se $x \in C$, então $x \in A \cap C$. Em qualquer dos dois casos, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Logo, $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Por outro lado, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Longrightarrow x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C \Longrightarrow x \in A$ e $x \in B$ ou $x \in A$ e $x \in C \Longrightarrow x \in A$ e $x \in B$ ou $x \in C \Longrightarrow x \in A \cap (B \cup C)$. Logo, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

Daí concluímos que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

d) Finalmente, provemos "h". Mais uma vez, deixamos a cargo do leitor considerar os casos em que $A \cup (B \cap C) = \phi$ ou $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \phi$.

$x \in A \cup (B \cap C) \Longrightarrow x \in A$ ou $x \in B \cap C$. Se $x \in A$, claramente $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Se $x \in B \cap C$, $x \in B$ e $x \in C$ e, portanto, $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Em ambos os casos, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Logo, $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Longrightarrow x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Se $x \in A$, então $x \in A \cup (B \cap C)$. Se $x \notin A$, então $x \in B$ e $x \in C$ e, portanto, $x \in A \cup (B \cap C)$. Logo, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

Daí concluímos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

C. Q. D.

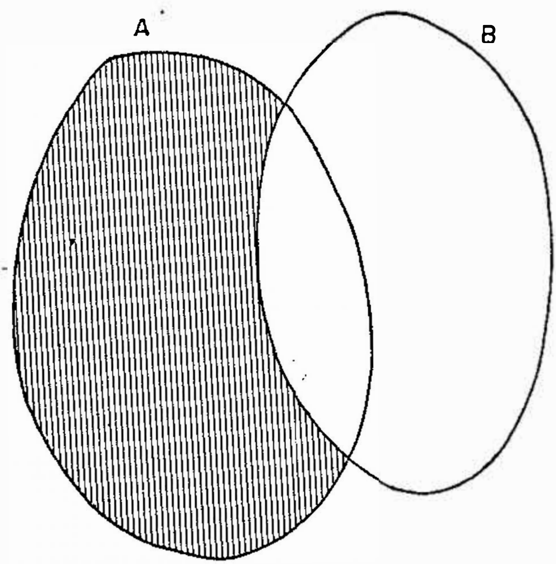
Definição 6 — A diferença entre os conjuntos A e B, indica-se $A - B$ ou A/B, é o conjunto dos elementos pertencentes ao conjunto A e que não pertencem ao conjunto B.

Simbolicamente, podemos reescrever esta definição da seguinte forma: $A - B = \{x \colon x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Exemplo:

10 — Se $A = \{x \in R\colon 0 \leqslant x \leqslant 5\}$ e $B = \{x \in R\colon 3 \leqslant x \leqslant 8\}$, então $A - B = \{x \in R\colon 0 \leqslant x < 3\}$. Note-se também que $B - A = \{x \in R\colon 5 < x \leqslant 8\} \neq A - B$.

O diagrama a seguir ilustra o conceito de diferença de dois conjuntos.



O conjunto $A - B$ está representado pela área hachurada.

Observe-se que, na Definição 6, A e B são conjuntos arbitrários. Quando $B \subset A$, a diferença $A - B$ é chamada o complementar de B em relação a A. Nesse caso, utilizamos a notação $\complement_A B$. Além disto, se A está suficientemente claro no contexto, referimo-nos simplesmente ao complementar de B e indicamos $\complement B$ ou $\overline{B}$, ou ainda B^c.

Exemplos:

11 — Se $A = \{x \in R: x \geqslant 5\}$ e $B = \{x \in R: x \geqslant 9\}$, então $\complement_A B = \{x \in R: 5 \leqslant x < 9\}$.

12 — O complementar de R_+ em relação a R, isto é, $\complement_R R_+ = \{x \in R: x < 0\}$. Se o conjunto R está subentendido, indicamos simplesmente $\complement R_+$.

Teorema 3 — Dado um conjunto E e dois conjuntos A e B contidos em E, temos que: [4]

a) $A = \phi \iff \complement A = E$;

b) $\complement\left(\complement A\right) = A$;

c) $A \subset B \iff \complement B \subset \complement A$;

d) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$; e

e) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

Prova:

a) Se $A = \phi$ e se $x \in E$, então $x \notin A$. Logo, $\complement A = E$. Por outro lado, se $\complement A = E$, todo $x \in E$ pertence a $\complement A$, logo $x \notin A$. Donde $A = \phi$.

b) Se $A = \phi$ ou $A = E$, o resultado segue-se imediatamente de "a". Se $A \neq \phi$ e $\complement A \neq \phi$, então $x \in \complement\left(\complement A\right) \iff x \notin \complement A \iff$ $\iff x \in A$. Logo, $\complement\left(\complement A\right) = A$.

[4] As propriedades "d" e "e", a seguir, são chamadas *Leis de De Morgan*.

c) Mostremos inicialmente que $A \subset B \Longrightarrow \complement B \subset \complement A$.

Se $\complement B = \phi$, o resultado segue-se imediatamente. Se $\complement B \neq \phi$, então $x \in \complement B \Longrightarrow x \notin B \Longrightarrow x \notin A \Longrightarrow x \in \complement A$, o que prova o resultado.

Mostremos agora a outra implicação: $\complement B \subset \complement A \Longrightarrow A \subset B$.

Utilizando o que provamos acima, temos que $\complement B \subset \complement A \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \complement\left(\complement A\right) \subset \complement\left(\complement B\right) \Longrightarrow A \subset B$ (a última implicação segue-se de "b").

d) Note-se que:

$A \subset A \cup B \Longrightarrow \complement(A \cup B) \subset \complement A$ (utilizando "c")

$B \subset A \cup B \Longrightarrow \complement(A \cup B) \subset \complement B$ (utilizando "c")

Daí segue-se que $\complement(A \cup B) \subset \complement A \cap \complement B$.

Por outro lado, seja $X = \complement A \cap \complement B$. Então:

$X \subset \complement A \Longrightarrow A \subset \complement X$ (utilizando "b" e "c")

$X \subset \complement B \Longrightarrow B \subset \complement X$ (utilizando "b" e "c")

Logo, $A \cup B \subset \complement X \Longrightarrow X \subset \complement(A \cup B)$ (utilizando "b" e "c").

Daí, tendo em vista que $X = \complement A \cap \complement B$, concluímos que $\complement A \cap \complement B \subset \complement(A \cup B)$.

e) Sejam $A' = \complement A$ e $B' = \complement B$.

De "d" temos que $\complement (A' \cup B') = \complement A' \cap \complement B' = A \cap B$ (a última igualdade obtém-se considerando a definição de A' e B' e "b")..

Portanto:

$$\complement (A' \cup B') = A \cap B \Longrightarrow A' \cup B' = \complement (A \cap B) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \complement A \cup \complement B = \complement (A \cap B)$$

C. Q. D.

Para introduzirmos a definição de produto cartesiano de dois conjuntos, necessitamos da noção de par ordenado. Dados dois objetos quaisquer a e b, o par ordenado formado por eles obtém-se escolhendo um destes (no caso, a) para primeiro elemento (ou primeira coordenada) e o outro (no caso, b) para segundo elemento (ou segunda coordenada). Indica-se o par ordenado da seguinte maneira: (a, b).

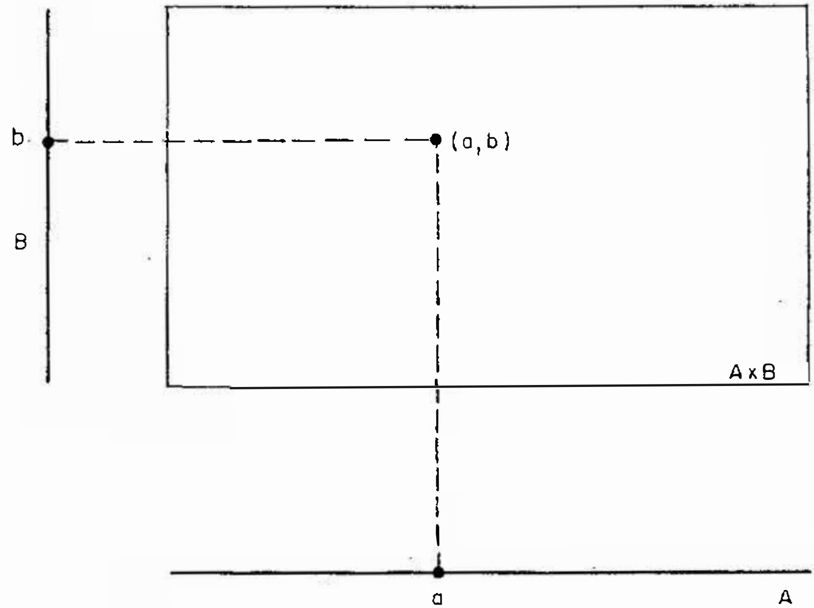
Em vista da forma como constituímos os pares ordenados, fica claro que os pares (a, b) e (b, a) são diferentes. Na verdade, dois pares ordenados (a, b) e (a', b') são iguais se, e somente se, $a = a'$ e $b = b'$.

Definição 7 — Dados dois conjuntos não-vazios A e B, o *produto cartesiano* de A por B, indica-se $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados tais que o primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo elemento pertence ao conjunto B.

Simbolicamente, podemos reescrever esta definição da seguinte forma: $A \times B = \{ (a, b) : a \in A \text{ e } b \in B \}$.

Quando $A = B$, o produto cartesiano $A \times A$ é indicado por A^2.

O diagrama a seguir ilustra a noção de produto cartesiano.



Exemplos:

13 — Se $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então $A \times B = \{ (a_1, 1) ; (a_1, 2) ; (a_1, 3) ; (a_2, 1) ; (a_2, 2) ; (a_2, 3) ; (a_3, 1) ; (a_3, 2) ; (a_3, 3) \}$.

Pode ser facilmente constatado, com base neste exemplo, que em geral $A \times B \neq B \times A$.

14 — Seja $J = \{x \in Z: 0 \leqslant x \leqslant 2\}$. Então, $J \times J = J^2 = \{ (0, 0) ; (0, 1) ; (0, 2) ; (1, 0) ; (1, 1) ; (1, 2) ; (2, 0) ; (2, 1) ; (2, 2) \}$.

15 — Seja $I = \{x \in R: 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. Então, o produto cartesiano $I \times I = I^2 = \{ (x, y) : x \in I \text{ e } y \in I\} = \{ (x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ e } 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

16 — Sejam $A = \{a = (a_1, a_2): a_1 \in R \text{ e } a_2 \in R\}$ e $B = \{b = (b_1, b_2, b_3) : b_1 \in R, b_2 \in R \text{ e } b_3 \in R\}$. Então, o produto cartesiano $A \times B = \{ (a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Observe-se que um elemento genérico de $A \times B$ é da forma:

$$((a_1, a_2), (b_1, b_2, b_3))$$

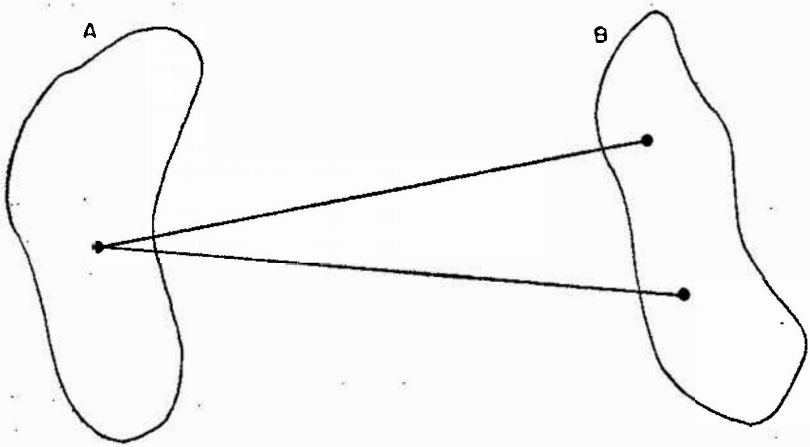
I.2 — Funções

I.2.1 — O Conceito de Função

Procuramos nesta seção fazer uma primeira aproximação ao estudo das funções. Na verdade, grande parte dos próximos capítulos é dedicada a este estudo. No momento, entretanto, estamos mais interessados em definir função e apresentar formas alternativas de construção de funções a partir de outras funções.

Intuitivamente, uma função é uma relação que associa elementos de dois conjuntos dados. Entretanto, para se qualificar como função, a relação deve satisfazer certos requisitos. Um deles é que a associação não seja ambígua, isto é, se x pertence a um conjunto A que está associado a um conjunto B, a relação deve indicar inequivocamente um único elemento de B correspondente a x. Dessa maneira, por exemplo, dados os conjuntos dos Pais e dos Filhos, não podemos associar a cada casal seu filho. A correspondência é ambígua, pois ao casal Joaquim-Haydée estarão associados simultaneamente os seus filhos Alexandre, Patrícia e Teresa. Observemos, entretanto, que a relação que associa cada filho aos seus pais satisfaz este requisito de ausência de ambigüidade. Alexandre está inequivocamente associado ao casal Joaquim-Haydée, assim como também estão Teresa e Patrícia. Veja-se o diagrama a seguir, para uma ilustração de uma relação que não satisfaz a este requisito de ausência de ambigüidade.

Este exemplo introdutório serve para ilustrar algumas características de uma função. Primeiramente, sendo uma relação entre conjuntos arbitrários, a função não relaciona necessariamente números com números. Os elementos dos conjuntos envolvidos podem ser de qualquer natureza. Em segundo lugar, não é necessário que o relacionamento se faça através de uma fórmula rígida de tipo *sen x*,



log x, e^x, etc., pois qualquer relação — com as propriedades especificadas a seguir — define uma função. Em terceiro e último lugar, convém salientar que, mesmo quando estamos tratando de relações entre conjuntos de números, a função pode ser definida por mais de uma fórmula, como mostra o exemplo a seguir.

Seja $x \in R$ e seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 1 \\ 1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

Como poderá ser verificado em seguida, f satisfaz todos os requisitos da definição de uma função.

Definição 8 [5] — Sejam A e B dois conjuntos não-vazios. Uma função definida em A com valores em B é uma relação entre os elementos de A e B que satisfaz:

a) todo $x \in A$ está associado a algum elemento de B; e

b) dado $x \in A$, existe um único elemento de B associado a ele.

[5] O leitor observará que na definição acima o conceito de relação não está especificado de forma precisa. Por ora, esta noção um pouco imprecisa é suficiente para nossos objetivos. No Apêndice a este capítulo definimos exatamente uma relação, e a partir daí redefiniremos função.

Utilizaremos a seguinte notação para representar uma função definida em A com valores em B: $f\colon A \to B$.

Nos parágrafos seguintes faremos algumas observações com respeito à Definição 2 e, simultaneamente, introduziremos alguns termos associados aos seus elementos.

a) Note-se que uma função f associa um elemento $x \in A$ a um elemento — geralmente indicado por $f(x)$ e chamado imagem de x — pertencente ao conjunto B. Não devemos, dessa maneira, confundir a função f com $f(x)$, que é a imagem de x ou o valor de f no ponto x.

b) Três elementos caracterizam uma função: o conjunto A, o conjunto B e a relação que associa os elementos destes conjuntos. Portanto, dadas as funções f e g:

$$f\colon A \to B \quad \text{e} \quad g\colon C \to D$$

dizemos que $f = g$ se, e somente se, $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

c) Dada a função $f\colon A \to B$, temos que:

— o conjunto A é chamado o "domínio de f"; e

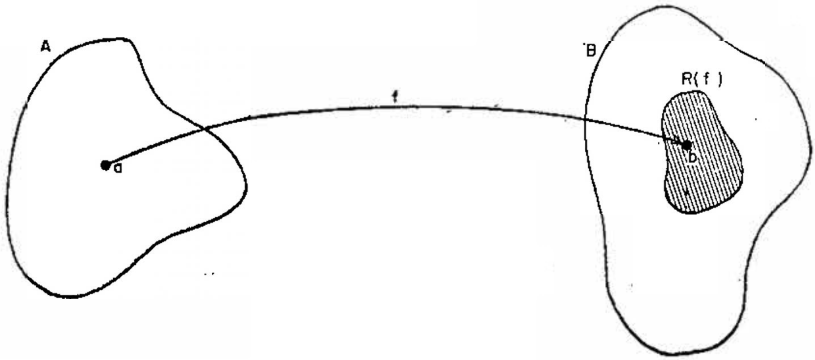
— o conjunto B é chamado o "contradomínio de f".

Além disto, como em geral não se requer que todo elemento de B seja imagem de algum elemento de A, podemos definir o "conjunto de valores de f", $R(f)$, como se segue:

$$R(f) = \{b \in B\colon \exists\, a \in A \ \text{ e } \ b = f(a)\}$$

Na especificação acima utilizamos a notação $\exists$, que significa "existe". Mais explicitamente, $R(f)$ é o conjunto de todos os elementos que pertencem a B e que são imagem de algum elemento de A.

Os vários termos introduzidos acima podem ser melhor visualizados com o auxílio do diagrama a seguir, onde temos que: A é o domínio da função f; B é o contradomínio de f; $R(f) \subset B$ é o conjunto de valores; e b é o valor de f no ponto a, isto é, $b = f(a)$.



Apresentaremos agora alguns exemplos de funções, cuja principal finalidade é familiarizar o leitor com a definição. Entretanto, aproveitando a oportunidade, introduziremos algumas funções que, pela forma como são definidas ou pela sua utilização futura, se tornarão importantes para o desenvolvimento do assunto.

Exemplos:

17 — Dados $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, podemos definir f: $A \rightarrow B$ da seguinte maneira:

$f(a) = 1$;
$f(b) = 1$;
$f(c) = 4$; e
$f(d) = 3$.

Observe-se que f satisfaz os requisitos da Definição 2 e que $R(f) = \{1, 4, 3\}$.

18 — Dado um conjunto A não-vazio, a função "Identidade em A", I_A, é:

$$I_A: A \rightarrow A$$

definida por:

$$I_A(x) = x$$

Note-se que $R(I_A) = A$.

19 — A função "Valor Absoluto" é definida da seguinte maneira:

$$h: R \rightarrow R$$

sendo:

$$h(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

20 — A função "Maior Inteiro" é definida por:

$$f: R \rightarrow R$$

tal que, para todo $x \in R$, $f(x)|$ é o maior inteiro menor ou igual a x. Freqüentemente, os valores desta função são indicados por:

$$f(x) = [x]$$

21 — A função de "Dirichlet" é:

$$D: R \rightarrow R$$

sendo:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in Q \\ 0, \text{ se } x \in \complement\, Q \end{cases}$$

22 — Vejamos uma função cujo domínio é o produto cartesiano de dois conjuntos. Sejam:

$$A = \{1, 2\} \quad \text{e} \quad B = \{3, 4\}$$

e seja:

$$f: A \times B \rightarrow R$$

definida por:

$f(1, 3) = 1;$
$f(1, 4) = 7;$
$f(2, 3) = 5;$ e
$f(2, 4) = 0.$

Observe-se que f é realmente uma função, pois todo elemento do conjunto $A \times B$ está associado a algum elemento de R e, além disto, a associação não é ambígua no sentido que discutimos anteriormente.

23 — A função "Norma Euclideana" é definida da seguinte maneira:

$$f: R \times R \to R$$

sendo:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Na seção seguinte discutiremos os números reais e, nesta ocasião, mencionaremos o fato de que, dado um número real, existe um único número real positivo b tal que $a = b^2$. Este fato garante que a função "Norma Euclideana" é bem definida, devendo desempenhar um papel muito importante em todos os demais assuntos que abordaremos. O leitor que já fez um curso de Geometria Analítica notará que f associa ao elemento (x, y) a sua distância à origem.

24 — Consideremos agora uma função que é definida no conjunto dos números reais e cujo contradomínio é o produto cartesiano $R \times R$:

$$f: R \to R \times R$$

definida por:

$$f(t) = (2t, t)$$

Claramente, f satisfaz os requisitos da Definição 2, como o leitor poderá verificar.

25 — Um outro exemplo da mesma natureza é dado pela função:

$$g: R \times R \to R \times R$$

definida por:

$$g(x, y) = (x^2 + y^2; x^2 - y^2)$$

Observe-se que podemos ainda interpretar a função g em termos de funções componentes, como se segue. Sejam:

$$g_1 \colon R \times R \to R$$

dada por:

$$g_1(x, y) = x^2 + y^2$$

e:

$$g_2 \colon R \times R \to R$$

dada por:

$$g_2(x, y) = x^2 - y^2$$

Assim, podemos reescrever:

$$g \colon R \times R \to R \times R$$

$$g(x, y) = (g_1(x, y);\ g_2(x, y))$$

26 — Considere-se agora — para finalizar esta seqüência de exemplos — a função:

$$h \colon R \times R \to R$$

tal que:

$$h(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\[2ex] 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

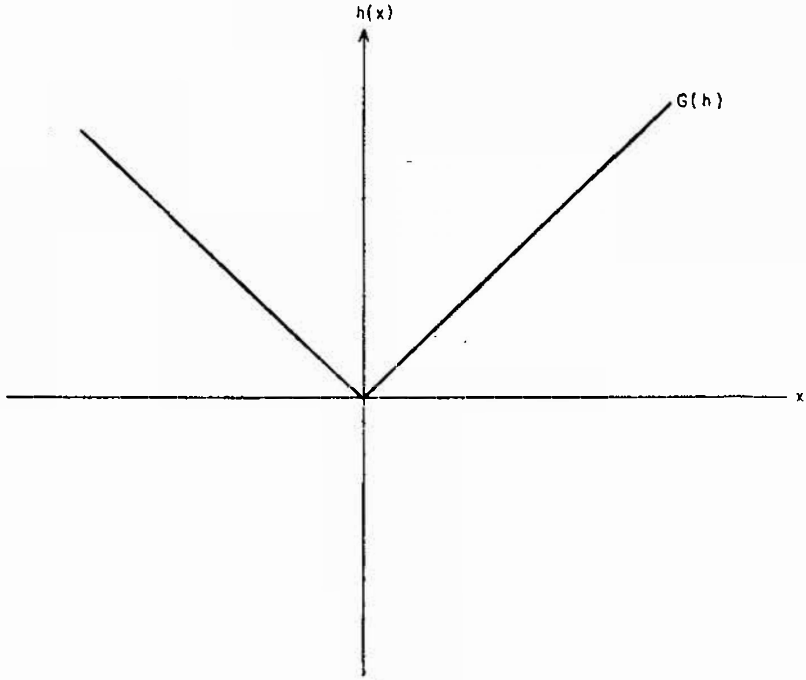
Uma noção útil é a de gráfico de uma função. Dada $f \colon A \to B$, o gráfico de f é o conjunto:

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B \colon y = f(x)\}.$$

Observe-se que, em vista da Definição 2, se $(x, y) \in G(f)$ e $(x, y') \in G(f)$, então $y = y'$. As Figuras 1 e 2 a seguir apresentam os gráficos das funções dos exemplos 19 e 20, respectivamente.

O leitor poderá verificar que duas funções são iguais se, e somente se, têm o mesmo gráfico. Dessa forma, poderíamos ter definido função a partir de seu gráfico. Esta maneira permite um tratamento um

Figura I
GRÁFICO DA FUNÇÃO "VALOR ABSOLUTO"



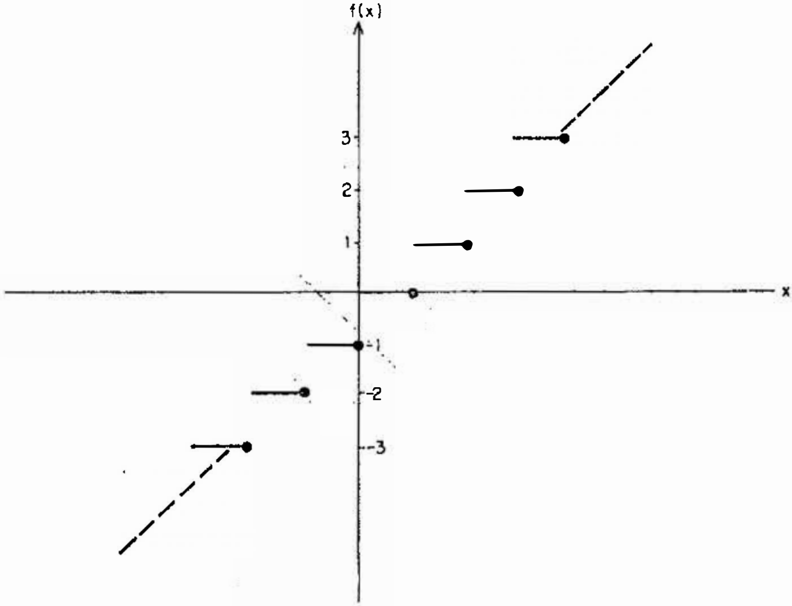
pouco mais preciso dos conceitos que vimos discutindo. Isto é o que faremos no Apêndice, ao qual recomendamos que o leitor se dirija depois de assimilar o material do texto.

Passaremos agora a introduzir mais algumas definições relacionadas com características do domínio e contradomínio de uma função. Seja $f\colon A \to B$:

a) diz-se que f é *biunívoca* (ou injetiva) se, dados $x \in A$ e $y \in A$ tais que $f(x) = f(y)$, tivermos $x = y$, isto é, se $x \in A$ e $y \in A$ e $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$;

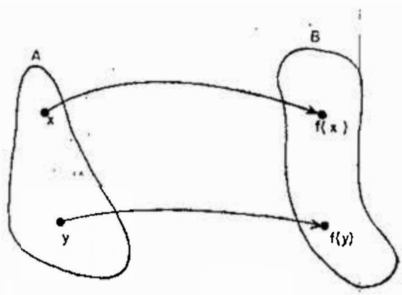
b) diz-se que f é *sobrejetiva* (ou sobre B) quando, para todo elemento $y \in B$, existe um elemento $x \in A$ tal que $y = f(x)$, isto é, f é sobrejetiva se $R(f) = B$; e

Figura 2
GRÁFICO DA FUNÇÃO "MAIOR INTEIRO"

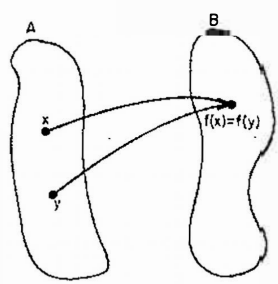


c) diz-se que f é uma correspondência biunívoca (ou uma bijeção, ou que f é bijetiva) se ela é biunívoca e sobre B.

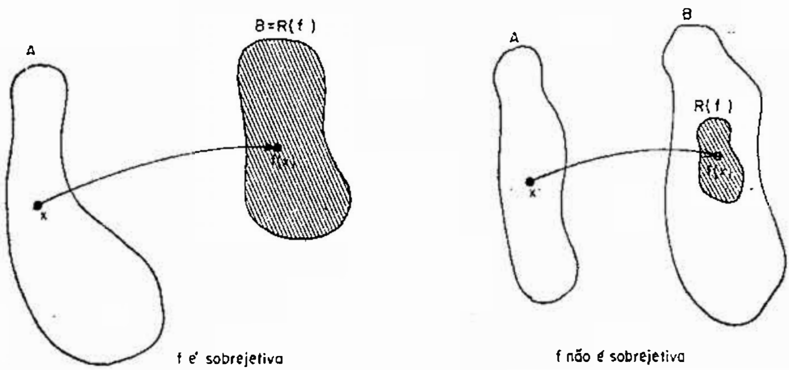
Os diagramas a seguir ilustram os conceitos acima.



f é biunívoca



f não é biunívoca



Exemplo:

27 — Examinemos as funções dos exemplos 17-26. A função f do exemplo 17 não é biunívoca, pois $f(a) = f(b) = 1$ e $a \neq b$, e também não é sobre B, pois $R(f) \neq B$.

A função "Identidade em A" é biunívoca e sobre A.

A função "Valor Absoluto" não é biunívoca, pois, por exemplo, $h(1) = h(-1)$, e, além disto, não é sobrejetiva, uma vez que não assume valores negativos.

A função "Maior Inteiro" não é biunívoca nem sobrejetiva.

A função de "Dirichlet" também não é biunívoca nem sobrejetiva.

A função do exemplo 22 é biunívoca, pois associa a pares ordenados distintos valores distintos. Entretanto, ela não é sobrejetiva.

A função "Norma Euclideana" não é biunívoca nem sobrejetiva.

A função do exemplo 24 é biunívoca, pois, se $x \in R$ e $y \in R$ e $x \neq y$, $(2x, x) \neq (2y, y)$. Entretanto, ela não é sobrejetiva, pois, por exemplo, $(1, 7)$ não pertence ao seu conjunto de valores.

A função do exemplo 25 não é biunívoca nem sobrejetiva.

A função do exemplo 26 não é biunívoca, pois, por exemplo, $h(0, 0) = h(0, 7) = 0$. Para mostrar que também não é sobrejetiva basta observar que ela não assume o valor 1. Suponha-se, para demonstrar este fato, que existe um par $(x, y) \in R \times R$ tal que:

$$\frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = 1$$

Portanto, a equação do segundo grau em x:

$$x^2 - xy + y^2 = 0$$

deve possuir uma solução real para algum valor não-nulo de y. Isto, como se pode comprovar facilmente, não ocorre.

Antes de encerrarmos esta seção, façamos uma digressão procurando ilustrar um tipo de limitação do conceito de função com respeito a certos problemas econômicos. Suponha-se um consumidor que procura maximizar utilidade, dados os preços dos (dois) produtos e sua renda. Deste problema podemos obter as curvas de demanda dos dois bens. A representação gráfica, bem conhecida, da solução deste problema é a mostrada na Figura 3 a seguir, onde:

y: renda do consumidor;

P_j: preço do bem j; $j = 1, 2$; e

X_1 e X_2: quantidades consumidas dos bens 1 e 2, respectivamente.

Dados os preços P_1 e P_2, a escolha das quantidades consumidas é, neste caso, determinada sem ambigüidade, isto é, a relação entre preço e quantidades consumidas, desde que especifiquemos adequadamente seu domínio e seu contradomínio, satisfaz a definição de uma função.

Entretanto, o caso mostrado na Figura 4, em que a curva de indiferença apresenta um trecho linear, indica uma peculiaridade. Aos preços representados na figura, as quantidades consumidas dos bens 1 e 2 ficam indeterminadas, podendo assumir qualquer valor no segmento AB. Neste caso, a relação de demanda não preenche os requisitos para se qualificar como uma função, cujo domínio seja o conjunto dos preços.

Figura 3

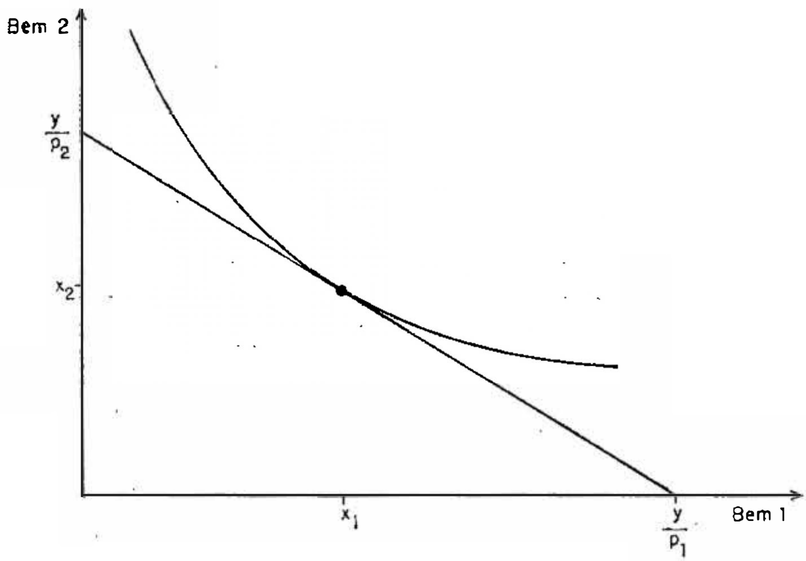
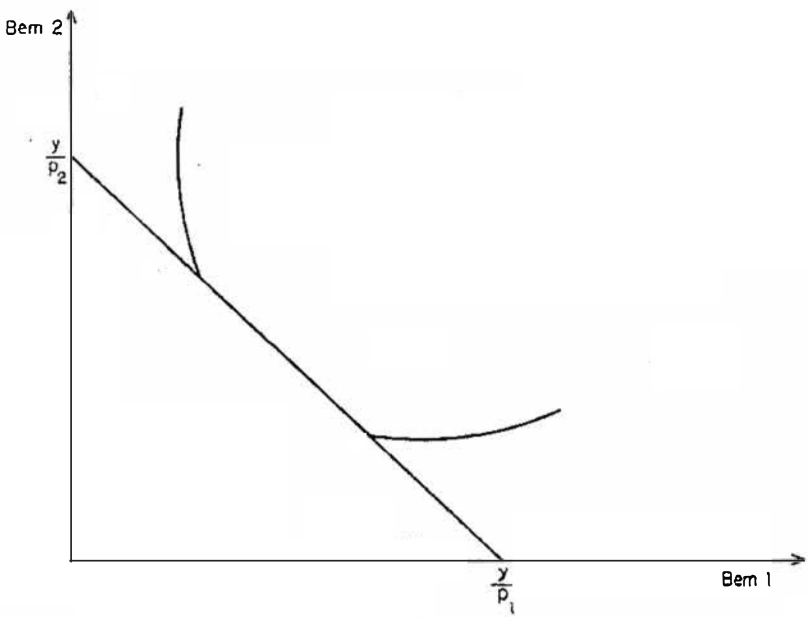


Figura 4



Em vista desta dificuldade, algumas vezes os economistas trabalham com o conceito de *correspondência,* que é uma função que associa os pontos de seu domínio a conjuntos. O tratamento analítico das *correspondências* requer um pouco mais de Análise Matemática do que possuímos neste estágio.

I.2.2 — Composição de Funções e Função Inversa

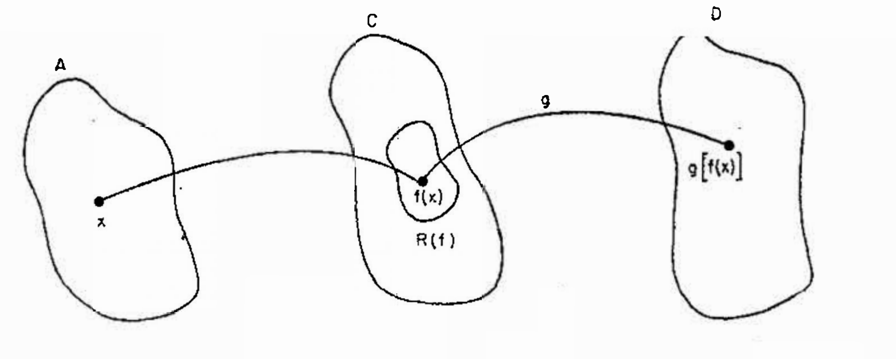
Definição 9 — Dadas as funções f: $A \to B$ e g: $C \to D$, onde $R(f) \cap C \neq \phi$, a *função composta* $g_0 f$ é definida pelos elementos:

a) domínio de $g_0 f$: $D(g_0 f) = \{x \in A: f(x) \in C\}$;

b) contradomínio de $g_0 f$: D; e

c) $g_0 f(x) = g[f(x)]$, para todo $x \in D(g_0 f)$.

De maneira mais intuitiva, a função composta relaciona elementos do conjunto A aos elementos do conjunto D, e para tal ela toma um elemento x no conjunto A e a ele aplica a função f, em seguida aplicando a função g ao elemento $f(x)$. Essa operação está ilustrada no diagrama a seguir, onde se supõe que $R(f) \subset C$. Este é um caso particular importante da Definição 9, em que $D(g_0 f) = A$.



Note o leitor que, em geral, $R(g_0 f) \subset R(g)$, porém $R(g_0 f) \neq$ $\neq R(g)$. A igualdade ocorre se $R(f) \supset C$. Além disto, podemos dizer que $D(g_0 f) = A$ e $R(g_0 f) = R(g)$ se $R(f) = C$. Estas duas afirmativas são bastante claras quando examinamos diagramas como o anterior. Entretanto, é um bom exercício demonstrá-las. É também um bom exercício que o leitor procure convencer-se de que a Definição 9 realmente dá origem a uma função, e não a uma relação qualquer.

Exemplos:

28 — Sejam as funções:

$$f\colon R \to R$$

definida por:

$$f(x) = 2x$$

e:

$$g\colon R_+ \to R_+$$

definida por:

$$g(x) = x^2 + 5$$

A função $g_0 f$ caracteriza-se pelos seguintes elementos:

$$D(g_0 f) = \{x \in R\colon f(x) \in R_+\} = R_+$$

Contradomínio: R_+: [6]

$$g_0 f(x) = g[f(x)] = [(f(x))^2 + 5] = 4x^2 + 5, \ \forall\ x \in R_+$$

Note-se que $R(g_0 f) = \{y \in R\colon y \geqslant 5\} = R(g)$.

29 — Sejam as funções:

$$f\colon R_+ - \{0\} \to R$$

[6] O símbolo $\forall$ significa "para todo". Dessa maneira, $\forall\ x \in R_+$ deve ser lido da seguinte maneira: para todo x pertencente a R_+.

definida por: [7]

$$f(x) = \log x \quad (\log = \text{logaritmo neperiano})$$

e:

$$g\colon R_+ \to R$$

definida por:

$$g(x) = -3 - 4x$$

Tentemos definir a função $f_0 g$:

$$D(f_0 g) = \{x \in R_+ : g(x) \in R_+ - \{0\}\} = \phi$$

e, portanto, $f_0 g$ não está bem definida.

30 — Considerando as funções f e g do exemplo 29, definamos a função $g_0 f$:

$$D(g_0 f) = \{x \in R_+ - \{0\} : f(x) \in R_+\} = \{x \in R : x \geqslant 1\}$$

Contradomínio de $g_0 f$: R:

$$g_0 f(x) = g[f(x)] = g[\log x] = -3 - 4 \log x, \ \forall x \in D(g_0 f)$$

31 — Sejam as funções:

$$f\colon R \times R \to R$$

definida por:

$$f(x, y) = x\,y$$

e:

$$h\colon R \to R$$

7 Em muitos exemplos ao longo dos próximos capítulos faremos uso das funções logaritmo, exponencial e trigonométricas. O conhecimento que o leitor já possui destas funções deverá ser suficiente para compreender os vários exemplos.

definida por:

$$h(z) = z^2$$

Os elementos que definem $h_0 f$ são:

$$D(h_0 f) = \{(x, y) \in R \times R: f(x, y) \in R\} = R \times R$$

Contradomínio de $h_0 f$: R:

$$h_0 f(x, y) = h[f(x, y)] = x^2 y^2, \ \forall \ (x, y) \in R \times R$$

Observe-se que neste caso a função $f_0 h$ não está bem definida, pois $D(f_0 h)$ é:

$$D(f_0 h) = \{z \in R: h(z) \in R \times R\} = \phi$$

32 — Sejam as funções:

$$\pi_1: R \times R \to R$$

definida por:

$$\pi_1(x, y) = x$$

e:

$$g: R \times R \to R \times R$$

definida por:

$$g(x, y) = (x^2 + y^2; \ x^2 - y^2)$$

A composta $\pi_1 \ _0 \ g$ é caracterizada por:

$$D(\pi_1 \ _0 \ g) = \{(x, y) \in R \times R: g(x, y) \in R \times R\} = R \times R$$

Contradomínio de $\pi_1 \ _0 \ g$: R:

$$\pi_1 \ _0 \ g(x, y) = \pi_1 [g(x, y)] =$$
$$= \pi_1 [(x^2 + y^2; \ x^2 - y^2)] = x^2 + y^2$$

O leitor pode comparar $\pi_1 \, _o \, g$ com a função g_1 definida no exemplo 25. Da mesma maneira, podemos mostrar que g_2 é igual à função $\pi_2 \, _o \, g$, onde π_2 é:

$$\pi_2 \colon R \times R \to R$$

definida por:

$$\pi_2 (x, y) = y$$

As funções π_1 e π_2 acima são chamadas 1.ª e 2.ª projeções, respectivamente.

33 — Sejam as funções:

$$h \colon R \to R \times R$$

definida por:

$$h(t) = (t^2, 3t)$$

e π_1 do exemplo anterior.

Então, $\pi_1 \, _o \, h$ é caracterizada pelos elementos:

$$D(\pi_1 \, _o \, h) = \{t \in R \colon h(t) \in R \times R\} = R$$

Contradomínio de $\pi_1 \, _o \, h$: R:

$$\pi_1 \, _o \, h(t) = \pi_1 [h(t)] = \pi_1 [t^2, 3t] = t^2, \ \forall \ t \in R$$

Neste caso, também podemos definir $h_o \pi_1$. Seus elementos são:

$$D(h_o \pi_1) = \{(x, y) \in R \times R \colon \pi_1 (x, y) \in R\} = R \times R$$

Contradomínio de $h_o \pi_1$: $R \times R$:

$$h_o \pi_1 (x, y) = h [\pi_1 (x, y)] = h(x) = (x^2, 3x), \ \forall \ (x, y) \in R \times R$$

A Figura 5 ilustra a função $\pi_1 \, _o \, h$, enquanto a Figura 6 ilustra a função $h_o \pi_1$.

Figura 5

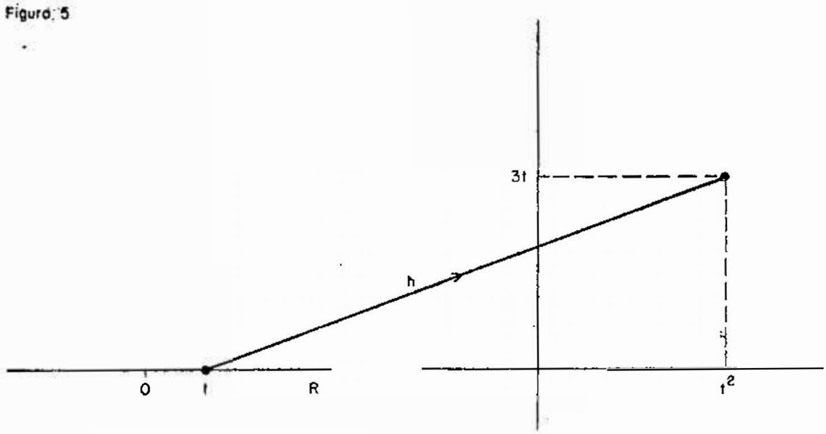
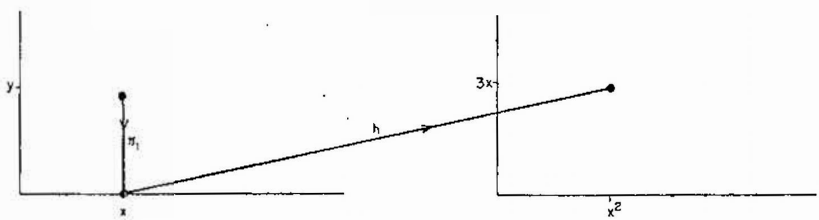


Figura 6



Teorema 4 — Sejam A e B dois conjuntos e sejam as funções:

$$f: A \to B$$

$$I_A: A \to A$$

$$I_B: B \to B$$

Então:

a) $f_0 I_A = f$; e

b) $I_{B\,0} f = f$.

Prova:

Observe-se que:

$$D(f_0 I_A) = \{x \in A: I_A(x) \in A\} = A$$

$$D(I_{B\,0} f) = \{x \in A: f(x) \in B\} = A$$

Contradomínio de $f_0 I_A$: B;

Contradomínio de $I_{B\,0} f$: B:

$$f_0 I_A(x) = f\,[I_A(x)] = f(x),\ \forall\ x \in A$$

$$I_{B\,0} f(x) = I_B\,[f(x)] = f(x),\ \forall\ x \in A$$

C. Q. D

Definição 10 — Sejam A e B dois conjuntos não-vazios e f: $A \rightarrow B$. A função h é a *função inversa* de f se:

$$h:\ B \rightarrow A$$

e:

$$h_0 f = I_A$$

$$f_0 h = I_B$$

Exemplos:

34 — Seja f: $R \rightarrow R$ definida por:

$$f(x) = 2x$$

A função inversa de f é:

$$h: R \rightarrow R$$

definida por:

$$h(z = \frac{1}{2} z$$

Pode-se facilmente comprovar esta afirmação observando-se que:

$$D(h_0 f) = R \text{ e } D(f_0 h) = R$$

Contradomínio de $h_0 f$: R;

Contradomínio de $f_0 h$: R:

$$h_0 f(x) = h[f(x)] = h[2x] = \frac{1}{2}(2x) = x, \forall x \in R$$

$$f_0 h(y) = f[h(y)] = f(y/2) = 2\frac{y}{2} = y, \forall y \in R$$

35 — Considere-se agora a função:

$$f: R \to R_+$$

definida por:

$$f(x) = x^2$$

Suponha-se que a função:

$$h: R_+ \to R$$

seja uma função inversa de f. Então:

$$f_0 h = I_{R_+}$$

e, portanto, $\forall y \in R_+$:

$$f_0 h(y) = f\{h(y)\} = \{h(y)\}^2 = y$$

Provaremos na seção seguinte que, dado um número real não-negativo a, existe um único real não-negativo b tal que $b^2 = a$. O número b é indicado $\sqrt{a}$. Dessa forma, a expressão acima é verdadeira para todo real não-negativo se, e somente se:

$$h(y) = \sqrt{y}$$

Entretanto, admitindo-se ainda que h seja a função inversa de f, ela satisfaz:

$$h_0 f = I_R$$

Seja, portanto, $x \in R$. Note-se que:

$$h_0 f(x) = h[f(x)] = h[x^2] = \begin{cases} x, \text{ se } x > 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Logo, $h_0 f$ não é a função identidade em R, donde concluímos que f não possui uma função inversa.

O exemplo 35 ilustra o caso em que f não possui uma função inversa. Discutiremos a seguir a condição necessária e suficiente para a sua existência e, além disto, mostraremos que a existência da função inversa garante sua unicidade.

Teorema 5 — Sejam A e B conjuntos não-vazios. A função $f: A \to B$ possui uma função inversa $h: B \to A$, tal como na Definição 10, se, e somente se, f é uma bijeção.

Prova:

Suponha-se que $f: A \to B$ é uma bijeção. Então, dado $y \in B$, existe um único $x \in A$ tal que $y = f(x)$. A existência de x é garantida porque f é sobrejetiva e sua unicidade porque f é biunívoca. Portanto, seja:

$$h: B \to A$$

definida por:

$$x = h(y)$$

É uma conseqüência imediata — como o leitor poderá verificar — da definição de h que ela é realmente a inversa de f.

Suponha-se agora que $h: B \to A$ é uma função inversa de f. Sejam $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$.

Por definição de função inversa:

$$h_0 f(x_1) = h[f(x_1)] = x_1$$

e:

$$h_0 f(x_2) = h[f(x_2)] = x_2$$

Como $h\,[f(x_2)] = h\,[f(x_1)]$, segue-se que $x_1 = x_2$.

Para mostrar que f é sobrejetiva, considere-se $y \in B$. Então:

$$f_0 h(y) = f\,[h(y)] = y$$

Como $h(y) \in A$, existe $x \in A$ $(x = h(y))$ tal que $y = f(x)$.

C. Q. D.

A unicidade da função inversa é garantida sempre que ela existir. Suponha-se que h e g sejam duas funções inversas de f. Então, se $y \in B$:

$$h(y) = h_0 I_B(y) = h\,[I_B(y)] = h\,[f_0 g(y)] =$$
$$= h\,[f\,[g(y)]] = (h_0 f)\,(g(y)) = I_A\,[g(y)] = g(y)$$

A notação f^{-1} será utilizada de agora em diante para indicar a função inversa de f.

I.2.3 — Imagem Direta e Imagem Inversa

Definição 11 — Sejam A e B dois conjuntos não-vazios e $f: A \to B$:

a) se $X \subset A$, chama-se *Imagem Direta* de X por f ao conjunto $f(X) = \{f(x) \in B: x \in X\}$; e

b) se $W \subset B$, chama-se *Imagem Inversa* de W por f ao conjunto $f^{-1}(W) = \{x \in A: f(x) \in W\}$.

Estes conceitos são ilustrados pelos diagramas a seguir.

Com relação a estas definições, convém ressaltar que $f(X)$ e $f^{-1}(W)$ são apenas notações para designar certos subconjuntos importantes de B e A, respectivamente. Em particular, o conceito de Imagem Inversa não depende da existência da função inversa. É fácil ver que, se a função inversa existe, a Imagem Inversa de W por f coincide com a Imagem Direta de W por f^{-1}. Este fato, sem dúvida, serve para motivar a utilização da notação acima, ***porém não limita o conceito aos casos em que f^{-1} existe.***

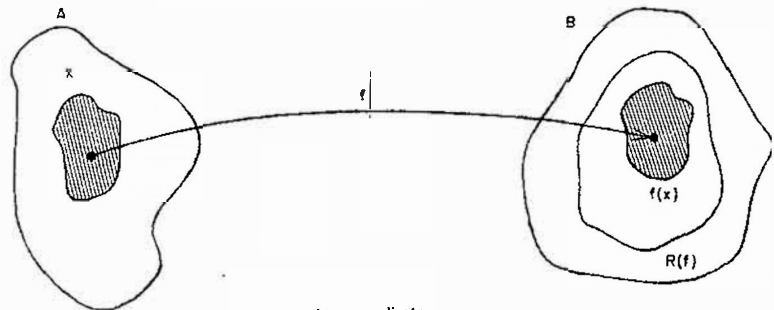


Imagem direta

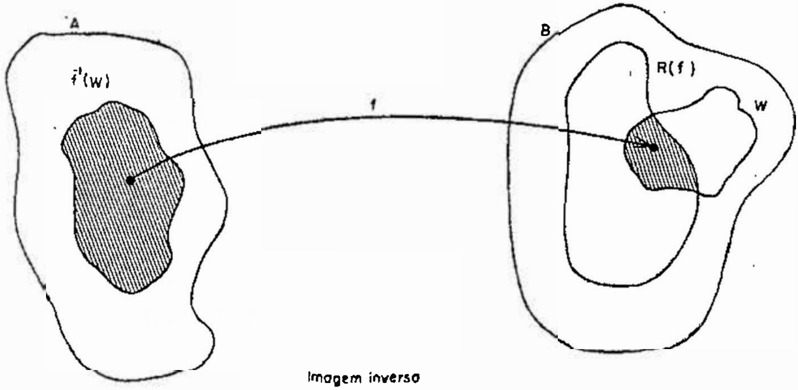


Imagem inversa

Exemplos:

36 — Seja:

$$f: R \to R$$

dada por:

$$f(x) = x^2$$

e sejam:

$$X = \{x \in R: 0 \leqslant x \leqslant 1\} \text{ e } Y = \{x \in R: -1 \leqslant x \leqslant 0\}$$

Nesse caso:

$$f(X) = f(Y) = \{x \in R: 0 \leqslant x \leqslant 1\}$$

37 — Utilizando os dados acima, temos que:

$$f^{-1}(X) = \{x \in R: -1 \leqslant x \leqslant 1\}$$

$$f^{-1}(Y) = \{0\}$$

38 — Seja:

$$f: R \to R$$

definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 1 \\ 1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

e seja:

$$X = \{x \in R: 0 \leqslant x \leqslant 2\}$$

Nesse caso:

$$f(X) = \{x \in R: 1 \leqslant x \leqslant 2\}$$

39 — Seja:

$$f: R \times R \to R$$

definida por:

$$f(x, y) = x + y$$

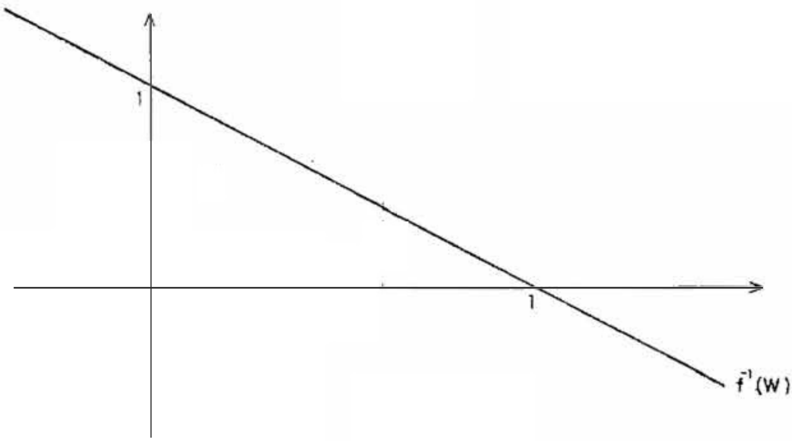
e seja:

$$W = \{1\}$$

Então:

$$f^{-1}(W) = \{(x, y) \in R \times R: x + y = 1\}$$

Uma representação do conjunto $f^{-1}(W)$ é apresentada na figura a seguir.



40 — Seja:

$$f: R \times R \to R$$

definida por:

$$f(x, y) = xy$$

e seja:

$$W = \{10\}$$

Então:

$$f^{-1}(W) = \{ (x, y) \in R \times R: xy = 10\}$$

Graficamente, o conjunto $f^{-1}(W)$ é composto pelos dois ramos de hipérbole da figura a seguir.

41 — Seja:

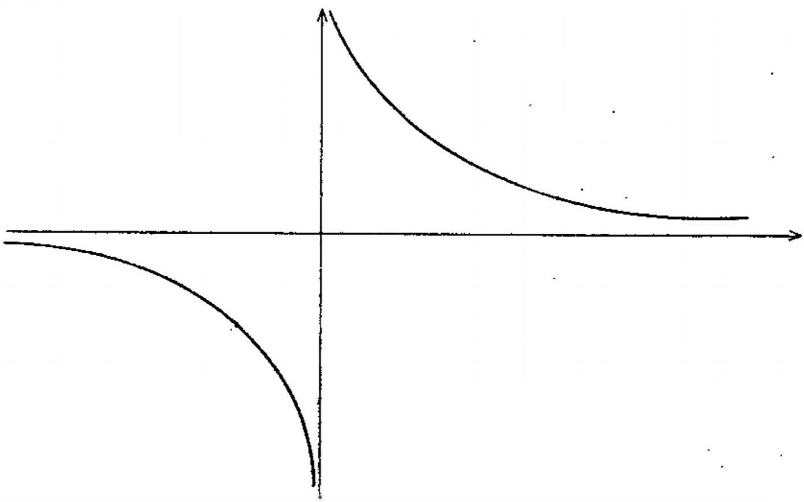
$$f: R \times R \to R$$

definida por:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

e seja:

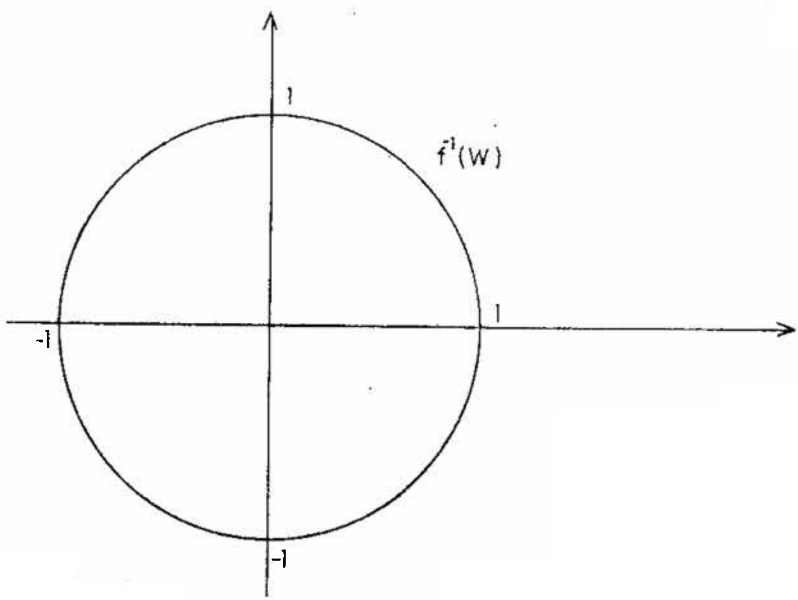
$$W = \{1\}$$



Então:

$$f^{-1}(W) = \{(x, y) \in R \times R: x^2 + y^2 = 1\}$$

Graficamente, temos:



Teorema 6 — Seja $f: A \to B$ e sejam X e Y subconjuntos de A. Então:

a) $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$;

b) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$;

c) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$; e

d) $f(X - Y) \subset f(X)$.

Prova:

a) Se $f(X) = \phi$, não há nada para demonstrar. Por outro lado, se $y \in f(X) \Rightarrow \exists\, x \in X: y = f(x) \Rightarrow x \in Y \Rightarrow f(x) \in f(Y)$.

b) $X \cap Y \subset X$ e $X \cap Y \subset Y$. Logo, $f(X \cap Y) \subset f(X)$ e $f(X \cap Y) \subset f(Y)$. Donde concluímos que $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

c) $X \subset X \cup Y$ e $Y \subset X \cup Y$. Logo, $f(X) \cup f(Y) \subset$ $\subset f(X \cup Y)$. Por outro lado, se $f(X \cup Y) \neq \phi$, temos que $y \in f(X \cup Y) \Rightarrow \exists\, x \in X \cup Y: y = f(x) \Rightarrow f(x) \in f(X)$ ou $f(x) \in f(Y) \Rightarrow f(x) \in f(X) \cup f(Y)$.

d) $X - Y \subset X$ e, portanto, $f(X - Y) \subset f(X)$.

C. Q. D.

O exemplo 17 fornece-nos um contra-exemplo para mostrar que em geral não se verifica a igualdade em "b".

Teorema 7 — Seja $f: A \to B$ e sejam W e Z subconjuntos de B. Então:

a) $W \subset Z \Rightarrow f^{-1}(W) \subset f^{-1}(Z)$;

b) $f^{-1}(W \cap Z) = f^{-1}(W) \cap f^{-1}(Z)$;

c) $f^{-1}(W \cup Z) = f^{-1}(W) \cup f^{-1}(Z)$; e

d) $f^{-1}(W - Z) = f^{-1}(W) - f^{-1}(Z)$.

Prova:

a) Se $f^{-1}(W) = \phi$, nada há para provar. Por outro lado, $x \in f^{-1}(W) \Rightarrow f(x) \in W \Rightarrow f(x) \in Z \Rightarrow x \in f^{-1}(Z)$.

b) Como $W \cap Z \subset W$ e $W \cap Z \subset Z$, segue-se que $f^{-1}(W \cap Z) \subset f^{-1}(W) \cap f^{-1}(Z)$. Por outro lado, se $f^{-1}(W) \cap f^{-1}(Z) \neq \phi$, temos que $x \in f^{-1}(W) \cap f^{-1}(Z) \Longrightarrow f(x) \in W$ e $f(x) \in Z \Longrightarrow$ $\Longrightarrow f(x) \in W \cap Z \Longrightarrow x \in f^{-1}(W \cap Z)$.

c) $W \subset W \cup Z$ e $Z \subset W \cup Z$. Logo, $f^{-1}(W) \cup f^{-1}(Z) \subset$ $\subset f^{-1}(W \cup Z)$. Por outro lado, se $f^{-1}(W \cup Z) \neq \phi$, temos que $x \in f^{-1}(W \cup Z) \Longrightarrow f(x) \in W$ ou $f(x) \in Z \Longrightarrow x \in f^{-1}(W)$ ou $x \in f^{-1}(Z) \Longrightarrow x \in f^{-1}(W) \cup f^{-1}(Z)$.

d) Deixando a cargo do leitor os casos em que $f^{-1}(W) -$ $- f^{-1}(Z) = \phi$ ou $f^{-1}(W - Z) = \phi$, vem que $x \in f^{-1}(W) -$ $- f^{-1}(Z) \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(W)$ e $x \notin f^{-1}(Z) \Longleftrightarrow f(x) \in W$ e $f(x) \notin Z \Longleftrightarrow f(x) \in W - Z \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(W - Z)$.

C. Q. D.

I.3 — Princípio da Indução; Conjuntos Finitos e Infinitos; Conjunto dos Números Reais

Nesta seção trataremos dos três assuntos mencionados no título. Entretanto, o faremos de maneira informal, sem demonstrar teoremas ou nos estendermos demasiadamente em algum tópico. O objetivo principal é apresentar alguns resultados que serão de utilidade nos capítulos seguintes. O único tópico em que faremos uma apresentação mais detalhada é o que se refere ao Supremo de um Conjunto de Números Reais e o Princípio do Supremo ou o Axioma Fundamental da Análise Matemática.

Este enfoque, apesar de inadequado do ponto de vista lógico, tornará a apresentação do material menos indigesta para o leitor. Aqueles que, ao terminarem a leitura desta seção, se sentirem insatisfeitos poderão consultar, por exemplo, Bartle (1976), Lima (1976) ou Rudin (1964).

1.3.1 — Princípio da Indução

Afirmativas do tipo "tal fato ou fórmula vale para todos os números naturais" são bastante comuns, e estão baseadas no chamado *Princípio da Indução* que apresentamos e exemplificamos a seguir.

Princípio da Indução — Suponha-se que a propriedade P referente aos números naturais satisfaz:

a) o número 1 goza da propriedade P; e

b) se $k \in N$ goza da propriedade P, então $k + 1$ também goza de P.

Neste caso, todo $n \in N$ goza da propriedade P.

Exemplos:

42 — Sejam $E, A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos quaisquer e defina-se:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \equiv \bigcup_{j=1}^{n} A_j \quad \text{e} \quad (A_1 \cap E) \cup (A_2 \cap E) \cup \ldots$$

$$\ldots \cup (A_n \cap E) \equiv \bigcup_{j=1}^{n} (E \cap A_j)$$

Mostre-se que $E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \right) = \bigcup_{j=1}^{n} (E \cap A_j)$ para todo $n \in N$.

Note-se, inicialmente, que o resultado é verdadeiro para $n = 1$. Suponhamos agora que:

$$E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j \right) = \bigcup_{j=1}^{k} (E \cap A_j)$$

e mostremos que a igualdade se verifica para $k + 1$:

$$E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j \right) = E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j \cup A_{k+1} \right) =$$

$$= \left[E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j \right) \right] \cup [E \cap A_{k+1}].$$

Esta última igualdade segue-se de "g" do Teorema 2. Observe-se também que pela hipótese de indução temos:

$$\left[E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right)\right] \cup [E \cap A_{k+1}] =$$

$$= \left[\bigcup_{j=1}^{k} (E \cap A_j)\right] \cup [E \cap A_{k+1}] = \bigcup_{j=1}^{k+1} (E \cap A_j)$$

e, portanto, o resultado é verdadeiro para todo $n \in N$.

43 — Mostre-se que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}, \ \forall\ n \in N$$

Utilizaremos uma vez mais o Princípio da Indução.

Observe-se que a proposição é válida para o número 1, pois:

$$1^2 = \frac{1(1+1)\ (2(1)+1)}{6}$$

Supondo que ela é verdadeira para k, segue-se que:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)\ (2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{(k+1)\ (2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)\ (k+2)\ (2k+3)}{6}$$

onde a antepenúltima igualdade é uma conseqüência da hipótese de indução.

I.3.2 — Conjunto Finito e Conjunto Infinito

Definição 12 — Seja A um conjunto qualquer. Diz-se que:

a) A é *finito* se $A = \phi$, ou se existe uma correspondência biunívoca com domínio em A e valores no conjunto $S_n = \{k \in N: 1 \leqslant k \leqslant n\}$ para algum $n \in N$;

b) A é *infinito* se A não é finito;

c) A é *enumerável* se existe uma correspondência biunívoca com domínio em A e valores em N; e

d) A é *contável* se A é finito ou é enumerável.

Exemplos:

44 — N é um conjunto enumerável, pois a função identidade em N, I_N, é uma bijeção de N em N.

45 — O conjunto P dos números pares é enumerável, pois a função:

$$f: P \rightarrow N$$

definida por:

$$f(p) = \frac{p}{2}, \; p \in P$$

é uma bijeção.

46 — O conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ é finito, pois podemos definir a seguinte bijeção:

$$h: A \rightarrow S_6$$

definida por $h(a) = 1$, $h(b) = 2$, $h(c) = 3$, $h(d) = 4$ e $h(e) = 5$.

47 — Z é um conjunto enumerável. Observe-se, primeiro, a relação abaixo entre Z e N:

$$Z: 0, 1, -1, 2, -2 \ldots$$
$$N: 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$$

Em vista disto, podemos definir a seguinte bijeção:

$$f: N \rightarrow Z$$

$$f(n) = \begin{cases} n/2, \text{ se } n \text{ é par} \\ -\dfrac{n-1}{2}, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Apresentaremos a seguir alguns fatos importantes sobre os conjuntos que definimos anteriormente. Tais resultados, entretanto, não serão demonstrados, e o leitor interessado nas demonstrações deve recorrer, por exemplo, a Rudin (1964) ou Bartle (1976).

a) Qualquer subconjunto de um conjunto finito é um conjunto finito.

b) Qualquer subconjunto de um conjunto contável é um conjunto contável.

c) A união de uma coleção finita de conjuntos finitos é um conjunto finito.

d) A união de uma coleção contável de conjuntos contáveis é um conjunto contável.

e) Um conjunto A é infinito se, e somente se, existem um subconjunto B de A, $B \neq A$, e uma correspondência biunívoca entre A e B.

De "d" segue-se um fato extremamente importante: *o conjunto dos números racionais é um conjunto enumerável.* A prova disto é a seguinte: sejam os conjuntos:

$$Z_1 = \left\{0, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \ldots\right\}$$

$$Z_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{-2}{2}, \ldots\right\}$$

$$\vdots$$

$$Z_j = \left\{0, \frac{1}{j}, \frac{-1}{j}, \frac{2}{j}, \frac{-2}{j}, \ldots\right\}$$

$$\vdots$$

definidos para todo $j \in N$. Seja, agora:

$$f_j\colon Z_j \rightarrow Z$$

definida por:

$$f_j(x) = j\,x, \ \forall\, j \in N$$

f_j é uma bijeção entre Z_j e Z e, portanto, cada Z_j é enumerável, pois Z é enumerável. Por fim, note-se que:

$$Q = \bigcup_{j \in N} Z_j$$

e, portanto, é uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis.

I.3.3 — Conjunto dos Números Reais

A discussão que faremos com relação ao Conjunto dos Números Reais é, tal como nos tópicos anteriores, bastante informal. Inicialmente, mencionaremos as principais propriedades Algébricas e de Ordenação, indicaremos suas conseqüências e, por fim, discutiremos o Princípio do Supremo.

Definição 13 — Seja K um conjunto não-vazio. Diz-se que K é um corpo se existem duas funções definidas em K x K com valores em K que satisfazem algumas propriedades que estabeleceremos.

Na linguagem algébrica, estas duas funções são chamadas Operações de Adição, indica-se $+$, e de Multiplicação, indica-se . ou x. Portanto, um corpo é um conjunto K munido das operações de Adição e Multiplicação que satisfazem as propriedades:

(A.1) $a + b = b + a, \forall\ a, b \in K$ (comutatividade);

(A.2) $(a + b) + c = a + (b + c), \forall\ a, b, c \in K$ (associatividade);

(A.3) existe um elemento $\theta \in K$ tal que $\theta + a = a$ e $a + \theta = a$, $\forall\ a \in K$ (existência de elemento neutro);

(A.4) para todo $a \in K$ existe um elemento $\bar{a} \in K$ tal que $a + \bar{a} = \theta$ e $\bar{a} + a = \theta$;

(M.1) $a.b = b.a, \forall\ a, b \in K$ (comutatividade);

(M.2) $(a.b)\ c = a\ (b.c), \forall\ a, b, c \in K$ (associatividade);

(M.3) existe um elemento $1 \in K, 1 \neq \theta$, tal que $1.a = a.1 = a$, $\forall\ a \in K$ (existência de elemento neutro);

(M.4) para todo $a \in K$, $a \neq \theta$, existe um elemento $\tilde{a} \in K$ tal que $a.\tilde{a} = \tilde{a}.a = 1$;

D) $a.(b + c) = a.b + a.c$ e $(b + c).a = b.a + c.a$, $\forall\, a, b, c \in K$ (distributividade).

Definição 14 — Um corpo K é um *corpo ordenado* se existe um subconjunto P de K tal que:

a) se $a, b \in P$, então $a + b \in P$ e $a.b \in P$; e

b) dado $a \in K$, exatamente uma das três alternativas é verdadeira: $a = \theta$, $a \in P$ ou $\bar{a} \in P$.

Consideremos agora o conjunto dos números reais R, com a adição e multiplicação usualmente definidas. É fácil ver que R é um corpo ordenado onde o conjunto P da Definição 14 é o conjunto dos números positivos.

Das propriedades da adição e da multiplicação podemos deduzir uma série de fatos, certamente conhecidos do leitor:

a) 0 é o único elemento de R que satisfaz A.3;

b) 1 é o único elemento de R que satisfaz M.3;

c) dado $a \in R$, o elemento $\bar{a}$ é $-a$, e este é único;

d) dado $a \in R$, $a \neq 0$, o elemento $\tilde{a}$ é $1/a$, e é único;

e) dados $a, b \in R$, a equação $a + x = b$ tem uma única solução $x = b + (-a)$;

f) dados $a \neq 0$ e $b \in R$, a equação $ax = b$ tem uma única solução $x = b\ (1/a)$;

g) se $a \in R$, $a.0 = 0$;

h) se $a \in R$, $-a = (-1).a$;

i) se $a, b \in R$, $-(a + b) = -a + (-b)$;

j) dado $a \in R$, $-(-a) = a$;

l) $(-1).(-1) = 1$;

m) se $a \in R$ e $a \neq 0$, então $1/a \neq 0$ e $1/(1/a) = a$;

n) se $a, b \in R$ e $a.b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$;

o) se $a, b \in R$, então $(-a).(-b) = a.b$; e

p) se $a \in R$, $a \neq 0$, então $1/(-a) = -(1/a)$.

Do fato de que R é um corpo ordenado, podemos ainda deduzir outros fatos importantes. Primeiro, considere-se a seguinte definição:

Sejam $a, b \in R$. Se:

a) $a - b \in P$, indicaremos $a > b$;

b) $-(a - b) \in P$, indicaremos $a < b$;

c) $a - b \in P \cup \{0\}$, indicaremos $a \geqslant b$; e

d) $-(a - b) \in P \cup \{0\}$, indicaremos $a \leqslant b$.

As principais propriedades da relação de ordem definida acima são:

a) dados $a, b, c \in R$, se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$;

b) dados $a, b, c \in R$, então $a > b$ ou $a = b$ ou $a < b$, e exatamente uma destas possibilidades ocorre;

c) se $a \geqslant b$ e $b \geqslant a$, então $a = b$, $\forall\ a, b \in R$;

d) se $a \neq 0$, então $a.a > 0$;

e) $1 > 0$;

f) se $n \in N$, $n > 0$;

g) se $a > b$, então $a + c > b + c$, $\forall\ a, b, c \in R$;

h) se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$, $\forall a, b, c, d \in R$;

i) se $a > b$ e $c > 0$, então $ac > bc$, $\forall\ a, b \in R$;

j) se $a > b$ e $c < 0$, então $ac < bc$, $\forall\ a, b \in R$;

l) se $a > 0$, então $1/a > 0$;

m) se $a < 0$, então $1/a < 0$;

n) se $a > b$, então $a > \dfrac{1}{2}(a + b) > b$, $\forall\ a, b \in R$;

o) se $ab > 0$; então $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0$; e

p) se $ab < 0$, então $a > 0$ e $b < 0$ ou $a < 0$ e $b > 0$.

Ainda com relação às propriedades de ordem de R, consideremos alguns fatos relativos à função "Valor Absoluto", definida no exemplo 19, a qual indicaremos por $|\ \ |$. Temos, portanto:

a) $|a| = 0$ se, e somente se, $a = 0$;

b) $|a| = |-a|, \forall\ a \in R$;

c) $|a\,b| = |a|\ |b|, \forall\ a, b \in R$;

d) se $c \geqslant 0$, então $|a| \leqslant c$ se, e somente se, $-c \leqslant a \leqslant c$;

e) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|, \forall\ a \in R$; e

f) $||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|, \forall\ a, b \in R$ (desigualdade triangular).

De posse destes resultados, que podem ser demonstrados a partir das propriedades algébricas e de ordenação de R, falta-nos considerar o último fato importante sobre R.

Antes, porém, necessitamos de algumas considerações introdutórias. Primeiro, temos:

Teorema 8 — Não existe um número racional r tal que $r^2 = 2$.

Prova:

Sejam p e $q \in Z$, $q \neq 0$, tais que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Podemos, sem perda de generalidade, admitir que $p > 0$ e $q > 0$. Suponha-se que eles não tenham divisores comuns. Portanto:

$$p^2 = 2q^2$$

Temos, então, que $2q^2$ é par. Logo, p^2 é par e p também é par (se p é ímpar, então $p = 2k + 1$, $k \in N$, e $p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ que é ímpar). Da mesma forma, q é par e, portanto, p e q têm um divisor comum, o que contraria a hipótese.

C. Q. D.

Infelizmente, no presente estágio, não podemos ainda garantir a existência de um número real cujo quadrado é 2. Necessitamos antes introduzir o axioma que garante que R é um conjunto completo, num sentido que tornaremos mais preciso adiante.

Definição 15 — Seja $A \subset R$:

a) diz-se que A é *limitado superiormente* se existe $x \in R$ tal que $x \geqslant a$ para todo $a \in A$, e nesse caso x é chamado limite superior de A;

b) diz-se que A é *limitado inferiormente* se existe $x \in R$ tal que $x \leqslant a$ para todo $a \in A$, e nesse caso x chama-se limite inferior de A;

c) diz-se que A é *limitado* se A é limitado superiormente e inferiormente;

d) diz-se que μ é o *supremo do conjunto* A limitado superiormente se μ é menor do que qualquer outro limite superior de A, isto é, μ é o supremo de A, às vezes indicado *sup* A, se satisfaz:

$\mu \geqslant a, \forall\ a \in A$; e

se $\mu' \in R$ é tal que $\mu' \geqslant a, \forall\ a \in A$, então $\mu' \geqslant \mu$; e

e) diz-se que v é o *ínfimo do conjunto* A limitado inferiormente se v é maior do que qualquer outro limite inferior de A, isto é, v é o ínfimo de A, às vezes indicado *inf* A, se satisfaz:

$v \leqslant a, \forall\ a \in A$; e

se $v' \in R$ é tal que $v' \leqslant a, \forall\ a \in A$, então $v' \leqslant v$.

Exemplos:

48 — Seja $A = \{x \in R: 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. A é um conjunto limitado. Os números $1, 2, 5, 100$ são limites superiores de A. Os números $0, -1, -2, -700$ são limites inferiores de A. O supremo de A é o número 1 e o ínfimo é o número 0.

49 — Se, agora, $B = \{x \in R: 0 < x < 1\}$, tudo o que afirmamos com relação ao conjunto A no exemplo 48 vale para o conjunto B. Além disto, é importante notar que, neste caso, nem o supremo nem o ínfimo de B pertencem ao conjunto B.

50 — O conjunto R_+ é limitado inferiormente, porém não é limitado superiormente. Da mesma forma, R_- é limitado superiormente, porém não é limitado inferiormente.

51 — R não é limitado inferiormente ou superiormente.

52 — Q não é limitado superiormente ou inferiormente.

As definições de supremo e ínfimo dadas acima são equivalentes a outras formulações que são úteis em certos contextos. A seguir apresentamos duas destas formulações para o caso de supremo e pedimos ao leitor que as demonstre e que formule e demonstre as proposições equivalentes para o ínfimo.

Teorema 9 — Seja $A \subset R$ um conjunto limitado superiormente. Um elemento $\mu \in R$ é o supremo de A se, e somente se, satisfaz as propriedades:

a) não existe $a \in A$ tal que $\mu < a$; e

b) se $\mu' \in R$ é tal que $\mu' < \mu$, então existe $a' \in A$ tal que $a' > \mu'$.

Teorema 10 — Seja $A \subset R$ um conjunto. Um elemento $\mu \in R$ é o supremo de A se, e somente se, para todo número real $\varepsilon > 0$ tem-se:

a) $a < \mu + \varepsilon, \forall a \in A$; e

b) $\exists a' \in A$ tal que $a' > \mu - \varepsilon$.

Passemos agora ao problema central desta parte da seção: o Princípio do Supremo. Para tanto, consideremos o conjunto:

$$X = \{x \in Q: x \geqslant 0 \text{ e } x^2 < 2\}$$

Observe-se que, se $y \in Q$ e $y > 2$, então $y^2 > 4$. Logo, $y \notin X$. Dessa forma, X é um *conjunto limitado no conjunto dos números racionais*. Mostremos agora que *sup* X não existe no conjunto dos números racionais. Intuitivamente, é fácil perceber que o *sup* X

não existe em Q. Um argumento mais formal é o seguinte: seja $x \in X$ e seja $r \in Q$, $r < 1$, tal que:[8]

$$0 < r < \frac{2 - x^2}{2x + 1} \qquad (1)$$

Daqui temos que:

$$r^2 < r$$

e que:

$$(x + r)^2 = x^2 + 2xr + r^2 < x^2 + 2xr + r = x^2 +$$

$$+ r(2x + 1) < x^2 + (2 - x^2) = 2$$

onde a última desigualdade segue-se de (1). Dessa maneira, dado $x \in X$, $x + r \in X$. Logo, se $x \in X$, x não é *sup* X. Por outro lado, $x \geqslant 0$, $x \notin X$, também não é *sup* X, pois se $x^2 > 2$, se $r \in Q$ e satisfaz:[9]

$$0 < r < \frac{x^2 - 2}{2x}$$

então:

$$(x - r)^2 = x^2 - 2rx + r^2 > x^2 - 2rx > x^2 + 2 - x^2 = 2$$

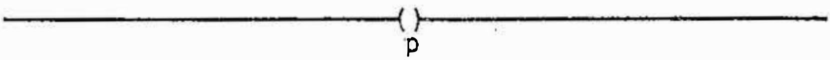
Logo, x não pode ser *sup* X. Portanto, caso exista $(sup\ X)^2 = 2$, o que não é verdade pelo Teorema 8.

O exemplo acima ilustra um fato importante. Apesar de o conjunto X ser limitado em Q, ele não possui um supremo no conjunto Q. Intuitivamente, é como se Q tivesse "buracos", dando margem a

[8] Um número racional r satisfazendo os requisitos acima é, por exemplo, $r = \frac{1}{3}\left(\frac{2 - x^2}{2x + 1}\right)$, sendo $x \in X$. Note-se que $r > 0$ e $r < 1$, pois $\frac{2 - x^2}{2x + 1} \leqslant 2$ para todo $x \in X$.

[9] Por exemplo, $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2}{2x}$.

que o fenômeno acima ocorra. A figura a seguir ilustra este tipo de problema.



Se retiramos o ponto p do segmento de reta acima, o conjunto de elementos menores do que p é limitado superiormente no segmento de reta exclusive p. Entretanto, este conjunto não possui um supremo no segmento de reta exclusive p.

Introduziremos agora o *Princípio do Supremo* ou o *Axioma Fundamental da Análise Matemática,* que estabelece que "o conjunto dos números reais é *completo* no sentido de que todo subconjunto não-vazio de R, que é limitado superiormente, possui um supremo".

A importância deste axioma é muito grande, como o leitor poderá apreciar nos teoremas que provaremos nos capítulos seguintes. Por ora, contentar-nos-emos com as seguintes implicações:

a) (Propriedade Arquimediana). Dado $x \in R$, existe um número natural n tal que $n > x$.

Prova:

Se isto não ocorre, então x é um limite superior de N e, portanto, existe $\mu \in R$ tal que $\mu = sup\ N$. Como x é um limite superior de N, $x \geqslant \mu$. Note-se que $\mu - 1 < \mu$ e, portanto, pelo Teorema 9, existe $n \in N$ tal que $n > \mu - 1$ e, portanto, $n + 1 > \mu$. Como $n + 1 \in N$, isto contradiz o fato de que μ é um limite superior de N.

b) (Existência de $\sqrt{2}$). Existe um número real positivo x tal que $x^2 = 2$.

Prova:

Seja $X = \{x \in R: x > 0 \quad e \quad x^2 < 2\}$. Como X é limitado superiormente (2 é um limite superior de X), o supremo de X existe. O argumento que desenvolvemos anteriormente garante que $(sup\ X)^2 = 2$.

Teorema 11 — Para cada $n \in N$ sejam a_n, $b_n \in R$ tais que $a_n \leqslant b_n$. Definamos $I_n = \{x \in R: a_n \leqslant x \leqslant b_n\}$ e suponha-se que:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$$

Então, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$, sendo $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x \in R: x \in I_n$ para todo $n \in N\}$.

Prova:

Observe-se que $b_1 \geqslant a_n$, $\forall\, n \in N$, isto é, b_1 é um limite superior para o conjunto $\{a_n: n \in N\}$. Como este é um conjunto limitado superiormente de números reais, o supremo existe. Seja $\mu = sup \{a_n: n \in N\}$. Então, $\mu \geqslant a_n$, $\forall\, n \in N$.

Suponha-se agora que, para $\tilde{n} \in N$, $b_{\tilde{n}} < \mu$. Como μ é o supremo, existe $a_{n'} \in \{a_n: n \in N\}$ tal que $a_{n'} > b_{\tilde{n}}$ Se $n' > \tilde{n}$, da hipótese $I_{\tilde{n}} \supset I_{n'}$, segue-se:

$$a \leqslant a_{n'} \leqslant b_{n'} \leqslant b_{\tilde{n}}$$

Se $\tilde{n} > n'$, então $I_{\tilde{n}} \subset I_{n'}$ e, portanto, $a_{n'} \leqslant a_{\tilde{n}} \leqslant b_{\tilde{n}} \leqslant b_{n'}$.

Em qualquer dos dois casos temos uma contradição com $a_{n'} > b_{\tilde{n}}$.

Logo, $\forall\ n \in N$.

$a_n \leqslant \mu \leqslant b_n$, isto é, $\mu \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

C. Q. D.

Exercícios

1. Sejam A e B dois conjuntos. Mostre que:

a) $A \cup B = A$ se, e somente se, $B \subset A$;

b) $A \cap B = A$ se, e somente se, $A \subset B$;

c) $A \quad (A-B) \cup (A \cap B)$; e

d) $A \subset B$ se, e somente se, $A - B = \phi$.

2. Dados os conjuntos A, B e C, mostre que:

a) $(A \cap B) - C = A \cap (B-C)$; e

b) $A - (B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$.

3. Dados os conjuntos $A \subset E$ e $B \subset E$, mostre que:

a) $\complement(A-B) = \left(\complement A\right) \cup (A \cap B)$; e

b) $\complement A \times \complement B \subset \complement_{E \times E}(A \times B)$ (dê um exemplo para mostrar que não se verifica a igualdade).

4. Dadas as projeções π_1 e π_2 (ver exemplo 32) e dado $A \subset R \times R$, mostre que $A \subset \pi_1(A) \times \pi_2(A)$. Dê um exemplo para mostrar que, em geral, $A \neq \pi_1(A) \times \pi_2(A)$.

5. Nas afirmativas a seguir, demonstre aquelas que forem corretas e dê contra-exemplos mostrando aquelas que são falsas:

a) Seja $f: A \to B$ e seja $X \subset B$. Então, $f(x) \notin X$ se, e somente se, $x \notin f^{-1}(X)$.

b) Seja $f: A \to B$ e seja $X \subset A$. Então, $x \notin X$ se, e somente se, $f(x) \notin f(X)$.

c) Seja $f: A \to B$ e seja $X \subset A$. Então, $x \in X$ se, e somente se, $f(x) \in f(X)$.

d) Seja $f: A \to B$ e seja $X \subset B$. Então, $f(x) \in X$ se, e somente se, $x \in f^{-1}(X)$.

6. Seja $f: D \to R$. Mostre que $f^{-1}(R-F) = D - f^{-1}(F)$, qualquer que seja $F \subset R$.

7. Sejam $f: A \to B$ uma bijeção e $W \subset B$ e $h: B \to A$ a função inversa de f. Mostre que $f^{-1}(W) = h(W)$.

8. Seja $f: A \to B$ uma bijeção. Mostre que $(f^{-1})^{-1}$ existe e que $(f^{-1})^{-1} = f$.

9. Duas funções $f: A \to B$ e $g: C \to B$ são iguais se, e somente se, elas têm o mesmo gráfico.

10. Verifique que a definição da função composta realmente caracteriza uma função e não uma relação qualquer.

11. Nas afirmativas a seguir, demonstre aquelas que forem corretas e dê contra-exemplos mostrando aquelas que são falsas. Sejam $f: A \to B$ e $g: C \to D$. Então:

a) se $C \subset R(f)$, $R(g) = R(g_o f)$;

b) se $R(g) = R(g_o f)$, então $C \subset R(f)$;

c) se g é biunívoca, $R(g_o f) = R(g)$ se, e somente se, $C \subset R(f)$; e

d) $A = D(g_o f)$ se, e somente se, $R(f) \subset C$.

12. Demonstre os Teoremas 9 e 10.

13. Formule e demonstre resultados análogos aos Teoremas 9 e 10 para o ínfimo.

14. Seja $A \subset R$, $A \neq \phi$, e seja $B \subset R$ um conjunto limitado tal que $A \subset B$. Mostre que $\inf B \leqslant \inf A \leqslant \sup A \leqslant \sup B$.

15. Sejam $A \subset R$, $A \neq \phi$, e $B \subset R$ conjuntos limitados. Mostre que $A \cup B$ é um conjunto limitado e que $\inf (A \cup B) \leqslant \inf A \leqslant$ $\leqslant \sup A \leqslant \sup (A \cup B)$.

16. Demonstre as proposições a seguir utilizando o *Princípio da Indução*:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots . + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ para todo $n \in N$.

b) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais positivos e $n \in N$. Seja $c > 0$ um número real e suponha que $a_n \leqslant c\, a_{n-1}$ para todo $n \geqslant 2$. Mostre que $a_n \leqslant a_1 c^{n-1}$ para todo $n \in N$.

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots . + n^3 = (1 + 2 + \ldots . + n)^2$.

Apêndice: Relações Binárias

A.1 — Conceitos Básicos

Procuraremos desenvolver neste apêndice alguns dos aspectos sobre as Relações Binárias. Temos em mente dois objetivos distintos: por um lado, pretendemos apresentar uma definição de funções a partir da noção de Relação Binária; em segundo lugar, este tópico é extremamente importante na Teoria Econômica Moderna e também em todos os enfoques axiomáticos da Teoria da Decisão. [10]

A idéia intuitiva é caracterizar as relações entre dois objetos dados. Assim, por exemplo, dados dois números reais x e y, a relação $>$ (maior) é uma relação binária. Na teoria do comportamento do consumidor, a relação de preferência é uma relação binária que ordena os gostos do indivíduo.

Definição A.1 — Dados dois conjuntos não-vazios A e B, uma relação binária, R, de A em B é um subconjunto de $A \times B$. Quando $A = B$, diz-se que R é uma relação binária em A.

Indica-se que $(a, b) \in A \times B$ é um elemento de R pela maneira usual $(a, b) \in R$, ou então $a \; R \; b$. Esta última notação é mais comum nas aplicações da Teoria da Decisão. Quando $(a, b) \in A \times B$ não pertence a R, indicamos $(a, b) \notin R$ ou $\neg \; a \; R \; b$.

Algumas propriedades que podem caracterizar uma relação binária, R, em um conjunto A são apresentadas a seguir.

10 Ver, por exemplo, Fishburn (1972).

Propriedade 1. R é *reflexiva* se, para todo $a \in A$, $a R a$.

Propriedade 2. R é *simétrica* se $(a, b) \in A \times A$ tal que $a R b$ implica $b R a$.

Propriedade 3. R é *transitiva* se, dados $a \in A$, $b \in A$ e $c \in A$ tais que $a R b$ e $b R c$, então $a R c$.

Propriedade 4. R é *completa* (*conexa*) se, dado $(a, b) \in A \times A$, tivermos $a R b$ ou $b R a$.

Propriedade 5. R é *assimétrica* se, para todo $(a, b) \in A \times A$ tal que $a R b$, tem-se $\rightarrow b R a$.

Propriedade 6. R é *anti-simétrica* se, dado $(a, b) \in A \times A$ tal que $a R b$ e $b R a$, tem-se $a = b$.

A título de ilustração, considere-se o conjunto dos números reais e seja a relação binária maior que, "$>$". Esta *relação não é reflexiva, não é simétrica, é transitiva, não é completa, é assimétrica* e *não é anti-simétrica.* A relação maior ou igual que, "$\geq$", *é reflexiva, não é simétrica, é transitiva, é completa, não é assimétrica* e *é anti-simétrica.*

Definição A.2 — Uma relação binária E num conjunto A é uma relação de equivalência (ou uma equivalência) se ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

Considerando o exemplo acima, podemos ver que nem a relação "maior" nem a relação "maior ou igual" são relações de equivalência. A relação "igual" é uma relação de equivalência. Um exemplo de relação de equivalência que se utiliza na teoria do consumidor é a relação de indiferença, I, isto é, dados os elementos x, y e z, pertencentes ao conjunto de alternativas de consumo do indivíduo, a relação I satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja: $x I x$; se $x I y$, então $y I x$; e, por fim, se $x I y$ e $y I z$, então $x I z$.

Qualquer relação de equivalência num conjunto A determina uma partição deste conjunto da maneira descrita a seguir. Os elementos $x \in A$ e $y \in A$ pertencem a um elemento desta partição se, e somente se, $x E y$. Os elementos desta partição são chamados classes de equivalência. Dados os elementos $x \in A$, a classe de equivalência gerada por x é o conjunto $E(x) = \{y \in A: x\ E\ y\}$. Convém ainda notar o seguinte: se $x \in A$ e $y \in A$, então exatamente uma das alternativas a seguir é verdadeira:

$$E(x) \cap E(y) = \phi$$

ou:

$$E(x) = E(y)$$

Definição A.3 — Uma relação binária R num conjunto X é uma *ordenação fraca* se ela é completa, reflexiva e transitiva.

As ordenações fracas são relações binárias que aparecem na teoria do comportamento do consumidor. Em geral, admite-se que, dado o conjunto das alternativas de consumo (ou oportunidades de consumo), existe uma relação binária R em X que é completa, reflexiva e transitiva. Esta relação é, portanto, uma *ordenação fraca* de X.

A.2 — Funções

Definição A.4 — Dados dois conjuntos não-vazios, A e B, uma função f de A em B é um conjunto de pares ordenados pertencentes a $A \times B$ tais que:

a) dado um elemento $a \in A$, existe $b \in B$, tal que (a, b) é um elemento de f; e

b) se (a, b) e (a, b') são elementos de f, então $b = b'$.

Considerando a definição acima, é fácil perceber que "a" e "b" correspondem, respectivamente, a "a" e "b" da Definição 8. A apresentação dos demais conceitos discutidos no texto será feita a seguir de maneira bastante sucinta.

Seja $f: A \rightarrow B$. Diz-se que:

a) f é biunívoca se, dados $(a, b) \in f$ e $(a', b) \in f$, tivermos $a = a'$;

b) f é *sobrejetiva* se $R(f) = B$; e

c) f é uma *correspondência biunívoca* se ela é biunívoca e sobrejetiva.

Dadas as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: C \rightarrow D$, com $R(f) \cap C \neq \phi$, define-se a *função composta* $g_0 f$ como sendo o conjunto $\{(a, c) \in A \times C: \exists\, b \in B$ com $(a, b) \in f$ e $(b, c) \in g\}$.

Dada uma bijeção $f: A \rightarrow B$, define-se a função inversa de f, f^{-1}, como sendo $\{(b, a) \in B \times A: (a, b) \in f\}$.

Para encerrar esta breve discussão, é interessante mencionar que ela não difere em substância do que foi feito no texto. A principal diferença reside no fato de que a noção de relação foi explicitamente definida, e a partir daí explicitamos a definição de função.

Capítulo II

ESPAÇO EUCLIDEANO

Tendo introduzido na última seção do Capítulo I o Conjunto dos Números Reais, passaremos agora a estudar o Espaço Euclideano. Essa incursão no Espaço Euclideano, em particular em sua Estrutura Topológica, é essencial para podermos, nos capítulos seguintes, dar um tratamento adequado aos elementos de Cálculo Diferencial e Integral e aos problemas de Otimização que discutiremos.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: no texto propriamente dito faremos todo o desenvolvimento da Estrutura Topológica do Espaço Euclideano, além de discutirmos as noções de Espaço Vetorial, Base de um Espaço Vetorial, Espaço Vetorial com Produto Interno e Espaço Vetorial Normado.

II.1 — Conceitos Básicos

Lembrando que o Produto Cartesiano $A \times A$ é indicado por A^2, apresentaremos o Produto Cartesiano dos p conjuntos, $p \in N$, $R \times R \times R \times \ldots \times R$, por R^p. Dessa maneira:

$$R^p = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_p) : x_i \in R \quad \text{e} \quad 1 \leqslant i \leqslant p \}$$

isto é, os elementos de R^p são as listas $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ compostas de p números reais. A estas chamaremos pontos ou elementos ou, ainda, vetores de R^p.

Definição 1 — Seja $p \in N$. O Espaço Euclideano de dimensão p é o conjunto R^p munido das operações *Adição de Vetores* e *Multiplicação Escalar* definidas a seguir.

Adição de Vetores. Dados $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in R^p$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in R^p$, define-se o elemento $x + y \in R^p$ da seguinte maneira: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p)$.

Multiplicação Escalar. Para todo $\alpha \in R$ e para todo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in R^p$, define-se o elemento $\alpha x \in R^p$ da seguinte maneira: $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_p)$.

Geometricamente, a *Adição de Vetores* em R^2 corresponde à chamada regra do paralelogramo e a *Multiplicação Escalar* em R^2 consiste em "aumentar" ou "encolher" o vetor x, dependendo de ser $|\alpha| > 1$ ou $|\alpha| < 1$. As Figuras 1 e 2 a seguir ilustram os conceitos.

Figura 1

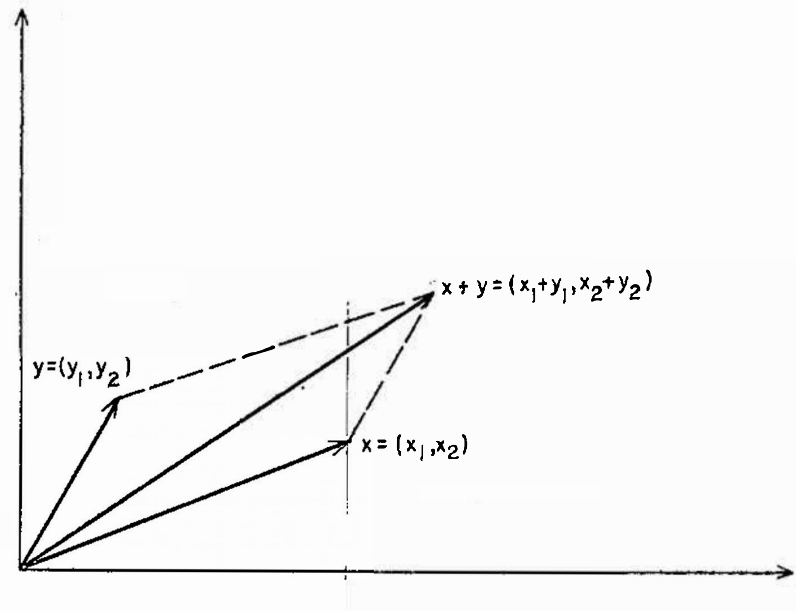
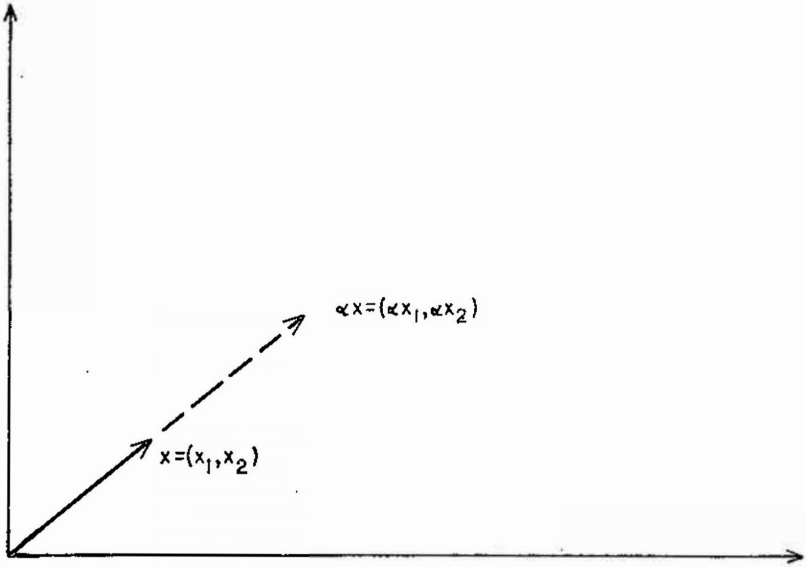


Figura 2



Definição 2 — Dados $x, y \in R^p$, define-se o *Produto Interno Canônico* de x por y da seguinte forma:

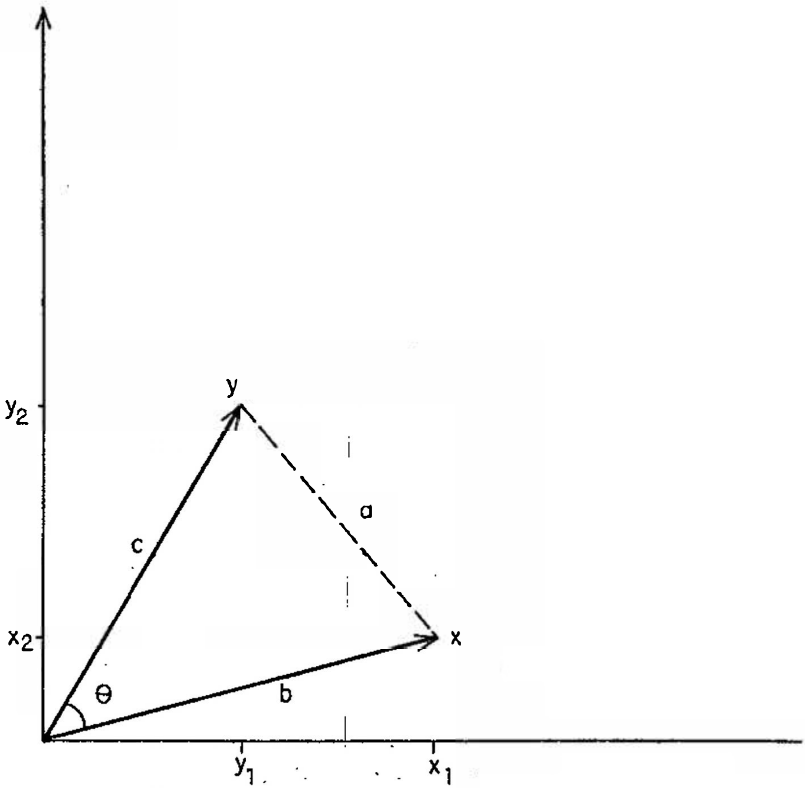
$$< x, y >_c = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_p y_p$$

Observe-se que $< x, y >_c$ é, na verdade, um número real. Se $x \in R^2$ e $y \in R^2$, podemos interpretar, geometricamente, o produto interno $< x, y >_c$ em função do co-seno do ângulo formado por x e y. Pela Figura 3 e utilizando a lei do co-seno, podemos escrever que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,(bc) \cos \theta \qquad (1)$$

onde b é o comprimento do vetor x, c o comprimento do vetor y e a o comprimento do vetor $x - y$.

Figura 3



Pelo teorema de Pitágoras, sabemos que:

$$b^2 = x_1^2 + x_2^2; \quad c^2 = y_1^2 + y_2^2$$

e:

$$a^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

Podemos agora reescrever (1) da seguinte maneira:

$$x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 y_1 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_2 y_2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - (2bc) \cos \theta$$

ou ainda:

$$< x, y >_o = x_1 y_1 + x_2 y_2 = (bc) \cos \theta$$

A interpretação acima é muito útil para materializar certas abstrações que faremos no desenvolver do trabalho. Note-se, entretanto, que a noção de produto interno independe desta interpretação, o que ficará mais claro quando estudarmos os Espaços Vetoriais com Produto Interno, onde procuramos generalizar o conceito.

Ainda utilizando a Figura 3, pode-se constatar facilmente que, se x e y forem perpendiculares, $\cos \theta = 0$, isto é, $< x, y >_c = 0$, o que nos dá uma maneira de definirmos ortogonalidade de vetores em R^p. *Diremos que* $x \in R^p$ *e* $y \in R^p$ *são vetores ortogonais se* $< x, y >_c = 0$.

Precisamos agora introduzir alguma maneira de medir o comprimento de um vetor em R^p. A Figura 3 e a discussão que a acompanha sugerem que devamos utilizar a seguinte medida:

Definição 3 — Dado $x \in R^p$, a *Norma Euclideana de* x é dada por:

$$| x | = \sqrt{< x, x >_c} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_p^2}$$

O Produto Interno Canônico e a Norma Euclideana definidos acima serão instrumentos básicos em todo o restante deste texto. Entretanto, antes de prosseguirmos na nossa incursão no Espaço Euclideano R^p com o Produto Interno Canônico e a Norma Euclideana, seria interessante fazermos algumas construções mais abstratas. Para tanto, procederemos de maneira análoga ao processo que adotamos para definir o Espaço Euclideano.

Inicialmente, dispúnhamos de um conjunto, o R^p, que foi dotado de uma Estrutura Algébrica dada pela *Adição de Vetores* e pela *Multiplicação Escalar*. Se adotarmos um procedimento similar para um conjunto qualquer, obteremos o que será denominado um Espaço Vetorial.

Definição 4 — Um Espaço Vetorial (ou Espaço Linear) sobre os números reais consiste no seguinte:

a) um conjunto E cujos elementos chamaremos de vetores; e

b) duas operações chamadas *Adição de Vetores* e *Multiplicação Escalar* que satisfazem as propriedades listadas a seguir.

Adição de Vetores. Dados $x \in E$ e $y \in E$, a Adição de Vetores associa ao par x, y o elemento $x + y \in E$, de maneira que:

(A.1) $x + y = y + x$, para todo $x, y \in E$;

(A.2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, para todo $x, y, z \in E$;

(A.3) existe um elemento $\theta \in E$ tal que $\theta + x = x + \theta = x$, para todo $x \in E$; e

(A.4) dado $x \in E$, existe um elemento $\bar{x} \in E$ tal que $x + \bar{x} = \bar{x} + x = \theta$.

Multiplicação Escalar. Dados $\alpha \in R$ e $x \in E$, a Multiplicação Escalar associa ao par α, x o elemento $\alpha x \in E$, de maneira que:

(M.1) $1 . x = x$, para todo $x \in E$;

(M.2) $\alpha (\beta x) = (\alpha \beta) x$, para todo $x \in E$ e para todo $\alpha, \beta \in R$; e

(M.3) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$ e $(\alpha + \beta) x = a x + \beta x$, para todo $x, y \in E$ e para todo $\alpha, \beta \in R$.

Vejamos alguns exemplos de Espaços Vetoriais.

1 — R com as operações de adição e multiplicação usuais é um Espaço Vetorial.

2 — R^p com a *Adição de Vetores* e *Multiplicação Escalar* definidas anteriormente é um Espaço Vetorial. É fácil ver que a Adição de Vetores satisfaz (A.1) e (A.2), que o elemento θ é o vetor $0 \in R^p$ e que o elemento $\bar{x}$ é o vetor $-x \in R^p$. Da mesma maneira, a *Multiplicação Escalar* satisfaz (M.1), (M.2) e (M.3).

3 — Considere-se o conjunto:

$$S = \{ (x_1, x_2, 0) \in R^3 : x_1 \in R \quad \text{e} \quad x_2 \in R \}$$

Com a *Adição de Vetores* e *Multiplicação Escalar* definidas para R^p, é fácil ver que, se $x, y \in S$ e $\alpha \in R$, então:

$$x + y \in S \quad \text{e} \quad \alpha x \in S$$

Além disto, estas operações satisfazem (A.1)-(A.4) e (M.1)-(M.3) da definição de Espaço Vetorial, $\theta = (0, 0, 0)$, e dado $x = (x_1, x_2, 0)$ o elemento $\overline{x}$ é $-x = (-x_1, -x_2, 0)$.

4 — Uma matriz 2 por 2 é uma tabela do seguinte tipo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

onde $a_{ij} \in R$, $i, j = 1, 2$.

Definamos agora:

a) *Adição de Matrizes.* Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

a *Adição de Matrizes* associa ao par A, B a matriz:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

b) *Multiplicação Escalar.* Dados $\alpha \in R$ e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a *Multiplicação Escalar* associa ao par α, A a matriz:

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}$$

Com as operações definidas acima, o conjunto das matrizes 2 por 2 forma um Espaço Vetorial onde o elemento θ é a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Além disto, dada a matriz A, o elemento $\overline{A}$ é matriz $-A$.

5 — Seja S um conjunto qualquer, $S \neq \phi$, e seja $\mathcal{F}(S, R^p)$ o conjunto de todas as funções definidas em S com valores em R^p. Definimos as operações:

a) *Adição de Vetores*. Dadas as funções $f, g \in \mathcal{F}(S, R)$, a Adição de Vetores associa ao par f, g o elemento $(f + g)\ (s) = f(s) + g(s)$ pertencente a R^p, para todo $s \in S$; e

b) *Multiplicação Escalar*. Dados $\alpha \in R$ e $f \in \mathcal{F}(S, R^p)$, a Multiplicação Escalar associa ao par α, f o elemento $(\alpha f)\ (s) = \alpha f(s)$ pertencente a R^p, para todo $s \in S$.

Mostremos que $\mathcal{F}(S, R^p)$ com as operações acima se constitui num Espaço Vetorial. Dados f, g e $h \in \mathcal{F}(S, R^p)$, $\alpha \in R$ e $s \in S$, temos que:

(A.1) $(f + g)\ (s) = f(s) + g(s) = g(s) + f(s) = (g + f)\ (s)$;

(A.2) $(f + g)\ (s) + h(s) = f(s) + g(s) + h(s) = f(s) + (g + h)\ (s)$;

(A.3) o elemento neutro da Adição é a função Z tal que $Z\colon S \to R^p$ e $Z(s) = 0 \in R^p$, para todo $s \in S$;

(A.4) o elemento $\bar{f} \in \mathcal{F}(S, R^p)$ é a função $(-f)$ tal que $(-f)\colon S \to R^p$ e $(-f)\ (s) = -f(s)$, para todo $s \in S$;

(M.1) claramente, $(1 . f)\ (s) = 1 . f(s) = f(s)$;

(M.2) $(\alpha(\beta f))\ (s) = \alpha((\beta f)\ (s)) = \alpha\beta f(s) = [(\alpha\beta) f]\ (s)$, para todo $\beta \in R$;

(M.3) $[\alpha(f + g)\ (s)] = \alpha(f + g)\ (s) = \alpha[f(s) + g(s)] = \alpha f(s) + \alpha g(s) = (\alpha f)\ (s) + (\alpha g)\ (s)$; e $[(\alpha + \beta) f]\ (s) = (\alpha + \beta)\ f(s) = \alpha f(s) + \beta f(s) = (\alpha f(s) + \beta f(s))$, para todo $\beta \in R$.

Passaremos agora a introduzir o conceito de *Base* de um Espaço Vetorial E. Consideremos, primeiramente, as definições de dependência linear e independência linear.

Definição 5 — Sejam $x^1, x^2, \ldots, x^n$ vetores pertencentes ao Espaço Vetorial E (sobre R). Então:

a) diz-se que $x^1, x^2, \ldots, x^n$ é um conjunto de vetores *linearmente dependentes* se $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0$ para algum conjunto de números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, sendo $\alpha_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$; e

b) diz-se que $x^1, x^2, \ldots, x^n$ é um conjunto de vetores *linearmente independentes* se $\alpha_1 x^1 + \ldots + \alpha_n x^n = 0$ somente se os números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ forem todos nulos.

Exemplos:

6 — Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são linearmente independentes, pois $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = (0, 0)$ só se verifica se $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 0$.

7 — Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $x = (2, 0)$ são linearmente dependentes, pois $-2 e_1 + x = (0, 0)$.

8 — Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$ são linearmente independentes, pois $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = (0, 0, 0)$ se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

9 — Os vetores $x = (1, 2)$, $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são linearmente dependentes, pois $x - e_1 - 2e_2 = 0$.

Definição 6 — Um conjunto de vetores $x^1, x^2, \ldots, x^n$ pertencentes a E forma uma *Base* para E se:

a) eles são linearmente independentes; e

b) qualquer que seja $x \in E$, existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tais que $x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_n x^n$, ou, em outras palavras, qualquer vetor de E pode ser expresso como uma "combinação linear" dos vetores da base.

Exemplos:

10 — Qualquer número real r diferente de zero é uma Base para R, pois, dado $\xi \in R$, $r = \lambda\xi$ para algum $\lambda \in R$.

11 — Sejam $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Estes vetores formam uma base para o Espaço Vetorial R^2, pois são linearmente independentes e, dado $x = (x_1, x_2) \in R^2$, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$.

12 — Considere-se o Espaço Vetorial S do exemplo 3. Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$ formam uma base para S, pois são linearmente independentes e, dado $x = (x_1, x_2, 0) \in S$, $x =$ $= x_1 e_1 + x_2 e_2$.

Definição 7 — Um Espaço Vetorial E é de dimensão finita se ele possui uma Base finita. A dimensão de um Espaço Vetorial de dimensão finita é o número de vetores de uma base de E.

Com relação à Definição 7 cabem algumas observações. Inicialmente, existem Espaços Vetoriais que não podem ser gerados a partir de nenhum conjunto finito de vetores linearmente independentes. Entretanto, em todos os casos de interesse para nós, estaremos tratando de Espaços de Dimensão Finita. Uma segunda observação é que um Espaço Vetorial pode ter várias bases. Entretanto, qualquer que seja a base considerada, pode-se mostrar que o número de vetores deve ser o mesmo. Dessa forma, a definição de dimensão dada acima independe da base considerada.

Exemplos:

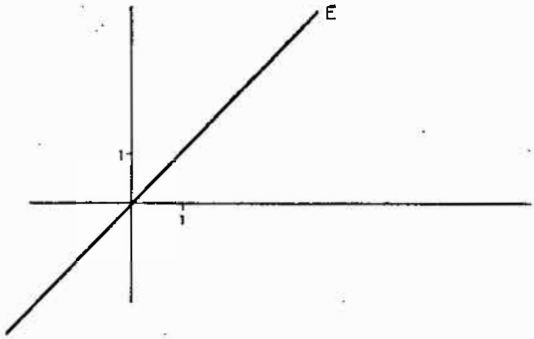
13 — O Espaço Vetorial R é de dimensão 1, pois qualquer base de R possui um único elemento.

14 — O Espaço Vetorial R^2 é de dimensão 2, como vimos no exemplo 11.

15 — O Espaço Vetorial S (exemplo 3) é de dimensão 2, pois uma base de S contém dois elementos.

16 — Um Espaço Vetorial E de dimensão 1, portanto, tem a propriedade de que qualquer elemento x do Espaço é proporcional a qualquer outro elemento, isto é, dados $x \in E$ e $y \in E$, existe $\alpha \in R$ tal que $x = \alpha y$.

Por exemplo, seja $E = \{(x_1, x_1) \in R^2 : x_1 \in R\}$. E é um Espaço Vetorial de dimensão 1. Geometricamente, corresponde à linha reta representada na figura a seguir.



Para finalizar esta discussão, seja o Espaço Vetorial R^p. É fácil ver que os vetores $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_j = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ e $e_p = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ formam uma base para este espaço. Logo, R^p é um Espaço Vetorial de dimensão p. A base acima é chamada a base canônica de R^p.

A Definição 8 a seguir procura generalizar a noção de *Produto Interno.*

Definição 8 — Seja E um Espaço Vetorial. Um *Produto Interno* em E é uma função definida em $E \times E$ e com valores em R tal que associa ao elemento $(x, y) \in E \times E$ um número real que indicaremos por $< x, y >$. Além disto, esta função satisfaz as propriedades:

a) $< x, x > \geqslant 0$ para todo $x \in E$;

b) $< x, x > = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

c) $< x, y > = < y, x >$ para todo $x, y \in E$;

d) $< x, y + z > = < x, y > + < x, z >$ para todo $x, y, z \in E$; e

e) $< ax, y > = a < x, y >$ para todo $a \in R$ e para todo $x, y \in E$.

Um Espaço Vetorial com um Produto Interno definido é chamado um *Espaço (Vetorial) com Produto Interno.* Dessa maneira, o Espaço Vetorial R^p com o Produto Interno Canônico é um Espaço com Produto Interno desde que nos certifiquemos de que o Produto

Interno Canônico satisfaz as propriedades apresentadas na Definição 8. Note-se que, qualquer que seja $x \in R^p$:

$$< x, x >_c = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 \geqslant 0 \quad \text{e} \quad < x, x >_c = 0$$

se, e somente se, $x = 0$. Além disto, se $y \in R^p$, $z \in R^p$ e $a \in R$:

$$< x, y >_c = x_1 y_1 + \ldots + x_p y_p = y_1 x_1 + \ldots + y_p x_p = < y, x >_c$$

$$< x, y + z >_c = x_1 (y_1 + z_1) + \ldots + x_p (y_p + z_p) = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_p y_p) + (x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots + x_p z_p) = < x, y >_c + < x, z >_c$$

$$< a x, y >_c = a x_1 y_1 + a x_2 y_2 + \ldots + a x_p y_p = a (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_p y_p) = a < x, y >_c$$

A noção de Norma pode também ser generalizada para os Espaços Vetoriais.

Definição 9 — Seja E um Espaço Vetorial. Uma norma em E é uma função definida em E com valores em R que associa a cada elemento $x \in E$ o número real $||x||$. Esta função satisfaz as seguintes propriedades:

a) $||x|| \geqslant 0$, para todo $x \in E$;

b) $||x|| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

c) $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$, para todo $\alpha \in R$ e para todo $x \in E$; e

d) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$, para todo $x, y \in E$.

(Desigualdade Triangular).

Um Espaço Vetorial com uma norma definida é chamado um *Espaço Vetorial Normado*. Dessa maneira, o Espaço Vetorial R^p com a Norma Euclideana é um Espaço Vetorial Normado desde que nos certifiquemos de que a Norma Euclideana satisfaz as propriedades apresentadas na Definição 9, o que ficará claro a partir do desenvolvimento que faremos a seguir.

Uma maneira natural de se definir uma Norma em um Espaço com Produto Interno é a seguinte: $||x|| = \sqrt{< x, x >}$ para todo elemento x pertencente ao Espaço.

A propriedade "a" do Produto Interno garante que a expressão acima é bem definida. Além disto, as propriedades "a" e "b" do Produto Interno garantem que "a" e "b" da Norma são satisfeitas. Seja, agora, $\alpha \in R$. Então: $||\alpha x|| = \sqrt{< \alpha x, \alpha x >} = \sqrt{\alpha^2 < x, x >} = |\alpha| \sqrt{< x, x >} = |\alpha| \, ||x||$ para todo elemento x pertencente ao Espaço e, portanto, "c" da Definição 9 se verifica. A verificação da Desigualdade Triangular será feita após demonstrarmos o teorema que se segue, cujo resultado será extremamente útil nos capítulos seguintes.

Teorema 1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) — Seja E um Espaço com Produto Interno e seja a norma de $x \in E$ definida da seguinte maneira: $||x|| = \sqrt{< x, x >}$. Então, quaisquer que sejam $x, y \in E$, temos que: $|< x, y >| \leqslant ||x|| \, ||y||$.

Além disto, se $x \neq 0$, $|< x, y >| = ||x|| \, ||y||$ se, e somente se, existe um número real c tal que $y = cx$.

Prova:

Se $x = 0$, a igualdade verifica-se, pois $< 0, y > = 0$. Se $x \neq 0$, seja $\alpha \in R$ tal que:

$$\alpha = \frac{< x, y >}{||x||^2}$$

e seja $z \in E$ tal que:

$$z = y - \alpha x$$

Note-se, inicialmente, que:

$$< z, x > = < y - \alpha x, x > = < y, x > - \alpha < x, x > = 0$$

Considere-se agora o desenvolvimento:

$$||y||^2 = < y, y > = < z + \alpha x, z + \alpha x > = < z, z > +$$
$$+ 2 \alpha < z, x > + \alpha^2 < x, x > = < z, z > + \alpha^2 < x, x >$$

Como $< z, z > \geqslant 0$, segue-se que:

$$||y||^2 \geqslant \alpha^2 < x, x > = \frac{< x, y >^2}{||x||^2}$$

o que garante que:

$$|< x, y >| \leqslant ||x|| \; ||y||$$

Passemos agora à segunda parte do teorema. Suponha-se que $y = c\,x$ para algum $c \in R$. Nesse caso, $< x, y >$ é igual a zero ou tem o mesmo sinal que c, pois:

$$< x, y > = < x, c\,x > = c < x, x >$$

Dessa maneira, temos dois casos a examinar:

a) se $c \geqslant 0$, $||y|| \; ||x|| = ||cx|| \; ||x|| = c||x||^2 = c< x, x > =$
$= < cx, x > = < y, x > = | < y, x > |$; e

b) se $c < 0$, $||y|| \; ||x|| = ||cx|| \; ||x|| = |c| \; ||x||^2 =$
$= -c\,||x||^2 = -c < x, x > = - < cx, x > = - < y, x > =$
$= | < y, x > |$.

Por outro lado, suponha-se que $||y|| \; ||x|| = |< x, y >|$. Então:

$$< z, z > = < y - \alpha x, y - \alpha x > = < y, y > - 2\alpha < x, y > +$$
$$+ \alpha^2 < x, x > = ||y||^2 - 2 \frac{< x, y >^2}{||x||^2} + \frac{< x, y >^2}{||x||^4} ||x||^2 =$$
$$= ||y||^2 - 2\,||y||^2 + ||y||^2 = 0$$

Logo, $z = y - \alpha\,x = 0$, o que completa a demonstração.

C. Q. D.

Mostremos, finalmente, que $||x|| = \sqrt{< x, x >}$ satisfaz a Desigualdade Triangular. Isto completará a demonstração de que

$\sqrt{<x, x>}$ é realmente uma norma em E no sentido da Definição 9. Observe-se que:

$$\begin{aligned}||x+y||^2 &= <x+y, x+y> = <x, x> + 2<x, y> + <y, y> = \\ &= ||x||^2 + 2<x, y> + ||y||^2 \leqslant ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 = \\ &= (||x|| + ||y||)^2\end{aligned}$$

Logo, $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Para complementar o entendimento da Desigualdade Triangular, mostraremos ainda que:

a) se $x \neq 0$, $||x + y|| = ||x|| + ||y||$ se, e somente se, existe um número real não-negativo c tal que $y = cx$; e

b) $|\,||x|| - ||y||\,| \leqslant ||x \pm y||$, para todo $x, y \in E$.

Demonstremos a afirmativa "a". Note-se que:

$$||x+y||^2 = <x+y, x+y> = ||x||^2 + 2<x, y> + ||y||^2$$

e:

$$(||x|| + ||y||)^2 = ||x||^2 + 2\,||x||\,||y|| + ||y||^2$$

Portanto, a igualdade das duas expressões acima ocorre se, e somente se, $||x||\,||y|| = <x, y>$. Da demonstração da Desigualdade de Cauchy-Schwarz concluímos que $y = cx$, para algum $c \geqslant 0$.

Demonstremos agora a afirmativa "b". Dados $x, y \in E$:

$$||x|| = ||x + y - y|| \leqslant ||x + y|| + ||y||$$

e:

$$||y|| = ||y + x - x|| \leqslant ||x + y|| + ||x||$$

Segue-se que $|\,||x|| - ||y||\,| \leqslant ||x + y||$. Substituindo-se y por $-y$, obtém-se a outra parte da desigualdade.

A partir de agora, quando falarmos em Desigualdade Triangular estaremos nos referindo a uma das seguintes relações: $|\,||x|| - ||y||\,| \leqslant ||x \pm y|| \leqslant ||x|| + ||y||$, para todo $x, y \in E$.

O leitor atento terá percebido, a esta altura, que a Norma Euclideana em R^p (Definição 3) satisfaz as quatro propriedades da

Definição 9, uma vez que ela é induzida pelo produto interno canônico em R^p, isto é:

$$|x| = \sqrt{< x, x >_c}$$

(Observação: a partir de agora omitiremos o subscrito c quando nos referirmos ao Produto Interno Canônico. A menos que explicitamente mencionado, o único Produto Interno que consideraremos em R^p é o Produto Interno Canônico e, portanto, utilizaremos a notação $< x, y >$ para indicá-lo.)

A Norma Euclideana não é a única que pode ser definida em R^p, pois existem pelo menos duas outras bastante utilizadas. Passaremos a considerá-las com algum detalhe, uma vez que elas são operacionalmente mais simples do que a Norma Euclideana e são equivalentes a ela num sentido que tornaremos mais preciso a seguir.

a) A *Norma do Máximo* associa a cada elemento $x \in R^p$ o número real:

$$|x|_M = max \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_p|\}$$

onde $max \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_p|\}$ é o maior dos números reais pertencentes ao conjunto $\{|x_1|, \ldots, |x_p|\}$.

Por exemplo, dado $x = (1, -2) \in R^2$:

$$|x|_M = max \{|1|, |-2|\} = |-2| = 2$$

Mostremos agora que $|x|_M$ é realmente uma norma, isto é, dado $x \in R^p$, $|x|_M$ satisfaz a Definição 9.

i) $|x|_M = max \{|x_1|, \ldots, |x_p|\} \geqslant |x_i| \geqslant 0$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

ii) $|x|_M = 0$ se, e somente se, $x = 0$, pois $|x_i| = 0$ se, e somente se, $x_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

iii) Dado $\alpha \in R$, $|\alpha x|_M = max \{|\alpha x_1|, \ldots, |\alpha x_p|\} = |\alpha| \ |x|_M$, uma vez que, se $|\alpha x|_M = |\alpha x_k|$ para algum $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, então, se $\alpha \neq 0$, $|\alpha x_k| \geqslant |\alpha x_i|$ se, e somente se, $|x_k| \geqslant |x_i|$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Se $\alpha = 0$, é claro que $|\alpha x|_M = |\alpha| \ |x|_M$.

iv) Dado $y \in R^p$, segue-se que $|x + y|_M = max \{|x_1 + y_1|, \ldots, \ldots, |x_p + y_p|\} = |x_k + y_k|$ para algum $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Como a função valor absoluto satisfaz a desigualdade triangular, segue-se que $|x + y|_M = |x_k + y_k| \leqslant |x_k| + |y_k| \leqslant max \{|x_1|, \ldots, |x_p|\} + max \{|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_p|\} = |x|_M + |y|_M$, o que conclui a demonstração.

b) A *Norma da Soma* associa a cada elemento $x \in R^p$ o número real:

$$|x|_s = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_p|$$

Deixamos a cargo do leitor a verificação de que $|x|_s$ é realmente uma norma em R^p.

Para encerrar esta seção demonstraremos algumas desigualdades válidas para as três normas que vimos considerando. É com base nesta desigualdade que, na seção seguinte, demonstraremos a equivalência das três normas.

Teorema 2 — Dado $x \in R^p$, temos que:

$$|x|_M \leqslant |x| \leqslant |x|_S \leqslant p\ |x|_M$$

Prova:

Suponha-se que $|x_k| = max \{|x_1|, \ldots, |x_p|\}$, onde k é um número natural pertencente ao conjunto $\{1, 2, \ldots, p\}$. Então:

$$|x|_M^2 = x_k^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 + \ldots + x_p^2 = |x|^2 \leqslant (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_k|^2 + \ldots + |x_p|^2) + (|x_1|\ |x_2| + |x_2|\ |x_1| + \ldots\ldots + |x_{k-1}|\ |x_k| + |x_k|\ |x_{k-1}| + \ldots\ldots + |x_{p-1}|\ |x_p| + |x_p|\ |x_{p-1}|) = (|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| + \ldots + |x_p|)^2 = |x|_S^2$$

Finalmente, $|x|_S = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_p| \leqslant p\ |x_k| = p\ |x|_M$.

C. Q. D.

II.2 — Conjuntos Abertos, Fechados, Compactos e Conexos

Para chegarmos às importantes noções de limites e continuidade necessitamos conhecer a estrutura de certos conjuntos no Espaço Euclideano R^p (a partir de agora nos referiremos a este espaço simplesmente como R^p). Nesta seção estudaremos aqueles conjuntos e as suas propriedades que serão de interesse nos demais capítulos.

Convém observar que as definições serão introduzidas na sua versão específica para R^p. Entretanto, quase todas elas se estendem — com pequenas modificações — para os Espaços Métricos. A exceção mais importante, no caso, refere-se aos *Conjuntos Compactos*, cuja definição específica para o R^p não pode ser generalizada para os Espaços Métricos, e tal generalização envolve mudanças substanciais.

II.2.1 — Conjuntos Abertos e Conjuntos Fechados

Definição 10 Seja $x \in R^p$ e seja $r \in R$, $r > 0$:

a) chama-se uma *Bola Aberta* com centro em x e raio r ao conjunto:

$$B(x, r) = \{y \in R^p: |x - y| < r\}$$

b) chama-se uma *Bola Fechada* com centro em x e raio r ao conjunto:

$$B[x, r] = \{y \in R^p: |x - y| \leqslant r\}$$

c) chama-se uma *Esfera* com centro em x e com raio r ao conjunto:

$$S[x, r] \quad \{y \in R^p: |x - y| \quad r\}$$

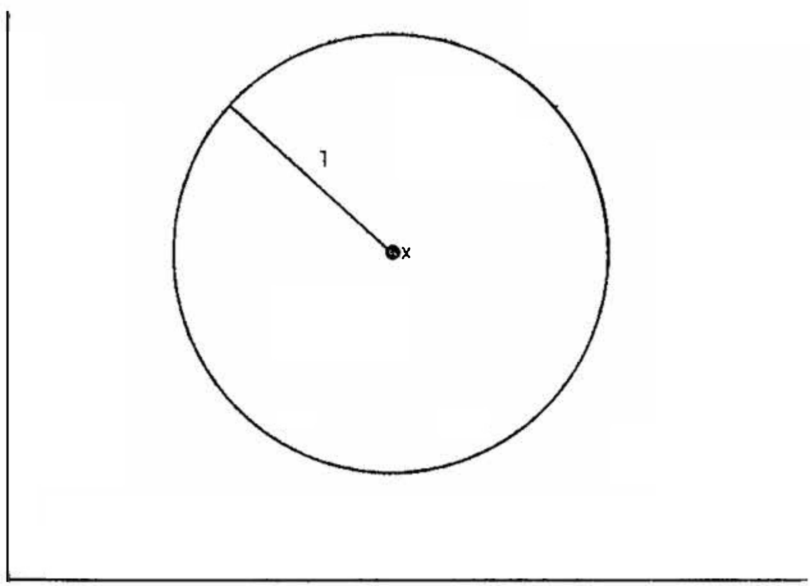
A noção de bola, principalmente de *Bola Aberta,* é fundamental para o desenvolvimento da Estrutura Topológica do R^p (e, em geral, dos Espaços Métricos). Em vista disto, vamos nos deter por alguns instantes para apresentarmos alguns exemplos de bolas e, em seguida, as definições das bolas segundo as normas do máximo e da soma, verificando as relações que se estabelecem entre elas.

Exemplos:

17 – Dados $x \in R^2$ e $r = 1$:

$$B(x, 1) = \{y \in R^2: |x - y| < 1\} =$$
$$= \{y \in R^2: (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 < 1\}$$

Geometricamente, a *Bola Aberta* em R^2 é o interior do círculo de centro em x e raio 1.



18 — Dados $x \in R^2$ e $r = 1$:

$$S[x, 1] = \{y \in R^2: |x - y| = 1\}$$

Geometricamente, a *Esfera* é o bordo da *Bola Aberta*.

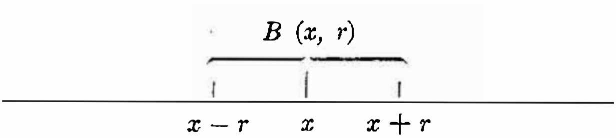
19 — Finalmente, dados $x \in R^2$ e $r = 1$:

$$B[x, 1] = \{y \in R^2: |x - y| \leqslant 1\} = B(x, 1) \cup S[x, 1]$$

20 — Vejamos agora a que se reduz uma *Bola Aberta* em R. Sejam $x \in R$ e $r \in R$, $r > 0$. Então:

$$B(x, r) = \{y \in R: |x - y| < r\} = \{y \in R: x - r < y < x + r\}$$

Geometricamente, $B(x, r)$ está representada pelo conjunto de todos os pontos que estão entre $x - r$ e $x + r$ na figura a seguir.



Aproveitando o exemplo 20, definiremos formalmente os Intervalos em R. Sejam $a, b \in R$ e $a < b$. Então, os Intervalos de extremos a e b são:

a) Intervalo Aberto: $(a, b) = \{x \in R: a < x < b\}$;

b) Intervalo Fechado: $[a, b] = \{x \in R: a \leqslant x \leqslant b\}$;

c) Intervalo Fechado à Esquerda: $[a, b) = \{x \in R: a \leqslant x < b\}$; e

d) Intervalo Fechado à Direita: $(a, b] = \{x \in R: a < x \leqslant b\}$.

Além destes quatro intervalos — que são conjuntos limitados em R —, podem ser definidos intervalos que não são limitados:

e) Semi-Reta Esquerda Fechada: $(-\infty, b] = \{x \in R: x \leqslant b\}$;

f) Semi-Reta Esquerda Aberta: $(-\infty, b) = \{x \in R: x < b\}$;

g) Semi-Reta Direita Fechada: $[a, +\infty) = \{x \in R: x \geqslant a\}$;

h) Semi-Reta Direita Aberta: $(a, \infty) = \{x \in R: x > a\}$; e

i) Reta: $(-\infty, +\infty) = R$.

Pelo que acabamos de ver no exemplo 20, uma Bola Aberta de centro em $x \in R$ e raio $r > 0$ é o intervalo aberto $(x - r, x + r)$. Da mesma forma, uma Bola Fechada de centro em $x \in R$ e raio $r > 0$ é o intervalo fechado $[x - r, x + r]$ e a Esfera $S[x, r]$ é o conjunto $\{x - r, x + r\}$.

Examinemos agora as definições de Bola segundo as normas da soma e do máximo:

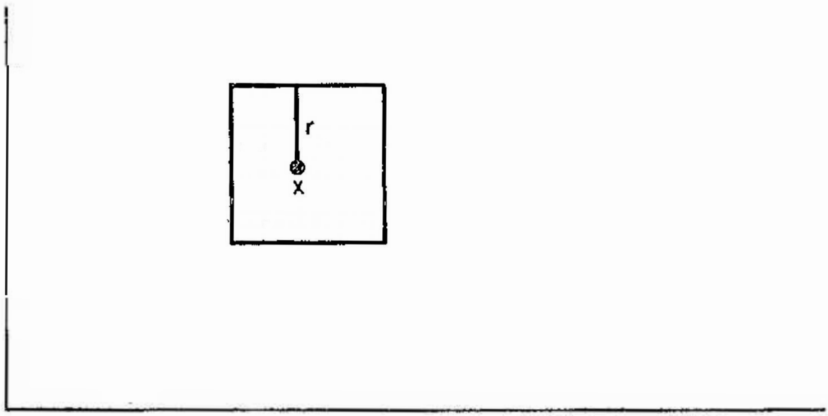
a) *Bola Aberta do Máximo.* Dados $x \in R^p$ e $r \in R$, $r > 0$, a *Bola Aberta do Máximo* é o conjunto:

$$B_M(x, r) = \{y \in R^p: |x - y|_M < r\}$$

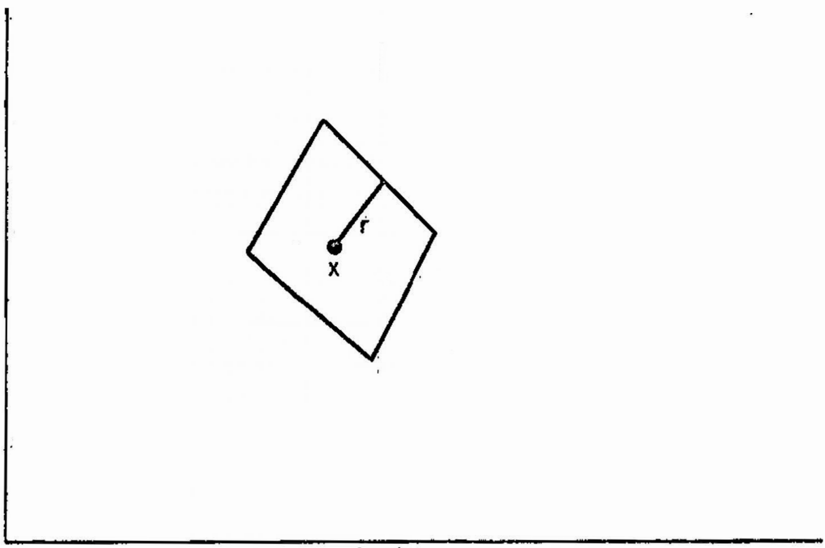
b) *Bola Aberta da Soma.* Dados $x \in R^p$ e $r \in R$, $r > 0$, a *Bola Aberta da Soma* é o conjunto:

$$B_S(x, r) = \{y \in R^p: |x - y|_S < r\}$$

É fácil ver que as Bolas Abertas do Máximo e da Soma de centro em $x \in R^2$ e raio r têm a seguinte representação geométrica:



Bola aberta do máximo

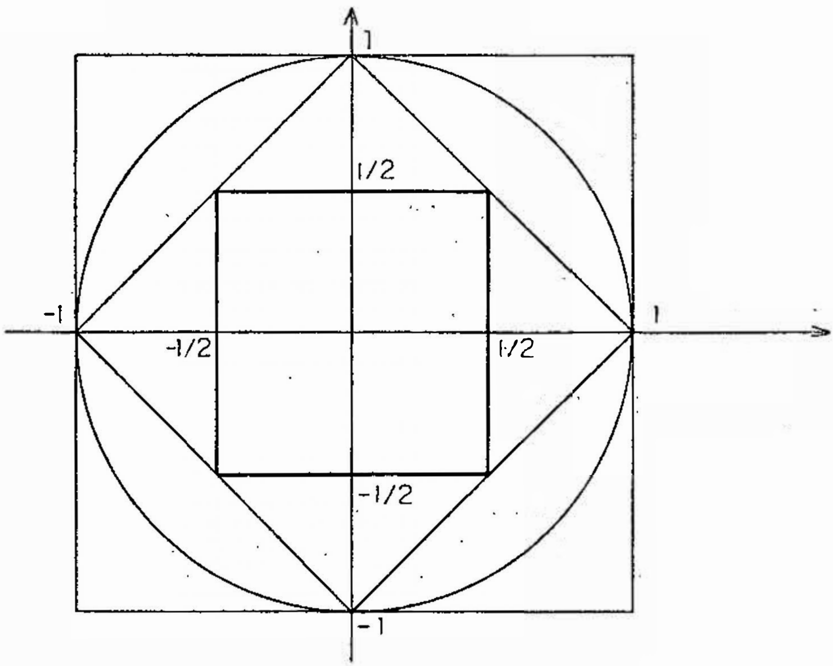


Bola aberta da soma.

Além disto, vale a seguinte relação entre as três bolas: dados $x \in R^p$ e $r \in R$, $r > 0$:

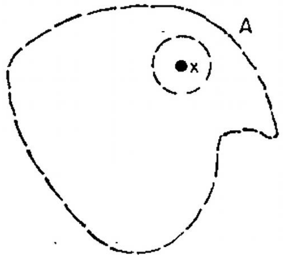
$$B_M(x, r/p) \subset B_S(x, r) \subset B(x, r) \subset B_M(x, r) \qquad (2)$$

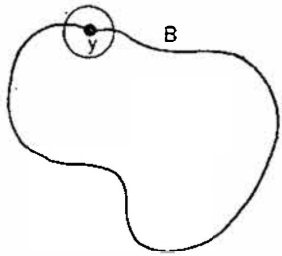
Esta relação pode ser demonstrada a partir do Teorema 2 deste capítulo. Tomando $x = (0, 0)$, $r = 1$, a relação (2) adquire a seguinte configuração em R^2:



Definição 11 — Um Conjunto $A \subset R^p$ é um *Conjunto Aberto em* R^p se para todo elemento $a \in A$ existe um número real r, $r > 0$, tal que $\dot{B}(a, r) \subset A$.

Em outras palavras, $A \subset R^p$ é aberto em R^p se *todo* elemento de A é centro de *alguma* bola aberta totalmente contida em A. Note-se, portanto, que para ser aberto um conjunto A deve "permitir" que tracemos, a partir de cada um dos seus pontos, uma bola aberta que esteja totalmente no conjunto A. Veja-se os diagramas a seguir: o conjunto A é aberto e o conjunto B não é àberto.



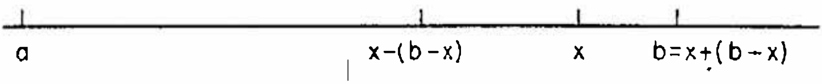


A é o conjunto delimitado pela linha pontilhada, porém não incluindo a linha. É fácil ver que de qualquer elemento de A podemos traçar uma bola contida em A. Por outro lado, como o conjunto B inclui toda a sua borda, ele não é aberto, pois não podemos traçar uma bola totalmente contida em B de um ponto como $y \in B$.

Examinemos alguns exemplos de conjuntos abertos.

Exemplos:

21 — O exemplo mais importante de conjunto aberto em R são os intervalos abertos. Assim, se $a < b$, o intervalo (a, b) é aberto em R, pois se $x \in (a, b)$, então a *Bola Aberta* $B(x, r)$, onde r é o menor dos números $|x - a|$ e $|x - b|$, está totalmente contida em (a, b), como pode ser ilustrado pela figura a seguir.



Mais formalmente, se $y \in B(x, r)$, então:

$$|y - x| < r$$

Donde temos que:

$$|y - x| < |x - b| \text{ e } |y - x| < |x - a|$$

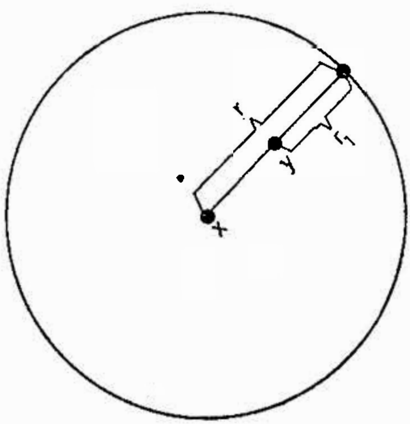
o que implica que $a < y < b$, ou seja, $y \in (a, b)$.

22 — Dados ainda $a < b$ em R, é fácil ver que o intervalo $(a, b]$ não é aberto em R, pois qualquer bola aberta com centro no ponto b não está totalmente contida em $(a, b]$.

23 — R^p é um conjunto aberto, pois, para qualquer $x \in R^p$, $B(x, 1) \subset R^p$.

24 — ϕ é um Conjunto Aberto em R^p, pois caso contrário deveria existir um elemento (! !) em ϕ que não é centro de nenhuma bola totalmente contida em ϕ.

25 — Sejam $x \in R^p$ e $r \in R$, $r > 0$. A Bola Aberta $B(x, r)$ é um Conjunto Aberto em R^p. Para provarmos isto devemos mostrar que, dado $y \in B(x, r)$, existe uma Bola Aberta de raio $r_1 \in R$, $r_1 > 0$, com centro em y totalmente contida em $B(x, r)$. A figura a seguir nos auxiliará a encontrar um número real para ser o raio da Bola Aberta.



A figura sugere que, se tomarmos $r_1 = r - |x - y|$, a bola $B(y, r_1)$ estará totalmente contida em $B(x, r)$. Verifiquemos isto. Seja $z \in B(y, r_1)$ e considere-se:

$$|z - x| = |z - y + y - x| \leqslant |z - y| + |y - x|$$

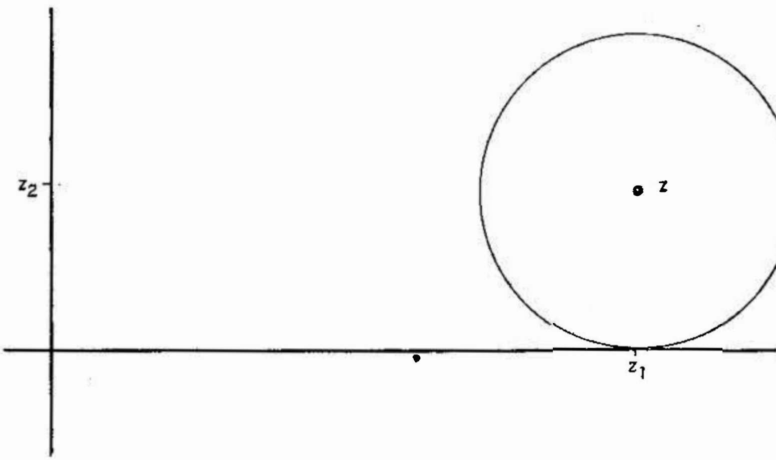
onde fizemos uso da desigualdade triangular para obter o último resultado. Note-se agora que $z \in B(y, r_1)$ e, portanto, $|z - y| < r_1$. Segue-se, portanto, que:

$$|z - x| < r_1 + |y - x| = r$$

Logo, $z \in B(x, r)$.

26 — O conjunto $A = \{x \in R^2 : x_1 > 0 \text{ e } x_2 > 0\}$ é aberto em R^2, pois, dado $z = (z_1, z_2) \in A$, a bola aberta $B(z, r)$, onde r é o menor dos números reais z_1 e z_2, está totalmente contida em A.

Para entendermos o que deu origem a esta escolha de r, vejamos a figura a seguir e, em seguida, demonstremos que $B(z, r) \subset A$.



Se $y = (y_1, y_2) \in B(z, r)$, então:

$$|y - z| < z_1 \text{ e } |y - z| < z_2$$

Além disto:

$$|y_i - z_i| \leqslant |y - z|, \; i = 1, 2$$

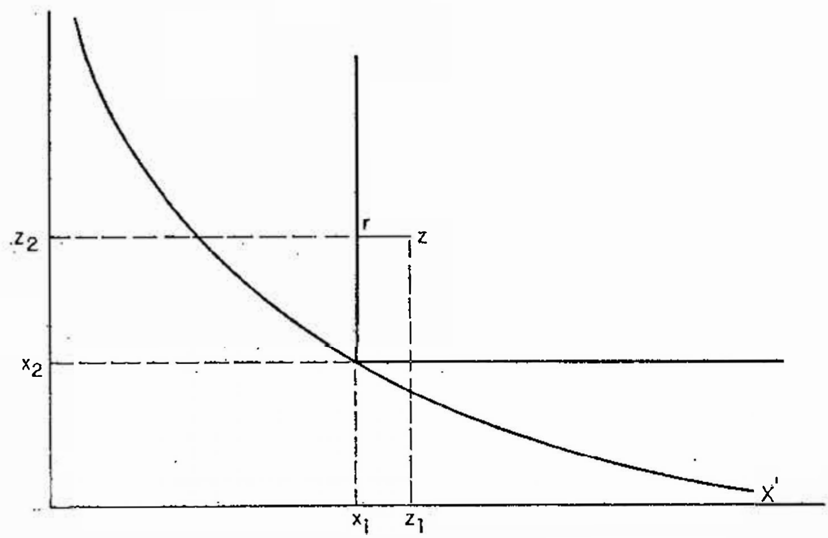
Logo:

$$-z_1 < y_1 - z_1 < z_1$$
$$-z_2 < y_2 - z_2 < z_2$$

donde obtém-se que $y_1 > 0$ e $y_2 > 0$.

27 – O conjunto $\overline{X} = \{(x_1, x_2) \in R^2_+ : x_1 \, x_2 \geqslant 1\}$ não é aberto em R^2, pois não existe nenhuma bola aberta de centro no ponto $(1, 1)$ contida em $\overline{X}$.

28 – O conjunto $X = \{(z_1, z_2) \in R^2_+ : z_1 \, z_2 > 1\}$ é aberto em R^2. Para mostrar isto utilizaremos a figura a seguir, onde X' é o conjunto $\{(x_1, x_2) \in R^2_+ : x_1 \, x_2 = 1\}$.



Dado $z = (z_1, z_2) \in X$, seja $x = (x_1, x_2)$ tal que $x_1 \, x_2 = 1$ e $x_1 < z_1$ e $x_2 < z_2$.

Por exemplo, o ponto:

$$\left(\frac{z_1 z_2 + 1}{2z_2}, \frac{2z_2}{z_1 z_2 + 1} \right)$$

tem essa propriedade.

Consideremos a bola aberta $B(z, r)$, onde $M = min \{z_1 - x_1, z_2 - x_2\}$.

Se $y \in B(z, r)$, então:

$$|y_i - z_i| \leqslant |y - z| < z_i - x_i$$

isto é:

$$y_i > x_i \qquad\qquad i = 1, 2$$

Daí concluímos que:

$$y_1 y_2 > y_1 x_2 > x_1 x_2 = 1$$

o que significa que $B(z, r) \subset X$. Com isto mostramos que o conjunto X é aberto em R^2.

Passemos agora às propriedades dos Conjuntos Abertos.

Teorema 3 (Propriedades dos Conjuntos Abertos):

a) ϕ e R^p são abertos em R^p;

b) se A e B são conjuntos abertos em R^p, então $A \cap B$ é um conjunto aberto em R^p; e

c) qualquer reunião de conjuntos abertos em R^p é um conjunto aberto em R^p.

Prova:

a) Já mostramos (exemplos 23 e 24) que ϕ e R^p são abertos.

b) Seja $x \in A \cap B$ (se $A \cap B = \phi$, não há o que provar).

Temos que:

— como A é aberto em R^p, existe $r_A > 0$, tal que $B(x, r_A) \subset A$; e

— como B é aberto em R^p, existe $r_B > 0$, tal que $B(x, r_B) \subset B$.

Tomemos $r = min\ \{r_A, r_B\}$. Então, $B\ (x, r) \subset A$ e $B\ (x, r) \subset B$, ou seja $B\ (x, r) \subset A \cap B$, o que mostra que $A \cap B$ é aberto em R^p.

c) Seja S um conjunto qualquer, $S \neq \phi$, e para cada $s \in S$ seja A_s um conjunto aberto. Indiquemos por:

$$A = \bigcup_{s \in S} A_s$$

a reunião dos conjuntos A_s.

Mostremos que A é aberto. Ora, se $x \in A$, existe um $s \in S$ tal que $x \in A_s$. Como A_s é aberto em R^p, $B\ (x, r) \subset A_s$ para algum real $r > 0$ e, portanto, $B\ (x, r) \subset A$.

C. Q. D.

Corolário: Dados $n \in N$ e os conjuntos abertos em R^p, A_1, $A_2, \ldots, A_n$, então $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ é um conjunto aberto.

A demonstração desse Corolário pode ser feita pelo Princípio da Indução. Um aspecto que, entretanto, deve ser esclarecido é que uma interseção infinita de conjuntos abertos *pode* não ser um conjunto aberto, como mostra o exemplo a seguir. Sejam $A_n = \{x \in R\colon x > -1$ e $x < 1/n\}$, para todo $n \in N$.

Pode ser verificado que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (-1, 0]$, que não é aberto em R, apesar de cada A_n ser aberto em R.

Mostraremos agora um resultado importante sobre a *Estrutura dos Conjuntos Abertos em R.*

Teorema 4 (Estrutura dos Conjuntos Abertos em R) — Um conjunto não-vazio $A \subset R$ é aberto se, e somente se, A é uma união contável de intervalos abertos dois a dois disjuntos. Além disto, este conjunto de intervalos é único.

Prova:

Se $A \subset R$ é uma união contável de intervalos abertos, claramente A é aberto.

Suponha-se, por outro lado, que A é aberto. Seja $x \in A$ e seja I_x a união de todos os intervalos abertos contidos em A e que contém x. Verifiquemos, inicialmente, que I_x é um intervalo aberto. Sejam $a = inf\, I_x$, $b = sup\, I_x$ e considere-se o intervalo (a, b) — note-se que, se I_x não é limitado inferiormente, o intervalo (a, b) é a semi-reta esquerda aberta; se I_x não é limitado superiormente, então (a, b) é a semi-reta direita aberta; e, se I_x não é limitado inferiormente e superiormente, $(a, b) = R$. Note-se ainda que $I_x \subset (a, b)$. Além disto, se $z \in (a, b)$, existem $v \in I_x$ e $v' \in I_x$ tais que $v < z < v'$, pois $a = inf\, I_x$ e $b = sup\, I_x$. Como $v \in I_x$, existe um intervalo aberto, $(a_v, b_v) \subset A$, tal que $v \in (a_v, b_v)$ e $x \in (a_v, b_v)$. Da mesma maneira, existe um intervalo aberto, $(a_{v'}, b_{v'}) \subset A$, tal que $v' \in (a_{v'}, b_{v'})$ e $x \in (a_{v'}, b_{v'})$.

Destas observações concluímos que $a_v < z < b_{v'}$. Então, se $z < b_v$, $z \in I_x$. Se, no entanto, $z \leqslant b_v$, então $a_{v'} < z < b_{v'}$ (pois $a_{v'} < b_v$, uma vez que $x \in (a_v, b_v)$ e $x \in (a_{v'}, b_{v'})$ e, portanto, $z \in I_x$. Em conclusão, $I_x = (a, b)$.

Sejam, agora, $x \in A$, $y \in A$ e suponha-se que $z \in I_x \cap I_y$. Então, $z \in I_x = (a_x, b_x)$ e $z \in I_y = (a_y, b_y)$. Temos então que $a_y < b_x$, $a_x < b_y$, $a_y \notin A$ e $a_x \notin A$, pois, se $a_y \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $y \in (a_y - \varepsilon, b_y) \supset I_y$. Logo, $a_y \notin (a_x, b_x)$ e, da mesma maneira, $a_x \notin (a_y, b_y)$, donde se obtém que $a_y \leqslant a_x$ e $a_x \leqslant a_y$.

Um argumento semelhante mostra que $b_x = b_y$. Assim, dados x e y, ou $I_x \cap I_y = \phi$ ou $I_x = I_y$.

É fácil ver que $A = \bigcup\limits_{x \in A} I_x$. Para verificar que a coleção é contável, notemos que, dado o intervalo I_x, existe um número racional $r \in I_x$. Cada I_x está, portanto, associado com um único número racional e, como o conjunto dos racionais é enumerável, segue-se que a coleção I_x é finita ou enumerável.

Falta-nos mostrar apenas a unicidade desta decomposição. Seja J uma família de intervalos abertos dois a dois disjuntos tais que $A = \cup J$. Se $(a, b) \in J$ e se $a \in A$, então existe $(c, d) \in J$ tal que $a \in (c, d)$. Ora, mas então $(a, b) \cap (c, d) \neq \phi$, o que contradiz o fato de que J é uma coleção de intervalos disjuntos dois a dois. Logo, $a \notin A$ e também $b \notin A$. Dado $x \in (a, b)$, segue-se que $(a, b) \subset I_x$.

pois I_x é a união de todos os abertos contidos em A que contém x. Note-se ainda que, se $I_x = (a_x, b_x)$, $a_x \notin A$ e $b_x \notin A$ e, em conseqüência, $a = a_x$, $b = b_x$. Acabamos assim de mostrar que $J \subset I$, onde I é a família de intervalos inicial.

Suponha-se agora que $(a_x, b_x) \in I$ e que $(a_x, b_x) \notin J$. Então, $x \in A$ e $x \notin \cup J = A$. Esta contradição mostra que $I = J$.

C. Q. D.

Para finalizar a discussão dos conjuntos abertos, convém salientar que a definição que apresentamos não depende da norma utilizada. Recordando a relação (2) que estabelecemos entre as bolas da soma, do máximo e Euclideana, fica bem claro que um conjunto é aberto em R^p por uma das normas se, e somente se, ele também for aberto pelas outras duas normas. Este é o sentido em que dissemos que as três normas eram equivalentes: elas determinam os mesmos conjuntos abertos em R^p. Como todas as noções de limite que estudaremos baseiam-se, de uma forma ou de outra, na de conjunto aberto, esta equivalência das normas torna-se importante em todos os desenvolvimentos que faremos. Convém advertir ao leitor que a partir de agora utilizaremos esta equivalência sem mencioná-la explicitamente.

Definição 12 — Um conjunto $F \subset R^p$ é fechado em R^p se $\complement F$ é aberto em R^p.

Exemplos:

29 — O intervalo $[0, 1]$ é um conjunto fechado, pois o $\complement [0, 1]$ é o conjunto:

$$(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

que é uma reunião de dois conjuntos abertos em R.

30 — A semi-reta esquerda fechada $(-\infty, b]$, $b \in R$, é um conjunto fechado, pois:

$$\complement(-\infty, b] = (b, +\infty)$$

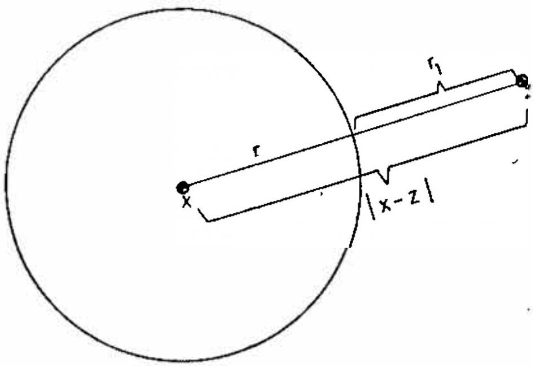
é um conjunto aberto em R.

31 — Dados $a, b \in R$, $a < b$, o intervalo $(a, b]$ não é fechado em R. Vimos no exemplo 22 que ele também não é aberto em R. Dessa maneira, fica claro que existem conjuntos que não são abertos nem fechados, isto é, se B é um conjunto, as afirmativas "B não é aberto e B não é fechado" não determinam necessariamente uma contradição.

32 — Dados $x \in R^p$ e $r \in R$, $r > 0$, a bola fechada $B\,[x, r]$ é um conjunto fechado em R^p. Mostremos que $\complement B\,[x, r]$ é aberto em R^p:

$$\complement B\,[x, r] = \{y \in R^p : |y - x| > r\}$$

Seja $z \in \complement B\,[x, r]$ e seja $B\,(z, r_1)$, $r_1 = |x - z| - r$.



Se $p \in B\,(z, r_1)$, então temos que:

$$|z - x| \leqslant |z - p| + |p - x| < |z - x| - r + |p - x|$$

ou seja:

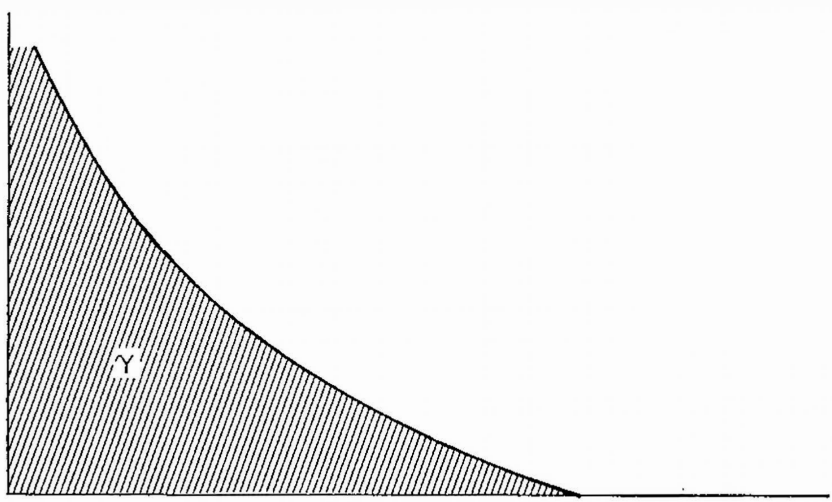
$$|p - x| > r$$

o que significa que $p \in \complement B\,[x, r]$. Portanto, $B\,[x, r]$ é fechado em R^p.

33 — ϕ e R^p são conjuntos fechados, pois $\complement\phi = R^p$ é aberto e $\complement R^p = \phi$ também é aberto. O fato de que estes conjuntos sejam ao mesmo tempo abertos e fechados pode causar certa preocupação, pois pode parecer que existem outros conjuntos que também são abertos e fechados. Demonstraremos mais à frente que isto não ocorre. ϕ e R^p são os únicos conjuntos que são simultaneamente abertos e fechados em R^p.

34 — O conjunto R^2_- é fechado, pois $\complement R^2_- = \{(x, y) \in R^2_+ : x > 0$ e $y > 0\} \cup \{(x, y) \in R^2 : x > 0$ e $y < 0\} \cup \{(x, y) \in R^2 : x < 0, y > 0\}$ é aberto em R^2.

35 — O conjunto $\gamma = \{(x, y) \in R^2_+ : xy \leqslant 1\}$ é um conjunto fechado em R^2, pois $\complement\gamma = \{(x, y) \in R^2_+ : xy > 1\} \cup \{(x, y) \in R^2 : x < 0\} \cup \{(x, y) \in R^2 : x > 0$ e $y < 0\}$ é um conjunto aberto.



Teorema 5 (Propriedades dos Conjuntos Fechados):

a) ϕ e R^p são conjuntos fechados em R^p;

b) se F e G são conjuntos fechados em R^p, $F \cup G$ é um conjunto fechado em R^p; e

c) qualquer interseção de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

A demonstração dos itens "b" e "c" deste teorema é uma conseqüência das leis de De Morgan e das propriedades dos conjuntos abertos. Observe-se, entretanto, que a formulação que fizemos das leis de De Morgan não inclui o caso "c" acima. Entretanto, a demonstração dada, na verdade, vale para qualquer coleção de conjuntos.

Corolário — Dado $n \in N$ e dados os conjuntos fechados em R^p, $F_1, F_2, \ldots, F_n$, então $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ é um conjunto fechado em R^p.

A prova deste corolário pode ser feita utilizando-se o Princípio da Indução. Observe-se, entretanto, que uma união arbitrária de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado, pois um conjunto qualquer é a união de todos os seus elementos, e um conjunto que contém um único elemento é fechado.

II.2.2 — Vizinhança, Interior, Fronteira, Fecho e Conjunto Derivado

Definição 13 — Seja $x \in R^p$. Diz-se que $A \subset R^p$ é uma *Vizinhança* de x se A contém uma bola aberta que contém x.

Exemplos:

36 — O intervalo $[0, 1]$ é uma vizinhança de $x = 1/2$, pois contém uma bola aberta — por exemplo, $(1/3, 2/3)$ — que contém x. Na verdade, $[0, 1]$ é uma vizinhança de qualquer elemento pertencente a $(0, 1)$. Entretanto, ele não é uma vizinhança nem de 1 nem de 0.

37 — Seja $x \in R^p$ e seja $B(x, r)$, $r \in R$, $r > 0$. $B(x, r)$ é uma vizinhança de x.

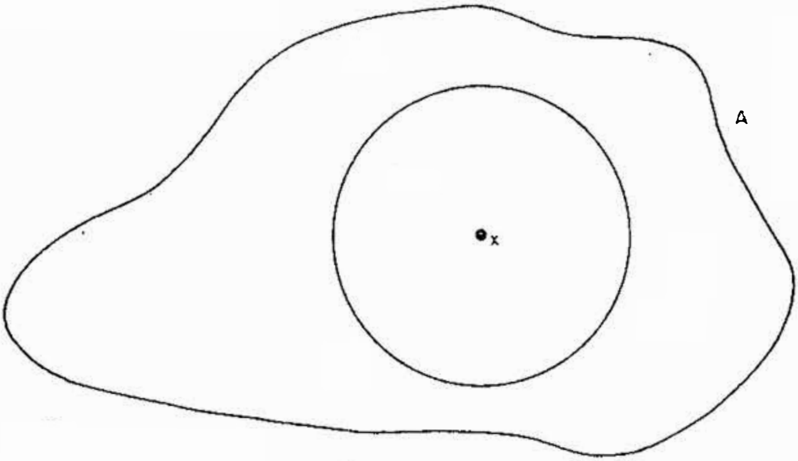
Note-se que ao definir *Vizinhança* poderíamos simplesmente dizer que $A \subset R^p$ é uma vizinhança de $x \in R^p$ se, e somente se, A contém um conjunto aberto que contém x. Isto porque A contém uma bola aberta que contém x se, e somente se, A contém um conjunto aberto que contém x.

O fato acima pode ser bastante útil em certos casos em que não estamos interessados em trabalhar com a rigidez imposta pelas bolas. Além disto, em muitos casos é mais fácil provar que um conjunto contém um conjunto aberto do que provar que ele contém uma bola aberta.

Descrevemos a seguir uma outra observação útil com relação ao conceito de *vizinhança*. Suponha-se que um certo ponto x seja definido em função de uma propriedade P da qual gozam todas as vizinhanças de x. Ora, já vimos no exemplo 37 que todas as bolas de centro x e raio $r > 0$ gozam desta propriedade. O mais interessante é que, se todas as bolas de centro x e raio $r > 0$ gozam da propriedade P, então toda vizinhança de x goza de P. Suponha-se que toda bola de centro x e raio $r > 0$ goza de P e que existe uma vizinhança de x que não goza da propriedade P. Isto, no entanto, não pode ocorrer, pois podemos traçar uma bola de centro x contida nesta vizinhança que contém x.

O que esta última observação nos garante é que, se todas as vizinhanças com as quais trabalhamos forem bolas, não estaremos perdendo em generalidade. Entretanto, o fato de trabalharmos exclusivamente com bolas pode dificultar — como dissemos acima — desnecessariamente certas demonstrações. O conceito de *vizinhança* nos permite uma grande flexibilidade em sua utilização, mas fica a nosso critério que tipo de vizinhança considerar em um problema dado. Estas idéias poderão ser melhor apreciadas quando apresentarmos as demais definições desta seção.

Definição 14 — $x \in R^p$ é um *Ponto Interior* de $A \subset R^p$ se A é uma vizinhança de x, isto é, se A contém uma bola aberta que contém x.



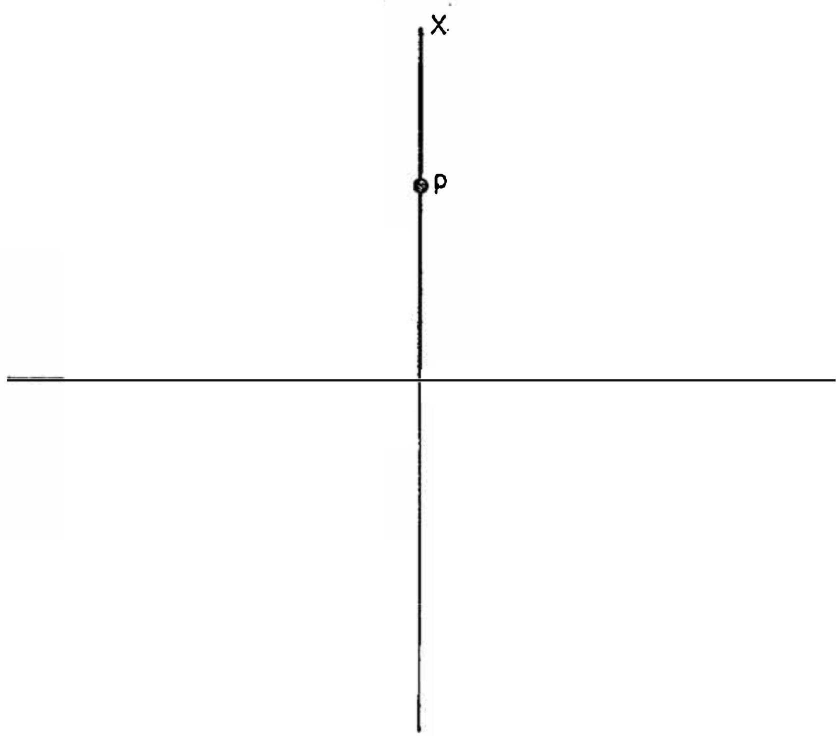
Chama-se interior A, indica-se $\mathring{A}$ ou *int* A, ao conjunto de todos os pontos interiores de A.

Exemplos:

38 — Seja $I = [0, 1]$. Pelo que vimos no exemplo 36, I é uma vizinhança de todos os pontos que pertencem a $(0, 1)$. Logo, $\mathring{I} = (0, 1)$.

39 — O conjunto $X = \{ (x_1, x_2) \in R^2 : x_1 = 0 \text{ e } x_2 \geqslant 0 \}$ possui interior vazio. Veja-se a figura a seguir e a argumentação que se segue.

Seja $p = (0, p_2) \in X$ e seja $B(p, r)$, $r > 0$. O ponto $Z = (r/2, p_2) \in B(p, r)$ não pertence a X. Como p e r são arbitrários, $\mathring{X} = \phi$.



40 — O conjunto $X = \{ (x_1, x_2, x_3) \in R^2 \colon x_1 = 0$ e $x_2 + x_3 \leqslant 1 \}$ possui interior vazio. Seja $p = (0, p_2, p_3) \in X$ e seja $B\,(p, x)$, $r > 0$:

$$y = \left(\frac{r}{2}, p_2, p_3 \right) \notin X$$

Porém, $|p - y| = r/2 < r$.

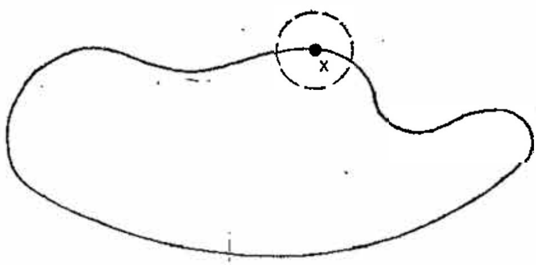
Para encerrar a nossa discussão sobre interior de um conjunto, façamos algumas observações:

a) dado $A \subset R^p$, é sempre verdade que $\mathring{A} \subset A$;

b) se $A \subset R^p$ é aberto, então $A = \mathring{A}$, pois ou $A = \phi$ ou então, se $x \in A$, existe $B\,(x, r) \subset A$, $r > 0$, seguindo-se disto que $x \in \mathring{A}$; e

c) dado $A \subset R^p$, $\mathring{A}$ é um conjunto aberto em R^p, o que decorre imediatamente da definição de ponto interior, e *dessa maneira podemos dizer que $A \subset R^p$ é aberto em R^p se, e somente se, $A = \mathring{A}$.*

Definição 15 — $x \in R^p$ é um *Ponto de Fronteira* de $A \subset R^p$ se toda vizinhança de x contém um ponto em A e um ponto em $\complement A$.



Chama-se *fronteira de A*, indica-se $Fr\ A$, ao conjunto de todos os pontos de fronteira de A.

Exemplos:

41 — A fronteira dos conjuntos $[0, 1]$ e $(0, 1)$ é o conjunto $\{0, 1\}$.

42 — Dado o conjunto X do exemplo 39, temos que $Fr\ X = X$. Vejamos isto: a) $X \subset Fr\ X$ segue-se do mesmo argumento que mostrou que $\mathring{X} = \phi$; e b) $Fr\ X \subset X$ também é verdade, pois, se $x \in \complement X$, então x não pode ser ponto de $Fr\ X$, pois $\complement X$ é aberto em R^p, isto é, se $x \in \complement X$, existe uma bola de centro x totalmente contida em $\complement X$ e, portanto, $x \notin Fr\ X$.

43 — Dadas as bolas $B\ (x, r) \subset R^p$ e $B\ [x, r] \subset R^p$, a fronteira de ambas é o conjunto $S\ [x, r] \subset R^p$.

Observações com relação à fronteira de um conjunto $A \subset R^p$:

a) $\mathring{A} \cap Fr\ A = \phi$, pois, se $x \in Fr\ A$, toda bola de centro em x contém elementos do $\complement A$. Logo, $x \notin \mathring{A}$.

b) De "a" e da observação "c" sobre interior de um conjunto, segue-se que *A é aberto se, e somente se, $A \cap Fr\ A = \phi$.*

c) *De "b" acima segue-se que $F \subset R^p$ é fechado se, e somente se,* $Fr\ F \subset F$. Isto porque $\complement F$ é aberto se, e somente se, $\complement F \cap$ $\cap\ (Fr\ \complement F) = \phi$. Como $Fr\ \complement F = Fr\ F$, temos que $\complement F \cap Fr\ F = \phi$, donde $Fr\ F \subset F$.

d) O resultado "c" nos permite afirmar que o conjunto X do exemplo 39 é um conjunto fechado.

e) Finalmente, observe-se que, dados $y \in R^p$ e $A \subset R^p$, existem três possibilidades que se excluem mutuamente: $y \in \mathring{A}$ ou $y \in Fr\ A$ ou y pertence ao interior do $\complement A$.

Já mostramos que as duas primeiras excluem-se mutuamente. Seja y pertencente ao interior de $\complement A$. Claramente, $y \notin \mathring{A}$. Além disto, existe um número real $r > 0$ tal que $B\ (y, r) \subset \complement A$. Portanto, $y \notin Fr\ \complement A = Fr\ A$.

Definição 16 — $x \in R^p$ é um *Ponto de Acumulação* de $A \subset R^p$ se toda vizinhança de x contém pelo menos um ponto de A que é diferente de x.

Chama-se *Conjunto Derivado*, indica-se A', ao conjunto dos pontos de acumulação de A.

Exemplos:

44 — Dados os intervalos $[0, 1]$ e $(0, 1)$, qualquer ponto em $[0, 1]$ é ponto de acumulação de ambos.

45 — Sejam $B = [2, 3]$ e $A = B \cup \{5\}$. Todo elemento de B é ponto de acumulação de A, porém o elemento 5 não é ponto de acumulação de A, pois existem vizinhanças de 5 cujo único elemento de A que elas contêm é o próprio 5.

Quando $x \in A \subset R^p$ não é ponto de acumulação de A, dizemos que x é um Ponto Isolado.

46 — O conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ não possui pontos de acumulação. Todos os seus elementos são pontos isolados. Se $x \notin \{1, 2, 3, 4\}$, qualquer bola $B(x, r)$, onde $r = min \{|1 - x|, |2 - x|, |3 - x|, |4 - x|\}$, é tal que $B(x, r) \cap \{1, 2, 3, 4\} = \phi$.

Definição 17 — Chama-se fecho de $A \subset R^p$, indica-se $\overline{A}$, ao conjunto $\overline{A} = A \cup A'$.

O fecho dos conjuntos $(0, 1)$ é o conjunto $[0, 1]$. O fecho do conjunto A do exemplo 45 é o próprio conjunto A.

Teorema 6 — Um conjunto $F \subset R^p$ é fechado se, e somente se, $F' \subset F$.

Prova:

Suponha-se que F é fechado. Suponha-se também, por absurdo, que existe $y \in F'$ tal que $y \notin F$. Então, $y \in \complement F$, que é aberto. Logo, existe um número real $r > 0$ tal que $B(y, r) \subset \complement F$, o que contradiz a hipótese de que $y \in F'$. Logo, se $y \in F'$, $y \in F$, isto é, $F' \subset F$.

Suponha-se, por outro lado, que $F' \subset F$ e mostremos que $\complement F$ é aberto. Se $x \in \complement F$, então $x \notin F'$. Então, existe $B(x, r) \subset \complement F$, $r > 0$. Logo, $\complement F$ é aberto.

C. Q. D.

Corolário: $F \subset R^p$ é fechado se, e somente se, $F = \overline{F}$.

Prova:

Do teorema acima segue-se que F é fechado se, e somente se, $F = F \cup F'$.

II.2.3 — O Teorema de Bolzano-Weierstrass

Uma questão importante em alguns casos é assegurar a existência de pontos de acumulação para um conjunto. Já vimos no exemplo 46 que é possível que um conjunto não possua pontos de acumulação. Na verdade, o argumento utilizado para garantir que o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ não possui pontos de acumulação pode ser generalizado para provar que um conjunto finito não possui pontos de acumulação. Entretanto, existem conjuntos infinitos que também não possuem pontos de acumulação, como é o caso de:

$$B = \{x \in R: x = n^2, n \in N\} = \{1, 4, 9, 16 \ldots\ldots\}$$

Examinemos o conjunto B com um pouco mais de cuidado. Primeiro, convençamo-nos de que B é realmente um conjunto infinito. Além disto, note-se que:

a) se $x \in B$, x não é ponto de acumulação de B, pois uma bola de centro em x e raio 1 não contém elementos de B diferentes de x (a menor distância entre dois elementos quaisquer de B é 3, como se verifica por meio de um cálculo simples); e

b) se $x \notin B$, e $x > 1$, seja $n \in N$ o maior inteiro tal que:

$$n < \sqrt{x} < n + 1$$

ou seja:

$$n^2 < x < (n + 1)^2$$

Portanto, não existem $x_1 \in B$ e $x_2 \in B$ tais que:

$$n^2 < x_1 < x < x_2 < (n + 1)^2$$

pois, caso isto se verificasse, existiriam $m \in N$ e $p \in N$ tais que $x_1 = m^2$ e $x_2 = p^2$, donde:

$$n < m < \sqrt{x} < p < (n + 1)$$

o que contradiz a nossa escolha de n. Portanto, dado $x \geqslant 0$, $x \notin B$, a bola aberta de centro x e raio $r = min\ \{|n^2 - x|, |(n + 1)^2 - x|\}$ não contém elementos de B.

Finalmente, é claro que $x < 1$ não pode ser ponto de acumulação de B.

Esta discussão chama a atenção para alguns aspectos importantes: primeiro, existem conjuntos que não possuem pontos de acumulação; segundo, dentre estes conjuntos estão certamente incluídos todos os conjuntos finitos; e, terceiro, dentre os conjuntos infinitos também existem conjuntos que não possuem pontos de acumulação.

O Teorema de Bolzano-Weierstrass, que demonstraremos a seguir, garante que conjuntos infinitos e limitados possuem pelo menos um ponto de acumulação. O leitor terá percebido que B não é um conjunto limitado de números reais.

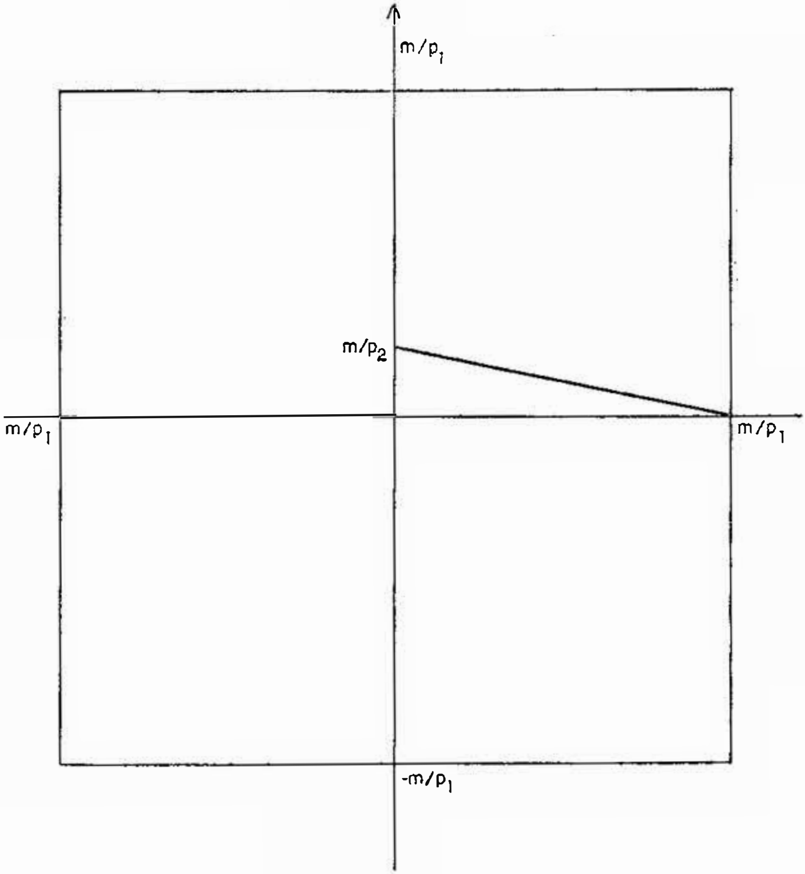
Antes de apresentarmos o teorema precisamos generalizar a definição de conjunto limitado — já apresentada para conjuntos de números reais — para subconjuntos de R^p.

Definição 18 — Um conjunto $X \subset R^p$ é um *Conjunto Limitado* se existe $a \in R^p$ e um número real $r > 0$ tal que $X \subset B(a, r)$.

Observemos que a definição acima exige que a bola seja aberta. Isto é obviamente desnecessário: X é limitado se está contido em alguma bola. Além disto, tendo em vista as considerações que fizemos sobre as três normas consideradas para R^p, é irrelevante se a bola acima é definida na norma euclideana, do máximo ou da soma. Finalmente, se X está contido numa bola de centro em a e raio r, X certamente estará contido em alguma bola de centro na origem.

Exemplos:

47 — Dados os números reais positivos p_1, p_2 e m, o conjunto $B = \{(x_1, x_2) \in R^2_+ : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant m\}$ é um conjunto limitado. A bola $B_M [0, r]$, onde $r = max \left\{\frac{m}{p_1}, \frac{m}{p_2}\right\}$, contém B. Graficamente, isto pode ser visto na figura a seguir. A demonstração é simples, pois, se $x \in B$, então:



$$p_i\, x_i \leqslant p_1\, x_1 + p_2\, x_2 \leqslant m,\ i = 1,\ 2$$

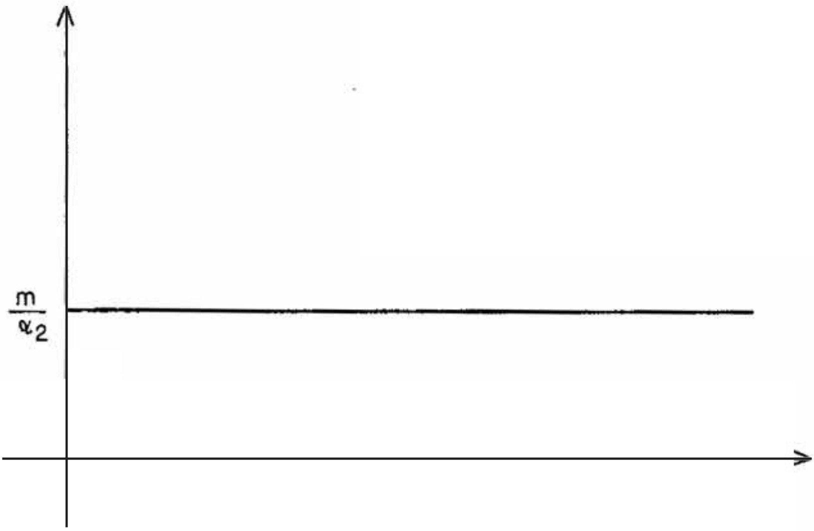
Daí, $|x|_M = max\ \{|x_1|,\ |x_2|\} \leqslant max \left\{ \dfrac{m}{p_1},\ \dfrac{m}{p_2} \right\} = r.$

48 — O exemplo acima pode ser generalizado. Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in R^p$, $\alpha_i > 0$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ e $m \in R$, $m > 0$, o conjunto $B = \{x \in R^p_+ :\ < \alpha, x > \leqslant m\}$ é limitado.

49 — Dados $\alpha = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$, $\alpha_i > 0$, para todo $i \in \{2, 3, \ldots, p\}$ e $m \in R$, $m > 0$, o conjunto $B' = \{x \in R^p_+ :\ < \alpha, x > \leqslant m\}$ não

é limitado. Isto porque, dado qualquer número real $r > 0$, o elemento $(r + 1, 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ 0)$ pertence a B' e não pertence a $B_M\ [0, r]$.

A figura a seguir ilustra o fato no caso em que $B' \subset R^2$.



Passemos, finalmente, ao Teorema de Bolzano-Weierstrass, o qual provaremos apenas para subconjuntos de números reais.

Teorema 7 (Bolzano-Weierstrass) — Seja $A \subset R$ um conjunto infinito e limitado. Então, A possui pelo menos um ponto de acumulação.

Prova:

Como A é limitado, ele está contido em um intervalo, digamos $A \subset [a, b]$, $a < b$. Seja $I_1 = [a, b]$ e considere-se os subintervalos:

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

Um destes intervalos contém um número infinito de pontos de A. Caso contrário, A seria finito, pois:

$$A = \left(A \cap \left[a, \frac{a+b}{2}\right]\right) \cup \left(A \cap \left[\frac{a+b}{2}, b\right]\right)$$

que seriam dois conjuntos finitos.

Seja $I_2 = [a_2, b_2]$ o subconjunto acima, que contém infinitos pontos de A. Divida-se este intervalo em dois subintervalos e seja $I_3 = [a_3, b_3]$ aquele que contém um número infinito de pontos de A.

Continuando este processo, obtemos uma seqüência de intervalos fechados com a seguinte propriedade:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$$

Pelo Teorema 11 do Capítulo I, existe $c \in R$ tal que:

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Mostremos agora que c é um ponto de acumulação de A. Dado $\varepsilon > 0$, considere-se o intervalo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ e seja $j \in N$ tal que $j > \dfrac{b - a}{\varepsilon/2}$. Portanto, uma vez que $2^j > j$, temos:

$$\varepsilon/2 > \frac{b - a}{j} > \frac{b - a}{2^j}$$

ou seja:

$$\frac{b - a}{2^{j-1}} < 2\,(\varepsilon/2) = \varepsilon$$

Como $b_j - a_j = \dfrac{b - a}{2^{j-1}}$, o intervalo I_j está contido em $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Como I_j contém um número infinito de pontos de A, concluímos que c é ponto de acumulação de A.

C. Q. D.

A versão genérica do teorema é a seguinte:

Teorema 8 (Bolzano-Weierstrass) — Seja $A \subset R^p$ um conjunto infinito e limitado. Então, A possui pelo menos um ponto de acumulação.

II.2.4 — Conjuntos Conexos e Conjuntos Compactos

Definição 19 — Diz-se que o conjunto $X \subset R^p$ é um *Conjunto Desconexo* se existem dois conjuntos abertos $A, B \subset R^p$ tais que:

a) $(A \cap X) \neq \phi$; $(B \cap X) \neq \phi$;
b) $(A \cap X) \cap (B \cap X) = \phi$; e
c) $(A \cap X) \cup (B \cap X) = X$.

Neste caso, dizemos que A e B formam uma *Desconexão* ou uma *Cisão* para X.

Definição 20 — Diz-se que $Y \subset R^p$ é um *Conjunto Conexo* se ele não é Desconexo.

Exemplos:

50 — O conjunto $Z \subset R$ é desconexo, pois $A = \{x \in R: x < 2/3\}$ e $B = \{x \in R: x > 2/3\}$ formam uma *desconexão* para Z.

51 — O conjunto $H = \left\{x \in R: x = \frac{1}{n}, n \in N\right\}$ é desconexo, pois $A = \{x \in R: x < 2/7\}$ e $B = \{x \in R: x > 2/7\}$ formam uma desconexão para H. Vejamos isto com mais cuidado:

$A \cap H = \left\{x \in R: x = \frac{1}{n}, n \in N, \text{ e } x < 2/7\right\} \neq \phi$, pois, por exemplo, $1/7 \in A \cap H$;

$B \cap H = \left\{x \in R: x = \frac{1}{n}, n \in N, \text{ e } x > 2/7\right\} \neq \phi$, pois, por exemplo, $1/3 \in B \cap H$;

$$(A \cap H) \cap (B \cap H) = \left\{ x \in R: x = \frac{1}{n}, n \in N, x < 2/7 \text{ e } x > 2/7 \right\} = \phi; \text{ e}$$

$$(A \cap H) \cup (B \cap H) = H \cap (A \cup B) = H \cap R = H.$$

52 — O conjunto $V = [0, 1] \cup [2, 3]$ é desconexo, pois os conjuntos $A = (-1; 1{,}5)$ e $B = (1{,}5; 8)$ formam uma desconexão para V.

Teorema 9 — Um conjunto $I \subset R$ é conexo se, e somente se, I é um intervalo (limitado ou ilimitado).

Prova:

Seja I um intervalo e suponha-se que A e B formam uma desconexão para I, isto é, A e B são abertos em R e tais que:

a) $A \cap I \neq \phi$; $B \cap I \neq \phi$;
b) $(A \cap I) \cap (B \cap I) = \phi$; e
c) $(A \cap I) \cup (B \cap I) = I \cap (A \cup B) = I$.

Sejam $a \in A \cap I$ e $b \in B \cap I$ e suponha-se, sem perda de generalidade, que $a < b$. Como I é um intervalo, todos os elementos em $[a, b]$ pertencem a I.

Seja agora $D = [a, b] \cap A$ e seja $c = sup\ D$.

Inicialmente, observe-se que $c > a$, pois se $c = a$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \in A$, pois A é aberto. Tomando $\varepsilon' = min$ $\{\varepsilon, (b - a)\}$, temos que $c + \varepsilon' \in D$, o que contraria $c = sup\ D$. Note-se também que $c \leqslant b$.

Existem agora duas possibilidades a serem consideradas:

a) $c \in A$. Neste caso, pela definição de supremo, o intervalo $(c, b] \subset B$. Além disto, como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \in A$. Tomando $\varepsilon' = min$ $\{\varepsilon, (b - c)\}$, fica claro que $c + \varepsilon' \in D$, o que contraria $(c, b] \subset B$.

b) Finalmente, se $c \in B$, então c é um ponto de acumulação de D (ver Teorema 10, Capítulo I). Portanto, toda vizinhança de c contêm pontos de B e pontos no complementar de B, o que significa que pertence à fronteira de B. Isto contradiz a hipótese de que B é aberto.

Portanto, concluímos que todo intervalo é um conjunto conexo.

Mostremos agora a outra parte do teorema, isto é, que todo subconjunto conexo de R é um intervalo. Se $I \subset R$ é conexo e $I \neq \phi$, então I tem a seguinte propriedade: dados $a, b \in I$, $a < b$, todo número c tal que $a < c < b$ pertence a I. Caso contrário, os intervalos $(-\infty, c)$, (c, ∞) formariam uma desconexão para I.

Para completar a demonstração, temos que mostrar que um conjunto I com a propriedade acima é um intervalo. Há dois casos a considerar:

a) I é um conjunto limitado. Sejam $a = inf\ I$ e $b = sup\ I$. Se $a \in I$ e $b \in I$, então, pela propriedade do conjunto I, $[a, b] \subset I$. Por outro lado, com $a = inf\ I$ e $b = sup\ I$, $I \subset [a, b]$, isto é, $I = [a, b]$.

Se $a \in I$ e $b \notin I$, então $I = [a, b)$. Seja $b' \in [a, b)$. Então, $a \leqslant b' < b$. Como $b = sup\ I$, existe um número $b'' \in I$ tal que $a \leqslant b' < b''$ e, portanto, $b' \in I$. Como b' é arbitrário, $[a, b) \subset I$. A implicação contrária segue-se de que $a = inf\ I$ e $b = sup\ I$.

Os casos em que $a \notin I$ e $b \in I$ e $a \notin I$ e $b \notin I$ geram, respectivamente, os intervalos $(a, b]$ e (a, b), como pode ser demonstrado analogamente ao caso anterior.

b) I não é limitado. Suponha-se, inicialmente, que I é limitado inferiormente e seja $a = inf\ I$. É uma conseqüência da definição de a que $I \subset [a, +\infty)$. Suponha-se que $a \in I$ e seja $x \in (a, +\infty)$. Como I é limitado inferiormente, existe $y \in I$ tal que $a < x < y$. Logo, $x \in I$, isto é, $I \supset [a, \infty)$.

O caso em que $a \notin I$ dá origem à semi-reta aberta $(a, +\infty)$. Se I é limitado superiormente e se $b = sup\ I$, então temos $(-\infty, b]$ e $(-\infty, b)$, conforme $b \in I$ ou $b \notin I$. Se I não é limitado superiormente e inferiormente, $I = (-\infty, \infty)$.

C. Q. D.

Após chegar ao final desta extenuante demonstração, talvez seja de interesse lembrar ao leitor o conteúdo do teorema e sugerir a utilização que faremos dele no que se segue. Acabamos de ver que os únicos subconjuntos de números reais que são conexos são os intervalos, o que torna os conjuntos conexos em R muito pouco interessantes. Entretanto, este resultado vai nos permitir provar um dos mais importantes teoremas sobre funções contínuas, qual seja, o Teorema do Valor Intermediário.

Para finalizar esta seção introduziremos agora o conceito de Conjunto Compacto. Como já havíamos dito, a noção de compacidade será apresentada em sua versão específica para o Espaço Euclideano R^p. Generalizações deste conceito para Espaços Métricos requerem mais trabalho do que o que desenvolvemos até o presente.

Definição 21 — Um conjunto $K \subset R^p$ é um *Conjunto Compacto* se K é fechado e limitado.

Exemplos:

53 — O intervalo $[0, 1]$ é um conjunto compacto.

54 — O intervalo $(0, 1]$ não é um conjunto compacto.

55 — Dados $x \in R^p$ e $r \in R$, $r > 0$, a bola fechada $B[x, r]$ é um conjunto compacto.

56 — R^p não é um conjunto compacto.

57 — ϕ é um conjunto compacto.

58 — O conjunto B do exemplo 48 é compacto. Já apontamos que ele é limitado, porém falta mostrar que é fechado. Para tanto, seja $x \in R^p$ ponto de acumulação de B. Então, para todo número real $\varepsilon > 0$, a bola $B(x, \varepsilon)$ contém um elemento $y \in B$ tal que $y \neq x$. Portanto, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$:

$$|x_i - y_i| \leqslant |y - x| < \varepsilon$$

ou seja:

$$y_i - \varepsilon < x_i < y_i + \varepsilon$$

Daí segue-se que:

$$< \alpha, x > = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p < \alpha_1 (y_1 + \varepsilon) + \ldots + \alpha_p (y_p + \varepsilon) =$$

$$= < \alpha, y > + (\alpha_1 + \ldots + \alpha_p) \varepsilon \leqslant m + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p) \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Portanto, $< \alpha, x > \leqslant m$. Logo, $x \in B$, isto é, $B' \subset B$.

II.3 — Conjuntos Convexos

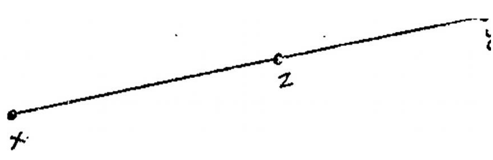
Nesta seção procuraremos estudar a classe dos chamados *Conjuntos Convexos,* que desempenham um papel de extrema importância em Teoria Econômica e, além disto, são importantes para toda a Teoria de Otimização que discutiremos nos capítulos seguintes.

Neste primeiro tratamento, apenas definiremos Conjuntos Convexos e estudaremos a formação de outros conjuntos convexos a partir de um ou de um grupo deles. No Capítulo VIII passaremos a estudar certos aspectos importantes da estrutura topológica destes conjuntos.

Definição e Algebra dos Conjuntos Convexos

Definição 22 — Dados os vetores $x, y \in R^p$, chama-se uma *combinação convexa de* x e y ao vetor $z \in R^p$ tal que $z = \theta x + (1 - \theta) y$, qualquer que seja $\theta \in [0, 1]$.

Geometricamente, as combinações convexas de x e y encontram-se sobre o segmento da reta que une os dois pontos:



Exemplo:

59 — Dados $x = (1, 1)$ e $y = (2, 2)$ e $\theta = 1/2$, o ponto $z = (1{,}5;\ 1{,}5)$ é uma combinação convexa de x e y.

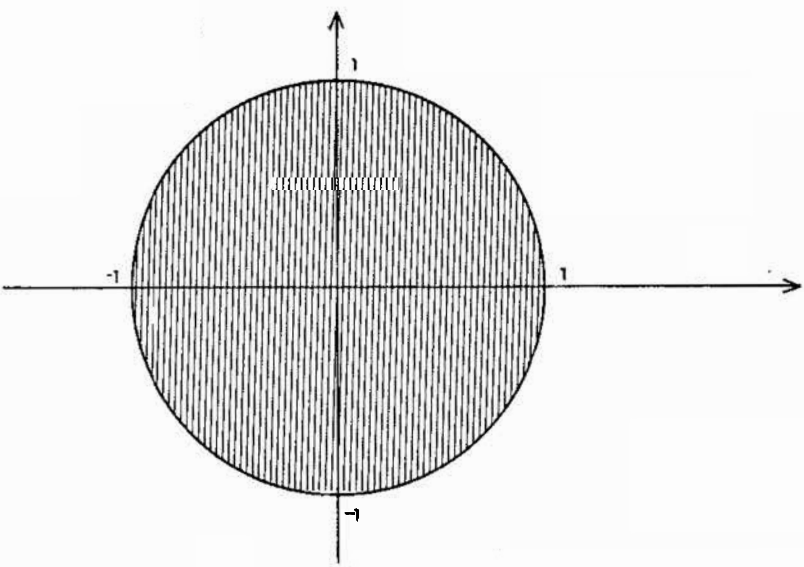
Definição 23 — Um conjunto $S \subset R^p$ é um *Conjunto Convexo* se $S = \phi$ ou se, dados $x \in S$ e $y \in S$, $\theta x + (1 - \theta)\, y \in S$ para todo $\theta \in [0, 1]$. Em outras palavras, S é convexo se contém todas as combinações convexas de quaisquer dois de seus pontos.

Exemplos:

60 — O intervalo fechado $[0, 1]$ é um conjunto convexo.

61 — O conjunto $A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ não é um conjunto convexo.

62 — A bola fechada $B\,[0, 1]$ é um conjunto convexo.



63 — Sejam $\alpha \in R^p$, $\alpha \neq 0$, e $\lambda \in R$. O conjunto $H = \{x \in R^p: < \alpha, x > = \lambda\}$ é um conjunto convexo, pois, se x e $y \in H$ e se $\theta \in [0, 1]$, $< \alpha, \theta x + (1 - \theta) y > = \theta < \alpha, x > + (1 - \theta) < \alpha, y > = \lambda$.

Teorema 10 — Sejam $\Delta \neq \phi$ um conjunto de índices e $S_\alpha \subset R^p$, $\alpha \in \Delta$, conjuntos convexos. Então, $\bigcap_{\alpha \in \Delta} S_\alpha$ é um conjunto convexo, ou, em outras palavras, qualquer interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Prova:

Se $x, y \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} S_\alpha$, então x e $y \in S_\alpha$ para todo $\alpha \in \Delta$. Dessa maneira, $\theta x + (1 - \theta) y \in S_\alpha$ para todo $\alpha \in \Delta$ e para todo $\theta \in [0, 1]$, o que prova o teorema.

C. Q. D.

Definição 24 — Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_m$ subconjuntos de R^p e sejam dados os números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Chama-se *Soma Linear*, de $A_1, A_2, \ldots, A_m$, ao conjunto:

$$A = \left\{ y \in R^p: y = \sum_{i=}^{m} \alpha_i x_i, \ x_i \in A_i, \ i = 1, 2, \ldots, m \right\}$$

Geralmente, denota-se o conjunto Soma Linear da seguinte forma:

$$A = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i S_i$$

Exemplos:

64 — Dados $A_1 = [0, 1]$ e $A_2 - [3, 4]$, temos:

$$A_1 + A_2 = [3, 5]$$

$$A_1 + \frac{1}{2} A_2 = [1{,}5; 3]$$

$$A_1 + (- A_2) = [-4, -2]$$

65 — Dados os conjuntos $X \subset R^p$ e $Y \subset R^p$ tais que $X \cap Y = \phi$, então $0 \notin X - Y$. Se $0 \in X - Y$, é porque existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $x = y$, o que contradiz $X \cap Y = \phi$.

Teorema 11 — Sejam $S_1 \subset R^p$ e $S_2 \subset R^p$ conjuntos convexos. Então:

a) $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2$ é um conjunto convexo, quaisquer que sejam α_1 e $\alpha_2 \in R$; e

b) $S_1 \times S_2 \subset R^p \times R^p$ é um conjunto convexo.

Prova:

a) Sejam $x, y \in \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2$. Então existem:

$$x_1 \in S_1, x_2 \in S_2: x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

e:

$$y_1 \in S_1, y_2 \in S_2: y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

Note-se que, se $\theta \in [0, 1]$:

$$z = \theta x + (1 - \theta) y = \theta(\alpha_1 x_1) + \theta(\alpha_2 x_2) + (1 - \theta)(\alpha_1 y_1) +$$
$$+ (1 - \theta) \alpha_2 y_2 = \alpha_1 [\theta_1 x_1 + (1 - \theta) y_1] + \alpha_2 [\theta x_2 + (1 - \theta) y_2]$$

Logo, $z \in \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2$.

b) Sejam $x, y \in S_1 \times S_2$. Por definição:

$x = (x_1, x_2)$, sendo $x_1 \in S_1$ e $x_2 \in S_2$; e

$y = (y_1, y_2)$, sendo $y_1 \in S_1$ e $y_2 \in S_2$.

Note-se que $x_i \in R^p$ e $y_i \in R^p$.

Seja $z = \theta x + (1 - \theta) y, 0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Note-se que:

$$z = \theta(x_1, x_2) + (1 - \theta)(y_1, y_2) = (\theta x_1 + (1 - \theta) y_1, \theta x_2 + (1 - \theta) y_2)$$
$$\Rightarrow z \in S_1 \times S_2.$$

Corolário: Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_m \in R^p$ conjuntos convexos. Então:

a) $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_m S_m$ é um conjunto convexo, quaisquer que sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in R$; e

b) $S_1 \times S_2 \times S_3 \times \ldots \times S_m \subset \underbrace{R^p \times R^p \times \ldots \times R^p}_{m \text{ vezes}}$ é um conjunto convexo.

Prova: Princípio da Indução.

Definição 25 — Dados n elementos de R^p, $n \in N$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, chama-se uma *combinação convexa de n elementos* ao vetor $z \in R^p$, dado por $z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$, quaisquer que sejam $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, com $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$.

Teorema 12 — Um conjunto $S \subset R^p$ é um conjunto convexo se, e somente se, todas as combinações convexas de n elementos de S pertencem a S, qualquer que seja $n \in N$.

Prova:

Se todas as combinações convexas de n elementos de S pertencem a S, então as combinações de dois elementos pertencem a S. Logo, S é convexo.

Por outro lado, suponha-se que S é convexo. A prova de que todas as combinações convexas de elementos de S pertencem a S será feita utilizando-se o princípio da indução.

É claro que as combinações convexas de um elemento de S pertencem a S. Suponha-se que as combinações convexas de k elementos de S pertençam a S e considere-se os $k + 1$ elementos de S: $x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_k, x_{k+1}$. Sejam $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0, \ldots, \lambda_k \geqslant 0, \lambda_{k+1} \geqslant 0$ tais que $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{k+1} = 1$ e seja $z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{k+1} x_{k+1}$. Se algum $\lambda_i = 0$, então $z \in S$, pois é uma combinação convexa de k elementos. Por outro lado, se $\lambda_i \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k + 1$, então pode-se escrever z da seguinte forma:

$$z = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \left\{ \frac{\lambda_2}{1 \quad \lambda_1} x_2 + \ldots\ldots + \frac{\lambda_{k+1}}{1 - \lambda_1} X_{k+1} \right\}$$

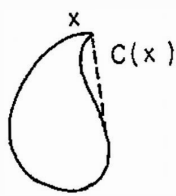
Ora, $\dfrac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} > 0$, $i=2, \ldots, k+1$, e $\dfrac{\lambda_2}{1 - \lambda_1} + \ldots + \dfrac{\lambda_{k+1}}{1 - \lambda_1} = 1$.

Assim, z é uma combinação convexa de dois elementos de S (x_1 é o termo entre chaves). Como S é convexo, $z \in S$.

C. Q. D.

Definição 26 — Seja $X \subset R^p$ um conjunto. Define-se o *Fecho Convexo* de X, $C(X)$, como sendo a interseção de todos os conjuntos convexos que contêm X.

Observe-se, inicialmente, que R^p é um conjunto convexo e, portanto, existe pelo menos um conjunto convexo que contém X. Em segundo lugar, é importante notar que $C(X)$ é um conjunto convexo, pois qualquer interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo. Finalmente, note-se que $C(X)$ é o menor conjunto convexo que contém X, isto é, se Y é convexo e $X \subset Y$, então $C(X) \subset Y$. Intuitivamente, isto significa que para obter $C(X)$ "completamos" o conjunto X juntando o menor número de pontos possível.



Teorema 13 — Seja $X \subset R^p$, $X \neq \phi$. $C(X)$ é o conjunto de todas as combinações convexas finitas de elementos de X.

Prova:

Seja $Y = \{y \in R^p\colon y$ é uma combinação convexa finita de elementos de $X\}$. Queremos mostrar que $Y = C(X)$.

Mostremos, primeiramente, que $C(X) \subset Y$. Para tanto, provemos que Y é convexo. Note-se que $X \subset Y$, pois a combinação convexa $1\,x + 0\,x_2 + \ldots + 0\,x_k = x$. Como Y é o conjunto das combinações convexas de elementos de X, Y é o conjunto das combinações convexas de elementos de Y. Logo, pelo Teorema 12, Y é convexo.

Por outro lado, $C(X)$ é convexo e, portanto, contém todas as combinações convexas de elementos de X, pois $X \subset C(X)$. Logo, se $y \in Y$, y é uma combinação convexa de elementos de X. Segue-se que $y \in C(X)$.

C. Q. D.

Exercícios

1. Verifique se os conjuntos abaixo, com as mesmas operações de Adição de Vetores e Multiplicação Escalar de R^p, são Espaços Vetoriais sobre R:

a) $\{(x, y) \in R^2: x = 2y\}$;

b) $\{(x, y) \in R^2: x = 5 + 2y\}$;

c) $\{(x, y, z) \in R^3: y = z\}$; e

d) $\{(x, y) \in R^2: x \in Q \text{ e } y \in Q\}$.

2. Defina em R^2 a seguinte *Adição de Vetores*: para todo $x = (x_1, x_2) \in R^2$ e $y = (y_1, y_2) \in R^2$, $x + y = (x_1 + y_2, x_2 + y_1)$. Este conjunto com esta Adição de Vetores e a Multiplicação Escalar usual é um Espaço Vetorial?

3. Seja L o conjunto das funções polinomiais de R em R, isto é, o conjunto das funções $p: R \to R$ definidas por:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

onde n é um número inteiro positivo e $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes reais. Defina Adição de Vetores e Multiplicação Escalar tal como no exemplo 5 e verifique que L é um Espaço Vetorial sobre R. Apresente uma base para L.

4. Considere os Espaços Vetoriais do exercício 1. Apresente, para cada um deles, uma base e verifique a dimensão do Espaço.

5. Dado $x \in R^p$, mostre que:

$$|x| \leqslant \sqrt{p}\, |x|_M$$

6. Mostre que para todo $x \in R^p$ e $y \in R^p$ vale a *Identidade do Paralelogramo*: $|x - y|^2 + |x + y|^2 = 2\,\{|x|^2 + |y|^2\}$. Interprete esta identidade como uma afirmativa de que a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma do quadrado das diagonais.

7. As normas do máximo e da soma satisfazem a identidade do paralelogramo?

8. Seja $f\colon R^p \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Verifique quais as propriedades de uma norma são satisfeitas por esta função.

9. Seja $f\colon R^p \times R^p \to R$ definida por $f(x, y) = \big|\, |x|\, \big| + \big|\, |y|\, \big|$. Pergunta-se: f é um produto interno em R^p? f é uma norma em R^{2p}?

10. Sejam $W \subset R^p$ e $V \subset R^p$ Espaços Vetoriais com a Adição de Vetores e a Multiplicação Escalar de R^p. Pergunta-se:

a) $W + V$ é um Espaço Vetorial?

b) $W \cup V$ é um Espaço Vetorial?

c) $W \cap V$ é um Espaço Vetorial?

11. Dê um exemplo de:

a) um conjunto cuja fronteira tenha interior não-vazio;

b) um conjunto X tal que X não é um subconjunto de $\overline{\overset{\circ}{X}}$ (obs.: $\overline{\overset{\circ}{X}}$ é o fecho do interior de X);

c) um subconjunto convexo de R^2 cujo interior é vazio;

d) um conjunto convexo que não tenha pontos de acumulação;

e) um conjunto X tal que $Fr\ X \neq Fr\ \overline{X}$; e

f) um conjunto X tal que $\overset{\circ}{X} \neq \overset{\circ}{\overline{X}}$.

12. Seja $X \subset R^p$ tal que $Fr\ X = \phi$. Mostre que X é aberto e fechado.

13. Mostre que os únicos subconjuntos de R que são abertos e fechados simultaneamente são R e ϕ (sugestão: R é um conjunto conexo).

14. Seja $X \subset R^p$, $X \neq \phi$. Mostre que $Fr\ \overline{X} \subset Fr\ X$.

15. Seja $X \subset R^p$. Mostre que $\overset{\circ}{X} \subset \overset{\circ}{\overline{X}}$.

16. Seja $X \subset R^p$. Mostre que:

a) $\overset{\circ}{X}$ é um conjunto aberto;

b) $\overline{X}$ é um conjunto fechado; e

c) X' é um conjunto fechado;

17. Dado um conjunto $X \subset R^p$ e um conjunto fechado $Y \subset R^p$ tal que $X \subset Y$, mostre que $\overline{X} \subset Y$ (isto é, mostre que todo conjunto fechado que contém X também contém $\overline{X}$).

18. Seja $X \subset R^p$ um conjunto conexo e seja x um ponto de acumulação de X. Mostre que $X \cup \{x\}$ é um conjunto conexo.

19. Verifique quais dos conjuntos abaixo são convexos:

a) $\{(x, y) \in R^2 : 0 \leqslant x \text{ e } y \leqslant x^2\}$;

b) $\{(x, y) \in R^2 : 2x + 3y \leqslant 5\}$;

c) $\{(x, y) \in R^2 : 2x + 3y \geqslant 5\}$; e

d) $\{(x, y) \in R^2 : x > 1\} \cup \{(x, y) \in R^2 : x = 1 \text{ e } y \geqslant 1\}$.

20. Seja $f: R^p \to R$ tal que, para todo $x \in R^p$, $y \in R^p$, $\alpha \in R$ e $\beta \in R$, $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Mostre que, se $X \subset R^p$ é um conjunto convexo, então $f(X)$ é um conjunto convexo.

21. Um conjunto $K \subset R^p$, $K \neq \phi$, é um cone convexo se:

a) dados arbitrariamente $x \in K$ e $y \in K$, tem-se $x + y \in K$; e

b) para todo $\alpha \in R_+$ e para todo $x \in K$, tem-se $\alpha x \in K$;

Pede-se:

a) dê um exemplo de um cone convexo;

b) mostre que um cone convexo é um conjunto convexo;

c) mostre que qualquer interseção de cones convexos é um cone convexo; e

d) dado o cone convexo $K \subset R^p$, defina $K^* = \{y \in R^p: < y, x > \leqslant 0$ para todo $x \in K\}$. Mostre que K^* é um cone convexo.

Capítulo III

LIMITES

Como o estudo dos limites é parte fundamental da Análise Matemática, neste capítulo abordaremos este tópico procurando familiarizar o leitor com o conceito e algumas das principais propriedades.

A apresentação está organizada da seguinte maneira: inicialmente, estudaremos o caso particular de *Limite de Sucessão* ou *Seqüência* e, em seguida, trataremos o caso geral de *Limite de Função*. Esta é a forma usual de se apresentar este assunto, pois, além de didaticamente conveniente, enfatiza o caso particular das Sucessões, que, pelas aplicações que possui, é extremamente importante, como ficará claro nos capítulos que se seguem.

III.1 — Sucessões

Definição 1 — Uma *Sucessão* ou *Seqüência* em R^p é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais e o contradomínio é o Espaço Euclideano R^p.

Vejamos alguns exemplos:

1 — Seja $f: N \rightarrow R$ definida por $f(n) = \frac{1}{n}$. A função f é uma *Sucessão* (ou *Seqüência*) em R.

2 — Seja g: $N \rightarrow R$ definida por $g(n) = 2^n$. A função g também é uma *Sucessão* em R. Alguns elementos do conjunto de valores de g são:

$$\{2, 4, 8, 16, 32\}$$

3 — A função h: $N \rightarrow R^2$ definida por $h(n) = (1/n, 1 - 1/n)$ é uma *Sucessão* em R^2. Alguns elementos de seu conjunto de valores são os seguintes:

$$\{(1, 0); (1/2, 1/2); (1/3, 2/3)\}$$

4 — A função q: $N \rightarrow R^p$ definida por $q(n) = (1/n, 1 - 1/2^n, 1 - 1/3^n, \ldots, 1 - 1/p^n)$ é uma *Seqüência* em R^p.

5 — A função v: $N \rightarrow R^p$ definida por $v(n) = (n, n^2, \ldots, n^p)$ é também uma *Sucessão* em R^p.

Em geral, utiliza-se uma notação mais simples do que a anterior para denotar uma sucessão. Ao invés de escrevermos f: $N \rightarrow R^p$ definida por $f(n) = x_n$, simplesmente indicamos $\{x_n\}$ ou (x_n), em R^p. A identificação da sucessão é feita por um dos métodos a seguir indicados:

a) quando a lei de formação é clara, listamos alguns dos termos: por exemplo, $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$; e

b) quando a lei de formação não é tão clara, podemos especificar o termo geral (por exemplo, $\{2n - 1: n \in N\}$) ou especificar o primeiro termo e uma regra que permita obter x_{n+1} conhecido x_n (por exemplo, $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 2 + x_n$, $n \in N$).

Dadas as sucessões (x_n) e (y_n) em R^p e (a_n) e (b_n) em R, podemos construir outras sucessões da seguinte forma:

a) a sucessão *Soma* $\{(x + y)_n\} = \{(x_n + y_n): n \in N\}$ em R^p;

b) a sucessão *Produto Escalar* $\{(a\ x)_n\} = \{(a_n\ x_n): n \in N\}$ em R^p;

c) a sucessão *Produto Interno* $\{< x, y >_n\} = \{< x_n, y_n >: n \in N\}$ em R; e

d) por fim, se para todo $n \in N$ tivermos $b_n \neq 0$, temos a sucessão

Quociente $\left\{\left(x \dfrac{1}{b}\right)_n\right\} = \left\{\left(x_n \cdot \dfrac{1}{b_n}\right) : n \in N\right\}$ em R^p.

Exemplo:

6 — Sejam as sucessões:

$\{x_n\} = \{(0, 1/n) : n \in N\}$ em R^2;

$\{y_n\} = \{(2^n, n) : n \in N\}$ em R^2; e

$\{a_n\} = \{n : n \in N\}$ em R.

Temos então que:

a) a sucessão *Soma* é dada por $\{(x + y)_n\} = \left\{\left(2^n, n + \dfrac{1}{n}\right) : n \in N\right\}$ em R^2;

b) a sucessão *Produto Escalar* é dada por $\{(a\ x)_n\} = \{(0, 1) : n \in N\}$ em R^2;

c) a sucessão *Produto Interno* é dada por $\{< x, y >_n\} = \left\{0.2^n + \dfrac{1}{n} . n : n \in N\right\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$ em R; e

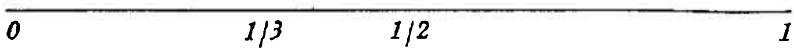
d) a sucessão *Quociente* é dada por $\left\{\left(x \dfrac{1}{a}\right)_n\right\} = \{(0, 1/n^2) : n \in N\}$ em R^2.

III.1.1 — Convergência

Tendo introduzido o conceito de sucessão e as principais formas de obter outras sucessões a partir de operações algébricas, passaremos agora a introduzir a idéia mais importante desta seção, qual seja, a noção de convergência ou limite. Intuitivamente, uma sucessão converge se seus termos ficam cada vez mais "próximos" de um certo número real. Assim, por exemplo, a sucessão $(x_n) = (1/n \colon n \in N)$ converge para zero, pois, quanto maior o valor de n considerado, mais "perto" o número real $\frac{1}{n}$ estará de zero. Alguns valores de $\frac{1}{n}$ são mostrados na tabela a seguir, ilustrando (porém não demonstrando) a afirmativa que fizemos:

n	x_n
1	1
2	0,5
200	0,005
800	0,00125
8000	0,000125
50000	0,00002
100000	0,00001
1200000	0,000008333

Geometricamente, a idéia acima pode ser apresentada mostrando que os termos da sucessão conglomeram-se numa vizinhança do número zero:



Assim como a sucessão acima se aproxima de um número real, existem sucessões que não possuem esta propriedade. Consideremos os seguintes exemplos:

a) $(1, -1, 1, -1, \ldots)$; e

b) $(1, 2, 3, 4, \ldots)$.

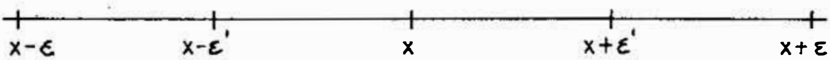
A sucessão "a" assume somente dois valores (1 e -1), porém seus elementos não se aproximam de nenhum número real. Por outro lado, a sucessão "b" assume como valores todos os números naturais e também não se aproxima de nenhum número real. Sucessões como as acima são chamadas de não convergentes (não faremos distinção entre as sucessões que não convergem e, desta forma, nos referiremos a elas simplesmente como sucessões divergentes).

Feitas estas considerações preliminares, procuraremos agora tornar mais precisos os conceitos introduzidos.

Definição 2 — Seja (x_n) uma sucessão em R^p. Diz-se que $x \in R^p$ é um limite de (x_n) se, qualquer que seja o número real $\varepsilon > 0$, existir um número natural $M(\varepsilon)$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo índice $n \geqslant M(\varepsilon)$.

Observações com relação à Definição 2:

a) Note-se que o número natural $M(\varepsilon)$ é função de ε, isto é, para cada $\varepsilon > 0$ considerado teremos um valor diferente de $M(\varepsilon)$ (veja-se a figura a seguir).



b) Pode-se, equivalentemente, dizer que x é um limite da sucessão (x_n) em R^p se, para todo $\varepsilon > 0$, a bola $B(x, \varepsilon)$ contém todos os termos da sucessão, exceto, possivelmente, um número finito deles.

c) Se $x \in R^p$ é um limite de (x_n) em R^p, dizemos que (x_n) é convergente para x, ou que (x_n) converge para x. A notação utilizada, neste caso, é:

$$x_n \to x$$

ou então:

$$\lim (x_n) = x$$

d) A definição de convergência apresentada acima utilizou a Norma Euclideana para medir a distância entre os termos da sucessão e o ponto x. Entretanto, a convergência de uma sucessão em R^p não depende da norma considerada. Mais precisamente, se (x_n) converge para x em uma das três normas apresentadas no Capítulo II, ela também converge nas outras duas normas.

Para provarmos esta afirmativa, consideremos a sucessão (x_n) em R^p convergente, pela Norma Euclideana, para $x \in R^p$, e mostremos que (x_n) também converge na norma da soma e na norma do máximo:

a) *Norma da Soma* — Como $x_n \to x$ na Norma Euclideana, dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural $M(\varepsilon)$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon/p$ para todo $n \in N$ tal que $n \geqslant M(\varepsilon)$. Ora, $|x_n - x|_S = |x_{n1} - x_1| + |x_{n2} - x_2| + \ldots + |x_{np} - x_p| \leqslant |x_n - x| + \ldots + |x_n - x| = p\ |x_n - x| < p. \dfrac{\varepsilon}{p} = \varepsilon$, onde x_{ni} é a i-ésima coordenada do vetor x_n. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, $|x_n - x|_S < \varepsilon$, qualquer que seja $n \in N$, $n \geqslant M(\varepsilon)$.

b) *Norma do Máximo* — Como $x_n \to x$ na Norma Euclideana, dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural $M(\varepsilon)$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo $n \in N$ tal que $n \geqslant M(\varepsilon)$. Ora, $|x_n - x|_M = max\ \{|x_{n1} - x_1|, \ldots, |x_{np} - x_p|\} < \varepsilon$ para todo $n \geqslant M(\varepsilon)$, uma vez que $|x_{ni} - x_i| \leqslant |x_n - x| < \varepsilon$.

Para completar a demonstração, devem ser considerados ainda os casos em que (x_n) converge nas normas do máximo e da soma. Deixamos esta parte como um exercício para o leitor. Esquematicamente, o resultado discutido nesta observação é o seguinte:

(x_n) Converge na Norma da Soma $\Longleftrightarrow$ (x_n) Converge na Norma Euclideana $\Longleftrightarrow$ (x_n) Converge na Norma do Máximo

A importância deste resultado é que podemos tratar a convergência de sucessões independentemente da norma considerada. Em problemas específicos, ele nos permite escolher a norma mais conveniente para o caso.

Exemplos:

7 — $(x_n) = (1/n\colon n \in N)$ é uma sucessão convergente em R. Na verdade, mostraremos a seguir que $lim\ (x_n) = 0$. Seja $\varepsilon > 0$ um número real dado. É uma conseqüência da propriedade arquimediana que existe um número natural p tal que $\dfrac{1}{p} < \varepsilon$.

Seja $\bar{n}$ o menor número natural tal que $\frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$. Portanto, se tomarmos $M(\varepsilon) = \bar{n}$, teremos que, qualquer que seja $n \geqslant M(\varepsilon)$, $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Fica assim demonstrado que a sucessão (x_n) converge para zero.

8 — $(x_n) = \{(-1)^n : n \in N\}$ não converge. Note-se, primeiramente, que o número 1 não pode ser o limite de (x_n), pois, dado, por exemplo, $\varepsilon = 1/2$, existe um número infinito de termos da sucessão fora do intervalo $(0{,}5;\ 1{,}5)$. Da mesma maneira, o número -1 não pode ser limite de (x_n). Por fim, se $x \in R$ e $x \neq 1$ e $x \neq -1$, x também não é limite de (x_n), pois, dado $\varepsilon = min\,\{|1 - x|, |-1 - x|\}$, existe um número infinito de termos da sucessão fora do intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

?

Concluímos, portanto, que nenhum número real pode ser o limite de (x_n).

9 — $(x_n) = \left(\frac{1}{2^n} : n \in N\right)$ converge para zero. Antes de provarmos isto, demonstraremos a chamada desigualdade de Bernoulli, que será então utilizada para chegarmos ao resultado.

Desigualdade de Bernoulli: dado $x \in R$, $x > -1$ e $x \neq 0$, tem-se que $(1 + x)^n > 1 + n\,x$ para todo $n \in N$, $n \geqslant 2$. A demonstração desta desigualdade faz-se utilizando o princípio da indução. Note-se, primeiramente, que $(1 + x)^2 = 1 + 2\,x + x^2 > 1 + 2\,x$, donde se segue que a igualdade vale para $n = 2$. Suponhamos que ela seja verdadeira para k, isto é, $(1 + x)^k > 1 + k\,x$, e provemos que $(1 + x)^{k+1} > 1 + (k + 1)\,x$. Para tanto, observe-se que $(1 + x)^{k+1} = (1 + x)\,(1 + x)^k > (1 + x)\,(1 + k\,x) = 1 + (k + 1)\,x + k\,x^2 > 1 + (k + 1)\,x$.

Tomando agora $x = 1$ na desigualdade de Bernoulli, obtém-se que $2^n > 1 + n > n$. Portanto, $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ para todo $n \in N$. Segue-se, então, que $\left|\frac{1}{2^n}\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ para todo $n \geqslant M(\varepsilon)$, onde $M(\varepsilon)$ é o mesmo encontrado no exemplo 7.

Passaremos agora a considerar alguns teoremas que caracterizam melhor a noção de convergência e que nos fornecerão outros métodos para verificar se uma dada sucessão é convergente.

Teorema 1 — Uma sucessão (x_n) em R^p tem, no máximo, um limite.

Prova:

Suponha-se que x e x', $x \neq x'$, sejam ambos limites de (x_n).
Seja $\varepsilon = \frac{1}{2} |x - x'|$.

Pela definição de limite, temos que:

a) existe $M_1(\varepsilon) \in N$ tal que, para todo $n \in N$, $n \geqslant M_1(\varepsilon)$, teremos $|x_n - x| < \varepsilon/2$; e

b) existe $M_2(\varepsilon) \in N$ tal que, para todo $n \in N$, $n \geqslant M_2(\varepsilon)$, teremos $|x_n - x'| < \varepsilon/2$.

Seja $n \in N$ tal que $n > max \{M_1(\varepsilon), M_2(\varepsilon)\}$ e considere-se o desenvolvimento:

$$|x - x'| = |x - x_n + x_n - x'| \leqslant |x_n - x| + |x_n - x'| <$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \frac{1}{2} |x - x'|$$

isto é, $|x - x'| < \frac{1}{2} |x - x'|$, o que é uma contradição.

Concluímos, portanto, que x e x' não podem, ambos, ser limites da sucessão (x_n).

C. Q. D.

Definição 3 — Uma sucessão (x_n) em R^p é limitada se existe um número real B tal que $|x_n| \leqslant B$ para todo $n \in N$.

Exemplos:

10 — A sucessão $(1, -1, 1, -1, \ldots)$ é limitada, pois qualquer número real maior ou igual a 1 pode ser tomado como B da definição acima.

11 — A sucessão $(x_n) = (1/n\colon n \in N)$ é limitada, pois, por exemplo, $|x_n| \leqslant 2$, qualquer que seja $n \in N$.

12 — A sucessão $(x_n) = (n\colon n \in N)$ não é limitada, pois, dado qualquer número real B, existe um número natural maior que B.

Teorema 2 — Toda sucessão (x_n), convergente em R^p, é limitada.

Prova:

Seja (x_n) uma sucessão convergente em R^p e seja $x = lim\ (x_n)$. Dado $\varepsilon = 1$, existe um número natural $M(1)$ tal que $|x_n - x| < 1$ para todo $n \geqslant M(1)$.

Portanto, dado $n \geqslant M(1)$, temos que $|x_n| = |x_n + x - x| \leqslant$ $\leqslant |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$.

Para garantir que *todos* os termos da sucessão são menores ou iguais que um certo número real B, basta escolher este número da seguinte maneira:

$$B = max\ \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{M(1)-1}|, 1 + |x|\}$$

Dessa forma, $|x_n| \leqslant B$, qualquer que seja $n \in N$.

C. Q. D.

Como aplicação deste resultado, note-se que as sucessões $(x_n) = (n)$, $(x_n) = (n^2)$, $(x_n) = (n + 1/n)$ não são convergentes, pois não são limitadas.

Convém salientar que a recíproca deste teorema não é verdadeira, isto é, existem sucessões limitadas que não são convergentes (veja-se o exemplo 10 anterior).

Para enunciarmos o teorema a seguir utilizaremos a seguinte notação: se (x_n) é uma sucessão em R^p, então, para cada $n \in N$, x_n é um vetor da forma $(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{np})$. Dessa maneira, a sucessão (x_n) em R^p pode ser vista como sendo um conjunto de p sucessões de números reais denotadas (x_{ni}), $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Teorema 3 — Seja (x_n) uma sucessão em R^p. O elemento $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^p$ é o limite de (x_n) se, e somente se, as p sucessões de números reais (x_{ni}) convergem para y_i, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Prova:

Por simplicidade, adotaremos a norma do máximo nesta demonstração.

Suponhamos que $x_n \to y$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural $M(\varepsilon)$ tal que, para todo $n \geqslant M(\varepsilon)$, teremos $|x_n - y|_M < \varepsilon$. Pela definição da norma do máximo, $|x_{ni} - y_i| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant M(\varepsilon)$ e para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Suponhamos, por outro lado, que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $x_{ni} \to y_i$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existem números naturais $M^i(\varepsilon)$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, tais que, se $n \geqslant M^i(\varepsilon)$, tem-se $|x_{ni} - y_i| < \varepsilon$. Segue-se, portanto, que $|x_n - y|_M = max \{|x_{n1} - y_1|, \ldots, |x_{np} - y_p|\} < \varepsilon$ para todo $n \geqslant max \{M^1(\varepsilon), M^2(\varepsilon), \ldots, M^p(\varepsilon)\}$.

C. Q. D.

A importância deste teorema é que ele mostra que estudar a convergência das sucessões em R^p resume-se em estudar a convergência das sucessões em R. Este aspecto é muito útil nas aplicações.

Exemplos:

13 — A sucessão $\{x_n\} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) : n \in N\right\}$ em R^2 converge para o elemento $(0, 1)$, pois as seqüências $(x_{n1}) = (1/n)$ e $x_{n2} = (1 - 1/n)$ convergem para 0 e 1, respectivamente. (Mostre que (x_{n2}) converge para 1.)

14 — A sucessão $\{x_n\} = \{(1/n, 1/2n, \ldots, 1/pn) : n \in N\}$ em R converge para $(0, 0, \ldots, 0) \in R^p$, uma vez que cada uma das sucessões componentes $(x_{ni}) = (1/in)$ converge para zero.

15 — A sucessão $\{x_n\} = \left\{\left(n, \frac{1}{n}\right) : n \in N\right\}$ em R^2 não converge, pois $(x_{n1}) = (n)$ é divergente.

Definição 4 — Seja (x_n) uma sucessão em R^p e seja (n_k) uma sucessão em N tal que $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots$

A sucessão (x_{n_k}) em R^p é uma *Subsucessão* de (x_n).

Exemplos:

16 — Dadas as sucessões $(x_n) = (1/n: n \in N)$ e $(n_k) = (2k: k \in N)$, a subsucessão (x_{n_k}) é formada por $(x_2, x_4, x_6, \ldots)$, ou seja, $(1/2, 1/4, 1/6, \ldots)$.

17 — Dadas as sucessões $(x_n) = (2^n)$ e $(n_k) = (2k - 1: k \in N)$, a subsucessão (x_{n_k}) é formada pelos termos $(x_1, x_3, x_5, \ldots)$, ou seja, $(2, 8, 32, \ldots)$.

É fácil ver que, na verdade, uma subsucessão é uma sucessão de acordo com a Definição 1. Para tanto, sejam (x_n) em R^p e (n_k) em N com $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

Note-se que, utilizando a notação de função, tem-se que a sucessão (x_n) é, na verdade, a função $X: N \rightarrow R^p$, definida por $X(n) = x_n$, e a sucessão (n_k) é a função $K: N \rightarrow N$, definida por $K(n) = n_k$.

A função composta X_oK é uma subsucessão de (x_n), caracterizada, na notação de função, da seguinte maneira: $X_oK: N \rightarrow R^p$, definida por $X_oK(n) = X[K(n)] = X(n_k) = x_{n_k}$.

Dessa maneira, fica claro que uma subsucessão é definida no conjunto dos números naturais através da função composta X_oK.

Teorema 4 — Se a sucessão (x_n) em R^p converge para x em R^p, então qualquer subsucessão de (x_n) também converge para x.

Prova:

Dado $\varepsilon > 0$, a convergência de (x_n) para x permite-nos afirmar que existe um número natural $M(\varepsilon)$ tal que, se $n \geqslant M(\varepsilon)$, $|x_n - x| < \varepsilon$.

Se (x_{n_k}) é uma subsucessão de (x_n), é claro que, para todo $n_k \geqslant M(\varepsilon)$, $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$.

C. Q. D.

Como aplicação do teorema acima podemos mais uma vez mostrar que a sucessão $\{x_n\} = \{(-1)^n: n \in N\}$ não converge, pois a subsucessão (x_{2n}) converge para 1 e a subsucessão (x_{2n-1}) converge para -1.

O teorema a seguir refere-se ao limite das sucessões *Soma, Produto Interno, Produto Escalar* e *Quòciente,* e sua demonstração envolve uma série grande de cálculos, sendo, no entanto, conceitualmente simples. Sugerimos ao leitor que, inicialmente, procure entender a lógica da demonstração e, numa segunda etapa, procure reproduzir os cálculos.

Teorema 5 — Sejam (x_n) e (y_n) sucessões em R^p que convergem para $x \in R^p$ e $y \in R^p$, respectivamente. Sejam (a_n) e (b_n) sucessões em R com $b_n \neq 0$ para todo $n \in N$ que convergem para $a \in R$ e $b \in R$, $b \neq 0$, respectivamente. Então:

a) $\lim (x_n + y_n) = x + y$;

b) $\lim < x_n, y_n > = < x, y >$;

c) $\lim (a_n x_n) = a x$; e

d) $\lim x_n \cdot \dfrac{1}{b_n} = x \cdot \dfrac{1}{b}$.

Prova:

Advertimos o leitor de que será feito um uso bastante intenso da desigualdade triangular nesta prova.

a) Como $x_n \to x$ e $y_n \to y$, dado $\varepsilon > 0$ existe $M(\varepsilon) \in N$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon/2$ para todo $n \geqslant M(\varepsilon)$ e também existe $M'(\varepsilon) \in N$ tal que $|y_n - y| < \varepsilon/2$ para todo $n \geqslant M'(\varepsilon)$. Se agora tomamos $K(\varepsilon) = max \{M(\varepsilon), M'(\varepsilon)\}$, temos que, para todo $n \geqslant K(\varepsilon)$, $|(x_n + y_n) - (x + y)| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

b) Notemos, inicialmente, que:

$$\begin{aligned} | < x_n, y_n > - < x, y > | &= |< x_n, y_n > - < x_n, y > + < x_n, y > - \\ &- < x, y > | \leqslant | < x_n, y_n > - < x_n, y > | + |< x_n, y > \\ &- < x, y > | = | < x_n, y_n - y > | + | < x_n - x, y > | \leqslant \\ &\leqslant | x_n | \, | y_n - y | + | y | \, | x_n - x | \end{aligned}$$

onde a última expressão foi obtida pela aplicação da Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Seja agora $\varepsilon > 0$ e considere-se o seguinte:

— como (x_n) é convergente, ela é limitada, e portanto existe um número real B' tal que $|x_n| \leqslant B'$ para todo $n \in N$; seja agora $B = max \{B', |y|\}$ e note-se que $B > 0$, pois sempre podemos escolher $B' > 0$;

— existe um número natural $M'(\varepsilon)$ tal que $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2B}$ para todo $n \geqslant M'(\varepsilon)$; e

— existe um número natural $M''(\varepsilon)$ tal que $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2B}$ para todo $n \geqslant M''(\varepsilon)$.

Seja agora $M(\varepsilon) = max \{M'(\varepsilon), M''(\varepsilon)\}$ e seja $n \geqslant M(\varepsilon)$. Então:

$$|<x_n, y_n> - <x, y>| \leqslant |x_n| \, |y_n - y| + |x_n - x| \; |y| \leqslant$$
$$\leqslant (|x_n - x| + |y_n - y|) \; B < \left(\frac{\varepsilon}{2B} + \frac{\varepsilon}{2B}\right) B = \varepsilon$$

c) Como a demonstração desta parte é semelhante à de "b", omitiremos, portanto, alguns detalhes:

$$|a_n \, x_n - a \, x| = |a_n \, x_n - a_n \, x + a_n \, x - a \, x| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n| \, |x_n - x| + |x| \, |a_n - a|$$

Como (x_n) e (a_n) convergem, dado $\varepsilon > 0$ existe um número natural $M(\varepsilon)$ tal que $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2B}$ e $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2B}$, onde B é um número real tal que $|a_n| \leqslant B$ para todo $n \in N$ e $|x| \leqslant$ **B.** Portanto, $|a_n \, x_n - a \, x| \leqslant |a_n| \; |x_n - x| + |x| \; |x_n - x| < \varepsilon$.

d) Para provar este resultado, basta mostrar que a sucessão $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ converge para $\frac{1}{b}$ e utilizar o resultado "c". Provamos, portanto, que $lim \left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{b}$:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n \, b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \; |b|}$$

Seja agora $B \in R$ tal que $|b| > \frac{1}{B}$ Como $b_n \to b$, dado $\bar{\varepsilon} = |b| - \frac{1}{B} > 0$ existe um número natural $M'(\bar{\varepsilon})$ tal que, se $n \geq M'(\varepsilon)$, $|b_n - b| < |b| - \frac{1}{B}$.

Obtemos, então, com auxílio da desigualdade triangular, que $|b| - |b_n| < |b| - \frac{1}{B}$ e, portanto, $|b_n| > \frac{1}{B}$ para todo $n \geq M'(\bar{\varepsilon})$.

Seja agora $\varepsilon > 0$. Então, como $b_n \to b$, existe um número natural $M''(\varepsilon)$ tal que $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{B^2}$ para todo $n \geq M''(\varepsilon)$. Portanto, $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n|\,|b|} < B^2\,|b_n - b| < \varepsilon$ para todo $n \geq \max\{M'(\bar{\varepsilon}), M''(\varepsilon)\}$.

C. Q. D.

Os exemplos a seguir mostram algumas aplicações dos teoremas.

Exemplos:

18 — Seja a sucessão (x_n), cujo termo geral é $x_n = \frac{2n+1}{n+5}$, $n \in N$. Reescrevendo o termo geral, obtém-se:

$$x_n = \frac{2 + 1/n}{1 + 5/n},\ n \in N$$

Fica agora fácil aplicar o Teorema 5, pois a sucessão $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge para zero, a sucessão $(2, 2, 2, \ldots)$ converge para 2 e, em conseqüência de "a" do teorema, o numerador converge para 2. Similarmente, o denominador converge para 1. Logo, por "d" do mesmo resultado, (x_n) converge para 2.

19 — É importante ter em mente que o Teorema 5 supõe que as sucessões envolvidas na formação da nova sucessão convergem. Isto, no entanto, não significa que, se uma ou ambas não conver-

girem, a sucessão resultante não converge. Considere-se os casos a seguir, em que (x_n) e (y_n) são sucessões divergentes:

$$(x_n) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$$
$$(y_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$$

Entretanto:

$(x_n + y_n) = (0, 0, 0, \ldots)$ é convergente;

$(x_n \cdot y_n) = (-1, -1, -1, \ldots)$ é convergente; e

$\left(x_n \cdot \dfrac{1}{y_n}\right) = (-1, -1, -1, \ldots)$ é convergente.

20 — Sejam (x_n) e (y_n) sucessões em R que convergem para x e y, respectivamente, e suponha-se que $x_n \geqslant y_n$ para todo $n \in N$. Mostraremos que $x \geqslant y$.

Se $x < y$, então seja $\varepsilon = y - x > 0$. A sucessão $(x_n - y_n)$ converge para $x - y$ e, portanto, existe um número natural $M(\varepsilon)$ tal que, se $n \geqslant M(\varepsilon)$, $|(x_n - y_n) - (x - y)| < y - x$, isto é, $x - y < (x_n - y_n) - (x - y) < y - x$, ou, ainda, $x_n - y_n < (y - x) + (x - y) = 0$ para todo $n \geqslant M(\varepsilon)$. Isto contradiz a hipótese de que $x_n > y_n$ para todo $n \in N$.

21 — Seja a sucessão (x_n), cujo termo geral é $x_n = \dfrac{1}{1 + na}$, $a \neq 0$. Reescrevendo, temos:

$$x_n = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + a}, \; M \in N$$

Portanto, conclui-se que $x_n \to 0$ (Teorema 5).

22 — Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sucessões em R tais que $\lim\ (x_n) = \lim\ (y_n) = t$ e $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ para todo $n \in N$. Mostremos que $\lim\ (z_n) = t$. Para tanto, seja $\varepsilon > 0$ e sejam $M'(\varepsilon)$ e $M''(\varepsilon)$ números naturais tais que $|x_n - t| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant M'(\varepsilon)$ e $|y_n - t| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant M''(\varepsilon)$.

Logo, para todo $n \geqslant \text{máx}\ \{M'(\varepsilon), M''(\varepsilon)\}$ temos que $-\varepsilon < x_n - t \leqslant z_n - t \leqslant y_n - t < \varepsilon$, isto é, $\lim\ (z_n) = t$.

23 — Sejam $0 < b < 1$ e a sucessão $(b^n: n \in N)$. Mostremos que $\lim\ (b^n) = 0$.

Primeiramente, observe-se que, sendo $0 < b < 1$, existe um número real $a > 0$ tal que $b = \dfrac{1}{1 + a}$ e, portanto, $b^n = \dfrac{1}{(1 + a)^n}$.

Pela desigualdade de Bernoulli, $(1 + a)^n > 1 + n\, a$ para todo $n \in N$, $n \geqslant 2$.

Desta maneira, $0 < b^n < \dfrac{1}{1 + n\, a}$

Do exemplo 21, sabemos que $\left(\dfrac{1}{1 + n\, a} : n \in N\right)$ converge para zero e do resultado obtido no exemplo 22 concluímos que (b^n) converge para zero.

Definição 5 — Seja (x_n) uma sucessão em R. Diz-se que:

a) (x_n) é *monótona crescente* se $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$; e

b) (x_n) é *monótona decrescente* se $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots$

Exemplos:

24 — A sucessão $(b^n: n \in N)$ do exemplo 23 é monótona decrescente, pois, para todo $n \in N$, $b^{n+1} < b^n$.

25 — A sucessão $(x_n) = (n: n \in N)$ é monótona crescente.

Quando apresentamos o Teorema 2, chamamos a atenção do leitor para o fato de que existem sucessões limitadas que não são convergentes. Uma propriedade importante das sucessões monótonas é que vale a recíproca do Teorema 2.

Teorema 6 — Seja (x_n) uma sucessão monótona crescente em R. Então, (x_n) converge se, e somente se, ela é limitada. Neste caso, $\lim\ (x_n) = \sup X$, onde $X = \{x_n: n \in N\}$.

Prova:

Suponha-se que (x_n) é monótona crescente e que $lim\ (x_n) = x$. Já mostramos (Teorema 2) que ela é limitada. Falta-nos provar que x é o supremo do conjunto de valores da sucessão, isto é, $x = sup\ X$. Nesse caso, dado $\varepsilon > 0$ existe um número natural $M(\varepsilon)$ tal que, para todo $n \geqslant M(\varepsilon)$, $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

Como (x_n) é monótona crescente, $x_n < x + \varepsilon$ para todo $n \in N$. Dessa maneira, x satisfaz "a" e "b" do Teorema 10, Capítulo I, e portanto $x = sup\ X$.

Suponha-se agora que (x_n) é monótona crescente e limitada. Neste caso, X é um conjunto limitado de números reais e, portanto, existe $sup\ X$, ao qual chamaremos x. De "a" e "b" do Teorema 10, Capítulo I, temos que, para todo $\varepsilon > 0$, $x_n < x + \varepsilon$ para todo $n \in N$ e que existe $\bar{n} \in N$ tal que $x - \varepsilon < x_{\bar{n}}$.

Como (x_n) é monótona crescente, $x - \varepsilon < x_n$ para todo $n \geqslant \bar{n}$. Segue-se, então, que $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ para todo $n \geqslant \bar{n}$. Em outras palavras, $lim\ (x_n) = x$.

C. Q. D.

Vale um resultado análogo para as sucessões monótonas decrescentes, o qual enunciamos a seguir (sua demonstração fica a cargo do leitor).

Teorema 7 — Seja (x_n) uma sucessão *monótona decrescente* em R. Então, (x_n) converge se, e somente se, ela é limitada. Neste caso, $lim\ (x_n) = inf\ X$, onde $X = \{x_n : n \in N\}$.

Exemplos:

26 — Mostremos, com auxílio do teorema acima, que a sucessão (b^n), $0 < b < 1$, converge para zero. Já vimos que (b^n), além de monótona decrescente, é claramente limitada. Portanto, existe o limite. Seja $lim\ (b^n) = l$. Observe-se que (b^{n+1}) é uma subsucessão e, portanto, $lim\ (b^{n+1}) = l$. Além disto, $b^{n+1} = b.b^n$, donde obtém-se que $l = lim\ (b^{n+1}) = lim\ (b.b^n) = b.lim\ (b^n) = bl$. Como $0 < b < 1$, necessariamente $l = 0$.

27 — Utilizaremos um argumento semelhante ao do exemplo anterior para mostrar que a sucessão $(x_n) = (b^{\frac{1}{n}}: n \in N)$, $b \geqslant 1$, converge para 1. (x_n) é limitada inferiormente, pois $b^{\frac{1}{n}} \geqslant 1$ para todo $n \in N$. Além disto, $b^{\frac{1}{n}} \geqslant b^{\frac{1}{n+1}}$ para todo $n \in N$, isto é, (x_n) é monótona decrescente e limitada. Seja $l = lim\ (b^{\frac{1}{n}}) \neq 0$ e considere-se a subseqüência $(b^{\frac{1}{n+1}} : n \in N)$. Sabemos que $lim\ (b^{\frac{1}{n+1}}) = l$ e que:

$$lim \left(\frac{b^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n+1}}} \right) = \frac{lim \left(b^{\frac{1}{n}}\right)}{lim \left(b^{\frac{1}{n+1}}\right)} = \frac{l}{l} = 1$$

Por fim, notemos que:

$$\left(\frac{b^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n+1}}} \right) = \left(b^{\frac{1}{n(n+1)}} \right)$$

é também uma subseqüência de (x_n) e, portanto, converge para l. Segue-se que:

$$l = lim \left(b^{\frac{1}{n(n+1)}} \right) = lim \left(\frac{b^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n+1}}} \right) = 1$$

28 — Seja (x_n) a seqüência cujo termo geral é $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para todo $n \in N$. Mostraremos que (x_n) é monótona crescente e limitada.

Utilizando o Teorema Binomial, podemos escrever:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{n^2} + \\ + \ldots + \frac{1}{n^n}$$

onde, por definição, $n! = 1 . 2 . 3 . 4 . \ldots . n$.

Reescrevendo x_n de maneira mais conveniente, obtém-se:

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Da mesma forma, o termo x_{n+1} pode ser escrito assim:

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \ldots$$
$$\ldots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

Observe-se agora que a expansão de x_n contém $(n+1)$ termos e a de x_{n+1} contém $(n+2)$ termos. Além disto, os $(n+1)$ primeiros termos de x_{n+1} são não-inferiores aos de x_n e o termo de ordem $(n+2)$ é positivo. Portanto, $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in N$.

Por fim, mostremos que (x_n) é limitada. Para tal, serão necessárias as desigualdades abaixo:

a) Para cada $n \in N$, $\left(1 - \frac{p}{n}\right) < 1$, $p = 1, 2, \ldots, n$.

b) Para cada $n \in N$, $2^{n-1} \leqslant n!$, o que pode ser visto facilmente com o auxílio do Princípio da Indução. Note-se que a desigualdade é verdadeira para $n = 1$. Admitindo que $2^{n-1} \leqslant n!$, segue-se que $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \leqslant 2\ (n!) \leqslant (n+1)\ n! = (n+1)!$, o que conclui a demonstração.

Portanto, podemos escrever, para cada $n \in N$, que:

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < 1 + 1 + \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2^2}(1)(1) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{2^{n-1}}(1)(1)\ldots(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + \frac{1/2}{1 - 1/2} = 3$$

o que mostra que (x_n) é limitada. Sendo monótona crescente e limitada, a sucessão (x_n) é convergente (Teorema 6).

29 — A sucessão cujo termo geral é $y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ é monótona crescente e limitada e, portanto, convergente.

Os dois teoremas anteriores nos fornecem recíprocas do Teorema 2 para o caso das sucessões monótonas. Nosso próximo passo é estabelecer um outro resultado que permita garantir algum tipo de convergência a partir da hipótese de que a sucessão é limitada. Na verdade, demonstraremos que toda sucessão limitada possui uma subsucessão convergente. Este fato, conhecido como Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucessões, terá papel importante no desenvolvimento do texto.

Faremos, inicialmente, a demonstração de um resultado que utilizaremos na demonstração do Teorema de Bolzano-Weierstrass e que, ao mesmo tempo, nos fornece uma caracterização diferente do ponto de acumulação.

Lema 1 — Dados o conjunto $A \subset R^p$ e o ponto $a \in R^p$, as seguintes afirmações são equivalentes:

a) $a \in A'$;

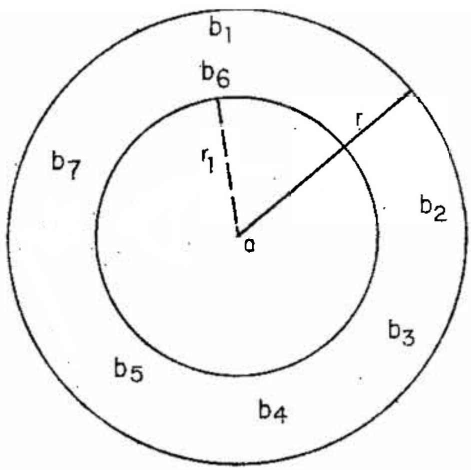
b) existe uma seqüência (x_n) em A de elementos distintos dois a dois tal que $a = \lim (x_n)$; e

c) toda bola aberta de centro em a contém uma infinidade de pontos de A.

Prova:

Mostraremos primeiramente que "a" implica "c", isto é, que, se $a \in A'$, então toda bola de centro em a contém uma infinidade de pontos de A. Suponhamos, por absurdo, que a bola $B(a, r)$, $r > 0$, é tal que $B(a, r) \cap A$ é um conjunto finito. Sejam $b_1, b_2, \ldots, b_n$ os elementos deste conjunto diferentes de a e seja $r_1 = min \{|b_1 - a|, |b_2 - a|, \ldots, |b_n - a|\}$.

Note-se que $r_1 > 0$ e que $B(a, r_1) \cap A$ é um conjunto vazio ou então $B(a, r_1) \cap A = \{a\}$ (veja-se a figura a seguir). Em ambos os casos temos uma contradição com a definição de ponto de acumulação.



Mostraremos agora que "c" implica "b". Dada a bola $B(a, 1)$, seja $x_1 \in A$ tal que $x_1 \in B(a, 1)$ e $x_1 \neq a$, isto é, $0 < |x_1 - a| < 1$. Da mesma forma, existe $x_2 \in A$, $x_2 \neq a$ e $x_2 \neq x_1$, tal que $x_2 \in B(a, 1/2)$. Prosseguindo desta maneira, podemos garantir que, para todo $n \in N$, existe $x_n \in B(a, 1/n)$ tal que $x_n \in A$, $x_n \neq x_{n-1} \neq x_{n-2} \neq \neq \ldots \neq x_2$ e $x_n \neq a$. A seqüência assim construída é convergente para a e seus elementos são distintos dois a dois.

A implicação de "b" para "a" segue-se diretamente da definição de convergência e do fato de que (x_n) é uma sucessão de elementos distintos.

Com isto concluímos a demonstração, uma vez que mostramos o seguinte: "a" $\Rightarrow$ "c" $\Rightarrow$ "b" $\Rightarrow$ "a".

C. Q. D.

Teorema 8 (Bolzano-Weierstrass) — Se (x_n) é uma sucessão limitada em R^p, ela possui uma subsucessão convergente.

Prova:

Seja $X = \{x_n: n \in N\}$ o conjunto de valores de (x_n). Há dois casos a serem considerados.

Se X é um conjunto finito, então existe um elemento da sucessão que se repete um número infinito de vezes. Neste caso, a subsucessão é formada por estes termos.

Se X é um conjunto infinito, então ele possui um ponto de acumulação x (Teorema de Bolzano-Weierstrass, Capítulo II). Façamos agora uma construção semelhante à realizada na demonstração de que "c" implica "b" no Lema anterior. Dada a bola $B(x, 1)$, seja $x_{n_1} \in X$ tal que $0 < |x - x_{n_1}| < 1$. Note-se que x é um ponto de acumulação do conjunto $\{x_n: n \in N \text{ e } n > n_1\}$ em vista do resultado "c" do Lema anterior. Portanto, dada a bola $B(x, 1/2)$, existe $x_{n_2} \in X$ tal que $n_2 > n_1$ e $0 < |x - x_{n_2}| < 1/2$. Prosseguindo neste processo, obtém-se uma subsucessão (x_{n_k}) tal que $|x_{n_k} - x| < 1/k$ para todo $k \in N$. Logo, $\lim\, (x_{n_k}) = x$.

C. Q. D.

III.1.2 — Sucessões de Cauchy

Até agora, a maior parte dos resultados que apresentamos sobre convergência de sucessões admite que tenhamos conhecimento do limite da mesma. As Sucessões de Cauchy, que estudaremos nesta subseção, são interessantes, pois nos permitem provar sua convergência sem conhecimento do limite. Na verdade, estas são as únicas sucessões que convergem em R^p.

Uma sucessão é de Cauchy quando seus termos tornam-se cada vez mais próximos uns dos outros à medida que n cresce. Por exemplo, a sucessão $(x_n) = (1/n\colon n \in N)$ tem essa propriedade, pois, dados $m \in N$ e $n \in N$, $|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ e, portanto, se escolhermos m e n grandes o suficiente, podemos tornar $|x_n - x_m|$ tão pequeno quanto desejarmos.

É interessante também observar que, aparentemente, existe uma relação entre convergência e Sucessões de Cauchy. Já sabemos que (x_n) converge para zero. Além disto, as sucessões $(1, -1, 1, -1, \ldots)$ e $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ não são convergentes e também não gozam da propriedade de que seus termos aproximam-se uns dos outros à medida que n cresce.

Passemos agora a uma análise mais formal das Sucessões de Cauchy.

Definição 6 — A sucessão (x_n) em R^p é de Cauchy se, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número natural $M(\varepsilon)$ tal que, para todo $m \geqslant M(\varepsilon)$ e para todo $n \geqslant M(\varepsilon)$, tivermos $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Exemplos:

30 — $(x_n) = (1/n\colon n \in N)$ é uma sucessão de Cauchy, pois, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $M(\varepsilon)$ como sendo o menor inteiro tal que $\frac{2}{\varepsilon} <$ $< M(\varepsilon)$. Portanto, quaisquer que sejam $m, n \geqslant M(\varepsilon)$, teremos $|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, uma vez que $\frac{1}{n} < \varepsilon/2$ e $\frac{1}{m} < \varepsilon/2$.

31 — A sucessão $(x_n) = (1 + 1/2 + \ldots + 1/n\colon n \in N)$ **não** é de Cauchy. Antes de mostrarmos isto, escrevamos a negação da Definição 6.

Negação da Definição 6 — A sucessão (x_n) em R^p não é de Cauchy se "existe" um número real $\varepsilon_0 > 0$ tal que, "para todo" número natural M, "existem" $m, n \in N$, $m, n \geqslant M$ e tais que $|x_m - x_n| \geqslant \varepsilon_0$.

Considere-se agora o número real $\varepsilon_0 = 1/3$ e sejam m e n números naturais tais que $m > n$. Então:

$$x_m - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{m} > \frac{1}{m} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{m} = \frac{(m-n)}{m} = 1 - \frac{n}{m}$$

Portanto, dado $M \in N$, sejam $n \geqslant M$ e $m = 2n$. Segue-se que $x_m - x_n > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$. Logo, (x_n) não é de Cauchy.

O resultado mais importante sobre as sucessões de Cauchy é o apresentado a seguir.

Teorema 9 (Critério de Convergência de Cauchy) — Uma sucessão (x_n) em R^p converge se, e somente se, ela é de Cauchy.

Prova:

O teorema será demonstrado na forma dos três Lemas a seguir.

Lema 2 — Se (x_n) em R^p é convergente, ela é de Cauchy.

Prova do Lema 2 — Seja $x = lim\ (x_n)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $M(\varepsilon) \in N$ tal que $n \geqslant M(\varepsilon)$ implica $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Portanto, se $m \geqslant M(\varepsilon)$ e $n \geqslant M(\varepsilon)$, temos que $|x_n - x_m| \leqslant |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon$.

Lema 3 — Se (x_n) em R^p é de Cauchy, ela é limitada.

Prova do Lema 3 — Dado $\varepsilon = 1$, seja $M(1) \in N$ tal que, se $m, n \geqslant M(1)$, $|x_n - x_m| < 1$. Seja $\overline{m} \in N$ ($\overline{m}$ fixo) tal que $\overline{m} \geqslant M(1)$ e seja $n \geqslant M(1)$. Então, $|x_n| \leqslant |x_n - x_{\overline{m}}| + |x_{\overline{m}}| < 1 + |x_{\overline{m}}|$ e, portanto, $|x_n| \leqslant B$ para todo $n \in N$, onde $B = max\ \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{\overline{m}-1}|, 1 + |x_{\overline{m}}|\}$.

Lema 4 — Seja (x_n) em R^p uma sucessão de Cauchy e seja (x_{n_k}) uma subsucessão que converge para x. Então, (x_n) converge para x.

Prova do Lema 4 — Como (x_n) é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe um número natural $M(\varepsilon)$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ para todo $m, n \geqslant M(\varepsilon)$. Como $lim\ (x_{n_k}) = x$, existe um número natural

$M'(\varepsilon)$ tal que $|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2$ para todo $n_k \geqslant M'(\varepsilon)$. Seja $\overline{m}_k \in N$ ($\overline{m}_k$ fixo) tal que $\overline{m}_k \geqslant M'(\varepsilon)$ e seja $n \geqslant max\ \{M(\varepsilon), M'(\varepsilon)\}$.

Então, $|x_n - x| \leqslant |x_n - x_{\overline{m}_k}| + |x_{\overline{m}_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Dessa maneira, concluímos que $lim\ (x_n) = x$.

Para encerrar a demonstração do Teorema 9, observe-se que:

a) o Lema 2 garante que toda sucessão convergente é de Cauchy; e

b) a outra implicação segue-se dos Lemas 3 e 4 e do Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucessões.

C. Q. D.

III.1.3 — Caracterização dos Conjuntos Fechados e dos Conjuntos Compactos por Meio de Sucessões

Procuraremos agora dar uma caracterização adicional dos Conjuntos Fechados e dos Conjuntos Compactos em termos de sucessões. Este é um exercício útil porque melhora o nosso conhecimento com relação à natureza de tais conjuntos e também porque nos permitirá apresentar certas demonstrações de maneira bastante simples.

Teorema 10 — Um conjunto $F \subset R^p$ é fechado se, e somente se, o limite de toda seqüência convergente de elementos de F pertence a F.

Prova:

Suponha-se que F seja um conjunto fechado e seja (x_n) em F tal que $lim\ (x_n) = x$. Se x é um elemento da sucessão, claramente $x \in F$. Se tal não acontece, toda vizinhança de x contém infinitos pontos do conjunto $\{x_n\colon n \in N\}$ e, portanto, contém infinitos pontos de F. Logo, x é um ponto de acumulação de F e, como F é fechado, $x \in F$.

Suponha-se agora que toda seqüência (x_n) em F convergente é tal que $lim\ (x_n) \in F$. Seja x um ponto de acumulação de F. Pelo Lema 1 existe uma seqüência em F que converge para x. Pela hipótese, $x \in F$ e, portanto, F é fechado.

C. Q. D.

Como aplicação deste resultado, considere-se o conjunto: sejam $\alpha \in R^p_+ - \{0\}$, $m \in R_+ - \{0\}$ e $B = \{X \in R^p\colon < \alpha, x > \leqslant m\}$. Mostremos que B é fechado. Para tanto, seja (y_n) em B uma seqüência que converge para $y \in R^p$. Como $y_n \in B$ para cada $n \in N$, $< \alpha, y_n > \leqslant m$ e, portanto, devemos necessariamente ter (exemplo 20) $< \alpha, y > \leqslant m$. Assim, $y \in B$, o que mostra que B é fechado.

Teorema 11 — Um conjunto $K \subset R^p$ é compacto se, e somente se, toda sucessão (x_n) em K possui uma subsucessão convergente para um elemento de K.

Prova:

Suponha-se que K é compacto e seja (x_n) uma sucessão em K. Portanto, (x_n) é uma sucessão limitada que possui uma subsucessão convergente (Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucessões). Segue-se do teorema anterior que $lim\ (x_{n_k}) \in K$.

Suponha-se agora que toda seqüência em K possui uma subsucessão convergente para um elemento de K.

Mostremos, primeiramente, que K é fechado. Seja (x_n) uma sucessão convergente em K. Como ela possui uma subsucessão convergente para um elemento de K, $lim\ (x_n) \in K$. Logo, K é fechado.

Se K não é limitado, então para todo $B \in R$ existe $x \in K$ tal que $|x| > B$. Dados, portanto, os números $1, 2, 3, \ldots$, existem $x_1 \in K$, $x_2 \in K, \ldots, x_n \in K$ tais que $|x_n| > n$ para todo $n \in N$.

Toda subseqüência de (x_n) é ilimitada e, portanto, não converge. Isto contradiz a hipótese inicial.

C. Q. D.

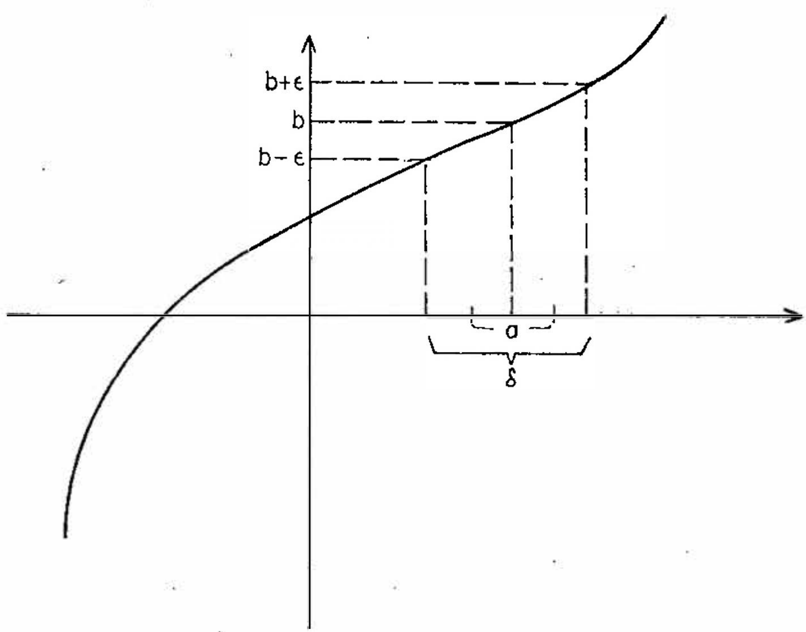
III.2 — Limite de Função

Trataremos agora da questão mais geral do limite de uma função definida no subconjunto de R^p. Na seção anterior restringimo-nos às sucessões que são funções definidas no conjunto dos números naturais.

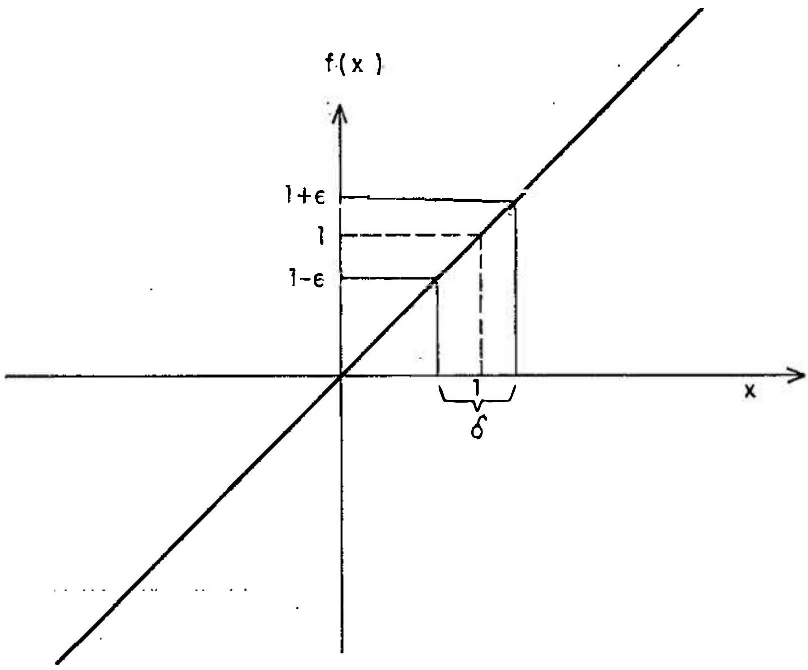
O desenvolvimento que faremos generaliza, portanto, o tratamento anterior. Sua importância, como mencionado no início do capítulo, prende-se ao papel fundamental que desempenhará em outras partes do texto quando estivermos examinando, por exemplo, Continuidade de Funções, Derivadas e Integrais. A apresentação está organizada da seguinte maneira: definição de limite; teoremas sobre limites; e, por fim, existência de limites laterais para funções monótonas.

III.2.1 — O Conceito de Limite de Função

Intuitivamente, o limite de uma função (quando ele existe) num ponto a é um valor do qual nos podemos "aproximar" tanto quanto desejarmos, desde que nos "aproximemos" o suficiente do ponto a. Vejamos a figura a seguir.



O número b é o limite da função no ponto a, porque, por menor que seja uma vizinhança do ponto b, conseguiremos encontrar valores arbitrariamente próximos de a cujas imagens estarão dentro da referida vizinhança. Apelando ainda um pouco mais para a intuição do leitor, consideremos a função $f: R \to R$ definida por $f(x) = x$. O limite de $f(x)$ no ponto $x = 1$ é $b = 1$, pois, qualquer que seja a vizinhança que tomarmos com centro em b, encontraremos uma vizinhança com centro em $x = 1$ tal que a imagem dos seus pontos estará contida na vizinhança de b.



Vejamos agora a definição precisa de limite.

Definição 7 — Seja $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, e seja $a \in R^q$ um ponto de acumulação de D. Diz-se que $b \in R^p$ é o limite de f quando x tende para a se a seguinte condição se verifica: para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número real $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, qualquer que seja $x \in D$, com $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$, temos que $|f(x) - b| < \varepsilon$. Neste caso, escrevemos:

$$b = \lim_{x \to a} f(x)$$

Exemplos:

32 — Seja f: $R \to R$ definida por $f(x) = x$. Mostremos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$. Para tanto, deveremos mostrar que, qualquer que seja o número real $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um número real $\delta(\varepsilon) > 0$ que satisfaça a condição acima. Observe-se, então, que:

$$|f(x) - 1| = |x - 1|$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar o número δ como sendo igual a ε, uma vez que, para todo $x \in R$ tal que $0 < |x - 1| < \delta$, teremos $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

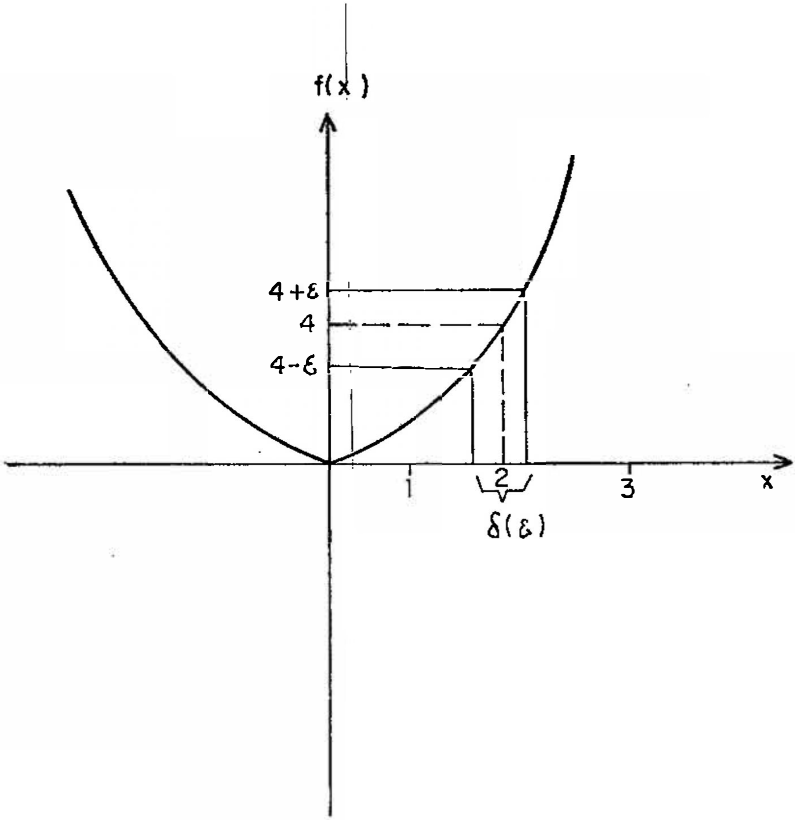
33 — Seja f: $R \to R$ definida por $f(x) = x^2$. Mostremos que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. Inicialmente, observemos que:

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |x - 2|\,|x + 2| \tag{1}$$

Como a existência do limite é uma propriedade local, isto é, para a qual só interessa o comportamento da função nas proximidades do ponto considerado, podemos nos restringir, numa primeira aproximação, a uma vizinhança de raio 1 do ponto $x = 2$. Em outras palavras, consideremos apenas os pontos do domínio da função tais que $|x - 2| < 1$. Então, tem-se que $1 < x < 3$ e $|x + 2| < 5$, e (1) pode ser agora limitado superiormente por $5\,|x - 2|$. Em outras palavras, $|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |x - 2|\,|x + 2| < 5\,|x - 2|$.

Dado um número $\varepsilon > 0$, podemos então tomar $\delta(\varepsilon)$ como sendo o menor dos números $\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$, isto é, $\delta(\varepsilon) = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$. Neste caso, sempre que $x \in R$ satisfizer $0 < |x - 2| < \delta(\varepsilon)$, teremos $|f(x) - 4| < 5\,|x - 2| < 5\,\delta(\varepsilon) \leqslant 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$.

Veja-se a figura a seguir para uma ilustração do procedimento que utilizamos na demonstração acima.



34 — Seja $f\colon D \to R$, onde $D = R - \{1/3\}$, definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 18}{3x - 1}$. Mostremos que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

Inicialmente, procuremos estimar, de maneira conveniente, o valor de $|f(x) - 4|$. Observe-se que:

$$|f(x) - 4| = \left|\frac{x^2 - x + 18}{3x - 1} - 4\right| = \frac{|x^2 - 13x + 22|}{|3x - 1|} = |x - 2|\,\frac{|x - 11|}{|3x - 1|}$$

Tal como no exemplo anterior, façamos uma restrição ao domínio de f que não permita que a expressão $\dfrac{|x - 11|}{|3x - 1|}$ se torne demasiado grande. Uma condição importante para isto é que nos mantenhamos afastados do ponto $1/3$. Suponha-se, então, que nos restrinjamos a uma vizinhança de raio 1, isto é, $|x - 2| < 1$. Neste caso, $1 < x < 3$, $-10 < x - 11 < -8$ e $2 < 3x - 1 < 8$, ou, ainda, $|x - 11| < 10$ e $|3x - 1| > 2$. Portanto, $\dfrac{|x - 11|}{|3x - 1|} < \dfrac{10}{2} = 5$.

Feitas estas considerações preliminares, seja agora $\varepsilon > 0$ e tomemos $\delta(\varepsilon) = min \left\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$. Então, para todo $x \in D$ tal que $0 < |x - 2| < \delta(\varepsilon)$, teremos que $|f(x) - 4| = |x - 2| \dfrac{|x - 11|}{|3x - 1|} < 5|x - 2| < \varepsilon$. Em outras palavras, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

35 — Seja $f\colon R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \neq 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

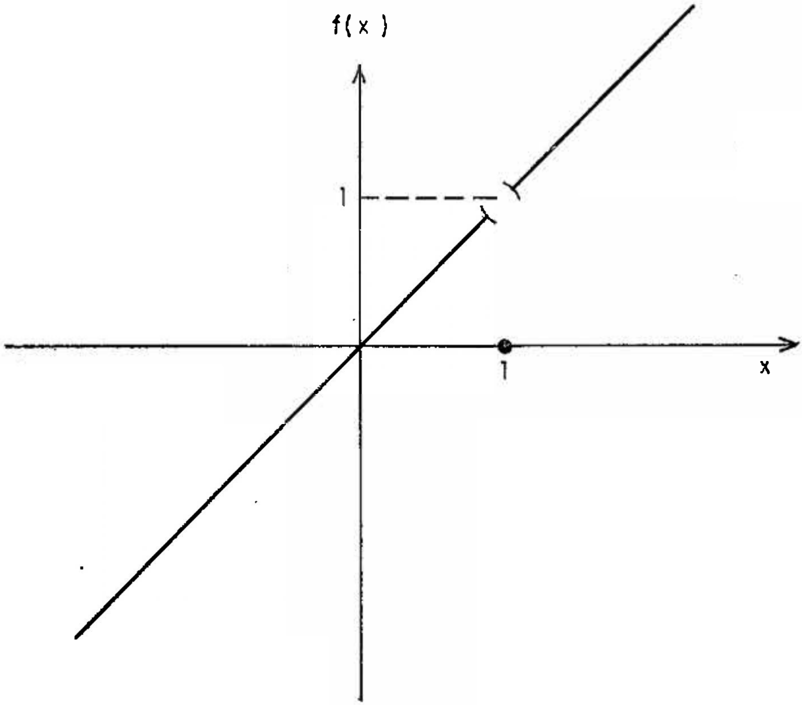
Neste caso, $f(1) = 0$, entretanto $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$, como pode ser demonstrado de maneira inteiramente análoga ao que fizemos no exemplo 32 (o gráfico da função, na página seguinte, ajudará o leitor a compreender melhor este exemplo).

36 — Seja $f\colon R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}, & \text{se } x \neq -1 \\ 0, & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

Mostremos que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -2$. Note-se, inicialmente, que na definição de limite o valor da função no ponto não é considerado e, portanto, podemos estimar o valor de $|f(x) - (-2)|$ pela expressão:

$$|f(x) - (-2)| = \left|\frac{x^2 - 1}{x + 1} + 2\right| = \left|\frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} + 2\right| = |x + 1|.$$



Dessa maneira, dado $\varepsilon > 0$, se tomarmos $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, teremos que, se $0 < |x - (-1)| < \delta(\varepsilon)$, $|f(x) + 2| = |x + 1| < \varepsilon$. Portanto, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -2$.

Passemos agora a fazer algumas observações com relação à definição de limite de função.

a) Como os exemplos 35 e 36 ilustram, o limite de uma função não é necessariamente igual ao seu valor no ponto considerado. Na verdade, como estes exemplos também ilustram, não faz a menor diferença se o ponto em questão pertence ou não ao domínio da função. É fácil ver que, se $g: R - \{-1\} \to R$ é definida por $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$, então $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -2$. Note-se que -1 não pertence ao domínio de g, porém ele é ponto de acumulação de $R - \{-1\}$.

O fato considerado pode ser facilmente comprovado. Sejam $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, $a \in D$ ponto de acumulação de D e $g: D - \{a\} \to R^p$ tais que, para todo $x \in D - \{a\}$, $f(x) = g(x)$. Então, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$.

b) A única condição imposta ao ponto a na Definição 7 é que ele seja ponto de acumulação de D, e como tal pode ou não pertencer a D, como afirmamos na observação anterior.

Além disto, note-se que, se a não é ponto de acumulação de D, então existe um número real $\gamma > 0$ tal que $B(a, \gamma) \cap D$ é vazio ou então é o conjunto $\{a\}$. Mostremos que, se tal ocorre, qualquer número real é limite de qualquer função quando x tende para a.

Vejamos, então, a *Negação da Definição de Limite*: um número $L \in R^p$ não é o limite de f quando x tende para a se *existe* um número real $\varepsilon_0 > 0$ tal que, "para todo" $\delta > 0$, existe $x \in D$ com $0 < |x - a| < \delta$ e tal que $|f(x) - L| \geqslant \varepsilon_0$.

Considerando isto, seja $\varepsilon_0 > 0$ um número dado e note-se que, a não sendo ponto de acumulação de D, não existe nenhum $x \in D$ tal que $0 < |x - a| < \gamma$ e, portanto, qualquer vetor $b \in R^p$ é limite de qualquer função. Em outras palavras, se não impusermos a condição de que $a \in D'$, o conceito de limite torna-se inteiramente trivial.

c) Uma versão equivalente da definição de limite é a seguinte: dados $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, e $a \in R^q$ ponto de acumulação de D, diz-se que $b \in R^p$ é o limite de f quando x tende para a se, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número real $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $f(Va) \subset B(b, \varepsilon)$, onde $Va = B(a, \delta(\varepsilon)) - \{a\}$ é uma *bola perfurada* de centro em a.

A equivalência das duas definições pode ser facilmente comprovada. Inicialmente, se se supõe que a Definição 7 é verdadeira, a definição acima segue-se imediatamente. Por outro lado, se a definição acima é verdadeira, e se $x \in D$ é tal que $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$, segue-se que $f(x) \in B(b, \varepsilon)$, isto é, $|f(x) - b| < \varepsilon$.

d) Podemos ainda apresentar a definição de limite de uma terceira maneira (obviamente equivalente às duas anteriores): dados $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, e $a \in R^q$ ponto de acumulação de D, diz-se

$\in$que b R^p é o limite de f quando x tende para a se, para toda vizinhança $W \subset R^p$ de b, existe uma vizinhança $V \subset R^q$ de a tal que, para todo $x \in D \cap (V - \{a\})$, $f(x) \in W$.

Provemos a equivalência desta definição com a anterior. É fácil ver que, se esta definição se verifica, a anterior também ocorre, pois as bolas são vizinhanças. Por outro lado, suponha-se que a definição da observação "c" seja verdadeira e seja W uma vizinhança de b. Por definição, existe uma bola $B(b, \varepsilon) \subset W$. Então, a bola perfurada $B(a, \delta) - \{a\}$ pode ser tomada como V da definição acima.

Procuraremos, no que se segue, utilizar mais intensamente a Definição 7. No entanto, as duas outras definições são importantes para familiarizar o leitor com certas generalizações do conceito de limite. Além disto, no capítulo seguinte sobre funções contínuas faremos uso de uma destas formulações.

Teorema 12 — Seja $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, e seja $a \in R^q$ um ponto de acumulação de D. Então, $b \in R^p$ é um limite de f quando x tende para a se, e somente se, para toda sucessão (x_n) em $D - \{a\}$ tal que $lim\ (x_n) = a$, tivermos $b = lim\ (f(x_n))$.

Prova:

Seja (x_n) em $D - \{a\}$ tal que $lim\ (x_n) = a$ e suponha-se que $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - b| < \varepsilon$. Como $lim\ (x_n) = a$, existe um número natural $M[\delta(\varepsilon)]$ tal que, se $n \geqslant M[\delta(\varepsilon)]$, $0 < |x_n - a| < \delta(\varepsilon)$. Portanto, para todo $n \geqslant M[\delta(\varepsilon)]$, teremos $|f(x_n) - b| < \varepsilon$.

Suponhamos agora que toda sucessão (x_n) em $D - \{a\}$ que converge para a tem a propriedade de que $lim\ (f(x_n)) = b$. Suponhamos também que b não é o limite de $f(x)$ quando x tende para a.

Então, existe um número real $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe $x \in D$ com $0 < |x - a| < \delta$ tal que $|f(x) - b| \geqslant \varepsilon_0$. Tomando-se sucessivamente $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1/2, \ldots, \delta_n = 1/n, \ldots$, e escolhendo, para cada um destes δ, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, respectivamente, obtém-se uma seqüência em $D - \{a\}$ tal que $\lim (x_n) = a$. Entretanto, $|f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in N$. Esta contradição demonstra o resultado.

C. Q. D.

Deste fato podemos imediatamente provar:

Corolário (Unicidade do limite) — Seja $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, e seja $a \in R^q$ um ponto de acumulação de D. Então, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, temos que $L_1 = L_2$.

Prova:

Ver o teorema acima e o Teorema 1.

O resultado que acabamos de demonstrar é de grande importância prática para a verificação da existência ou não do limite de uma dada função. Assim, por exemplo, para mostrar que não existe limite é suficiente encontrarmos duas sucessões no domínio da função com a propriedade especificada no teorema e cujas imagens convergem para limites diferentes. Ou, ainda, basta encontrarmos uma sucessão com a propriedade especificada e cuja imagem não seja uma sucessão convergente.

Vejamos alguns exemplos em que se pode tirar proveito do teorema.

Exemplos:

37 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Verifiquemos se existe o limite de f quando (x, y) tende para $(0, 0)$. Para tanto, consideremos as seguintes sucessões:

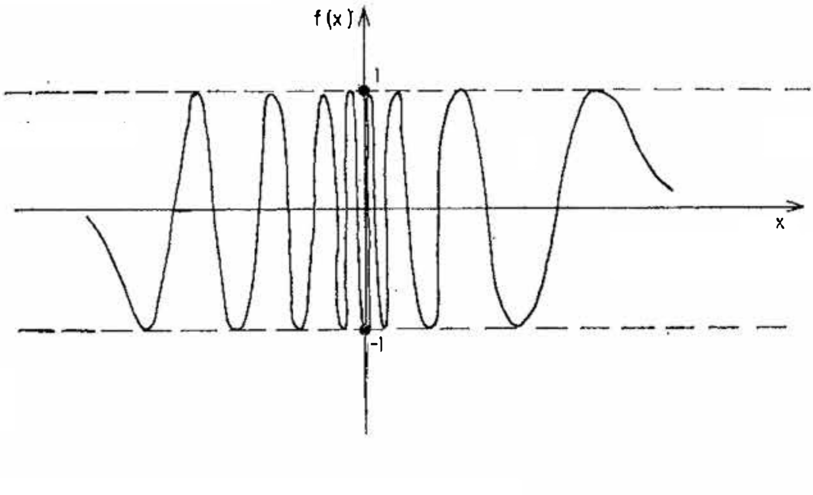
$(Z_n) = \{(1/n, 1/n) : n \in N\}$ e $(V_n) = \{(2/n, 1/n) : n$

Observe-se que (Z_n) e (V_n) são sucessões em $R^2 - \{(0, 0)\}$ e que $lim\ (Z_n) = lim\ (V_n) = 0$. Entretanto, $lim\ (f(Z_n)) = 1/2$ e $lim\ (f(V_n)) = 2/5$. Logo, não existe o limite de f quando (x, y) tende para $(0, 0)$.

38 — Seja $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} sen\ \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Mostremos, com auxílio do teorema anterior, que não existe o limite de f quando x tende para zero. Antes, porém, é interessante esboçar o gráfico de f para que tenhamos uma visão geométrica do fato.



É intuitivo, a partir do gráfico, que o limite não deve existir, pois à medida que nos aproximamos do ponto zero a função oscila abruptamente entre os valores $+1$ e -1.

Mais formalmente, consideremos a sucessão $(x_n) = \left(\dfrac{2}{(2n-1)\pi} : n \in N\right)$ em $R - \{0\}$. É fácil ver que $lim\ (x_n) = 0$. Entretanto,

$(f(x_n)) = sen\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} : n \in N\right) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ não converge e, portanto, não existe o limite em questão.

Observe-se que, qualquer que seja o valor da função f no ponto $x = 0$, o mesmo argumento acima mostra que não existe o limite quando x tende para zero.

Para enunciarmos o próximo teorema introduziremos a seguinte notação: seja $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$. Então, para cada $x \in R^q$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x))$, onde $f_i: D \to R$, isto é, f é um vetor onde os componentes são as p funções reais f_i.

Teorema 13 — Seja $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, e seja $a \in R^q$ um ponto de acumulação de D. Então, existe o limite de f quando x tende para a se, e somente se, existem os limites das funções f_i quando x tende para a.

Prova:

Ver o Teorema 12 e o Teorema 3.

Como aplicação, consideremos os seguintes exemplos:

39 — Seja $f: R^2 \to R^2$ definida por $f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$. Mostremos que existe $\lim\limits_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ qualquer que seja $(a, b) \in R^2$.

Seja $f_1: R^2 \to R$ definida por $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ e seja (a_n, b_n) uma sucessão em $R^2 - \{(a, b)\}$ que converge para (a, b). Então, (a_n) converge para a e (b_n) converge para b. Logo, $(f_1(a_n, b_n)) = (a_n^2 + b_n^2)$ converge para $(a^2 + b^2)$. Similarmente, $f_2: R^2 \to R$ definida por $f_2(x, y) = x^2 - y^2$ é tal que $(f_2(a_n, b_n)) = (a_n^2 - b_n^2)$ converge para $(a^2 - b^2)$.

Assim, fica claro que:

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = (a^2 + b^2, a^2 - b^2)$$

40 — Seja $f: R \to R^2$ definida por:

$$f(t) = \begin{cases} (t, 1/t), \text{ se } t \neq 0 \\ 0, \text{ se } t = 0 \end{cases}$$

Não existe o limite de f quando t tende para zero, pois não existe o limite de $\frac{1}{t}$ quando t tende para zero.

Definição 8 — Sejam $f\colon D \to R^p$, $g\colon D \to R^p$ e $\alpha\colon D \to R$, $D \subset R^q$. Então:

a) a função *soma* é dada por $f + g\colon D \to R^p$ tal que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;

b) a função *produto interno* é dada por $< f, g >\colon D \to R$ tal que $< f, g > (x) = < f(x), g(x) >$;

c) a função *produto escalar* é dada por $\alpha f\colon D \to R^q$ tal que $(\alpha f)(x) = \alpha(x) f(x)$; e

d) se $\alpha(x) \neq 0$ para todo $x \in D$, a função *quociente* é dada por

$$\frac{1}{\alpha} f\colon D \to R \text{ tal que } \left(\frac{1}{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\alpha(x)} f(x).$$

Teorema 14 — Sejam $f\colon D \to R^p$ e $g\colon D \to R^p$, $D \subset R^q$, e $a \in R^q$ um ponto de acumulação de D. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$.

então:

a) existe o limite de $(f + g)$ quando x tende para a e $\lim (f + g)(x) = b + c$; e

b) existe o limite de $< f, g >$ quando x tende para a e $\lim\limits_{x \to a} < f, g > (x) = < b, c >$.

Prova:

Como a é ponto de acumulação de D, existe pelo menos uma seqüência (x_n) em $D - \{a\}$ tal que $\lim (x_n) = a$. Portanto, tomando agora uma seqüência arbitrária (x_n) em $D - \{a\}$ com $\lim (x_n) = a$, temos que $\lim (f(x_n)) = b$ e $\lim (g(x_n)) = c$. Portanto (Teorema 5), temos que $\lim (f + g)(x_n) = b + c$ e $\lim < f, g > (x_n) =$ $= < b, c >$.

C. Q. D.

Teorema 15 — Sejam $f: D \to R^p$ e $\alpha: D \to R$, $D \subset R^q$, e $a \in R^q$ ponto de acumulação de D. Se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim_{x \to a} \alpha(x) = \beta$, então:

a) existe o limite da função $\alpha f: D \to R^q$ definida por $(\alpha f)(x) = \alpha(x) f(x)$ quando x tende para a, e neste caso $\lim_{x \to a} (\alpha f)(x) = \beta . b$; e

b) se $\alpha(x) \neq 0$ para todo $x \in D$ e $\beta \neq 0$, existe o limite da função $\left(\frac{1}{\alpha} f\right): D \to R^q$ definida por $\left(\frac{1}{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \cdot f(x)$ quando x tende para a, e neste caso $\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\beta} \cdot b$.

Prova:

O resultado segue-se imediatamente dos Teoremas 12 e 5.

Façamos algumas observações com relação a estes resultados.

a) Tanto o Teorema 14 quanto o Teorema 15 nos fornecem condições suficientes para a existência do limite. Que estas condições não são necessárias pode ser verificado através dos seguintes exemplos:

— Seja $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

e $g: R \to R$ definida por $g(x) = x$. Então, não existe o limite de f quando x tende para zero e, no entanto, $\lim_{x \to 0} f(x) . g(x) = 1$.

— Sejam $f: R \to R$ e $g: R \to R$ tais que $f(x) = -g(x)$. Ainda que não exista o limite de f quando x tende para a, existe o limite de $(f + g)$ quando x tende para a. Neste caso, $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = 0$.

b) Com relação ao resultado "b" do Teorema 15, convém notar que, na verdade, não é necessário fazer a hipótese de que $\alpha(x) \neq 0$ para todo $x \in D$, porque se $\beta \neq 0$ teremos que $\alpha(x) \neq 0$ numa vizinhança do ponto a e, portanto, nesta vizinhança $\left(\frac{1}{\alpha} f\right)$ está bem definida. Mostremos este fato. Como $\lim_{x \to a} \alpha(x) = \beta$ e $\beta \neq 0$, seja dado $\varepsilon = |\beta| > 0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D$ com $0 < |x - a| < \delta$, teremos $|\alpha(x) - \beta| < |\beta|$. Portanto, $-|\beta| < \alpha(x) - \beta < |\beta|$ ou, ainda, $\alpha(x) > 0$ se $\beta > 0$ ou $\alpha(x) < 0$ se $\beta < 0$ para todo $x \in D$ satisfazendo $0 < |x - a| < \delta$.

c) Quando $\beta = 0$, para que exista o limite de $\left(\frac{1}{\alpha} f\right)$ quando x tende para a é necessário (porém não é suficiente) que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, porque, existindo $\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{\alpha} f\right)(x)$, então temos que $f(x) = \left(\frac{1}{\alpha(x)} \cdot f(x)\right) \alpha(x)$. Logo, $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Abordaremos novamente estes casos quando discutirmos as chamadas formas indeterminadas.

Teorema 16 — Sejam $f: D \to R$, $g: D \to R$, $D \subset R^q$, e seja $a \in R^q$ ponto de acumulação de D tais que $f(x) \geqslant g(x)$ para todo $x \in D - \{a\}$. Então, $\lim_{x \to a} f(x) \geqslant \lim_{x \to a} g(x)$.

Prova:

Sejam $b = \lim_{x \to a} f(x)$ e $c = \lim_{x \to a} g(x)$ e suponhamos que $c > b$. Dado $\varepsilon = c - b > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|(f(x) - g(x)) - (b - c)| < c - b$ para todo $x \in D$ tal que $0 < |x - a| < \delta$. Segue-se que $b - c < (f(x) - g(x)) - (b - c) < c - b$ na vizinhança acima. Portanto, $f(x) < g(x)$, o que contradiz a hipótese de que $f(x) \geqslant g(x)$ em $D - \{a\}$.

C. Q. D.

III.2.2 — Limites Laterais e Funções Monótonas

Nesta subseção introduziremos a idéia de limite lateral de uma função e provaremos o teorema que garante sua existência para as funções monótonas.

Definição 9 — Seja $f: D \to R$, $D \subset R$, e seja $a \in R$ um ponto de acumulação do conjunto $D^{>} = \{x \in D: x > a\}$. Diz-se que b é o limite à direita de f quando x tende para a se, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número real $\delta > 0$ tal que, se $a < x < a + \delta$, $x \in D$, então $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Definição 10 — Seja $f: D \rightarrow R$, $D \subset R$, e seja $a \in R$ um ponto de acumulação do conjunto $D^{<} = \{x \in D: x < a\}$. Diz-se que b é o limite à esquerda de f quando x tende para a se, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número real $\delta > 0$ tal que, se $a - \delta < x < a$, $x \in D$, então $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Para indicar os limites laterais utilizaremos uma das notações abaixo:

a) limite à direita de f quando x tende para a: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$; $f(a + 0)$; ou $f(a +)$; e

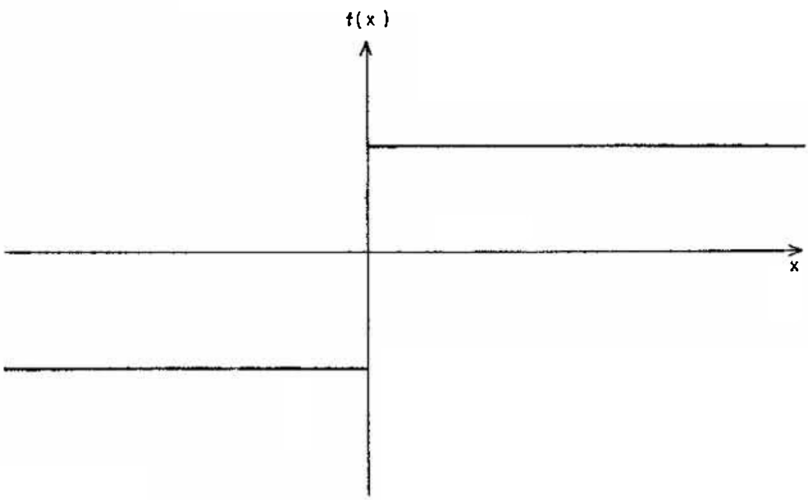
b) limite à esquerda de f quando x tende para a: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$; $f(a - 0)$; ou $f(a -)$.

Exemplos:

41 — Seja $f: R \rightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ -1, \text{ se } x \leqslant 0 \end{cases}$$

O gráfico de f é o seguinte:



Observando-se o gráfico de f, pode-se perceber que o limite à direita quando x tende para zero é 1 e o limite à esquerda é -1.

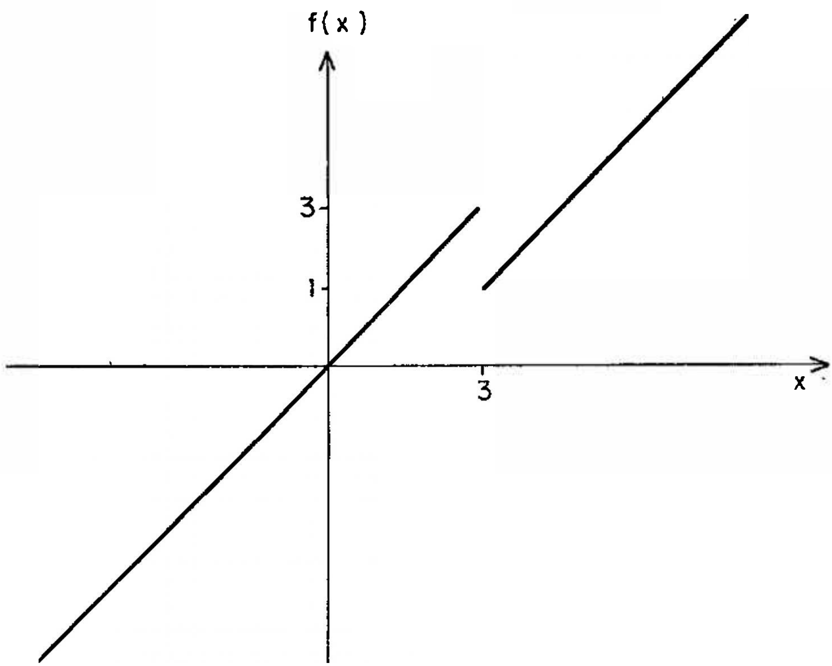
Mais formalmente, qualquer que seja $\varepsilon > 0$ e qualquer que seja $\delta > 0$, teremos $|f(x) - 1| = 0 < \varepsilon$ para todo $0 < x < \delta$ e também $|f(x) + 1| = 0 < \varepsilon$ para todo $-\delta < x < 0$.

Observe-se que não existe o limite de f quando x tende para zero. Claramente, nenhum número diferente de 1 ou -1 poderia ser o limite. Além disto, nem o número 1 nem o número -1 podem ser o limite, pois, dado $\varepsilon_0 = 1/2$, qualquer que seja $\delta > 0$ existe $x \in R$ tal que $|f(x) - 1| \geqslant 1/2$ ou $|f(x) + 1| \geqslant 1/2$.

42 — Seja $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x < 3 \\ x - 2, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

O gráfico de f é o seguinte:



É fácil ver que o limite à direita de f quando x tende para 3 é 1 e o limite à esquerda é 3. Observe-se, também, que não existe o limite de f quando x tende para 3.

Nos exemplos 41 e 42 verificamos que existiam os limites laterais, porém eles eram diferentes. Verificamos também que não existia o limite da função quando x tende para o ponto considerado. Isto não é uma coincidência, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 17 — Seja $f: D \to R$, $D \subset R$, e seja $a \in R$ um ponto de acumulação dos conjuntos $D^{>}$ e $D^{<}$. Então, existe o limite de f quando x tende para a se, e somente se, existem os limites laterais quando x tende para a e $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Prova:

Note-se, inicialmente, que a é um ponto de acumulação de D.

Suponha-se, agora, que $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Então, segue-se da definição que $b = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Por outro lado, se existem os limites laterais e se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$, então, dado $\varepsilon > 0$, existem:

a) $\delta_1 > 0$ tal que, se $x \in D$ e $a - \delta_1 < x < a$, então $|f(x) - b| < \varepsilon$; e

b) $\delta_2 > 0$ tal que, se $x \in D$ e $a < x < a + \delta_2$, então $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Tomando-se $\delta = min\ \{\delta_1, \delta_2\}$, segue-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

C. Q. D.

Definição 11 — Uma função $f: D \to R$, $D \subset R$, diz-se crescente (decrescente) se, para todo $x, y \in D$, $x > y$, tivermos $f(x) > f(y)$ $(f(x) < f(y))$. A função f é não-decrescente (não-crescente) se, para todo $x, y \in D$, $x > y$, tivermos $f(x) \geqslant f(y)$ $(f(x) \leqslant f(y))$.

Exemplos:

43 — A função $f: R_+ \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$ é crescente, pois, dados $x, y \in R_+$ com $0 > x > y$, então $f(x) = \dfrac{x}{1 + x} =$

$= \dfrac{1}{1 + 1/x} > \dfrac{1}{1 + 1/y} = f(y)$. Quando $x = 0$, $f(x) =$ $= 0 < f(y)$ para todo $y > 0$. Portanto, f é uma função crescente.

44 — Seja $f\colon R \to R$ definida por $f(x)$ = maior inteiro menor ou igual a x. É fácil ver que f é não-decrescente, pois, dados $x, y \in R$, $x > y$, temos que $f(x) \geqslant f(y)$.

Quando f é crescente, não-decrescente, decrescente ou não-crescente, diremos que é uma função monótona. O teorema que se segue mostra um aspecto importante do comportamento das funções monótonas, qual seja, a existência dos limites laterais.

Definição 12 — Seja $f\colon D \to R^p$, $D \subset R^q$. Diz-se que f é limitada se o conjunto $f(D)$ é limitado em R^q, isto é, se $f(D)$ está contido em alguma bola.

Exemplos:

45 — A função $f\colon R \to R$ definida por $f(x) = x$ não é limitada, pois $f(R) = R$.

46 — A função $f\colon R \to R$ definida por $f(x) = sen\ x$ é limitada, pois $f(R) = [-1, 1]$.

Teorema 18 — Sejam: $f\colon D \to R$, $D \subset R$, uma função monótona limitada, $a \in R$ um ponto de acumulação do conjunto $D^{>}$ e b um ponto de acumulação do conjunto $D^{<}$. Então, existem os limites laterais $f(a+)$ e $f(b-)$.

Prova:

Mostremos que existe o limite à direita de f quando x tende para a. Para fixar idéias, suponhamos que f seja monótona não-crescente limitada.

Como a é um ponto de acumulação de $D^{>}$, temos que, para todo $\delta > 0$, o conjunto $(a - \delta, a + \delta) \cap D^{>}$ é não-vazio e diferente de $\{a\}$. Logo, se $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D^{>}$, temos que $a < x < a + \delta$. Dado $\delta_1 = 1$, seja $x_1 \in D$ tal que $a < x_1 < a + \delta_1$. Além disto, como

a é também ponto de acumulação do conjunto $\{x \in D: a < x < a + \delta_1\}$, dado $\delta_2 = min\left\{\frac{1}{2}, |x_1 - a|\right\}$, existe $x_2 \in D$ tal que $a < x_2 < a + \delta_2$. Portanto, $x_2 < a + \delta_2 \leqslant a + |x_1 - a| = x_1$. Dado agora $\delta_3 = min\left\{\frac{1}{3}, |x_2 - a|\right\}$, existe $x_3 \in D$ tal que $x_2 > x_3$.

Prosseguindo desta maneira, obtém-se uma seqüência (x_n) em $D - \{a\}$ que é monótona decrescente e que converge para a. Uma vez que f é monótona não-crescente e limitada, temos que a seqüência $(f(x_n))$ é monótona crescente e limitada. Logo, $(f(x_n))$ converge para um número real L (note-se que $L = sup\ \{f(x_n) : n \in N\}$).

Mostremos, finalmente, que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural $M(\varepsilon)$ tal que, se $n \geqslant M(\varepsilon)$, $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Além disto, se $x > a$, existe $n \in N$ tal que $x > x_n > a$ e, portanto, $L \geqslant f(x_n) \geqslant f(x)$, isto é, $L \geqslant f(x)$, qualquer que seja $x \in D^>$.

Seja, agora, $\bar{n} \geqslant M(\varepsilon)$ e tomemos $\delta = x_{\bar{n}} - a$. Então, se $a < x < a + \delta$ (isto é, $a < x < x_{\bar{n}}$), teremos $f(x_{\bar{n}}) \leqslant f(x)$, donde se conclui que $-\varepsilon < 0 < L - f(x) < L - f(x_{\bar{n}}) < \varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

O argumento acima pode ser adaptado para mostrar que existe o limite à esquerda de f quando x tende para b.

C. Q. D.

III.2.3 — Limite Infinito e Limite no Infinito

Definição 13 — Seja $f: D \to R$, $D \subset R$.

a) Se a é um ponto de acumulação de D, diz-se que o limite de f quando x tende para a é *mais infinito* (indica-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$) se, para todo $B \in R$, existe um número real $\delta_B > 0$ tal que, se $x \in D$ e se $0 < |x - a| < \delta_B$, temos $f(x) > B$. O limite de f quando x tende para a é *menos infinito* (indica-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$) se, para todo $B \in R$, existe $\delta_B > 0$ tal que, se $x \in D$ e se $0 < |x - a| < \delta_B$, temos $f(x) < B$.

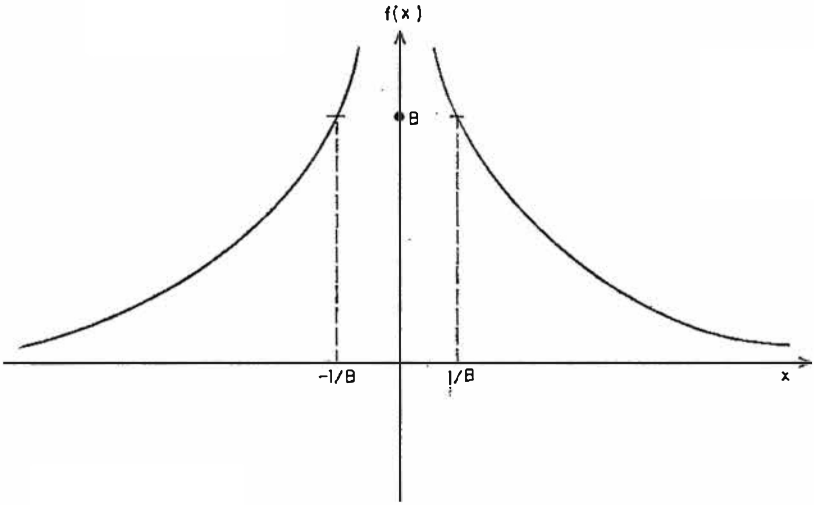
b) Seja D ilimitado superiormente. Diz-se que o limite de f quando x tende para *mais infinito* é o número real b (indica-se: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$) se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um número real $V(\varepsilon)$ tal que, se $x \in D$ e $x \geqslant V(\varepsilon)$, então $|f(x) - b| < \varepsilon$. O limite de f quando x tende para *mais infinito* é *mais infinito* (indica-se: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$) se, para todo $B \in R$, existe um número real $V(B)$ tal que, se $x \in D$ e $x \geqslant V(B)$, tem-se $f(x) > B$. (De maneira análoga, pode-se definir o que se entende pela expressão "o limite de f quando x tende para *mais infinito* é *menos infinito*".)

c) Seja D ilimitado inferiormente. Diz-se que o limite de f quando x tende para *menos infinito* é o número real b (indica-se: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$) se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um número real $V(\varepsilon)$ tal que, se $x \in D$ e $x \leqslant V(\varepsilon)$, então $|f(x) - b| < \varepsilon$. O limite de f quando x tende para *menos infinito* é *mais infinito* (indica-se: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$) se, para todo número real B, existe um número real $V(B)$ tal que, se $x \in D$ e $x \leqslant V(B)$, $f(x) > B$. (De maneira análoga, pode-se definir o que se entende pela expressão "o limite de f quando x tende para *menos infinito* é *menos infinito*".)

Exemplos:

47 — Seja $f\colon R - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$. O limite de f quando x tende para zero é *mais infinito*, pois, dado $B > 0$, $f(x) > B$, qualquer que seja $x \in R - \{0\}$ com $|x| < \delta = \dfrac{1}{B}$. O gráfico de f, na página seguinte, ilustra esta demonstração.

48 — Seja f do exemplo anterior. Mostremos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Seja $\varepsilon > 0$ dado e seja $V(\varepsilon)$ um número real tal que $V(\varepsilon) > \dfrac{1}{\varepsilon}$ $\left(\text{por exemplo, } V(\varepsilon) = \dfrac{2}{\varepsilon}\right)$. Portanto, se $x > V(\varepsilon)$, teremos $f(x) = \dfrac{1}{|x|} \leqslant \dfrac{1}{V(\varepsilon)} < \varepsilon$. Analogamente, pode-se mostrar que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.



Vejamos agora alguns resultados sobre limites infinitos e limites no infinito (algumas demonstrações serão deixadas a cargo do leitor). As funções f e g nos teoremas a seguir estão definidas no conjunto $D \subset R$ e com valores em R. Além disto, a será sempre um ponto de acumulação de D.

Teorema 19 — Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty\right)$, então não podemos ter $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \in R$ nem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty\right)$.

Teorema 20 — Se $f(x) \leqslant g(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

Teorema 21 — O limite de f quando x tende para a é *mais infinito* se qualquer seqüência (x_n) em $D - \{a\}$ que converge para a é tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$.

Prova:

Note-se que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$ significa que, dado um número real B, existe um número natural M_B tal que, para todo $n \geqslant M_B$, temos $f(x_n) > B$.

Suponha-se que (x_n) em $D - \{a\}$ é uma seqüência que converge para a e que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$. Portanto, dado $B \in R$, existe $\delta_B > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_B$, $f(x) > B$. Logo, pelo fato de que (x_n) converge para a, segue-se que, para n "suficientemente grande", $|x_n - a| < \delta_B$, donde $f(x_n) > B$.

Por outro lado, suponha-se que, dada uma seqüência (x_n) em $D - \{a\}$ que converge para a, tenhamos $\lim_{m \to \infty} f(x_n) = +\infty$. Suponha-se também que o limite de f quando x tende para a não seja *mais infinito*. Isto quer dizer que "existe" um número real $\overline{B}$ tal que, "para todo" $\delta > 0$, "existe" $x \in D$ com $0 < |x - a| < \delta$ e tal que $f(x) \leqslant \overline{B}$. Se tomarmos sucessivamente $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1/2, \ldots, \delta_n = 1/n, \ldots$, e, correspondendo a cada um destes δ, se tomarmos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, a seqüência assim construída pertence a $D - \{a\}$, converge para a e, no entanto, o limite de $(f(x_n))$ quando n tende para *mais infinito* não é *mais infinito*. Esta contradição encerra a demonstração do teorema.

C. Q. D.

Teorema 22 — Suponha-se que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e que g seja limitada numa vizinhança de a. Então, $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Prova:

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como g é limitada, existe $\overline{B} > 0$ e $\delta' > 0$ tais que $|g(x)| \leqslant \overline{B}$ para todo $x \in D \cap B(a, \delta')$. É também verdade que, dado o número real $\frac{\overline{B}}{\varepsilon}$, existe $\delta'' > 0$ tal que $f(x) > \frac{\overline{B}}{\varepsilon}$ para todo $x \in D$ com $0 < |x - a| < \delta''$.

Portanto, se $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, segue-se que, para todo $x \in D$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, teremos $\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = \frac{|g(x)|}{|f(x)|} < \frac{\overline{B}}{\overline{B}/\varepsilon} = \varepsilon$.

C. Q. D.

Teorema 23 — Seja f tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in D$. Então, $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$ se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Prova:

O caso em que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ está contido no teorema anterior.

Suponhamos, portanto, que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. Então, dado qualquer número real $B > 0$, seja $\varepsilon = \dfrac{1}{B}$. Segue-se que existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D$ com $0 < |x - a| < \delta$, teremos $\dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{1}{B}$, ou seja, $f(x) > B$.

C. Q. D.

Exercícios

1. Dadas as sucessões abaixo, diga quais são convergentes e, para estas, qual é o limite:

a) $x_1 = x_2 = 1$ e $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ para todo $n \geqslant 2, n \in N;$

b) $x_n = \dfrac{n}{2^n}, \; n \in N;$

c) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \; n \in N;$

d) $x_n = \left(\dfrac{1}{n}, \; \dfrac{n+1}{n}\right), \; n \in N;$

e) $x_1 = 1, \; x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 3}{4}, \; n \geqslant 1, \; n \in N;$

f) $x_n = nb^n, \; 0 < b < 1$, e $n \in N$ (sugestão: para todo $n \geqslant$
$\geqslant \dfrac{b}{1-b}$, x_n é monótona);

g) $x_n = n - \dfrac{1}{n}, \; n \in N$; e

h) $x_k = \dfrac{1}{k} \; sen \; k, \; k \in N.$

2. Sejam (x_n) uma sucessão em R^p que converge para zero e (y_n) uma sucessão limitada em R^p. Mostre que $< x_n, y_n >$ converge para zero.

3. Seja (x_n) uma sucessão em R. Mostre que $lim\ (x_n) = 0$ se, e somente se, $lim\ (|x_n|) = 0$.

4. Seja (x_n) uma seqüência convergente em R. Mostre que $(|x_n|)$ é uma seqüência convergente e que se pode ter $(|x_n|)$ convergente e (x_n) divergente.

5. Seja (x_n) em R uma sucessão de termos positivos. Suponha que existe $lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ e seja r este limite. Mostre que:

a) se $r < 1$, $lim\ (x_n) = 0$;

b) se $r > 1$, (x_n) é divergente; e

c) se $r = 1$, nada se pode afirmar com relação à convergência de (x_n).

6. Utilizando os resultados do exercício anterior, estude a convergência das sucessões:

a) $x_n = \frac{b^n}{n!}$, $b > 0$, $n \in N$;

b) $x_n = \frac{b^n}{n}$, $b > 0$, $n \in N$;

c) $x_n = b^n$, $n \in N$; e

d) $x_n = \frac{n}{n!}$, $n \in N$.

7. Seja (x_n) uma seqüência em R_+ tal que $lim\ (x_n) = x$. Mostre que $lim\ (\sqrt{x_n}) = \sqrt{x}$.

8. Seja (x_n) uma sucessão em R que converge para zero. Mostre que a sucessão $(\overline{x}_n) = \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} ; n \in N\right)$ também converge para zero e que, se (x_n) converge para $a \in R$, $(\overline{x}_n)$ também converge para a.

9. Existência de limites:

a) Seja $f: R \rightarrow R$ dada por $f(x) = x + 4$. Mostre que $\lim_{x \to 2} f(x) = 6$.

b) Seja $f: R^2_+ \to R^2$ dada por $f(x, y) = (x + \sqrt{y}, x\sqrt{y})$. Existe o limite de f quando (x, y) tende para $(0, 0)$?

c) Seja $f: R \to R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Existe o limite de f quando x tende para zero?

d) Seja $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Mostre que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

e) Seja $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Existe o limite de f quando x tende para zero?

10. Sejam $f: D \to R^p$ e $g: D \to R^p$, sendo D um subconjunto de R^q. Seja a um ponto de acumulação de D e suponha que: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e g é limitada numa vizinhança de a. Mostre que $\lim\limits_{x \to a} < f(x), g(x) > = 0$.

11. Use o resultado do exercício anterior para mostrar que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$, sendo $h: R \to R$ dada por:

$$h(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

12. Sejam $X \subset R^p$ um conjunto compacto e $Y \subset R^p$ um conjunto fechado. Mostre que $X - Y$ é um conjunto fechado (obs.: $X - Y = \{x - y: x \in X \text{ e } y \in Y\}$).

Capítulo IV

FUNÇÕES CONTÍNUAS

Neste capítulo vamos nos concentrar na caracterização e no estudo das propriedades de uma classe importante de funções: as *Funções Contínuas*. O interesse por elas advém de várias razões, algumas das quais apresentamos a seguir:

a) Se uma função é contínua em um ponto, ela é relativamente "bem comportada" numa vizinhança daquele ponto. Por exemplo, se f é contínua no ponto a e $f(a) > 0$, então é positiva numa vizinhança de a.

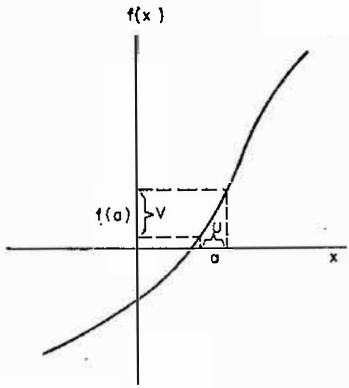
b) Se uma função é contínua em todo o seu domínio, ela preserva certas características topológicas deste domínio. Por exemplo, a imagem direta de um conjunto compacto por uma função contínua (neste conjunto) é ainda um conjunto compacto; a imagem direta de um conjunto conexo por uma função contínua (no conjunto) é ainda um conjunto conexo. Propriedades como as apontadas acima colocam tais funções em posição de destaque no estudo da topologia. Do ponto de vista deste texto, entretanto, estaremos interessados em implicações mais imediatas destes resultados, tais como o *Teorema do Valor Intermediário* e o *Teorema de Weierstrass*. Este último garante a existência de extremos globais para funções reais contínuas em conjuntos compactos. O leitor com algum conhecimento de Teoria Econômica pode perceber o papel importante do mesmo para garantir a existência de máximos em certos problemas freqüentemente encontrados pelo economista.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na Seção IV.1 apresentamos a definição de função contínua em um ponto de seu domínio (continuidade local) e exploramos, com algum detalhe, as suas principais propriedades (tendo em vista que uma parte do trabalho "braçal" das demonstrações já foi feita no capítulo anterior, aqui serão omitidos detalhes das mesmas, sendo o leitor informado sobre os resultados que necessitará para a elaboração da prova); na Seção IV.2 estudamos as principais propriedades das funções contínuas em todos os pontos de seu domínio (Globalmente Contínuas) e apresentaremos algumas aplicações relacionadas com a Teoria Econômica; na Seção IV.3 definiremos *Continuidade Uniforme;* na Seção IV.4 fazemos uma pequena apresentação sobre Funções Lineares e Funções Lipschitzianas; e, finalmente, para o leitor um pouco mais familiarizado com a Teoria do Equilíbrio Geral, na Seção IV.5 demonstraremos a existência de *Equilíbrio Competitivo* numa economia de trocas com dois produtos e dois consumidores como aplicação do *Teorema do Valor Intermediário.*

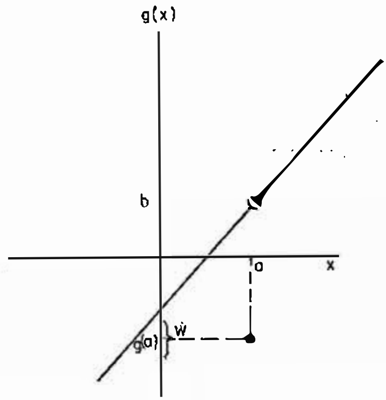
IV.1 — Continuidade Local

Intuitivamente, pode-se dizer que f é uma função contínua num ponto se podemos desenhar o seu gráfico, numa vizinhança deste ponto, sem retirarmos o lápis do papel. Isto significa, em outras palavras, que a função não sofre variações muito "abruptas" nas proximidades dos pontos onde ela é contínua. Por exemplo, se no ponto a uma função contínua é positiva, então ela ainda será positiva numa vizinhança de a, o que, entretanto, pode não acontecer com funções que não sejam contínuas. Vejamos os gráficos na página a seguir e procuremos nos convencer de que este é realmente o caso.

A idéia de que uma função contínua não sofre variações demasiadamente grandes pode ser ainda entendida de uma forma diferente, qual seja, a de que a "distância" entre $f(a)$ e $f(x)$ não fique "muito grande" quando x está próximo de a (note-se que nos gráficos da página a seguir temos dois casos distintos que ilustram bem este fato). No caso da função contínua, por menor que seja a vizinhança V do ponto $f(a)$, conseguiremos encontrar uma vizinhança U do ponto a com a propriedade de que $f(x)$ pertencerá a V sempre que x pertencer a U, o que não ocorre com a vizinhança W da função g no ponto a. Qualquer que seja o intervalo contendo a que considerarmos, ele conterá elementos cuja imagem não pertence a W.



Função Contínua no Ponto a



Função Descontínua no Ponto a

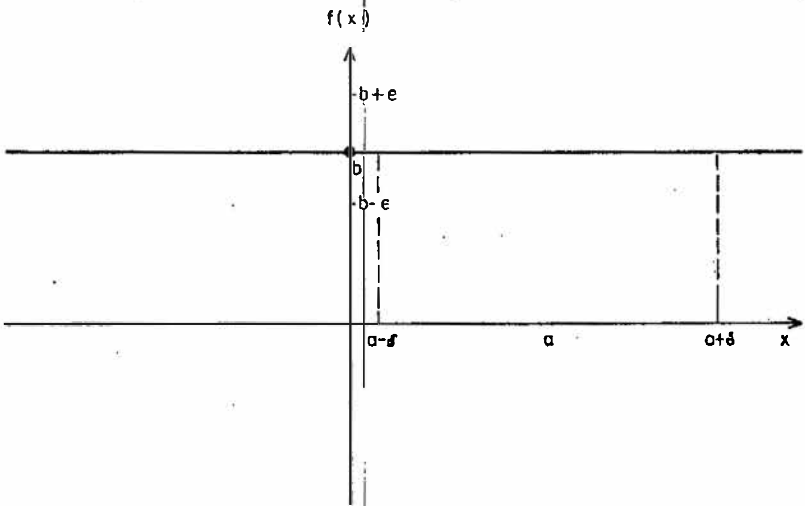
Passemos agora a tornar mais precisa e operacional a noção de continuidade.

Definição 1 — Seja $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, e seja $a \in D$. Diz-se que f é "contínua no ponto a" se, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número real $\delta(\varepsilon, a) > 0$ tal que, para todo $x \in D$ com $|x - a| < \delta(\varepsilon, a)$, tem-se $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Vejamos alguns exemplos para tornar mais concreta esta noção.

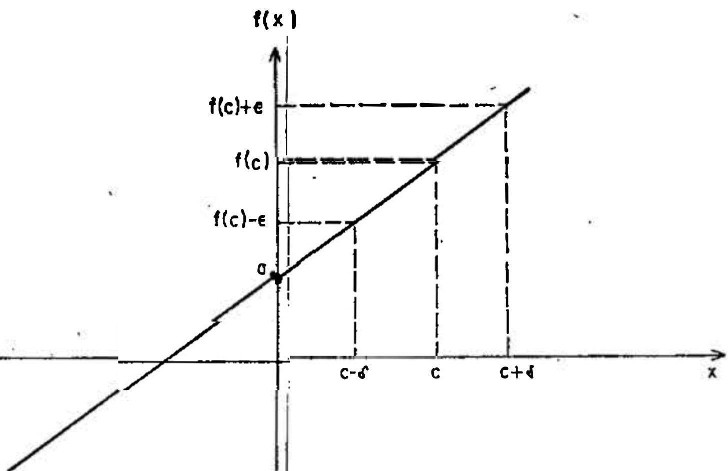
Exemplos:

1 — Seja $f: R \to R$ definida por $f(x) = b$, onde b é uma constante (ver gráfico a seguir). A função f é contínua em todos os pontos de seu domínio. Para verificarmos isto, seja $a \in R$ e seja dado $\varepsilon > 0$. Então, qualquer que seja o número real $\delta > 0$ que tomarmos (por exemplo, $\delta = 100$), teremos que $|f(x) - f(a)| = |b - b| = 0 < \varepsilon$ para todo $x \in R$ com $|x - a| < \delta$.



2 — Seja $f: R \to R$ definida por $f(x) = a + b\,x$, onde a e b são constantes e $b \neq 0$ (ver gráfico a seguir). Mostremos que, dado $c \in R$, f é contínua no ponto c. Para tanto, observemos que:

$$|f(x) - f(c)| = |b\,x - b\,c| = |b|\,|x - c| \qquad (1)$$



Desta expressão podemos imediatamente descobrir uma maneira de encontrarmos um valor para δ em função do número ε dado, isto é, seja $\varepsilon > 0$ dado e, pela "aparência" da expressão (1), tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{|b|}$. Assim, qualquer que seja $x \in R$ que satisfizer $|x - c| < \delta$, teremos que:

$$|f(x) - f(b)| = |b|\,|x - c| < \delta\,|b| = \frac{\varepsilon}{|b|} \cdot |b| = \varepsilon$$

Logo, f é contínua em c.

3 — Consideremos agora a função f do exemplo anterior modificada da seguinte maneira: $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + b\,x, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

sendo que, por simplicidade, tomaremos $a > 0$ e $b > 0$. Veja-se o gráfico de f, onde se pode perceber que f não é contínua no ponto $x = 0$ (ela ainda é contínua nos demais pontos de seu domínio). Considere-se a vizinhança do contradomínio de f de raio a e centro na origem. Observe-se que, qualquer que seja $\delta > 0$, se tomarmos $x > 0$ e $x < \delta$ (por exemplo, $x = \frac{1}{2}\delta$), teremos que:

$$|f(x) - f(a)| = |f(x)| = |a + b\,x| = a + b\,x > a$$

Portanto, em qualquer vizinhança da origem é possível encontrarmos um número real x tal que $|f(x) - f(a)| > a$. Conseqüentemente, f não é contínua neste ponto.

Convém notar que no desenvolvimento acima utilizamos uma forma bem específica de dizer que a função f não é contínua. É útil escrevermos esta negação explicitamente.

Negação da Definição de Continuidade. A função $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, não é contínua no ponto $a \in D$ se *existe* um número real $\varepsilon_0 > 0$ tal que, *para todo* número real $\delta > 0$, existe $x \in D$ com $|x - a| < \delta$ e $|f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0$.

4 — Seja $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^2$. Mostremos que f é contínua em R. Tomemos, inicialmente, o ponto $a = 0$ e observemos que:

$$|f(x) - f(0)| = |x^2| = |x|^2$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, se escolhermos $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, teremos que, se $|x| < \delta$, $|f(x) - f(0)| = |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon$.

Logo, f é contínua na origem.

Se agora $a \in R - \{0\}$, temos o seguinte:

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a|\ |x + a|$$

Façamos uma limitação preliminar da vizinhança que iremos considerar (ver o exemplo 33 do Capítulo III) impondo a condição $|x| < |a|$. Isto significa que:

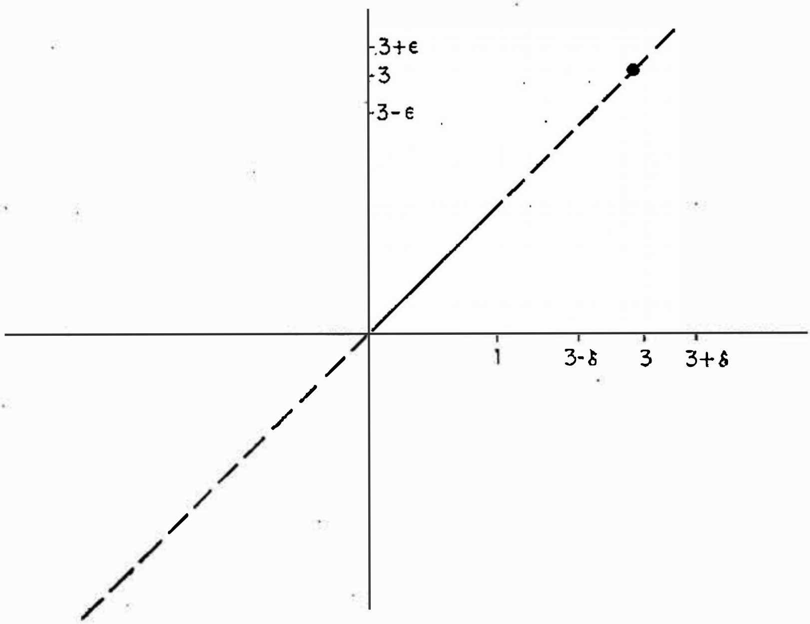
$$|x - a| \leqslant |x| + |a| < 2\ |a|$$

$$|x + a| \leqslant |x| + |a| < 2\ |a|$$

Seja agora $\varepsilon > 0$ dado. Tomando $\delta = min\left(2\ |a|, \dfrac{\varepsilon}{2\ |a|}\right)$, tem-se que: $|f(x) - f(a)| = |x - a|\ |x + a| \leqslant 2\ |a|\ |x - a| < \varepsilon$ para todo $x \in R$ que satisfaça $|x - a| < \delta$.

5 — Considere-se a função $f: D \to R$, $D = [0, 1] \cup \{3\}$, definida por $f(x) = x$ (veja-se o gráfico a seguir). Mostremos que f é contínua em todos os pontos de seu domínio. Se $x \in [0, 1]$, o método do exemplo 2 serve para mostrar que f é contínua em x. Quando $x = 3$, dado $\varepsilon > 0$, se tomamos $\delta = 1/2$, a bola de raio δ e centro em $x = 3$ contém um único ponto do domínio de f, qual seja, o próprio 3. Portanto, $|f(x) - f(3)| = 0 < \varepsilon$ para todo $x \in D$ com $|x - 3| < \delta$.

É fácil generalizar este argumento para mostrar que uma função é sempre contínua em pontos isolados de seu domínio. Em particular, as sucessões são funções contínuas.



6 — Considere-se a função (chamada a i-ésima projeção) $\pi_i: R^q \rightarrow R$, $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$, definida por $\pi_i(x) = x_i$. A i-ésima projeção associa a cada vetor x de R^q a sua i-ésima coordenada (veja-se o gráfico a seguir para uma ilustração). A primeira projeção, por exemplo, associa ao vetor $x = (x_1, x_2) \in R^2$ o número real x_1, que é a primeira coordenada do vetor x.

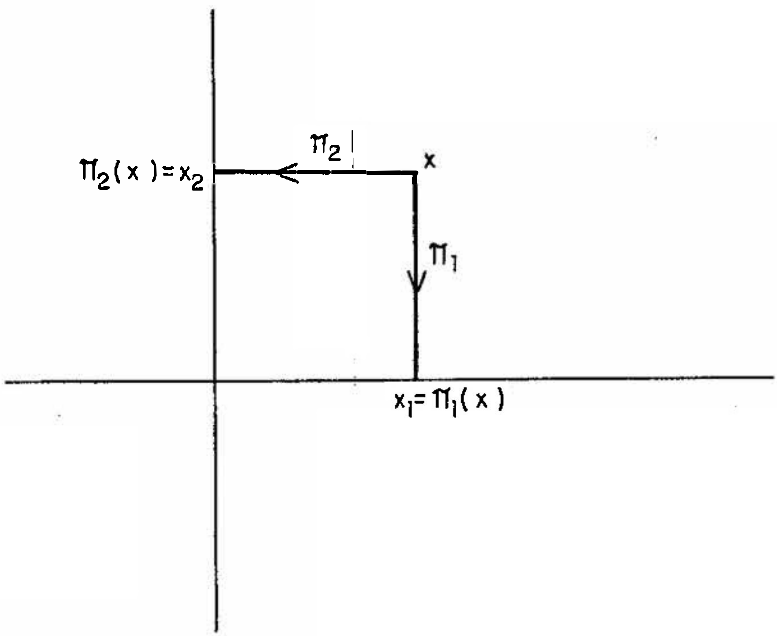
As projeções são funções contínuas, pois, dado $a \in R^q$, $|\pi_i(x) - \pi_i(a)| = |x_i - a_i| \leqslant |x - a|$.

Assim, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, se tomarmos $\delta = \varepsilon$, teremos que, para todo $x \in R^q$ com $|x - a| < \delta$, $|\pi_i(x) - \pi_i(a)| < \varepsilon$.

7 — A função de Dirichlet definida em R por:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in Q \\ 0, & \text{se } x \notin Q \end{cases}$$

não é contínua em nenhum ponto do seu domínio, pois qualquer vizinhança de um número racional contém números irracionais e qualquer vizinhança de um número irracional contém números racionais. Isto significa que, se escolhermos $\varepsilon = 1/2$, qualquer que seja $a \in R$ e qualquer que seja a vizinhança considerada de a, existirá sempre um ponto x pertencendo a ela tal que $|D(x) - D(a)| > 1/2$.



8 — Seja a função $f: R_+ \to R$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$, f é uma função contínua em qualquer ponto de seu domínio. Seja $a \in R$, $a \neq 0$, e note-se que:

$$|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leqslant \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, se tomamos $\delta = \varepsilon . \sqrt{a}$, podemos garantir que, para todo $x \in R_+$ com $|x - a| < \delta$, terêmos $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leqslant$ $\leqslant \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$.

Se $a = 0$, então tomaremos $\delta = \varepsilon^2$, pois assim teremos que $|\sqrt{x} - 0| = |\sqrt{x}| < \sqrt{\delta} = \varepsilon$ para todo $x \in R_+$ com $|x| < \delta$.

9 — Seja f: $R \to R$ definida por $f(x) = sen\ x$. Seja $a \in R$ e consideremos a identidade $sen\ x - sen\ a = 2\ sen\ \frac{1}{2}(x - a)$ $cos\ \frac{1}{2}(x + a)$.

Mostraremos agora que f é uma função contínua em R:

$$|sen\ x - sen\ a| = 2.\left|sen\ \frac{1}{2}(x - a)\right|\left|cos\ \frac{1}{2}(x + a)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2.\left|sen\ \frac{1}{2}(x - a)\right| \leqslant 2.\left[\left|\frac{1}{2}(x - a)\right|\right] = |x - a|$$

(na última passagem acima utilizamos a seguinte desigualdade: $|sen\ a - sen\ b| \leqslant |a - b|$ para todo $a \in R$ e $b \in R$).

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, tomando-se $\varepsilon = \delta$, podemos ver que f é contínua.

Façamos, agora, algumas observações gerais com relação à definição de continuidade.

a) A definição de continuidade da função f no ponto a é parecida com a definição de limite de f quando x tende para a. Entretanto, convém notar algumas diferenças importantes: o ponto a, na Definição 1, pertence ao domínio da função e não é, necessariamente, um ponto de acumulação deste domínio; para que a função seja contínua no ponto a é fundamental seu comportamento neste ponto — isto é, o valor $f(a)$ —, enquanto no caso do limite o que se passa no ponto a é absolutamente irrelevante — na figura inicial deste capítulo, note-se que a função g não é contínua no ponto a, porém $b = \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

b) O número real δ depende, em geral, dos valores de ε e de a. Para simplificar a notação escrevemos, na maior parte das vezes, δ

ao invés de $\delta(\varepsilon, a)$. Deve, entretanto, ficar gravado na mente do leitor que, para cada ε considerado e para cada ponto a em que a função é contínua, teremos um valor diferente para δ. No caso em que pudermos escolher δ independentemente do ponto a, será possível formular uma noção mais forte de continuidade (sobre isto falaremos na Seção IV.3).

c) Apesar de a Definição 1 ter sido apresentada em termos dos ε e δ, ela pode ser facilmente reescrita em termos de bolas. Diz-se que $f\colon D \to R^p$, $D \subset R^q$, é contínua no ponto $a \in D$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma bola aberta $B(a, \delta)$, $\delta > 0$, tal que, para todo $x \in B(a, \delta)$, tem-se $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$, ou seja, $f[B(a, \delta) \cap D] \subset$ $\subset B(f(a), \varepsilon)$.

d) A definição de continuidade pode ainda ser reformulada em termos de vizinhanças, sem apelar explicitamente para os ε, δ ou bolas. Vejamos isto: diz-se que $f\colon D \to R^p$, $D \subset R^q$, é contínua no ponto $a \in D$ se, dada uma vizinhança V de $f(a)$, existe uma vizinhança U de a tal que, para todo $x \in U \cap D$, temos $f(x) \in V$, ou seja, $f(U \cap D) \subset V$.

Mostremos sua equivalência com a Definição 1. Suponhamos, inicialmente, que se verifica a condição acima e seja dado $\varepsilon > 0$. Sabemos que $B(f(a), \varepsilon)$ é uma vizinhança de $f(a)$. Portanto, existe uma vizinhança U de a tal que $f(U \cap D) \subset B(f(a), \varepsilon)$. Como U é uma vizinhança do ponto a, ela contém uma bola de centro em a e raio $\delta > 0$.

Suponhamos agora que f seja contínua no sentido da observação "c" anterior e seja V uma vizinhança de $f(a)$. Existe, portanto, uma bola $B(f(a), \varepsilon) \subset V$, $\varepsilon > 0$, e, como f é contínua, também existe uma bola $B(a, \delta)$, $\delta > 0$, tal que $f[B(a, \delta)] \subset B(f(a), \varepsilon) \subset$ $\subset V$. Como $B(a, \delta)$ é uma vizinhança de a, fica demonstrada a equivalência das definições.

e) Estamos examinando a continuidade de funções definidas em subconjuntos de R^q com valores em R^p utilizando a Norma Euclideana para medir distância tanto em R^q quanto em R^p. Tendo em vista que as três normas discutidas no Capítulo II são equivalentes, as funções que são contínuas em uma destas normas serão ainda contínuas em qualquer das outras duas. Além disto, a continuidade da função não será alterada se utilizamos normas diferentes em R^q e R^p.

Procuraremos agora estabelecer a relação exata entre os conceitos de limite e continuidade e entre continuidade e seqüências convergentes do domínio da função.

Teorema 1 — Seja $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, e seja $a \in D$ um ponto de acumulação de D. A função f é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Prova:

A continuidade de f no ponto a assegura que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, qualquer que seja $x \in D$ com $|x - a| < \delta$. Entretanto, como a é ponto de acumulação de D, podemos afirmar que $0 < |x - a| < \delta$ verifica-se para algum $x \in D$, $x \neq a$. Daí, pode-se afirmar que, se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta$, teremos $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, isto é, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se o $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, temos que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ para todo $x \in D$ com $0 < |x - a| < \delta$. Como $a \in D$, segue-se que f é contínua.

Teorema 2 — Seja $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, e seja $a \in D$. A função f é contínua no ponto a se, e somente se, qualquer que seja a sucessão (x_n) em D com $\lim (x_n) = a$, tivermos que a sucessão $(f(x_n))$ converge para $f(a)$.

Prova:

Se a é ponto de acumulação de D, então (Teorema 12 do Capítulo III) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ se, e somente se, qualquer sucessão (x_n) em $D - \{a\}$ que converge para a é tal que $(f(x_n))$ converge para $f(a)$. Como o ponto $a \in D$ e o limite da sucessão $f(x_n)$ (ou seja, o limite de f quando x tende para a) é $f(a)$, podemos relaxar o requisito de $x_n \neq a$ para todo $n \in N$, sem prejuízo do resultado.

Note-se, por fim, que, se a não é ponto de acumulação de D, f é contínua em a (ver exemplo 5 anterior). Além disto, a seqüência

(x_n) em D converge para a se, e somente se, o elemento a repetir-se um número infinito de vezes a partir de um certo índice $\bar{n}$. Logo, $f(x_n) = f(a)$ para todo n

C. Q. D.

O resultado acima nos fornece um critério útil para mostrar que uma função não é contínua num ponto a de seu domínio. Para tanto, basta encontrarmos uma sucessão (x_n) em D convergindo para a tal que $(f(x_n))$ não converge ou converge para um valor diferente de $f(a)$.

Exemplos:

10 — A função $f: R^2 \to R$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

não é contínua no ponto $(0, 0)$, pois já mostramos (exemplo 37 do Capítulo III) que não existe o limite de f quando (x, y) tende para $(0, 0)$.

11 — Da mesma maneira, a função $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} sen\ 1/x, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

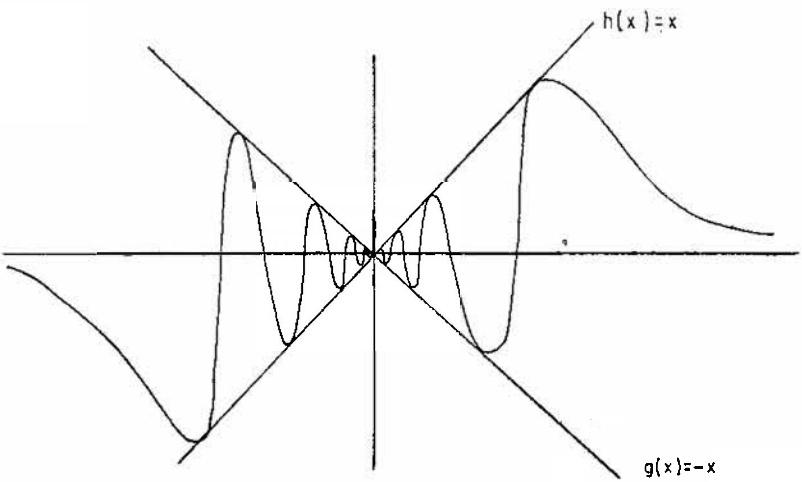
não é contínua no ponto $x = 0$, pois não existe o limite de f quando x tende para zero (exemplo 38 do Capítulo III).

12 — A função $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x\ sen\ 1/x, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua no ponto $x = 0$, pois, dado $\varepsilon > 0$, se tomarmos $\delta = \varepsilon$, teremos que $|f(x) - f(0)| = \left|x\ sen\ \dfrac{1}{x}\right| = |x| \left|sen\ \dfrac{1}{x}\right| \leqslant |x| < \varepsilon$ sempre que $|x| < \delta$.

É interessante observar um esboço gráfico de f para termos uma idéia mais intuitiva da razão pela qual a função é contínua.



Intuitivamente, o que ocorre é o seguinte: à medida que x aproxima-se de zero, ele passa a ser o elemento dominante na expressão $x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ e, desta maneira, "aperta" a função $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ no bico do cone gerado pelas retas $h(x) = x$ e $g(x) = -x$ (compare-se o gráfico acima com o da função do exemplo anterior).

Vejamos agora alguns teoremas sobre continuidade de funções. Alguns destes resultados não serão demonstrados, tendo em vista a semelhança da demonstração com a dos teoremas análogos sobre limites.

Teorema 3 — Sejam $f\colon D \to R^p$ e $g\colon D \to R^p$, $D \subset R^q$, contínuas no ponto $a \in D$. Então, $(f + g)$ e $< f, g >$ são contínuas no ponto a.

Teorema 4 — Sejam $f\colon D \to R^p$ e $\alpha\colon D \to R$, $D \subset R^q$, contínuas no ponto $a \in D$. Então, (αf) é uma função contínua em a. Além disto, se $\alpha(x) \neq 0$ para todo x numa vizinhança de a, então $\left(\dfrac{1}{\alpha} f\right)$ é contínua em a.

Teorema 5 – Seja $f\colon D \to R^p$, $D \subset R^q$, contínua no ponto $a \in D$. A função $\|f\|$ definida por $\|f\|\colon D \to R$ tal que $\|f\|(x) = |f(x)|$ é contínua no ponto a.

Prova:

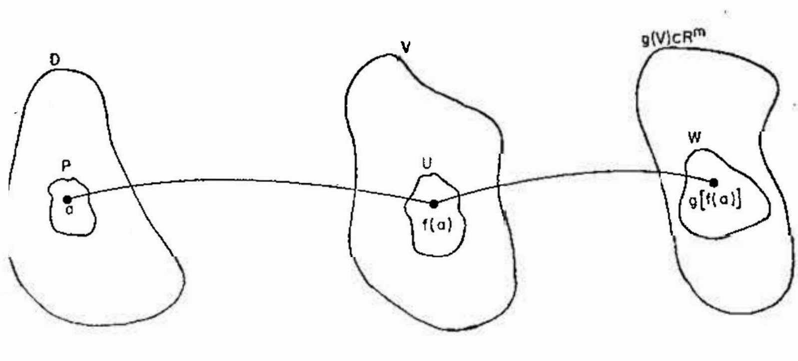
Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D$ com $|x - a| < \delta$, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Portanto, $|\,\|f\|(x) - \|f\|(a)\,| = |\,|f(x)| - |f(a)|\,| \leqslant |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ para todo $x \in D$ com $|x - a| < \delta$.

C. Q. D.

Teorema 6 – Sejam $f\colon D \to R^p$, $D \subset R^q$, e $g\colon V \to R^m$, $V \subset R^p$. Então, se f é contínua em $x = a$ e g é contínua em $b = f(a)$, g_of é contínua em a.

Prova:

A figura a seguir praticamente demonstra o teorema. Em função disto, um exame cuidadoso da mesma facilitará muito o entendimento do restante da demonstração.



Dado $\varepsilon > 0$, temos, pela continuidade de g no ponto b, que existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo $y \in V$ com $|y - b| < \delta_1$, temos $|g(y) - g[f(a)]| < \varepsilon$. Como f é contínua em a, existe $\delta_2 > 0$ tal que, para todo $x \in D$ com $|x - a| < \delta_2$, temos $|f(x) - f(a)| < \delta_1$. Portanto, para todo $x \in D(g_of)$ com $|x - a| < \delta_2$, teremos $|g[f(x)] - g[f(a)]| < \varepsilon$, isto é, g_of é contínua em a.

C. Q. D.

Exemplos:

13 — Seja a função $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} sen\ \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Já vimos que f não é contínua no ponto $x = 0$. Se $x \neq 0$, $f(x) = h[g(x)]$, onde $h: R \to R$ é definida por $h(x) = sen\ x$ e $g: R - \{0\} \to R$ é definida por $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

g é uma função contínua em todos os pontos de seu domínio (por quê?) e h também é contínua. Logo, $h_o g$ é contínua pelo teorema que acabamos de demonstrar.

14 — Seja a função $f: R^q \to R$ definida por $f(x) = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_q^2)^{1/2}$ (Norma Euclideana). Seja $\pi: R^q \to R$ definida por $\pi(x) = (\pi_1(x))^2 + \ldots + (\pi_q(x))^2$ e $h: R_+ \to R$ definida por $h(x) = \sqrt{x}$. Note-se que π é contínua em R^q, pois é uma soma de funções contínuas, e h é contínua em R (exemplo 8). Como $f = h_o\pi$, segue-se que f é contínua em R^q.

15 — Seja a função $f: R^2 \to R$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Já vimos que f não é contínua no ponto $(0, 0)$. Mostremos agora que ela é contínua nos demais pontos do domínio. Note-se que, se $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{\pi_1(x, y) \cdot \pi_2(x, y)}{[\pi_1(x, y)]^2 + [\pi_2(x, y)]^2}$$

Portanto, o numerador é uma função contínua e o denominador é também uma função contínua em $R^2 - \{(0, 0)\}$. Em conseqüência do Teorema 4, f é contínua.

16 — É fácil ver que a condição do Teorema 6 é suficiente, porém não necessária. Basta tomarmos qualquer função f definida em R e descontínua em algum ponto e a função constante $g\colon R \to R$ definida por $g(x) = b$. Obviamente, $g_o f$ é contínua.

17 — Da mesma forma, os Teoremas 3, 4 e 5 fornecem apenas condições suficientes de continuidade. Por exemplo, seja $f\colon R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in Q \\ -1, \text{ se } x \notin Q \end{cases}$$

f é descontínua em todos os pontos de seu domínio.

Seja agora $g\colon R \to R$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x \in Q \\ 1, \text{ se } x \notin Q \end{cases}$$

Portanto, g também é descontínua em todos os pontos do domínio. Entretanto, $(f + g)$ é contínua; $||f||$ e $||g||$ são contínuas.

18 — Seja $f\colon D \to R^p$, $D \subset R^q$, uma função contínua em todos os pontos do conjunto D e seja $Y \subset D$. Definindo $g\colon Y \to R^q$ de forma a termos $g(x) = f(x)$, é intuitivo que g é uma função contínua. A continuidade de g pode ser provada simplesmente notando-se que $g = f_o I_Y$, que são funções contínuas (I_Y é a função identidade em Y). A função g, na verdade, é a restrição de f ao domínio Y. Em geral, a restrição de f a qualquer subconjunto Y de seu domínio será indicada por f/Y.

Demonstraremos agora um resultado que simplifica muito certas verificações de que uma função com valores em R^p é contínua. Para tanto, observemos que, se $f\colon D \to R^p$, $D \subset R^q$, então f pode ser escrita em termos das funções componentes $f_i\colon D \to R$, $D \subset R^q$, da seguinte maneira: $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$, onde, para cada $x \in D$, tem-se $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x))$.

Teorema 7 — Seja $f\colon D \to R^p$, $D \subset R^q$, seja $a \in D$ e sejam $f_i\colon D \to R$, $1 \leqslant i \leqslant p$, tais que $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x))$.

A função f é contínua no ponto a se, e somente se, $f_1, f_2, \ldots, f_p$ são contínuas em a.

Prova:

Se f é contínua, as funções componentes também o são, pois, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $f_i = \pi_i \circ f$.

Por outro lado, se, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, f_i é contínua no ponto a, qualquer seqüência (x_n) em D que converge para a é tal que $(f_i(x_n))$ converge para $f_i(a)$. Conseqüentemente, $(f_1(x_n), \ldots, \ldots, f_p(x_n))$ converge para $f(a) = (f_1(a), \ldots, f_p(a))$, qualquer que seja a seqüência (x_n) em D com $\lim (x_n) = a$. Portanto, f é contínua.

C. Q. D.

19 — Seja $f: R^2 \to R^2$ definida por $f(x, y) = (x^2 + y^2; x^2 - y^2)$. A função f é contínua em todos os pontos de R^2, pois $f_1: R^2 \to R$ definida por $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ é contínua em todos os pontos de R^2 (por quê?) e $f_2: R^2 \to R$ definida por $f_2(x, y) = x^2 - y^2$ também é contínua em todos os pontos de R^2 (por quê?).

20 — A função $f: R \to R^2$ definida por $f(t) = (t, 2t)$ é contínua em todos os pontos de R, pois as funções $f_1: R \to R$ e $f_2: R \to R$ definidas por $f_1(t) = t$ e $f_2(t) = 2t$ são contínuas em todos os pontos de seu domínio.

Teorema 8 — Sejam $f: D \to R$, $g: D \to R$, $D \subset R$, contínuas no ponto $a \in D$. Se $f(a) > g(a)$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in D$ que satisfaz $|x - a| < \delta$.

Prova:

A função $(f - g)$ é contínua em a. Logo, dado $\varepsilon = f(a) - g(a) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $g(a) - f(a) < f(x) - g(x) - (f(a) - g(a)) < f(a) - g(a)$ para todo $x \in D$ tal que $|x - a| < \delta$. Segue-se que $f(x) - g(x) > 0$ para todo $x \in D$ com $|x - a| < \delta$.

C. Q. D.

Corolário — Seja $f: D \to R$, $D \subset R$, contínua no ponto $a \in D$. Se $f(a) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in D$ que satisfaz $|x - a| < \delta$.

Convém observar que, quando enunciamos a segunda parte do Teorema 4, fizemos a hipótese de que $\alpha(x) \neq 0$ numa vizinhança do ponto a. Em vista do corolário acima, esta hipótese poderia ser substituída por $\alpha(a) \neq 0$.

IV.1.1 — Descontinuidades das Funções Reais

A natureza das descontinuidades de uma função é um fato de importância em certos casos. Por exemplo, já vimos que a função:

$$f(x) = \begin{cases} sen\ 1/x, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

é descontínua em $x = 0$ e que a função:

$$g(x) = \begin{cases} a + bx, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

também é descontínua (se $a \neq 0$) na origem. Existe, no entanto, uma diferença entre as descontinuidades destas funções, qual seja, se redefinirmos g no ponto $x = 0$, podemos torná-la contínua. Entretanto, qualquer que seja a maneira que escolhermos para redefinir a função f em $x = 0$, ela permanecerá sendo descontínua.

Este é apenas um exemplo que mostra existirem vários tipos de descontinuidade com "gravidades" diferentes. O principal resultado que queremos demonstrar é que as funções monótonas não possuem um "número muito grande" de descontinuidades, isto é, o conjunto de pontos onde uma função monótona é descontínua é, no máximo, enumerável.

Definição 2 (Tipos de Descontinuidade) — Seja $f: D \to R$, $D \subset R$, descontínua no ponto $a \in D$. Um dos seguintes casos pode ocorrer:

a) o limite de f quando x tende para a existe, porém é diferente de $f(a)$ (descontinuidade removível);

b) existem os limites laterais $f(a+)$ e $f(a-)$, porém eles são diferentes (descontinuidade de 1.ª espécie); e

c) não existe um dos limites laterais (descontinuidade de 2.ª espécie)

Exemplos:

21 — A função g acima tem descontinuidade removível no ponto $x = 0$.

22 — A função $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

tem descontinuidade de 1.ª espécie no ponto $x = 0$, pois $f(0+) = 1$ e $f(0-) = -1$.

23 — A função $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} sen\ 1/x, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

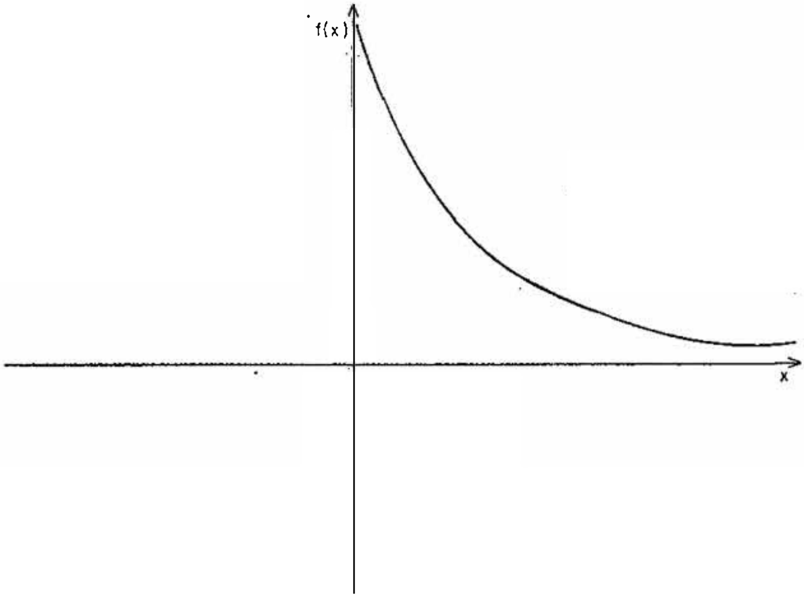
possui descontinuidade de 2.ª espécie no ponto $x = 0$.

24 — A função $h: R \to R$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

possui descontinuidade de 2.ª espécie no ponto $x = 0$, pois não existe o limite de f quando x tende para zero pela direita (observe-se que, quando afirmamos que não existe limite, na verdade não existe limite no conjunto dos números reais). O gráfico da função h poderá ajudar o entendimento da argumentação acima.

25 — Seja $f: D \to R$, $D \subset R$, uma função monótona. Já vimos que existem os limites laterais $f(a+)$ e $f(a-)$ em todo ponto a que seja ponto de acumulação de $D^>$ e $D^<$ (ver Teorema 18 do



Capítulo III). Portanto, uma função monótona, além de não possuir descontinuidade de 2.ª espécie, também não possui descontinuidades removíveis, pois, se f é descontínua em a e se existe $\lim_{x \to a} f(x)$, então $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. Suponha-se, para fixar idéias, que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e que $f(a) > b$. Dado $\varepsilon = f(a) - b$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo x no domínio de f com $a - \delta < x < a + \delta$, teremos $b - f(a) < f(x) - b < f(a) - b$.

Portanto, $f(a) > f(x)$ para todo x em $(a - \delta, a + \delta)$, o que é incompatível com f monótona.

Teorema 9 — Seja $f: D \to R$, $D \subset R$, uma função monótona. O conjunto dos pontos de descontinuidade de f é contável (isto é, ele é finito ou enumerável).

Prova:

Seja $c \in D$ um ponto onde f é descontínua. Então, $f(c+) \neq f(c-)$, uma vez que f é monótona. Suponha-se, para fixar idéias, que f é monótona crescente. Então, $f(c+) > f(c-)$, pois, dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in D$ tal que $-\varepsilon < f(x) - f(c+) < \varepsilon$ e também existe $x' \in D$ tal que $-\varepsilon < f(x') - f(c-) < \varepsilon$, onde $a < x < a + \delta$ e $a - \delta < x' < a$. Portanto, $f(x) \geqslant f(x')$ e, então, $\varepsilon + f(c+) > f(x) \geqslant f(x') > f(c-) - \varepsilon$, ou seja, $f(c+) > f(c-) - 2\varepsilon$.

Como a desigualdade acima vale para todo $\varepsilon > 0$ e como já sabemos que $f(c+) \neq f(c-)$, segue-se que $f(c+) > f(c-)$.

Observe-se agora que, se $c' \in D$, $c' > c$, e f é descontínua em c', então $f(c'-) \geqslant f(c+)$, como pode ser visto por um argumento semelhante ao anterior.

Consideremos agora o intervalo $(f(c-), f(c+))$ e tomemos $r_c \in Q \cap (f(c-), f(c+))$. Logo, a cada ponto de descontinuidade de f podemos associar biunivocamente um número racional, donde se segue a conclusão de que o conjunto destes pontos é, no máximo, enumerável.

C. Q. D.

IV.2 — Continuidade Global

Estudaremos, nesta seção, algumas das propriedades das funções que são contínuas em todos os pontos de seu domínio. Os três principais teoremas a este respeito são: o da continuidade global, o da preservação da conexidade e o da preservação da compacidade. Após cada um deles procuraremos retirar algumas de suas conseqüências importantes. Entretanto, a discussão que se segue ao teorema da continuidade global não é essencial para a compreensão dos demais teoremas da seção, pois ela é feita com o objetivo de particularizar a conclusão para situações de interesse em Teoria Econômica. Em outras palavras, o que faremos após a apresentação do teorema da continuidade global é "ajeitar" a conclusão de maneira que o resultado possa ser imediatamente reconhecido quando o leitor defrontar-se com aplicações econômicas do mesmo.

Convém recordarmos dois fatos:

a) Imagem Inversa: seja $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, e seja $W \subset R^p$. A imagem inversa de W por f é o conjunto $f^{-1}(W) = \{x \in D: f(x) \in W\}$.

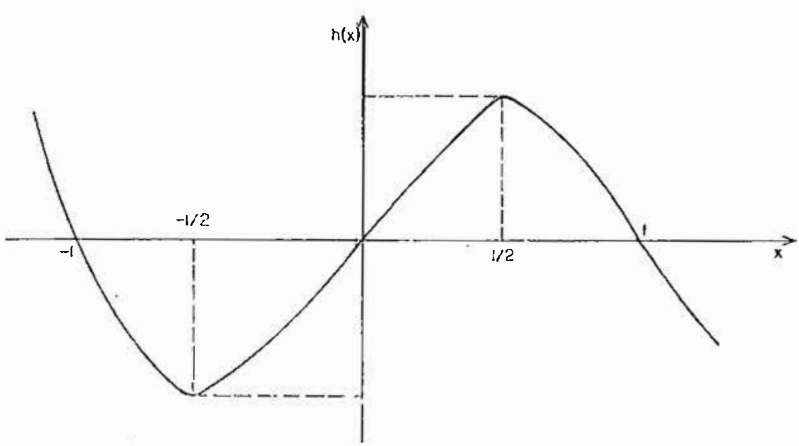
b) A função f é contínua no ponto $a \in D$ se, para toda vizinhança V de $f(a)$, existe uma vizinhança U de a tal que, para todo $x \in D \cap U$, temos $f(x) \in V$.

Definição 3 — A função $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, é contínua em D (ou, mais simplesmente, é contínua) se f é contínua em todos os pontos de D.

Para motivar um pouco o teorema da continuidade global, observemos o seguinte: se $g: R^q \to R$ é a função constante e se $A \subset R^q$ é aberto, então $g(A) = \{a\}$ é um conjunto fechado (ou, mais importante do que isto, $g(A)$ não é um conjunto aberto). Outro exemplo, menos trivial, deste mesmo fato é dado pela função $h: R \to R$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & \text{se } x \geqslant 0 \\ x^2 + x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Dado o conjunto aberto $(-1, 0)$ no domínio de h, $h((-1, 0)) = [-1/4, 0)$, ou, ainda, $h((-1, 1)) = [-1/4, 1/4]$. Vejamos o gráfico a seguir para nos convencermos disto.



Teorema 10 — A função $f\colon D \to R^p$, $D \subset R^q$, é contínua em D se, e somente se, para cada conjunto V aberto em R^p, existe um conjunto W aberto em R^q tal que $W \cap D = f^{-1}(V)$.

Prova:

Sejam f contínua em D, $V \subset R^p$ aberto e $a \in f^{-1}(V)$ (se $f^{-1}(V) = \phi$, faça-se $W = \phi$). Então, V é uma vizinhança de $f(a)$ (por definição de imagem inversa, $f(a) \in V$). Sendo f contínua, existe uma vizinhança U de a tal que $f(U \cap D) \subset V$. Como U é uma vizinhança de a, existe um conjunto aberto $W_a \subset U$. Definiremos, portanto, W da seguinte forma:

$$W = \bigcup_{a \in f^{-1}(V)} W_a$$

Desta forma, teremos $W \cap D = f^{-1}(V)$, pois:

a) se $y \in f^{-1}(V) \Rightarrow y \in D$ e $y \in W_y \Rightarrow y \in D \cap W$; e

b) se $y \in W \cap D \Rightarrow y \in W_a$ para algum $a \in f^{-1}(V) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(y) \in V \Rightarrow y \in f^{-1}(V)$.

Mostremos agora que, verificando-se a condição do teorema, f é contínua em D. Seja $a \in D$ e seja $V \subset R^p$ um conjunto aberto que contém $f(a)$. Existe um conjunto aberto $W \subset R^q$ tal que $W \cap D =$
$= f^{-1}(V)$.

Como $f(a) \in V$, $a \in W$, que é uma vizinhança de a com a propriedade de que, se $x \in W \cap D$, $f(x) \in V$. Então, f é contínua em a. Como a é um ponto qualquer de D, f é contínua.

C. Q. D.

Corolário 1 — A função $f\colon R^q \to R^p$ é contínua em R^q se, e somente se, para cada conjunto V aberto em R^p, o conjunto $f^{-1}(V)$ é aberto em R^q.

Como aplicação deste corolário, podemos mostrar uma vez mais que a função:

$$f(x) = \begin{cases} sen \dfrac{1}{x}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

não é contínua em R, pois $f^{-1}((-1, 1)) = R - A$, onde $A = \{x \in R: x = \frac{2}{(2n-1)\pi}, n \in N\}$ não é um conjunto aberto. Para verificarmos que $R - A$ não é aberto, note-se que $0 \in R - A$ e, no entanto, qualquer vizinhança de 0 contém elementos de A. Observe-se ainda que o argumento acima continua válido qualquer que seja o valor atribuído a f no ponto $x = 0$.

Antes de apresentarmos o Corolário 2, é conveniente introduzirmos uma notação. Dados a função $f: D \to R$, $D \subset R^q$, e o número real α, denotaremos por α_+ e α_- os seguintes conjuntos:

$$\alpha_+ = \{x \in D: f(x) > \alpha\} \quad \text{e} \quad \alpha_- = \{x \in D: f(x) < \alpha\}$$

Denotaremos ainda por $\bar{\alpha}_+$ e α_- os seguintes conjuntos:

$$\bar{\alpha}_+ = \{x \in D: f(x) \geqslant \alpha\} \quad \text{e} \quad \bar{\alpha}_- = \{x \in D: f(x) \leqslant \alpha\}$$

Corolário 2 — A função $f: D \to R$, $D \subset R^q$, é contínua em D se, e somente se, para todo $\alpha \in R$, existem conjuntos abertos em R^q, W_+ e W_-, tais que $W_+ \cap D = \alpha_+$ e $W_- \cap D = \alpha_-$.

Prova:

Seja f contínua em D, seja $\alpha \in R$ e sejam *a* conjuntos abertos em R: $A = \{x \in R: x < \alpha\}$ e $B = \{x \in R: x > \alpha\}$. Portanto, pelo teorema da continuidade global, existem os conjuntos abertos W_+ e W_-, pois $\alpha_+ = f^{-1}(A)$ e $\alpha_- = f^{-1}(B)$.

Suponhamos agora que a condição do teorema se verifica. Seja V um conjunto aberto em R. A estrutura dos conjuntos abertos de números reais (Teorema 4 do Capítulo II) garante que V é uma reunião enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos. Além disto, este conjunto de intervalos é único.

Seja, portanto, $V = \bigcup_j (I_j)$, onde $j \in N$. Notemos que esta união pode ser infinita. Mesmo neste caso, podemos escrever:

$$f^{-1}(V) = \bigcup_j f^{-1}(I_j)$$

Dado $j \in N$, o intervalo I_j é de uma das formas abaixo (onde a, b são números reais e $b > a$):

a) $I_j = \{x \in R: x < b\}$;

b) $I_j = \{x \in R: a < x < b\} = \{x \in R: x < b\} \cap \{x \in R: x > a\}$; ou

c) $I_j = \{x \in R: x > a\}$.

Para os intervalos do tipo "a" temos que $f^{-1}(I_j) = \{x \in D: f(x) < b\} = b_-$; para os do tipo "b", $f^{-1}(I_j) = \{x \in D: f(x) < < b\} \cap \{x \in D: f(x) > a\} = b_- \cap a_+$; e, para os do tipo "c", $f^{-1}(I_j) = \{x \in D: f(x) > a\} = a_+$. Assim, podemos dizer que:

— no caso "a" existe um conjunto W_j aberto em R^q tal que $W_j \cap D = f^{-1}(I_j)$;

— no caso "b" existem dois conjuntos W^a_j e W^b_j abertos em R^q tais que $f^{-1}(I_j) = (W^a_j \cap D) \cap (W^b_j \cap D)$, ou, ainda, $f^{-1}(I_j) = = (W^a_j \cap W^b_j) \cap D$ e, como $W^a_j \cap W^b_j$ é aberto, também existe W_j $(\equiv W^a_j \cap W^b_j)$ tal que $f^{-1}(I_j) = W_j \cap D$; e

— o caso "c" é semelhante ao caso "a".

Portanto, temos finalmente que:

$$f^{-1}(V) = \bigcup_j f^{-1}(I_j) = \bigcup_j (W_j \cap D) = D \cap (\bigcup_j W_j)$$

Conclui-se, portanto, que f é contínua, uma vez que $\bigcup_j W_j$ é um conjunto aberto.

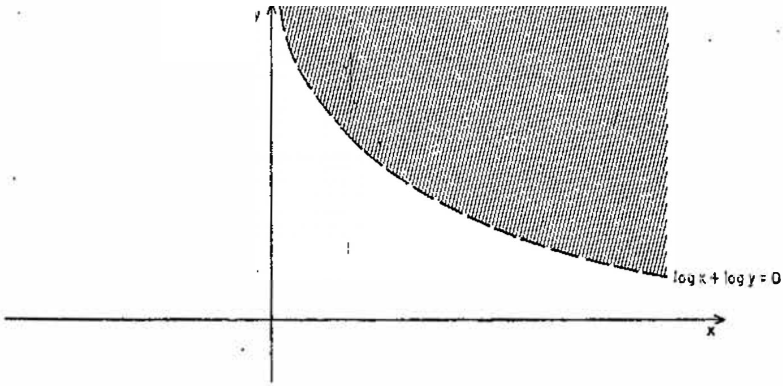
C. Q. D.

Como aplicação de uma parte do Corolário 2, considere-se a função:

$$U: \overset{o}{R}{}^2_+ \to R$$

definida por $U(x, y) = \log x + \log y$. É fácil ver que U é uma função contínua em seu domínio (interior de R^2_+) e, dessa maneira, qualquer que seja $\alpha \in R$, o conjunto $\{(x, y) \in R^2: \log x + \log y > \alpha\}$

é aberto. Por exemplo, se $\alpha = 0$, temos a representação geométrica deste conjunto na figura a seguir.



Corolário 3 — A função $f\colon D \to R$, $D \subset R^p$, é contínua se, e somente se, para todo $\alpha \in R$, existem conjuntos fechados F_+ e F_- tais que $F_+ \cap D = \overline{\alpha}_+$ e $F_- \cap D = \overline{\alpha}_-$.

Prova:

Note-se que $\complement_D \overline{\alpha}_+ = \{x \in D\colon f(x) < \alpha\} = \alpha_-$; $\complement_D \overline{\alpha}_- = \{x \in D\colon f(x) > \alpha\} = \alpha_+$.

O corolário anterior afirma que f é contínua se, e somente se, existem conjuntos abertos em R^q, W_+ e W_-, tais que $\alpha_- = W_- \cap D$ e $\alpha_+ = W_+ \cap D$:

$$\complement_D \alpha_- = \complement_D (W_- \cap D) = \left(\complement_D W_-\right) \cup \complement_D D = \complement_D W_-$$

Finalmente, notemos que $\complement_D W_- = (R^q - W_-) \cap D$ e, portanto, $\complement_D W_-$ é fechado em R^q. Tomando $F_+ = \complement_D W_-$, segue-se que $\overline{\alpha}_+ = F_+ \cap D$.

Um argumento semelhante mostra que $\overline{\alpha}_- = F_- \cap D, F_-$ fechado em R^q.

Corolário 4 — Seja $f: R^q \to R$. As seguintes afirmativas são equivalentes:

a) f é contínua em R^q;

b) α_- e α_+ são conjuntos abertos em R^q, qualquer que seja $\alpha \in R$; e

c) $\overline{\alpha}_+$ e $\overline{\alpha}_-$ são conjuntos fechados em R^q, qualquer que seja $\alpha \in R$.

Analisaremos agora — de maneira geral — como estes resultados podem ser aplicados a um problema importante na Teoria do Comportamento do Consumidor. Suponha-se que as alternativas de consumo de um indivíduo sejam representadas por um subconjunto X de R^q e que, dados $x \in X$ e $y \in X$, exatamente uma das alternativas abaixo seja verdadeira:

a) o indivíduo prefere x a y (notação: $x \ P \ y$);

b) o indivíduo prefere y a x (notação: $y \ P \ x$); e

c) o indivíduo é indiferente entre as alternativas x e y (notação: $x \ I \ y$).

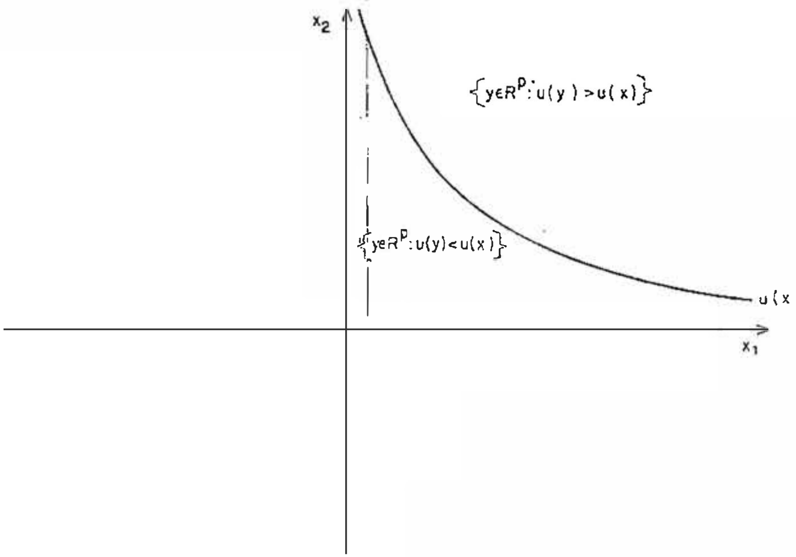
Quando ocorre a alternativa "a" ou a alternativa "c", dizemos que x não é inferior a y (notação: $x \ R \ y$).

É fácil verificar que $x \ R \ x$ para todo $x \in X$; que, se $x \ R \ y$ e $y \ R \ z$, então $x \ R \ z$ para todo $x \in X$, $y \in X$ e $z \in X$; e que, dados $x \in X$ e $y \in X$, ou $x \ R \ y$ ou $y \ R \ x$.

Esta relação binária com as três propriedades acima é chamada uma Relação de Preferências em X.

Dados X e uma Relação de Preferências em X, uma questão relevante é a seguinte: existe alguma função $U: X \to R$ que seja contínua e tal que $U(x) \geqslant U(y)$ sempre que $x \ R \ y$? No caso afirmativo, diremos que representa a relação de preferências R.

A resposta a esta pergunta é difícil e está além do escopo deste livro, mas o leitor interessado pode consultar, por exemplo, Debreu (1959, Cap. 4). Procuraremos, no entanto, indicar como os resultados anteriores são utilizados para se chegar a uma resposta afirmativa. Simplifiquemos um pouco a questão admitindo que $X = R^p$. Observe-se que, se existe a função $U: R^p \to R$, então ela tem a seguinte propriedade: para todo $x \in R^p$, os conjuntos $\{y \in R^p: U(y) > U(x)\}$ e $\{y \in R^p: U(y) < U(x)\}$ são abertos em R^p (Corolário 4). Estes conjuntos estão representados na figura a seguir e correspondem às áreas acima e abaixo da curva de indiferença $U(x)$ da função U.



É também uma conseqüência do Corolário 4 que, para todo $x \in R^p$, os conjuntos:

$$\{y \in R^p: U(y) \geqslant U(x)\} \text{ e } \{y \in R^p: U(y) \leqslant U(x)\}$$

são fechados em R^p.

Em vista destas considerações, fica claro que não existe chance de demonstrar a existência da função U sem que se verifiquem as propriedades acima. Segue-se disto que, se se faz a hipótese de que os conjuntos:

$$\{y \in R^p: x \; R \; y\} \quad \text{e} \quad \{y \in R^p: y \; R \; x\} \tag{2}$$

são fechados, não estaremos restringindo em nada a generalidade da demonstração. Esta hipótese é usualmente feita nos tratamentos deste problema — uma vez mais indicamos Debreu (1959, Cap. 4) como uma referência importante sobre o assunto — pois ajuda na construção do argumento.

Corolário 5 — A função $f: D \rightarrow R^p$, $D \subset R^q$, é contínua em D se, e somente se, para cada conjunto F fechado em R^p, existe um conjunto G fechado em R^q tal que $G \cap D = f^{-1}(F)$.

Prova:

Suponha-se que f é contínua em D e seja $F \subset R^p$ fechado. Então, existe um conjunto aberto $W \subset R^q$ tal que $W \cap D = f^{-1}(R^p - F) = D - f^{-1}(R)$.

Portanto, $x \in f^{-1}(F) \Longleftrightarrow x \in D$ e $x \notin W \cap D \Longleftrightarrow x \in D - (W \cap D) \Longleftrightarrow x \in D$ e $x \in \complement W \Longleftrightarrow x \in D \cap \complement W$. Como $f^{-1}(F) = D \cap \complement W$, fica demonstrada a primeira parte do teorema.

Suponha-se agora que a condição do teorema se verifique e seja $V \subset R^p$ aberto. Então, temos que $\complement V = R^p - V$ é fechado e, neste caso, existe um conjunto fechado $G \subset R^q$ tal que $G \cap D = f^{-1}(R^p - V) = D - f^{-1}(V)$.

De forma análoga ao que fizemos acima, conclui-se que $f^{-1}(V) = D \cap \complement G$.

Como $\complement G$ é aberto, f é contínua.

Corolário 6 — A função $f: R^q \rightarrow R^p$ é contínua em R^q se, e somente se, para cada conjunto F fechado em R^p, o conjunto $f^{-1}(F)$ é fechado em R^q.

IV.2.1 — Preservação da Conexidade

Teorema 11 (Preservação da Conexidade) — Seja $f: D \rightarrow R^p$, $D \subset R^q$, contínua em D. Se D é conexo, então $f(D)$ é conexo.

Prova:

Suponha-se que $f(D)$ é desconexo. Neste caso, existem conjuntos abertos A e B em R^p tais que:

$$A \cap f(D) \neq \phi; \quad B \cap f(D) \neq \phi \tag{2}$$

$$[A \cap f(D)] \cap [B \cap f(D)] = \phi \tag{3}$$

$$[A \cap f(D)] \cup [B \cap f(D)] = f(D) \tag{4}$$

Pelo teorema da continuidade global, existem conjuntos abertos A_1, B_1 em R^q tais que:

$$A_1 \cap D = f^{-1}(A) \quad \text{e} \quad B_1 \cap D = f^{-1}(B)$$

Note-se que $f^{-1}(A) \neq \phi$ e $f^{-1}(B) \neq \phi$. Além disto, $(A_1 \cap D) \cap (B_1 \cap D) = \phi$, em vista de (3), e $(A_1 \cap D) \cup$ $\cup (B_1 \cap D) = D$, em vista de (4).

Dessa maneira, A_1 e B_1 formam uma desconexão para D, o que significa que, se $f(D)$ não é conexo, D também não é conexo. Esta afirmativa é equivalente à afirmativa do teorema.

C. Q. D.

Corolário — Se f é contínua em $H \subset D$ e H é conexo, então $f(H)$ é conexo.

Prova:

f/H é contínua em seu domínio.

Exemplo:

26 — A esfera $S = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 = 1\}$ é um conjunto conexo, pois é a imagem de R pela função contínua $f: R \rightarrow R^2$ definida por $f(t) = (sen\ t, cos\ t)$.

Apresentaremos a seguir um segundo corolário do Teorema 11, que, entretanto, pela sua importância, será denominado de teorema.

Teorema 12 (Teorema do Valor Intermediário) — Seja $f: H \rightarrow R$, $H \subset R^q$, contínua e limitada no conjunto conexo H. Se existe $k \in R$ tal que $\inf f(H) < k < \sup f(H)$, então existe $c \in H$ com a propriedade de que $f(c) = k$.

Prova:

Suponha-se que H é conexo, que f é contínua em H e que $k \in R$ seja tal que $\inf f(H) < k < \sup f(H)$. Se $f(x) \neq k$ para todo $x \in H$, então $k \notin f(H)$ e os conjuntos $A = \{t \in R: t < k\}$ e $B = \{t \in R: t > k\}$ formam uma desconexão para $f(H)$. Isto contradiz a hipótese de que H é conexo e f é contínua.

C. Q. D.

É interessante notar que, apesar de as funções contínuas possuírem esta propriedade do valor intermediário, existem funções descontínuas que também gozam dela. Por exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

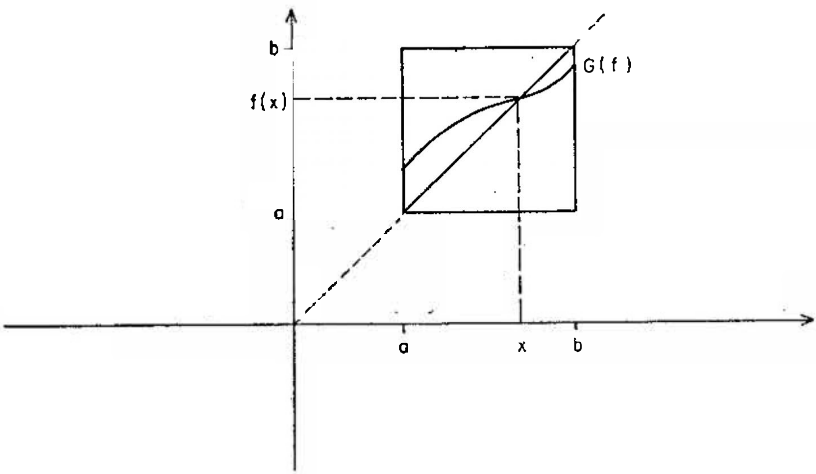
O conjunto de valores de f é $[-1, 1]$, isto é, ela assume todos os valores no intervalo $[-1, 1]$. Certamente, as funções que possuem descontinuidades removíveis ou de 1.ª espécie não possuem esta propriedade.

Vejamos duas aplicações do teorema:

a) Seja $f: [a, b] \rightarrow R$ contínua e tal que $f([a, b]) = [a, b]$. Mostraremos que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$, isto é, o gráfico da função f corta a diagonal do quadrado cujos lados são (a, a), (a, b), (b, a) e (b, b).

Para provarmos isto, consideremos a função $g: [a, b] \rightarrow R$ definida por $g(x) = f(x) - x$. Note-se que $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$. Entretanto, se $g(a) = 0$, a é o x procurado. Da mesma forma, $g(b) \leqslant 0$.

Se $g(b) = 0$, b é o x procurado. Se $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$, então existe $x \in (a, b)$ tal que $g(x) = 0$, uma vez que g é uma função contínua. Isto é, $f(x) = x$.



b) Seja $S = \{x \in R^2 : |x| = 1\}$ e seja $f: S \to R$ uma função contínua em S. Mostraremos que existe $z \in S$ tal que $f(z) = f(-z)$. Com efeito, seja $g: S \to R$ definida por $g(x) = f(x) - f(-x)$. g é bem definida, pois, se $x \in S$, $-x \in S$. Além disto, $g(x) = f(x) - f(-x) = -[f(-x) - f(x)] = -g(-x)$. Se $g(x) = 0$, então $f(x) = f(-x)$; em caso contrário, $g(x)$ e $g(-x)$ são de sinais opostos e, pelo teorema do valor intermediário, existe $z \in S$ tal que $g(z) = 0$, ou seja, $f(z) = f(-z)$.

IV.2.2 — Preservação da Compacidade

Teorema 13 (Preservação da Compacidade) — Seja $f: K \to R^p$, $K \subset R^q$, contínua em K. Se K é compacto, $f(K)$ é compacto.

Prova:

Suponha-se que K é compacto. Se $f(K)$ não é compacto, existe uma sucessão (y_n) em $f(K)$ que não possui subsucessão convergente para um elemento de $f(K)$. Para cada $n \in N$, existe $x_n \in K$ tal que $y_n = f(x_n)$. A sucessão (x_n) possui uma subsucessão (x_{n_k}) que converge para $x \in K$ (pois K é compacto). Como f é contínua, $(f(x_{n_k}))$ converge para $f(x) \in f(K)$, o que contradiz a propriedade da sucessão (y_n).

C. Q. D.

Corolário 1 — Se $f: K \to R^p$, $K \subset R^q$, é contínua no compacto K, então f é limitada em K.

Corolário 2 — Seja $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$. Se f é contínua em $K \subset D$, K compacto, então $f(K)$ é compacto.

Prova:

f/K é contínua no compacto K.

O próximo resultado é um corolário do Teorema 13, que, pela sua importância, no entanto, será representado na forma de um teorema.

Teorema 14 (Teorema de Weierstrass) — Seja $f: K \to R$, $K \subset R^q$, contínua no conjunto compacto K. Então, existem $x^* \in K$ e $x_* \in K$ tais que $f(x^*) = sup\ f(K)$ e $f(x_*) = inf\ f(K)$.

Prova:

Basta notar que $sup\ f(K)$ e $inf\ f(K)$ são pontos de fronteira de $f(K)$ e que $f(K)$ é um conjunto fechado.

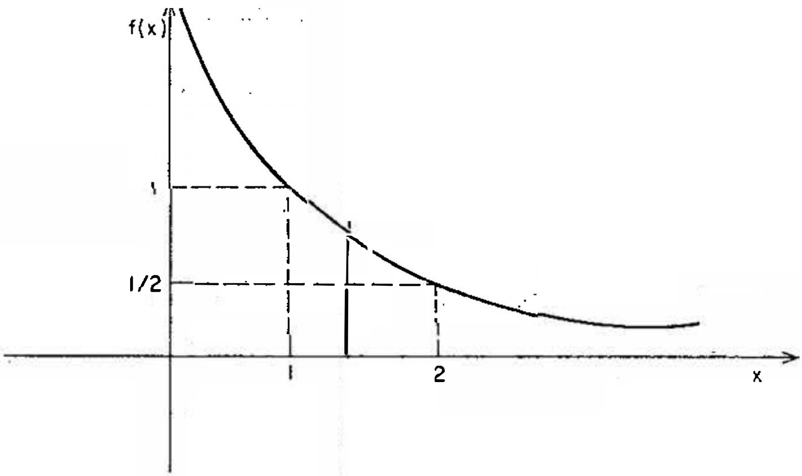
C. Q. D.

Em outras palavras, o teorema de Weierstrass garante que uma função contínua definida num conjunto compacto assume um valor máximo e um valor mínimo. É importante enfatizar que a condição é apenas suficiente. A função constante é o contra-exemplo mais simples para mostrar que ela não é necessária.

Vejamos alguns exemplos que ilustram a importância da hipótese de compacidade.

Exemplos:

27 — Seja $f: R_+ - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. É fácil ver que $R_+ - \{0\}$ não é um conjunto compacto e a função f não possui máximo nem mínimo neste conjunto.



28 — Seja agora $g: [1, 2] \to R$ definida por $g(x) = \frac{1}{x}$. Como g é contínua e $[1, 2]$ é um conjunto compacto, g possui máximo e mínimo. Neste caso, com auxílio da figura anterior é fácil ver que g atinge máximo em $x = 1$ e mínimo em $x = 2$.

29 — Vejamos uma aplicação deste resultado na teoria do comportamento do consumidor. Seja $U: R^p_+ \to R$ uma função utilidade contínua. Dentre as hipóteses usualmente feitas com relação a U, destaquemos a seguinte: se $x, y \in R_+$ e $x_i \geqslant y_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, e $x_j > y_j$ para algum $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, então $U(x) > U(y)$. Intuitivamente, isto corresponde à hipótese de que o consumidor sempre "melhora" se tem pelo menos a mesma quantidade de $(p - 1)$ bens e obtém uma quantidade maior de um dos bens.

Dessa forma, a função U não é limitada e, em consequencia, não existe $\bar{x} \in R^p_+$ que maximize U, isto é, tal que $U(\bar{x}) \geqslant U(x)$ para todo $x \in R^p_+$.

Entretanto, na formulação do problema do consumidor, a escolha efetiva é restrita a um subconjunto de R^p_+ determinado pela renda e pelos preços dos bens. Designando estes preços por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, a renda por m e admitindo-se que $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \ldots, \alpha_p > 0$ e $m > 0$, esta restrição é o conjunto $B = \{x \in R^p_+ : \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p \leqslant m\}$.

Já vimos (exemplo 58 do Capítulo II) que este conjunto é compacto e, portanto, U/B possui um máximo em B (pelo teorema de Weierstrass).

IV.3 — Continuidade Uniforme

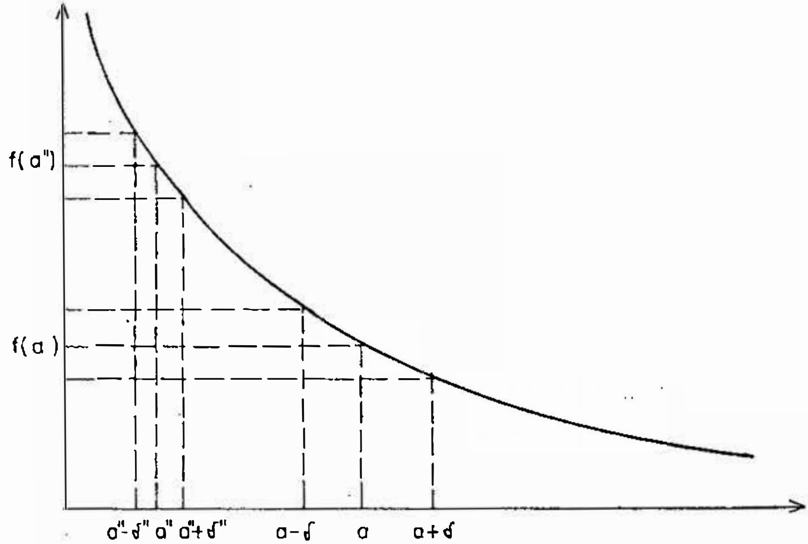
Quando definimos continuidade de uma função em um ponto a pertencente ao seu domínio, enfatizamos o fato de que o número δ depende de ε e de a. Em certos casos, entretanto, pode-se obter δ independentemente do ponto a, isto é, desde que x' e x'' estejam a uma distância menor do que δ um do outro, teremos que $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Examinemos esta idéia mais detidamente através de alguns exemplos. Seja a função $f: R_+ - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Já sabemos que f é contínua em todo ponto a pertencente ao seu domínio. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon, a) > 0$ tal que, se $x \in R_+ - \{0\}$ e $|x - a| < \delta(\varepsilon, a)$, temos:

$$|f(x) - f(a)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$$

Examinemos agora o gráfico da função.

O gráfico de f a seguir mostra que, dado $\varepsilon > 0$, o "maior" δ que podemos encontrar é aquele mostrado no gráfico. Observe-se que, se tomarmos um ponto $a' > a$ (não mostrado no gráfico), dado $\varepsilon > 0$, o mesmo δ será suficiente para garantir que a condição de continuidade se verifique. Na verdade, o δ máximo correspondente ao ponto a' seria, sem dúvida, maior do que para a, e este é o fato que garante a independência do δ e a para valores maiores do que a.



Entretanto, consideremos agora o ponto $a'' < a$. Pode-se perceber que o δ máximo será menor do que no ponto a e, portanto, não será possível garantir a continuidade utilizando-se o δ do ponto a. Além disto, qualquer que seja δ tomado no caso do ponto a, sempre será possível encontrar $a'' < a$ tal que o δ correspondente a a'' seja menor do que qualquer δ tomado no ponto a.

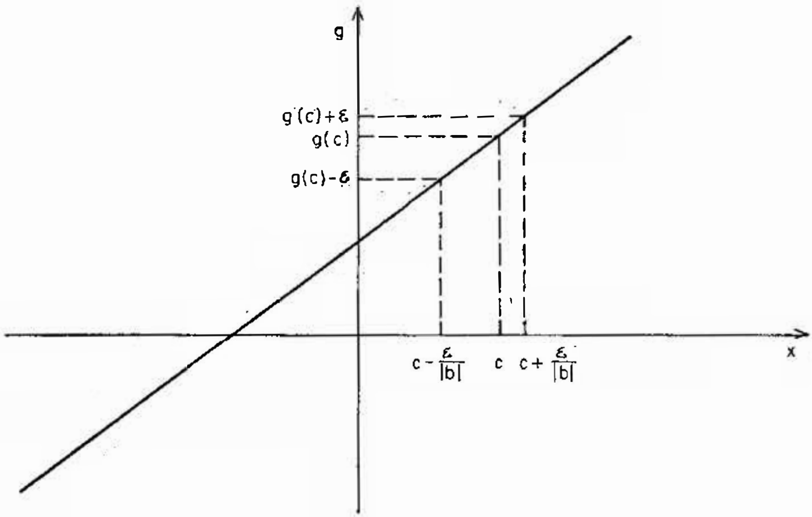
Comprovemos estas afirmativas de maneira mais formal. Dado $\varepsilon > 0$, suponha-se que exista δ, independentemente de a, tal que, se $x \in R_+ - \{0\}$ e $|x - a| < \delta$, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Escolhamos agora a da seguinte maneira: $a > 0$ e $a < min\ \{\delta, 1/3\ \varepsilon\}$ e seja $x = a + \delta/2$. Note-se que $|x - a| < \delta$ e que:

$$|f(x) - f(a)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{a + \delta/2} - \frac{1}{a}\right| =$$

$$= \left|\frac{-\delta}{(2a+\delta)^a}\right| = \frac{\delta}{(2a+\delta)^a} > \frac{\delta}{3\delta^a} = \frac{1}{3a} > \varepsilon$$

Isto mostra que não é possível obtermos para a função acima um valor de δ independente de a.

Consideremos agora a função $g: R \to R$ dada por $g(x) = a + b\,x$, $b \neq 0$. Para todo $c \in R$, $|g(x) - g(c)| = |b|\,|x - c|$ e, portanto, dado $\varepsilon > 0$, se escolhermos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|b|}$ teremos $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$ sempre que $|x - c| < \delta$, qualquer que seja o ponto $c \in R$. Veja-se o gráfico a seguir para uma ilustração.



Definição 4 — Seja $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$. Diz-se que f é *Uniformemente Contínua* em D se, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número real $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo par $x_1, x_2 \in D$ com $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$, tem-se $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Com relação a esta definição, convém observar que:

a) Continuidade Uniforme é uma propriedade da função em um conjunto e não em um ponto;

b) como dito anteriormente, δ é um número que depende somente de ε; e

c) já vimos que existem funções contínuas que não são uniformemente contínuas, porém é claro que toda função uniformemente contínua é contínua.

Exemplos:

30 — Seja $I = [a, b]$, $a, b \in R$, $0 < a < b$, e seja $f: I \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Mostraremos que f é uniformemente contínua em I.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Dados $x_1, x_2 \in I$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} < \frac{|x_1 - x_2|}{a^2}$$

Tomando $\delta = a^2\varepsilon$, tem-se que, para todo $x_1, x_2 \in I$ com $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{|x_1 - x_2|}{a^2} < \frac{\delta(\varepsilon)}{a^2} = \varepsilon$$

31 — Seja $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^2$. Mostraremos que f não é uniformemente contínua em R. Note-se que, qualquer que seja $\delta > 0$, se tomarmos $\varepsilon = 1$, $x_1 = \dfrac{2}{\delta}$ e $x_2 = \dfrac{2}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}$, teremos que $|x_1 - x_2| < \delta$ e:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{4}{\delta^2} - \frac{4}{\delta^2} - 2 - \frac{\delta^2}{4}\right| = 2 + \frac{\delta^2}{4} > 1$$

Logo, f não é uniformemente contínua.

32 — Seja agora $X \subset R$ um conjunto limitado e seja $f: X \to R$ dada por $f(x) = x^2$. Mostremos que f é uniformemente contínua em X. Seja $a \in R$, $a \neq 0$, tal que $|x| \leqslant a$ para todo $x \in X$. Então, dados $x \in X$, $y \in X$ e $\varepsilon > 0$:

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y|\,|x + y| \leqslant |x - y|\,(|x| + |y|) \leqslant$$
$$\leqslant 2a\,|x - y| < \varepsilon$$

desde que $|x - y| < \delta$ e $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2a}$. Portanto, f é uniformemente contínua em X.

33 — Seja $f: R \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Mostremos que f é uniformemente contínua. Note-se que:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\right| = \frac{|y^2 - x^2|}{(1+x^2)(1+y^2)} =$$

$$= |y-x| \frac{|y+x|}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqslant |y-x| \left[\frac{|y| + |x|}{(1+x^2)(1+y^2)}\right] =$$

$$= |y-x| \left[\frac{|y|}{(1+y^2)} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{|x|}{1+x^2} \cdot \frac{1}{(1+y^2)}\right] \leqslant 2\,|y-x|$$

uma vez que $\dfrac{|y|}{1+y^2} < 1$, $\dfrac{|x|}{1+x^2} < 1$, $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ e $\dfrac{1}{1+y^2} \leqslant 1$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, se tomarmos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, teremos que, para todo x, y em R com $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Uma *Negação da Definição de Continuidade Uniforme* é a seguinte: $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, não é uniformemente contínua em D se "existe" um número real $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, "existem" $x_1 \in D$ e $x_2 \in D$ com $|x_1 - x_2| < \delta$ e $|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon_0$.

Existe, entretanto, em certos casos, uma maneira mais simples de ser utilizada para mostrar que uma função não é uniformemente contínua. O lema a seguir estabelece o resultado.

Lema — Uma condição necessária e suficiente para que $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, não seja uniformemente contínua em D é que existam um número real $\varepsilon_0 > 0$ e duas seqüências (x_n) e (y_n) em D tais que, para todo $n \in N$, $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

Prova:

Suponha-se que f não é uniformemente contínua. Então, para cada $n \in N$, se tomarmos $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ na negação da *Definição de Continuidade Uniforme*, teremos duas seqüências (x_n) e (y_n) em D tais que $|x_n - y_n| < \delta_n$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

Por outro lado, se se verifica a condição do lema, então, qualquer que seja $\delta > 0$, existe $\bar{n} \in N$ tal que $\frac{1}{\bar{n}} < \delta$. Logo, existem $x_1 \in D$ e $x_2 \in D$ (isto é, $x_1 = x_{\bar{n}}$ e $x_2 = y_{\bar{n}}$) tais que $|f(x_1) - f(x_2)| = |f(\bar{x}_n) - f(\bar{y}_n)| \geq \varepsilon_0$.

Disto se segue que f não é uniformemente contínua.

Exemplos:

34 — Dada a função $f\colon R_+ - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, é fácil ver, baseado no critério acima, que ela não é uniformemente contínua. Basta tomar as seqüências $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ e $(y_n) = \left(\frac{1}{3n}\right)$ e notar que $|x_n - y_n| = \frac{2}{3n} < \frac{1}{n}$ e que $|f(x_n) - f(y_n)| = |n - 3n| = 2n \geq 2$.

35 — A função $f\colon R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x\,y$ não é uniformemente contínua. Basta considerarmos as seguintes seqüências:

$$(x_n) = (n, n) \quad \text{e} \quad (y_n) = \left(n + \frac{1}{2n}, n + \frac{1}{2n}\right)$$

Note-se que:

$$|x_n - y_n| = \left|\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right)\right| = \left(\frac{2}{4n^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}\,n} < \frac{1}{n}$$

e que:

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|n^2 - \left(n^2 + \frac{1}{4n^2} + 1\right)\right| = \left|1 + \frac{1}{4n^2}\right| > 1$$

36 — A função $f\colon R_+ - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = sen\,\frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua. Consideremos as seqüências:

$$(x_n) = \left(\frac{2}{(1 + 4n)\,\pi}\right) \quad \text{e} \quad (y_n) = \left(\frac{2}{(3 + 4n)\,\pi}\right)$$

Note-se que:

$$|x_r - y_n| = \frac{2}{\pi}\left|\frac{1}{1+4n} - \frac{1}{3+4n}\right| \leqslant \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{1+4n} + \frac{1}{3+4n}\right\} <$$
$$< \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{4n} + \frac{1}{4n}\right] < \frac{1}{n}$$

e que:

$$\left| sen\,\frac{1}{x_n} - sen\,\frac{1}{y_n}\right| = |1-(-1)| = 2$$

Com auxílio do lema anterior, provaremos agora o resultado mais importante sobre continuidade uniforme.

Teorema 15 (Teorema da Continuidade Uniforme) — Se $f\colon K \to R^p$, $K \subset R^q$, é contínua no conjunto compacto K, então f é uniformemente contínua em K.

Prova:

Seja f contínua no compacto K. Se f não é uniformemente contínua, então existem duas seqüências (x_n) e (y_n) em K e um número real $\varepsilon_0 > 0$ tais que $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in N$.

Como K é compacto, (x_n) possui uma subseqüência (x_{n_k}) em K que converge para $x \in K$. Sendo f contínua, $lim\ (f(x_{n_k})) = f(x) \in f(K)$.

A subseqüência (y_{n_k}) também converge para x, pois $|y_{n_k} - x| \leqslant |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \dfrac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x|$.

Dessa maneira, a seqüência $(f(y_{n_k}))$ também converge para $f(x)$.

Finalmente, $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leqslant |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(y_{n_k}) - f(x)|$.

Portanto, existe um número natural $N(\varepsilon)$ tal que, se $n_k \geqslant N(\varepsilon)$, teremos $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon_0$.

Isto contradiz a hipótese de que $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in N$.

C. Q. D.

Exemplos:

37 — A função $f: [0, 1] \to R$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contínua em $[0, 1]$, pois ela é contínua num compacto.

38 — A função $g: [1, 2] \to R$ dada por $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ é uniformemente contínua em $[1, 2]$, pois ela é contínua num compacto.

39 — Note-se que $f: R_+ - \{0\} \to R$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ não é uniformemente contínua. As seqüências $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ e $(y_n) = \left(\dfrac{1}{2_n}\right)$ são tais que $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| = 3_{n^2} \geqslant 3.$

Os exemplos 38 e 39 deixam clara a importância do domínio da função na verificação de que ela é uniformemente contínua. Sempre que se faz alguma afirmativa sobre continuidade uniforme, deve-se especificar claramente o domínio sempre que houver possibilidade de confusão.

IV.4 — Funções Lineares, Funções Lipschitzianas e Continuidade Uniforme

Examinaremos, inicialmente, a classe das funções lineares, que, apesar de extremamente simples do ponto de vista operacional — como veremos a seguir —, aparecem, no entanto, em várias aplicações interessantes.

Definição 5 — $f: R^q \to R^p$ é uma *Função Linear* se, dados $x, y \in R^p$ e $\alpha, \beta \in R$, $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Exemplos:

40 — A função $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x + y$ é linear, pois, dados (x, y) e (x', y') pertencentes a R^2 e α e β pertencentes a R:

$$f[\alpha(x, y) + \beta(x', y')] = f[(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')] = \alpha x + \beta x' + \alpha y + \\ + \beta y' = (\alpha x + \alpha y) + (\beta x' + \beta y') = \alpha f(x, y) + \beta f(x', y')$$

41 — A função $f: R \to R$ definida por $f(x) = a + bx$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, não é linear, pois, dados $x \in R$ e $y \in R$:

$$f(x + y) = a + b(x + y) = a + bx + by \neq f(x) + f(y)$$

Note-se, contudo, que a função $g(x) = f(x) - a$ é linear.

42 — A i-ésima projeção $\pi_i: R^q \to R$ definida por $\pi_i(x) = x_i$ é uma função linear. Dados $x \in R^q$, $y \in R^q$ e os números reais α e β:

$$\pi_i(\alpha x + \beta y) = \alpha x_i + \beta y_i = \alpha \pi_i(x) + \beta \pi_i(y).$$

43 — Uma matriz m x n é uma tabela que contém $m\ n$ números reais dispostos em m linhas e n colunas. Por exemplo, a matriz A abaixo é 2 x 3, pois possui duas linhas e três colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Dada a matriz A, p x q, cujo elemento genérico é (a_{ij}), $i = 1, 2, \ldots, p$ e $j = 1, 2, \ldots, q$, e o vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_q) \in R^q$, define-se o produto $A.x$ como sendo o vetor $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in R^p$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \langle a_1, x \rangle \\ y_2 = \langle a_2, x \rangle \\ \vdots \\ y_p = \langle a_p, x \rangle \end{array}\right\} \qquad (5)$$

onde $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{iq})$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $x = (1, 2, 3)$, então $A.x = (y_1, y_2)$, onde $y_1 = \langle (2, 3, 1), (1, 2, 3) \rangle = 11$ e $y_2 = \langle (5, 0, 4), (1, 2, 3) \rangle = 17$.

Note-se agora que, dada a matriz A, $p \times q$, os vetores x e y pertencentes a R^q e os números reais α e β, temos que:

$$A(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x) + A(\beta y) = \alpha(Ax) + \beta(Ay)$$

isto é, dada uma matriz A, $p \times q$, a função $f: R^q \to R^p$ definida por $f(x) = A.x$ é linear.

É interessante que vale também a recíproca deste resultado, qual seja, dada a função linear $f: R^q \to R^p$, existe uma matriz A, $p \times q$, tal que $f(x) = A.x$. Verifiquemos isto.

Consideremos os vetores da base canônica de R^q: $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_q = (0, 0, \ldots, 1)$, e sejam:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{p1}) \\ f(e_2) &= (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{p2}) \\ &\vdots \\ f(e_q) &= (a_{1q}, a_{2q}, \ldots, a_{pq}) \end{aligned}$$

Seja agora $x \in R^q$. Tendo em vista que f é linear, podemos escrever:

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \ldots + x_q e_q) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots +$$
$$+ x_q f(e_q) = x_1 (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{p1}) + x_2 (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{p2}) +$$
$$+ \ldots + x_q (a_{1q}, a_{2q}, \ldots, a_{pq}) = A.x$$

onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2q} \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pq} \end{bmatrix}$

Em resumo, acabamos de provar o seguinte:

Teorema 16 — A função $f: R^q \to R^p$ é linear se, e somente se, existe uma matriz A, $p \times q$, tal que, para todo $x \in R^q$, $f(x) = A.x$.

Teorema 17 — A função linear $f: R^q \to R^p$ é contínua.

Prova:

Dado $\varepsilon > 0$, seja $z \in R^q$. Então $|f(x) - f(z)| = |A.x - Az| = |A(x - z)|$, onde A é a matriz $p \times q$ que corresponde à função linear f. Pela definição do produto $A(x - z)$, temos que $A(x - z) =$

$= (< a_1, (x - z) >, < a_2, (x - z) >, \dots, < a_p, (x - z) >$, onde $a_1, a_2, \dots, a_p$ são os vetores que formam as p linhas da matriz A — ver as equações (5).

Portanto:

$$|A(x - z)| = |(< a_1, (x - z) >, \dots, < a_p, (x - z) > | =$$

$$= \sqrt{< a_1, (x - z) >^2 + < a_2, (x - z) >^2 + \dots + < a_p, (x - z) >^2}$$

Notando que a função raiz quadrada é monótona crescente e que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $< a_i, (x - z) >^2 \leqslant$ $\leqslant |a_i|^2 \, |x - z|^2$ para todo $i = 1, 2, \dots, p$, segue-se que:

$$|A(x - z)| = \sqrt{< a_1, (x - z) >^2 + \dots + < a_p, (x - z) >^2} \leqslant$$
$$\leqslant |x - z| \, (|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_p|^2)^{1/2}$$

Portanto, tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{(|a_1|^2 + \dots + |a_p|^2)^{1/2}}$, temos que, para todo $x \in R^q$ tal que $|x - z| < \delta$, teremos $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$, isto é, f é contínua no ponto $z \in R^q$. Como z é arbitrário, f é contínua em R^q.

Observe-se, para completar a demonstração, que a escolha de δ feita acima só é possível se $|a_i| \neq 0$ para algum $i \in \{1, \dots, p\}$. Quando isto não ocorre, A é a matriz cujos elementos são todos nulos e f é a função constante tal que, para todo $x \in R^q$, $f(x) =$ $= 0 \in R^q$. Esta função é obviamente contínua.

C. Q. D.

Teorema 18 — A função linear $f: R^q \to R^p$ é uniformemente contínua.

Prova:

A demonstração é praticamente a mesma dada no Teorema 17. Deixamos a cargo do leitor reescrevê-la para o presente caso. Note-se, para facilitar ainda mais o seu trabalho, que o δ encontrado acima é independente de z.

C. Q. D.

Observemos, como introdução para a próxima definição, que tudo o que se necessita para provar que uma função linear é uniformemente contínua é estabelecer a seguinte desigualdade: para todo $x \in R^q$ e $y \in R^q$, existe um número real $c > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leqslant c\,|x - y|$.

No caso da função linear, este número $c = (|a_1|^2 + \ldots + |a_p|^2)^{1/2}$. As funções Lipschitzianas são, portanto, aquelas que satisfazem uma condição desta natureza.

Definição 6 — Diz-se que a função $f\colon D \to R^p$, $D \subset R^q$, satisfaz uma *Condição de Lipschitz* ou é *Lipschitziana* se existe um número real $c > 0$ tal que, para todo $x \in D$ e $y \in D$, tem-se $|f(x) - f(y)| \leqslant c\,|x - y|$.

Exemplos:

44 — Toda função linear é Lipschitziana.

45 — A função $f\colon R_+ \to R$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ não é Lipschitziana. Suponha-se que existe $c > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leqslant c\,|x - y|$ para todo $x \in R_+$ e $y \in R_+$. Tomando $y = 0$ na relação anterior, obtém-se:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < c$$

para todo $x \in R_+ - \{0\}$. Esta condição não pode ser satisfeita para nenhum número real, uma vez que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

46 — A função $f\colon R \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ é Lipschitziana com constante $c = 2$ (ver exemplo 33 anterior).

47 — A função $f\colon R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ não é Lipschitziana, pois não pode ser $|x^2 - y^2| < c\,|x - y|$ para todo $x \in R$ e $y \in R$. Note-se que, da desigualdade acima, segue-se que $|x + y| < c$ para todo $x \in R$ e $y \in R$, o que é, obviamente, um absurdo.

48 — A função $f\colon [1, 2] \to R$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é Lipschitziana, pois, dados $x \in [1, 2]$ e $y \in [1, 2]$:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leqslant \frac{1}{2}\,|x - y|$$

Teorema 19 — A função Lipschitziana $f: D \to R^p$, $D \subset R^q$, é uniformemente contínua.

Prova:

Deixamos a cargo do leitor escrever esta demonstração.

Exemplo:

49 — A função $f: R_+ \to R$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ não é Lipschitziana (exemplo 45), porém é uniformemente contínua. Para demonstrarmos que ela é uniformemente contínua, consideremos inicialmente $f/[0, 1]$. Pelo teorema da continuidade uniforme, f é uniformemente contínua em $[0, 1]$.

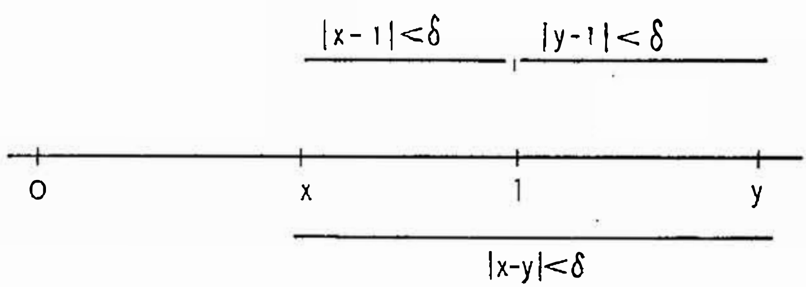
Por outro lado, se considerarmos agora $f/[1, \infty)$, pode-se mostrar que ela é uniformemente contínua (na verdade, Lipschitziana). Um argumento igual ao do exemplo 48 anterior é suficiente para isto.

Portanto, se agora é dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

a) se $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 1]$ e $|x - y| < \delta_1$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$; e

b) se $x \in [1, \infty)$ e $y \in [1, \infty)$ e $|x - y| < \delta_2$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$.

Seja agora $\delta = min\ \{\delta_1, \delta_2\}$ e sejam $x \in R_+$ e $y \in R_+$ tais que $|x - y| < \delta$. É claro que, se x e y pertencerem a um dos intervalos acima, teremos $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$. Se, no entanto, $x \in [0, 1]$ e $y \in [1, \infty)$, então $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(1)| + |f(1) - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, pois, se $|x - y| < \delta$, certamente $|x - 1| < \delta$ e $|y - 1| < \delta$ (veja-se a figura a seguir).



IV.5 — Equilíbrio Competitivo numa Economia de Trocas

Nesta seção procuraremos estudar um problema importante da Teoria do Equilíbrio Competitivo, qual seja, a de existência de equilíbrio. De uma maneira intuitiva, a questão de existência — no contexto de uma economia de trocas onde não há produção — refere-se à possibilidade de o comportamento individual ser compatível com o equilíbrio de mercado, num sentido que será explicado adiante.

Como dissemos, somente examinaremos economias onde não existe produção, o que significa, em outras palavras, que a economia em questão tem apenas a função de distribuir quantidades existentes. Mais simplificadamente ainda, trabalharemos com uma economia onde existam apenas dois consumidores e dois produtos. Esta última hipótese (dois produtos) é feita para simplificar a demonstração, de forma a utilizarmos o teorema do valor intermediário para as funções contínuas.

Para evitar um alongamento excessivo desta seção, omitiremos uma descrição detalhada da escolha dos indivíduos. Admitiremos que, dados os preços p_1 e p_2 (indicados de agora em diante pelo vetor $p = (p_1, p_2)$ e medidos em relação a uma determinada unidade de contas), o consumidor escolhe *um único* vetor de quantidades a serem consumidas $x \in R^2_+$.

Mais especificamente, admitiremos que a função $F: R^2_+ - \{0\} \rightarrow R^2_+$ associa a cada $p \in R^2_+ - \{0\}$ o vetor $x \in R^2_+$, isto é, $F(p) = (f_1(p), f_2(p))$, onde $f_i: R^2_+ - \{0\} \rightarrow R_+$ dada por $f_i(p) = x_i$, $i = 1, 2$. Portanto, F é a função de demanda de um indivíduo. Como temos dois consumidores, denotaremos por F^1 e F^2 as respectivas demandas. Além disto, $f^j_i(p)$, $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, é a demanda da mercadoria i do indivíduo j. Admitiremos ainda que cada indivíduo possui uma dotação inicial de ambas as mercadorias, que serão denotadas por $\bar{w}^1 = (\bar{x}^1, \bar{y}^2)$ e $\bar{w}^2 = (\bar{x}^2, \bar{y}^2)$, que são vetores pertencentes a $R^2_+ - \{0\}$.

A função de excesso de demanda da mercadoria 1 é definida da seguinte maneira:

$$Z_1: R^2_+ - \{0\} \rightarrow R \text{ dada por } Z_1(p) = [f^1_1(p) + f^2_1(p)] - [\bar{x}^1 + \bar{x}^2]$$

Similarmente, a função de excesso de demanda da mercadoria 2 é definida da seguinte forma:

$$Z_2: R^2_+ - \{0\} \longrightarrow R \text{ dada por } Z_2(p) = [f^1_2(p) + f^2_2(p)] - [\bar{y}^1 + \bar{y}^2]$$

Vejamos agora as hipóteses que nos permitirão finalmente provar que existe um equilíbrio competitivo nesta economia. Como o nosso objetivo é a ilustração de um fato matemático, não procuraremos analisar as hipóteses do ponto de vista de seu conteúdo econômico. O leitor interessado nestes aspectos pode consultar, por exemplo, Arrow e Hahn (1971, Cap. 2). Convém mencionar que a demonstração apresentada a seguir é a mesma dada por estes autores.

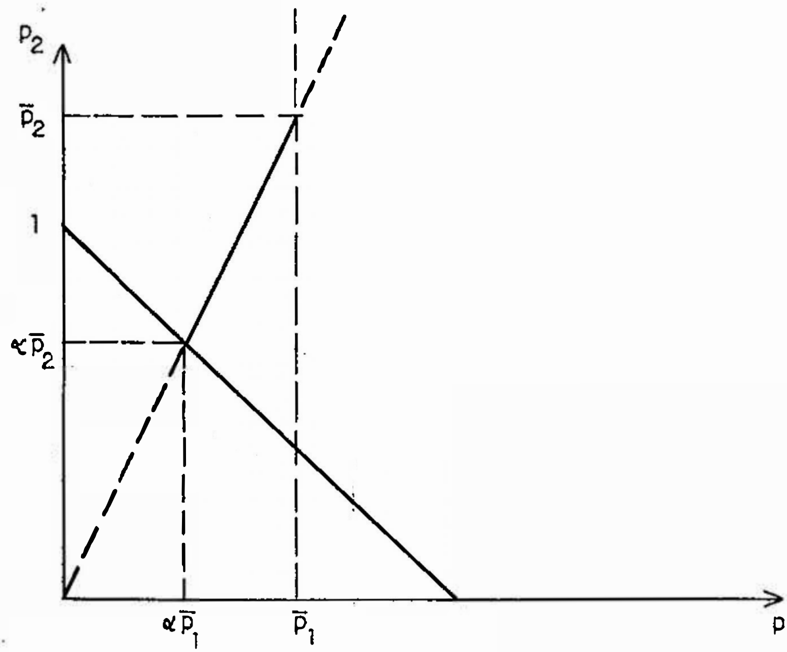
a) Z_1 e Z_2 são funções, isto é, para cada $p \in R^2_+ - \{0\}$ existe um único número real $Z_1(p)$ e um único número real $Z_2(p)$ (um caso em que Z_1 e Z_2 não são funções foi apresentado na Seção I.2 do Capítulo I, quando mostramos como aparece a noção de Correspondência na Teoria da Demanda).

b) Z_1 e Z_2 são funções homogêneas do grau zero, isto é, para todo número real $\lambda > 0$ e para todo $p \in R^2_+ - \{0\}$, $Z_1(\lambda p) = Z_1(p)$ e $Z_2(\lambda p) = Z_2(p)$ (uma definição geral de função homogênea é apresentada no Capítulo V). Uma implicação importante desta hipótese é que somente interessam, para determinação de Z_1 e Z_2, os preços relativos. Dessa maneira, o nível absoluto dos preços pode ser fixado arbitrariamente. Faremos isto supondo que os preços estão restritos no conjunto $S = \{p \in R^2_+ - \{0\}: P_1 + P_2 = 1\}$.

S é um conjunto conexo, pois é a imagem de $[0, 1]$ pela função contínua $f: R \to R^2$ dada por $f(x) = (x, 1 - x)$ (na verdade, S é convexo e, como mostraremos adiante, todo conjunto convexo é conexo). Geometricamente, quando nos restringimos ao conjunto S, estamos simplesmente mantendo constante a relação $\dfrac{P_1}{P_2}$ e mudando o nível de P_1 e P_2 (veja-se a figura a seguir).

c) Vale a Lei de Walras, isto é, para todo $p \in S$, $P_1Z_1(p) + P_2Z_2(p) = 0$.

d) As funções Z_1 e Z_2 são contínuas em S.



Definiremos agora o que vem a ser equilíbrio competitivo. A principal característica de um mercado competitivo é que os indivíduos tomam suas decisões de consumo baseados nos preços dos produtos que são vistos como parâmetros (isto é, dados) para o tomador de decisão. Intuitivamente, portanto, a existência de equilíbrio competitivo garante que existe um vetor de preços que é compatível com escolhas individuais dos membros da sociedade.

Da maneira como vimos tratando o problema, existe uma maneira natural de definirmos equilíbrio. Numa situação destas, ou os excessos de demanda são nulos ou são negativos. Este último caso é compatível com a existência de bens livres que existem em quantidades maiores do que a demanda ao preço zero. Neste contexto, note-se que estamos admitindo que $p_1 = 0$ ou $p_2 = 0$ (mas não ambos simultaneamente iguais a zero), justamente para dar margem ao caso que acabamos de mencionar.

Definição 7 — Diz-se que $\hat{p} \in S$ é um preço de equilíbrio se $Z_1(\hat{p}) \leqslant 0$ e $Z_2(\hat{p}) \leqslant 0$.

É fácil ver que, se $Z_1(\hat{p}) < 0$, necessariamente $\hat{p}_1 = 0$. A Lei de Walras garante que $\hat{p}_1 Z_1(\hat{p}) + \hat{p}_2 Z_2(\hat{p}) = 0$. Se $\hat{p}_1 > 0$, então $\hat{p}_2 Z_2(\hat{p}) > 0$, o que contradiz o fato de que $\hat{p}$ é um preço de equilíbrio. Portanto, sempre que um bem for abundante, seu preço é nulo.

O principal resultado desta seção é o teorema a seguir apresentado.

Teorema 20 — O conjunto $E = \{\hat{p} \in S: Z_1(\hat{p}) \leqslant 0$ e $Z_2(\hat{p}) \leqslant 0\} \neq \phi$ dadas as hipóteses "a"-"d" feitas anteriormente.

Prova:

Note-se que E é o conjunto dos preços de equilíbrio nesta economia. Para mostrar que $E \neq \phi$, procederemos da seguinte forma:

Consideremos os vetores $p^1 = (1, 0)$ e $p^0 = (0, 1)$ e suponhamos que eles não pertencem a E (caso contrário, o teorema estaria demonstrado). Segue-se, da Lei de Walras, que:

$$1 . Z_1(p^1) + 0 . Z_2(p^1) = 0$$

e:

$$0 . Z_1(p^0) + 1 . Z_2(p^0) = 0$$

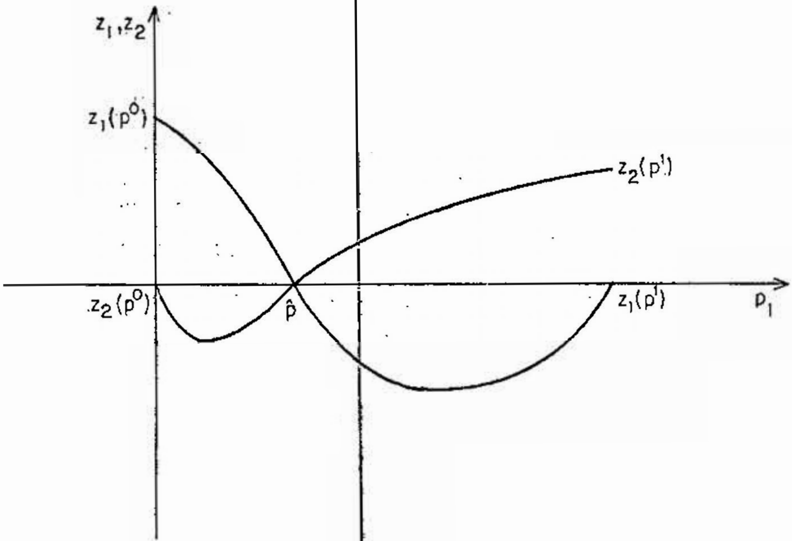
isto é, $Z_2(p^1) > 0$ e $Z_1(p^0) > 0$, pois, caso contrário, p^0 ou p^1 estariam em E (veja-se a figura a seguir).

Note-se agora que, para todo $p \in S$:

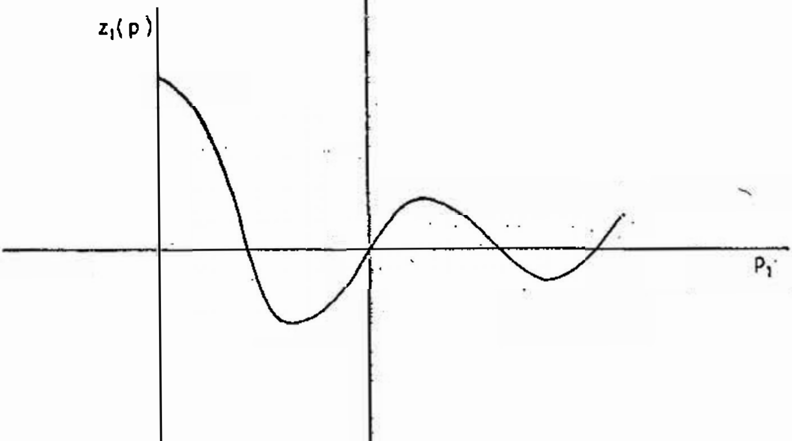
$$p^t = t\, p^1 + (1 - t)\, p^0 \in S, \; 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Seja $\bar{t} \in (0, 1)$ e note-se que (Lei de Walras) $Z_1(p^{\bar{t}})$ e $Z_2(p^{\bar{t}})$ têm sinais contrários (a menos que $p^{\bar{t}} \in E$, caso em que nada mais haveria para ser demonstrado). Suponha-se que $Z_1(p^{\bar{t}}) < 0$. Como $Z_1(p^0) > > 0$, segue-se do teorema do valor intermediário que existe $\hat{p} \in S$ tal que $Z_1(\hat{p}) = 0$. É claro que $Z_2(\hat{p}) = 0$ e, portanto, $\hat{p} \in E$.

C. Q. D.

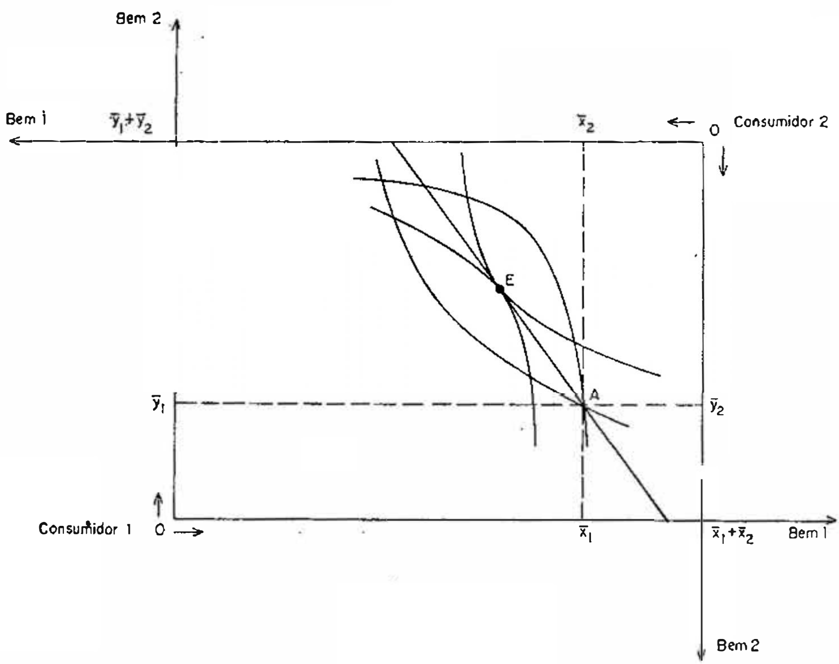


Convém explicitar que não é possível garantir que o conjunto E possui um único elemento. A unicidade do equilíbrio competitivo requer restrições mais fortes sobre as funções de excesso de demanda. Nenhuma das hipóteses que fizemos (e, neste caso, nenhuma das hipóteses mais usuais sobre a função de utilidade) é suficiente para impedir que a função de excesso de demanda apresente um comportamento tal como mostra o gráfico a seguir.

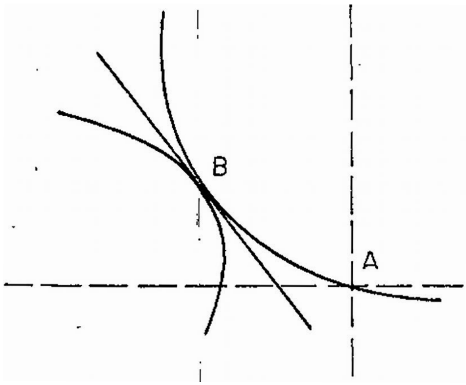


O equilíbrio competitivo pode ser visualizado de uma forma talvez mais familiar para o leitor, qual seja, com o auxílio da caixa de Edgeworth-Bowley. Para tanto, teremos que utilizar as noções de curva de indiferença e função utilidade que não introduzimos anteriormente. Esperando que estes conceitos não sejam totalmente desconhecidos, prosseguiremos sem maiores preocupações.

Os comprimentos dos lados da caixa representam as disponibilidades totais dos dois bens. O consumidor *1* tem a "sua origem" no canto inferior esquerdo e o consumidor *2* no canto superior direito. O ponto *A* representa as dotações iniciais de cada um e as curvas de indiferença de ambos são traçadas convexas à origem correspondente ao consumidor a que se referem. Nesta figura, *E* é o ponto onde se dá o equilíbrio competitivo, pois neste caso os indivíduos estão escolhendo as quantidades demandadas de modo a maximizar sua utilidade (curva de indiferença mais elevada possível, dado o preço $\hat{p}$) e não há excesso de demanda positivo (ambos são zero neste caso) para nenhuma mercadoria.



Suponha-se agora que, dada a curva de indiferença do indivíduo *1* que passa pelo ponto *A*, tenhamos uma curva de indiferença tangenciando-a no ponto *B* tal como reproduzido parcialmente abaixo:

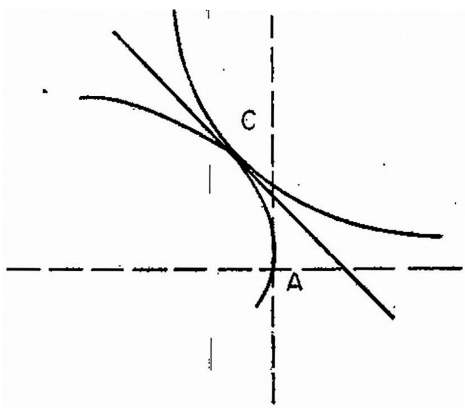


Se chamarmos de q a taxa marginal de substituição para o indivíduo *1* no ponto *B*, notaremos que:

$$F(x_1, y_1) = (q \cdot x_1 + y_1) - (q \cdot \bar{x}_1 + \bar{y}_1) < 0$$

onde x_1 e y_1 são as quantidades efetivamente consumidas por ele.

Examinando agora o ponto *C* de tangência entre a curva de indiferença do indivíduo *2* que passa por *A* e uma curva do indivíduo *1*, notaremos agora o seguinte:



$$F(x_1, y_1) = (q \cdot x_1 + y_1) - (q \cdot \bar{x}_1 + \bar{y}_1) > 0$$

Admitindo que q seja uma função contínua de x_1 e y_1, a função F será contínua e o movimento de B para C pode ser descrito de maneira contínua, isto é, $x_1 = x_1(t)$ e $y_1 = y_1(t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$, sendo estas funções contínuas em $[0, 1]$ com $x_1(0)$ e $y_1(0)$ correspondendo ao ponto B e $x_1(1)$ e $y_1(1)$ correspondendo ao ponto C. Dessa maneira, F é uma função contínua de t tal que $F(0) < 0$ e $F(1) > 0$. Então, existe $\bar{t} \in (0, 1)$ tal que $F(\bar{t}) = 0$, que é o ponto de equilíbrio procurado (este argumento deve-se a Negishi [1972, pp. 12-5]).

Para encerrar a discussão deste tópico, convém chamar a atenção do leitor para os seguintes pontos:

a) A mesma demonstração aplica-se ao caso em que há mais de dois indivíduos na economia. A hipótese crucial para permitir o uso do teorema do valor intermediário é a existência de somente duas mercadorias.

b) A demonstração para o caso mais geral em que o número de mercadorias é maior do que 2 exige teoremas mais poderosos do que o do valor intermediário. Nestes casos, utiliza-se o *Teorema de Ponto Fixo de Brower* ou o *Teorema de Ponto Fixo de Kakutani.*

Neste livro não trataremos dos teoremas de ponto fixo, pois este material está além do escopo do texto.

1. Verifique se as funções abaixo são contínuas nos pontos especificados:

a) $f\colon R \to R$ dada por $f(x) = x^3$ no ponto $a \in R$;

b) $f\colon R^2 \to R^4$ dada por $f(x, y) = \left(x^2, xy, x - y, \dfrac{1}{x^2 + 1}\right)$ no ponto $z = (z_1, z_2) \in R^2$;

c) $f\colon R \to R$ dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, sendo $n \in N$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes (verifique a continuidade no ponto $c \in R$);

d) $f\colon R \to R$ definida por $f(x) = min\ \{1, x\}$ no ponto $a = 1$; e

e) $f\colon R^2 \to R$ dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4 + y^4}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nos pontos $(0, 0)$ e $(a, b) \neq (0, 0)$.

2. Mostre que as funções $\| \|_S$ e $\| \|_M$ são contínuas em R^p.

3. Mostre que a função $f\colon D \to R^p$, $D \subset R^q$, é contínua em $a \in D$ se, e somente se, para toda vizinhança V de $f(a)$, existe uma vizinhança V_1 de a tal que $V_1 \cap D = f^{-1}(V)$.

4. Utilizando o Teorema da Continuidade Global e seus corolários, mostre que:

a) a esfera $S(0, 1) = \{x \in R^p: |x| = 1\}$ é um conjunto fechado;

b) o conjunto $\{(x, y) \in R^2: xy > 1\}$ é um conjunto aberto;

c) o conjunto $H = \{(x, y) \in R^2: x + y \leqslant 1\}$ é um conjunto fechado; e

d) o conjunto $\{(x, y) \in R^2: -1 < x < 1$ e $-1 < y < 1\}$. é um conjunto aberto.

5. Sejam $K \subset R^p$ um conjunto compacto e $f: K \to H, H \subset R^q$, uma função contínua em K tal que existe $f^{-1}: H \to K$. Mostre que f^{-1} é uma função contínua em H (sugestão: H é fechado; dado $G \subset R^p$ fechado, $K \cap G$ é compacto e, portanto, $f(K \cap G)$ é compacto; a imagem inversa de G por f^{-1} é igual a $f(K \cap G)$ e, portanto, é um conjunto fechado).

6. Seja $X \in R^p$ um conjunto convexo e $f: R^p \to R^q$ uma função linear. Mostre que $f(X)$ é um subconjunto convexo de R^q.

7. Sejam $f: R^p \to R^q$ e $g: R^p \to R^q$ funções lineares. Se $c \in R$, mostre que $(cf + g)$ é uma função linear.

8. A função $f: R^p \to R^q$ é uma função afim se $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ para todo $x \in R^p$, $y \in R^p$, $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $\alpha + \beta = 1$. Mostre que, se X é convexo e f é uma função afim, $f(X)$ é convexo.

Capítulo V

FUNCÕES DIFERENCIÁVEIS

A experiência anterior da maioria dos leitores deste texto já lhes deve ter ensinado a importância da noção de diferenciabilidade em Economia. Nos cursos elementares, a utilização das derivadas resume-se na definição e cálculo de elasticidade, produtividades marginais, etc. No entanto, o escopo para utilização da diferenciabilidade vai bem além destes aspectos computacionais.

Sem dúvida alguma, o exemplo mais importante talvez seja o chamado *Método da Estática Comparativa,* que é parte fundamental do núcleo metodológico da Teoria Econômica. Em essência, a *Estática Comparativa* procura obter proposições passíveis de verificação empírica através da análise do impacto de variações nos parâmetros de um determinado sistema (modelo) sobre as variáveis de interesse. Uma versão muito popular deste instrumental baseia-se no *Teorema da Função Implícita* (no Capítulo VII, após apresentarmos este teorema, faremos uma discussão desta metodologia).

Neste capítulo, no entanto, o principal objetivo é definir a derivada de uma função e investigar as principais propriedades das funções diferenciáveis. Para maior clareza, a exposição será feita em duas etapas: primeiramente, desenvolveremos a teoria para as funções definidas em subconjuntos de R com valores em R — as funções de uma variável — e, em seguida, trataremos das funções definidas em subconjuntos de R^p com valores em R. Esta abordagem, aliás usual nos livros-texto, é interessante porque permite que acompanhemos as noções abstratas com diagramas bem precisos na sua primeira etapa. Espera-se que, na segunda fase, onde os diagramas são menos precisos, possamos utilizar a experiência adquirida para facilitar a compreensão

Em ambas as partes procuraremos desenvolver o seguinte esquema: Conceito de Derivada; Teoremas sobre Funções Diferenciáveis; Fórmula de Taylor; e Aplicações da Fórmula de Taylor (as principais aplicações da Fórmula de Taylor serão os estudos de Máximos e Mínimos e das Funções Côncavas e Convexas).

V.1 — Derivada de Funções de uma Variável

Definição 1 — Seja $f\colon D \to R$, $D \subset R$ e $c \in D$ um ponto de acumulação de D. Diz-se que f possui derivada no ponto c se existe o limite de $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ quando x tende para c. No caso afirmativo, a derivada de f no ponto c é o $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Indicaremos a derivada de f no ponto c por $f'(c)$.

Com relação à definição acima, note-se que:

a) a expressão $q(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ é bem definida no conjunto $D - \{c\}$ e, além disto, uma vez que c é um ponto de acumulação de $D - \{c\}$, podemos, corretamente, escrever $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$;

b) a existência da derivada depende somente do comportamento da função em uma vizinhança do ponto c, isto é, esta é uma propriedade local;

c) apenas por questão de ênfase, convém lembrar que a expressão "existe o limite" tem sido utilizada no sentido de "existe o limite no conjunto dos números reais", isto é, o limite é finito; e

d) por fim, é simples ver que f é diferenciável no ponto $c \in D$, ponto de acumulação de D, se, e somente se, para todo $h \in R$ tal que $c + h \in D$, existe o $\lim\limits_{h \to o} \dfrac{f(c + h) - f(c)}{h}$; quando o limite existe, $f'(c) = \lim\limits_{h \to o} \dfrac{f(c + h) \quad f(c)}{h}$

Definição 2 — Se a derivada de f existe em todo ponto de acumulação $c \in D$, diz-se que f é derivável em D.

Observe-se que, se D é um conjunto aberto, então sempre que calcularmos o limite de $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ quando x tende para c estaremos levando em consideração pontos à direita e à esquerda de c, isto é, quando D é aberto a derivada existe, no ponto c, se, e somente se, existem e são iguais os seguintes limites:

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

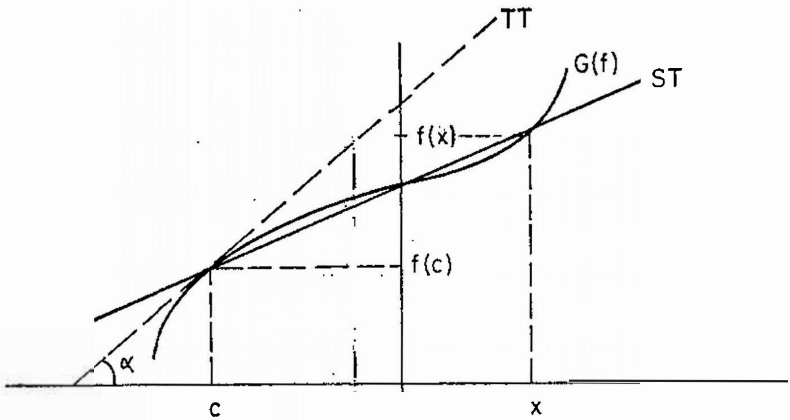
A existência destes limites, garantindo-se, é claro, que c é ponto de acumulação dos conjuntos $\{x \in D: x > c\}$ e $\{x \in D: x < c\}$, garante a existência das derivadas laterais $f'(c^+)$ e $f'(c^-)$. Dessa maneira, se por exemplo $D = [a, b]$, dizer que f é derivável em D significa que nos extremos do intervalo existem $f'(a^+)$ e $f'(b^-)$, respectivamente.

A interpretação geométrica da derivada é um tópico convencional. Na figura a seguir a reta ST, que passa pelos pontos $(c, f(c))$ e $(x, f(x))$ pertencentes ao gráfico de f, tem por inclinação $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$. À medida que o ponto x aproxima-se de c, a curva ST "gira" no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio até que no limite (se existe a derivada) ela coincide com TT, a tangente ao gráfico de f no ponto c. Em outras palavras, a derivada é a inclinação da tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$. Convém ainda observar que a equação da reta TT é $t(z) = f(c) + f'(c)\,(z - c)$ e a da reta ST é $s(z) = f(c) + \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (z - c)$.

Exemplos:

1 — Seja $f: R \to R$ dada por $f(x) = a + b\,x$ e seja $c \in R$. Então, qualquer que seja $x \in R$, $x \neq c$, temos:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{b\,(x - c)}{x - c} = b$$



Portanto, $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = b$, ou seja, f é derivável em R e $f'(c) = b$ para todo $c \in R$.

2 – Seja $f \colon R \to R$ dada por $f(x) = x^2$ e seja $c \in R$. Dado $x \in R$, $x \neq c$, temos que:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \frac{(x - c)\ (x + c)}{(x - c)} = x + c$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = 2c$, pois a função que associa $x \in R$ ao número $x + c \in R$ é contínua. Em outras palavras, f é derivável em R e $f'(c) = 2c$ para todo $c \in R$.

3 – Seja $f \colon R \to R$ dada por:

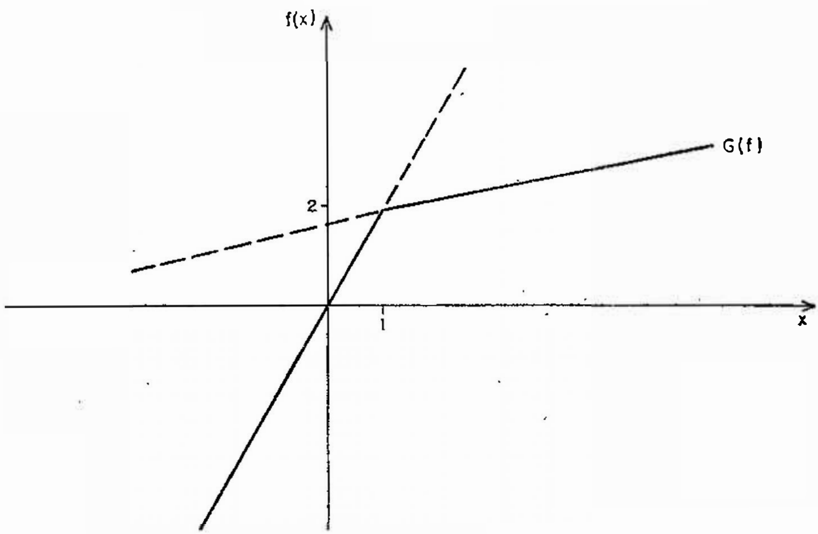
$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x \leqslant 1 \\ x + 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

Tendo em vista o exemplo 1, já sabemos que f é derivável em todo ponto $x \neq 1$. Examinemos a existência da derivada no ponto $x = 1$. Note-se que:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} 2, \text{ se } x < 1 \\ 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$ e $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$.

Como estes limites são diferentes, f não é derivável no ponto $x = 1$. Geometricamente, a tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2)$ não está determinada. É interessante ainda observar que f é contínua no ponto $x = 1$, pois $f(1 +) = f(1 -) = 2$.



4 — Seja a função f: $R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ se } x < 0 \\ 1, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

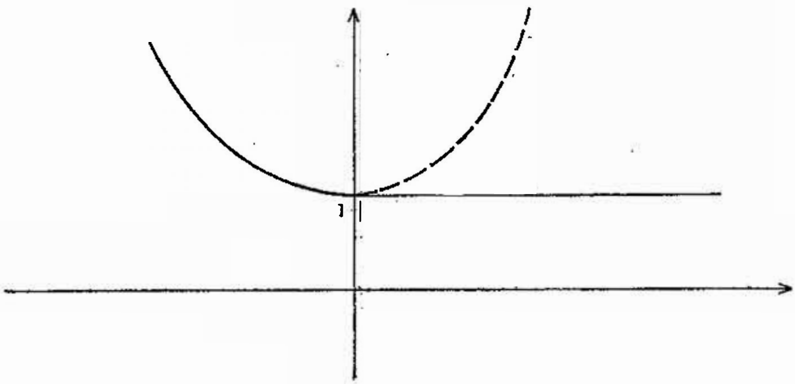
Examinemos a existência da derivada de f no ponto $x = 0$. Assim, para todo $x \neq 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} x, \text{ se } x < 0 \\ 0, \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

Portanto:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

ou seja, existe a derivada de f no ponto $x = 0$ e $f'(0) = 0$ (veja-se o gráfico de f a seguir).



5 — Seja $f: R_+ \to R$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ e seja $c \in R_+ - \{0\}$. Então:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{c}}{x - c} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{c}}{(x - c)} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{c}}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}$$

para todo $x \in R_+ - \{c\}$.

Dessa maneira, podemos concluir que:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

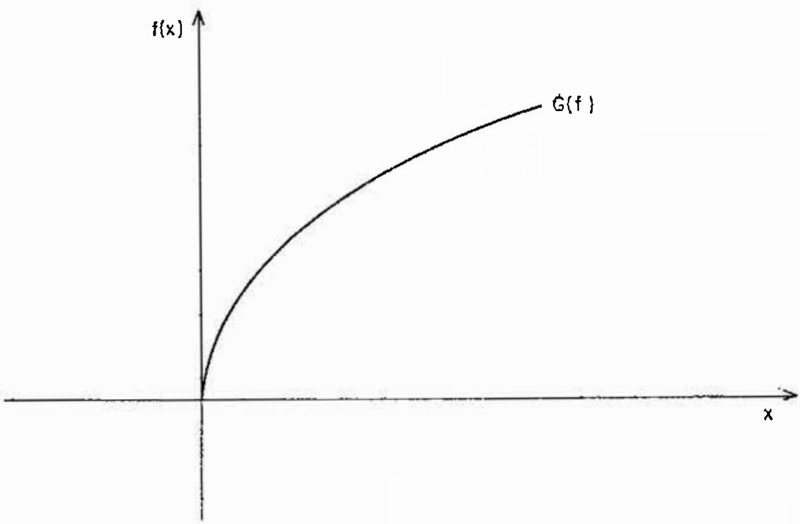
uma vez que a função raiz quadrada é contínua em R_+.

Examinando agora o caso em que $c = 0$, notamos que:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

para todo $x \neq 0$.

Entretanto, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, donde se conclui que não existe a derivada de f no ponto zero. Geometricamente, isto corresponde ao fato de que na origem a tangente ao gráfico de f é vertical.



6 — Seja $f: R \to R$ dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e seja $c \in R - \{0\}$. Então:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{x^{1/3} - c^{1/3}}{x - c} = \frac{x^{1/3} - c^{1/3}}{(x^{1/3} - c^{1/3})\,(x^{2/3} + x^{1/3}\,c^{1/3} + c^{2/3})} =$$

$$= \frac{1}{x^{2/3} + x^{1/3}\,c^{1/3} + c^{2/3}}$$

para todo $x \in R - \{c\}$.

Como a função raiz cúbica é contínua em R (demonstre isto):

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}$$

Quando $c = 0$:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

e, portanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = +\infty$$

isto é, f não é derivável no ponto $x = 0$.

7 — Seja f: $R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x . sen \dfrac{1}{x}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Examinemos a existência da derivada de f no ponto $x = 0$. Sabemos que:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x \; sen \dfrac{1}{x}}{x} = sen \frac{1}{x}$$

para todo $x \neq 0$.

Portanto, não existe a derivada de f no ponto $x = 0$, uma vez que não existe o limite de $sen \dfrac{1}{x}$ quando x tende para zero (ver exemplo 38 do Capítulo III).

Ainda com relação a êste exemplo, a figura que apresentamos no Capítulo IV, referente ao exemplo 12, já nos faria supor que a derivada não existe, porque a forma como f se aproxima da origem permite ainda variações muito bruscas na relação $\dfrac{f(x)}{x}$ para que ela admita uma tangente única na origem.

8 — Seja agora $f \colon R \to R$ definida por:

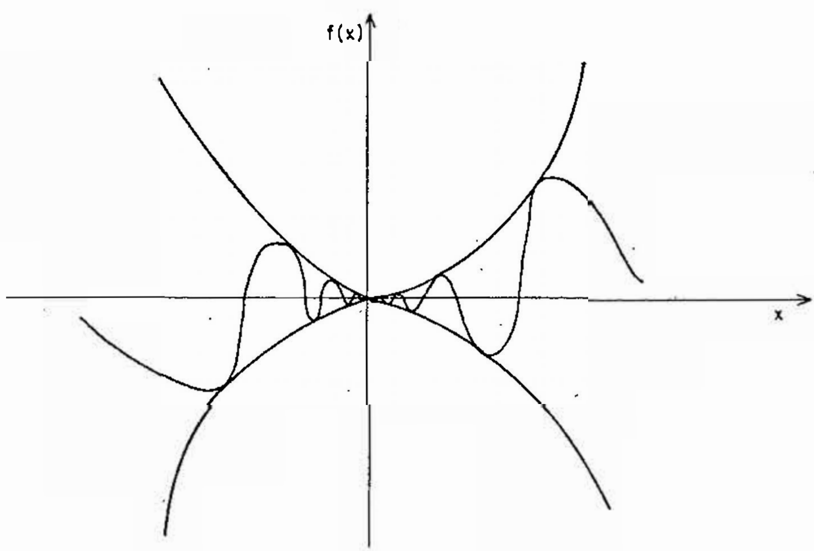
$$f(x) = \begin{cases} x^2 . sen \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \end{cases}$$

Examinemos a existência da derivada de f no ponto $x = 0$. Para tanto, note-se que, para todo $x \neq 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \; sen \; \frac{1}{x}$$

e, portanto, $\lim\limits_{x \to 0} x \; sen \; \dfrac{1}{x} = 0.$

Geometricamente, o gráfico de f deixa claro que ela é derivável na origem com derivada zero, porque f se aproxima da origem "espremida" pelas parábolas $y = x^2$ e $y = - x^2$.



9 — Sêja $f: R - \{0\} \to R$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e seja $c \in R - \{0\}$.

Então:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{c^2}}{x - c} = -\frac{c + x}{c^2 x^2}$$

para todo $x \in R - \{0\}$, $x \neq c$.

Portanto:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = -\frac{2}{c^3}$$

para todo $c \in R - \{0\}$.

Passaremos agora a examin r a noção de diferenciabilidade. No contexto das funções de uma variável, como veremos a seguir, não há distinção entre as funções deriváveis e as funções diferenciáveis. Entretanto, a noção de diferenciabilidade é mais útil para certas generalizações que faremos na Seção V.2.

Definição 3 — Seja $f: D \to R$, $D \subset R$, e seja $c \in D$ um ponto de acumulação de D. Diz-se que f é diferenciável em c se f é derivável em c e se existe uma função r definida para todo $h \in R$ tal que $c + h \in D$ com:

$$f(c + h) = f(c) + f'(c) \, . \, h + r(h) \qquad (1)$$

sendo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

É importante notar que a restrição fundamental na definição acima é a de que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$, porque a equação (1) sem esta condição poderia ser interpretada como a definição da função $r(h)$. Em outras palavras, dada uma função f derivável em c, é sempre possível definir $r(h)$ pela equação (1). Nada garante, *a priori*, que r assim definida irá satisfazer a restrição imposta pelo valor que deve ter o limite acima.

Exemplos:

10 — Seja $f: R \to R$ dada por $f(x) = x^2$ e seja $c \in R$. Então, para todo $h \in R$ temos:

$$f'(c) = 2c$$

$$f(c + h) - f(c) - f'(c) \,.\, h = h^2$$

Portanto, a função r da Definição 3 é $r(h) = h^2$. Note-se que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$, isto é, verifica-se a condição imposta para que f seja diferenciável.

11 — Seja $f: R_+ \to R$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Já sabemos que f não é diferenciável em $x = 0$, pois não existe a derivada neste ponto. Entretanto, se $c \neq 0$, então para todo $h \in R$ tal que $c + h \in R_+$ temos:

$$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

$$f(c + h) - f(c) - f'(c) \,.\, h = \sqrt{c + h} - \sqrt{c} - \frac{h}{2\sqrt{c}}$$

Portanto, a função r da Definição 3 é dada por $r(h) = \sqrt{c + h} - \sqrt{c} - \dfrac{h}{2\sqrt{c}}$ para todo h tal que $h + c \geqslant 0$. Segue-se que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\sqrt{c + h} - \sqrt{c} - \frac{h}{2\sqrt{c}}\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{c + h} - \sqrt{c}}{h} - \frac{1}{2\sqrt{c}} = 0$$

uma vez que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{c + h} - \sqrt{c}}{h} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

Pela observação dos exemplos anteriores, o leitor já terá percebido o conteúdo do teorema a seguir.

Teorema 1 — Uma função $f: D \to R$, $D \subset R$, é diferenciável no ponto $c \in D$, ponto de acumulação de D, se, e somente se, f é derivável em c.

Prova:

Pela própria definição, a diferenciabilidade de f implica a existência da derivada de f.

Por outro lado, se f é derivável em c, então, qualquer que seja $h \in R$ tal que $c + h \in D$, poderemos definir a função r da seguinte maneira:

$$r(h) = f(c + h) - f(c) - f'(c) . h$$

Daí, obtém-se que:

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h} - f'(c)$$

e, portanto:

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(c + h) - f(c)}{h} - f'(c) \right] = 0$$

C. Q. D.

A definição de diferenciabilidade da função f no ponto c, expressa pela equação (1) e pela condição $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, pode ser reescrita de maneira equivalente e que, em certos contextos, torna mais simples a sua manipulação, isto é, f é diferenciável no ponto $c \in D$, c ponto de acumulação de D, se, e somente se, para todo $h \in R$ tal que $c + h \in D$, tivermos que:

$$f(c + h) = f(c) + f'(c)\ h + h\ \varphi(h)$$

sendo que:

$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0 \text{ e } \varphi(0) = 0$$

A equivalência das duas definições pode ser verificada da seguinte forma: dada a função $r(h)$, definiremos $\varphi(h) = \frac{r(h)}{h}$ se $h \neq 0$ e $\varphi(0) = 0$; dada a função $\varphi(h)$, definiremos $r(h) = h\ \varphi(h)$.

Passaremos agora a examinar as principais propriedades das funções diferenciáveis, mostrando inicialmente que a diferenciabilidade garante que a função é contínua.

Teorema 2 — Se $f: D \rightarrow R$, $D \subset R$, é diferenciável em $c \in D$, c ponto de acumulação de D, então f é contínua em c.

Prova:

Da diferenciabilidade de f em c, segue-se que, para todo $h \in R$ com $c + h \in D$:

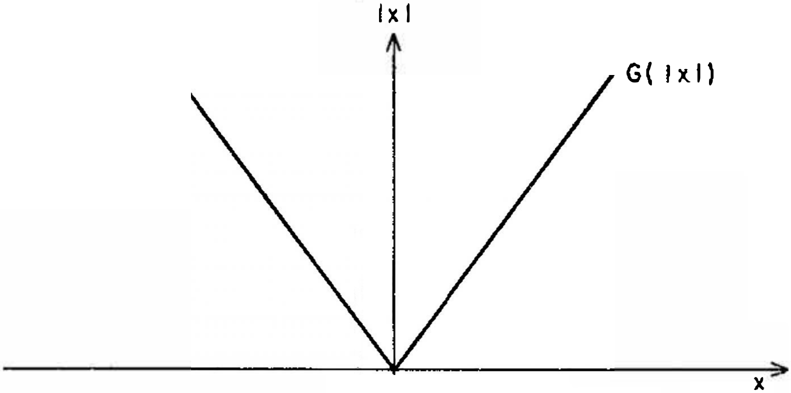
$$\lim_{h \to 0} f(c + h) = \lim_{h \to 0} (f(c) + f'(c) . h + r(h)) = f(c)$$

o que garante a continuidade da função f.

C. Q. D.

Dentre os exemplos anteriormente apresentados, já vimos que continuidade não é uma condição suficiente para diferenciabilidade. Além destes, convém ainda lembrar a função valor absoluto, que é contínua em R, porém não é diferenciável na origem, como pode ser verificado, na página seguinte, com o auxílio do seu gráfico.

Teorema 3 (Fórmulas de Derivação) — Sejam $f: D \rightarrow R$ e $g: D \rightarrow R$, $D \subset R$, diferenciáveis em $c \in D$, c ponto de acumulação de D. Então, as funções $(f + g): D \rightarrow R$ dada por $(f + g)\ (x) = f(x) + g(x)$, $(fg): D \rightarrow R$ dada por $(fg)\ (x) = f(x)\ g(x)$ e $(f/g): D \rightarrow R$ dada por $(f/g)\ (x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in D$ são diferenciáveis em c. Além disto, $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$, $(fg)'(c) = f'(c)\ g(c) + f(c)\ g'(c)$ e $(f/g)'(c) = \frac{f'(c)\ g(c) - f(c)\ g'(c)}{[g(c)]^2}$.



Prova:

a) $$\lim_{x \to c} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(c)}{x-c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} +$$

$$+ \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x-c} = f'(c) + g'(c);$$

b) $$\lim_{x \to c} \frac{(fg)(x) - (fg)(c)}{x-c} = \lim_{x \to c} g(x) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x-c} +$$

$$+ \lim_{x \to c} f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x-c} = f'(c) \cdot g(c) + f(c)\, g'(c);$$ e

c) $$\lim_{x \to c} \cdot \frac{(f/g)(x) - (f/g)(c)}{x-c} =$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{1}{g(x) \cdot g(c)} \left[\frac{g(c) \cdot f(x) - g(x) \cdot f(c)}{x-c} \right] =$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{1}{g(x) \cdot g(c)} \left[g(c) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f(c) \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right] =$$

$$= \frac{f'(c)\, g(c) - f(c)\, g'(c)}{[g(c)]^2}.$$

C. Q. D.

Note-se que, se $f = (\alpha g)$, onde α é uma constante, segue-se da regra da multiplicação que $f'(c) = \alpha . g'(c)$. Mostremos também que, se $f\colon D \to R$, $D \subset R$, é dada por $f(x) = x^n$, onde n é um número natural, $f'(c) = n . c^{n-1}$ para todo $c \in R$. Isto se faz por meio do princípio da indução: primeiramente, note-se que, se $f(x) = x$, então $f'(x) = (1) . x^{1-1} = 1$; suponha-se agora que $f(x) = x^k$ e que $f'(x) = k . x^{k-1}$ e mostremos que a fórmula é válida para $k + 1$. Para isto, seja $f(x) = x^{k+1}$ e observe-se que $f(x) = (x^k)\, x$ e, pela regra do produto acima e pela hipótese de indução:

$$f'(x) = (k \cdot x^{k-1})\, x + x^k \cdot (1) = k\, x^k + x^k = (k + 1)\, x^k$$

Pediremos ao leitor que, nos exercícios, calcule as derivadas de algumas funções importantes.

Teorema 4 (Regra da Cadeia) — Sejam $f\colon D \to R$, $D \subset R$, e $g\colon V \to R$, $V \subset R$, com $f(D) \subset V$. Se f é derivável em $c \in D$, ponto de acumulação de D, e se g é derivável em $b = f(c)$, ponto de acumulação de V, a função composta $(g_o f)$ é derivável em c e $(g_o f)'(c) = g'(b) . f'(c)$.

Prova:

Como f e g são diferenciáveis em c e b, respectivamente, temos que, para todo $h \in R$ tal que $c + h \in D$ e para todo $k \in R$ tal que $b + k \in V$:

$$f(c + h) = f(c) + f'(c) . h + \varphi(h) . h$$

sendo $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$ e $\varphi(0) = 0$; e

$$g(b + k) = g(b) + g'(b) . k + \rho(k) . k$$

sendo $\lim\limits_{k \to 0} \rho(k) = 0$ e $\rho(0) = 0$.

Como $f(D) \subset V$, se $c + h \in D$, então $f(c + h) \in V$. Portanto, se $k = f(c + h) - f(c) = [f'(c) + \varphi(h)].h$, segue-se que $b + k = f(c + h) \in V$. Portanto:

$$\begin{aligned} g_o f(c + h) &= g[f(c + h)] = g(b + k) = g(b) + g'(b) \cdot k + \rho(k) \cdot k = \\ &= g(b) + [g'(b) + \rho[f(c + h) - f(c)]]\,[f(c + h) - f(c)] = \\ &= g(b) + [g'(b) + \rho\{[f'(c) + \varphi(h)] \cdot h\}]\,[f'(c) + \varphi(h)]\,h = \\ &= g(b) + [g'(b) \cdot f'(c) \cdot h] + g'(b) \cdot \varphi(h) \cdot h + \rho\{[f'(c) + \\ &\qquad + \varphi(h)]\,h\} \cdot [f'(c) + \varphi(h)]\,h \end{aligned}$$

Note-se agora que $\lim\limits_{h \to 0} [g'(b) .\varphi(h) + \rho \{[f'(c) + \varphi(h)].h\}$ $[f'(c) + \varphi(h)] = 0$, uma vez que:

$\lim\limits_{h \to 0} g'(b)\ \varphi(h) = 0$, pela diferenciabilidade da função f;
$\lim\limits_{h \to 0} \rho\{[f'(c) + \varphi(h)].h\} = 0$, pois $\lim\limits_{h \to 0} [f'(c) + \varphi(h)]\,h = 0$; e
ρ é contínua na origem com $\rho(0) = 0$.

Desta maneira:

$$g_o f(c + h) = g(f(c)) + g'(b) .f'(c) .h + \alpha(h) .h$$

onde $\alpha(h) = g'(b) .\varphi(h) + \rho \{[f'(c) + \varphi(h)]\,h\}\ [f'(c) + \varphi(h)]$.

Isto conclui a demonstração.

C. Q. D.

Uma aplicação simples da regra da cadeia generaliza a fórmula da derivada de um expoente, isto é, seja $f: R \to R$ dada por $f(x) = x^n$ e seja $g: R \to R$ uma função diferenciável. Então, $f_o g(x) = g(x)^n$ é diferenciável e, para todo $c \in R$:

$$(f_o g)'(c) = f'[g(c)] \cdot g'(c) = n\, g(c)^{n-1} \cdot g'(c)$$

Assim, a derivada da função $h: R \to R$ dada por $h(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)^p$, no ponto $x = c$, é a seguinte:

$$\begin{aligned} h'(c) = p \cdot [a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n]^{p-1} \cdot (a_1 + 2a_2 x + \\ + \ldots + na_n x^{n-1}) \end{aligned}$$

Com auxílio da regra da cadeia e dos resultados do Teorema 3 podemos, de maneira bastante simples, verificar se uma dada função é diferenciável e, em caso afirmativo, calcular sua derivada. Como já vimos no parágrafo anterior um exemplo disto, a seguir descrevemos outra aplicação da mesma natureza. Seja $f\colon R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} sen \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Já vimos que f não é diferenciável no ponto $x = 0$. Entretanto, se $x \neq 0$, $f(x) = (h_o g)(x)$, onde $h\colon R \to R$ é dada por $h(x) = sen\, x$ e $g\colon R - \{0\} \to R$ é dada por $g(x) = \dfrac{1}{x}$. A função ***seno*** é diferenciável em R (ver exercício 7) e a função g é diferenciável, pois é o quociente de duas funções diferenciáveis. Portanto, f é diferenciável em $R - \{0\}$ e $f'(c) = (h_o g)'(c) = h'(g(c)) \cdot g'(c) = \left(cos \dfrac{1}{c}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{c^2}\right)$, uma vez que $h'(x) = cos\, x$ para todo $x \in R$ (ver exercício 8).

Teorema 5 — Seja $f\colon D \to X$, $D \subset R$ e $X \subset R$, e suponha-se que existe a função inversa $f^{-1}\colon X \to D$. Além disto, admita-se que f é derivável em $c \in D$, c ponto de acumulação de D, e que f^{-1} é contínua no ponto $b = f(c)$. A função f^{-1} é derivável no ponto b se, e somente se, $f'(c) \neq 0$. Neste caso, $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(c)}$.

Prova:

Suponha-se que $f'(c) \neq 0$. Queremos mostrar, então, que $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \dfrac{1}{f'(c)}$. Para tanto, seja (y_n) em $X - \{b\}$ uma seqüência que converge para b (esta seqüência certamente existe, pois b é um ponto de acumulação de X). Como f^{-1} é contínua em b, $f^{-1}(y_n)$ converge para $f^{-1}(b) = c$. Para cada $n \in N$, existe $x_n \in D - \{c\}$ tal que $y_n = f(x_n)$, ou seja, a seqüência (x_n) em

$D - \{c\}$ converge para c e, portanto, $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = f'(c)$ (Teorema 12 do Capítulo III).

Por fim, note-se que:

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - c}{f(x_n) - f(c)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}}$$

o que significa que a sucessão $\dfrac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b}$ converge para $\dfrac{1}{f'(c)}$. Como (y_n) é arbitrária, segue-se do Teorema 12 do Capítulo III que $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \dfrac{1}{f'(c)}$.

Suponha-se agora que $(f^{-1})'(b)$ existe. Então, $(f^{-1} \circ f)$ é diferenciável no ponto $c \in D$ (regra da cadeia) e, como $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo $x \in D$, segue-se que $1 = (f^{-1} \circ f)'(c) = (f^{-1})'(b) \cdot f'(c)$. Portanto, $f'(c) \neq 0$ e $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(c)}$.

C. Q. D.

Exemplo:

12 — Com o auxílio do teorema acima, é extremamente simples estudar a diferenciabilidade (ver exemplos 5 e 6 anteriores) das funções $f: R \to R$ dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g: R_+ \to R_+$ dada por $g(x) = \sqrt{x}$.

Para tanto, considere-se a função $h: R \to R$ com $h(y) = y^3$. h é diferenciável em R e $h'(y) \neq 0$ para todo $y \neq 0$, isto é $h'(y) = 3y^2$. Como $f = h^{-1}$ é contínua em R, ela é diferenciável em todo ponto $b = h(c)$ tal que $h'(c) \neq 0$. Neste caso, $f'(b) = \dfrac{1}{h'(c)} = \dfrac{1}{3c^2} =$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{b^2}}.$$

Similarmente, conclui-se que $g'(b) = \dfrac{1}{2(g^{-1})'(c)} = \dfrac{1}{2\sqrt{b}}$, sendo $g^{-1}: R_+ \to R_+$ dada por $g^{-1}(y) = y^2$ e $b \neq 0$.

Além disto, podemos concluir que nem f nem g são deriváveis no ponto $x = 0$, pois $h'(0) = 0$ e $(g^{-1})'(0) = 0$.

V.1.1 — O Teorema do Valor Médio

O Teorema do Valor Médio é um dos resultados mais importantes do cálculo diferencial, em vista do número bastante grande de implicações — teóricas e práticas — que possui. Para chegarmos à demonstração do teorema, necessitaremos de alguma preparação anterior que envolva a caracterização dos extremos relativos de uma função diferenciável no interior de seu domínio. Ao final da apresentação, utilizaremos a conclusão do teorema para caracterizar os extremos da função (máximo ou mínimo).

Definição 4 — Seja $f: D \to R, D \subset R$. Diz-se que f tem um *máximo relativo* ou um *máximo local* (mínimo relativo ou mínimo local) no ponto $c \in D$ se existe um número real $\delta > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(c)$ $(f(x) \geqslant f(c))$ para todo $x \in D$ tal que $|x - c| < \delta$.

Diz-se que f tem um *máximo relativo estrito* (mínimo relativo estrito) se $f(x) < f(c)$ $(f(x) > f(c))$ para todo $x \in D$ tal que $0 < |x - c| < \delta$.

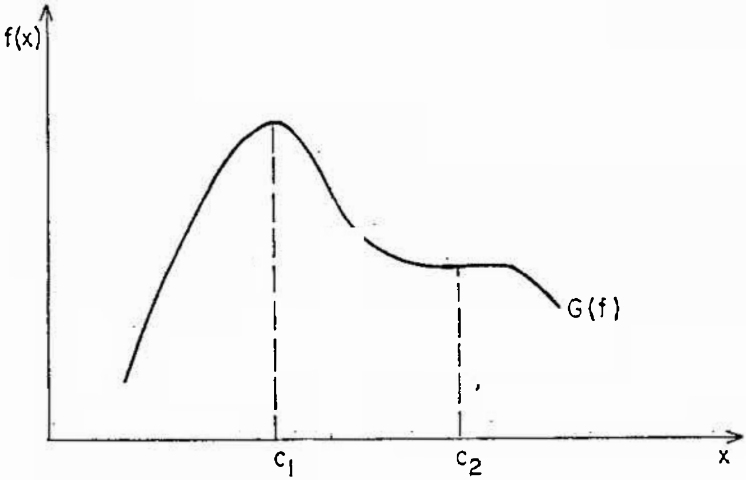
Quando a função possuir um máximo ou um mínimo relativo (estrito) no ponto c, dizemos que f possui um extremo relativo (estrito) no ponto c.

A figura a seguir ilustra estes conceitos. A função f tem um máximo relativo estrito no ponto c_1 e um mínimo relativo no ponto c_2.

Quando tratamos de funções que são diferenciáveis e os seus extremos ocorrem no interior do domínio, o valor da derivada nestes pontos é zero. Procuraremos demonstrar isto. Antes, porém, provemos o seguinte lema:

Lema — Seja $f: D \to R, D \subset R$, derivável em $c \in D$, c ponto de acumulação de D. Então:

a) se $f'(c) > 0$, existe um número real $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(c)$ para todo $x \in D$ com $c < x < c + \delta$; e



b) se $f'(c) < 0$, existe um número real $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(c)$ para todo $x \in D$ com $c - \delta < x < c$.

Prova:

a) Seja $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < f'(c)$. Como f é derivável em c, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon$$

para todo $x \in D$ com $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$.

Portanto, se $x \in D$ e $c < x < c + \delta$, temos que:

$$0 < f'(c) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < f'(c) + \varepsilon$$

Como $(x - c) > 0$, $f(x) > f(c)$.

b) Análogo à prova do item "a".

C. Q. D.

Com relação a este lema, observemos o seguinte:

a) Por um procedimento análogo ao da demonstração do lema, pode-se mostrar que, se $f'(c) > 0$, $f(x) < f(c)$ para todo $x \in D$

com $c - \delta < x > c$, onde δ é um número real positivo. Se $f'(c) < 0$, $f(x) < f(c)$ para todo $x \in D$ com $c < x < c + \delta$, onde δ é um número real positivo.

b) O lema acima, conjugado com a observação anterior, *não garante* que, se $f'(c) > 0$, f é crescente numa vizinhança do ponto c, porque o valor de f é sempre comparado com o mesmo valor fixo $f(c)$. Um exemplo de uma função que satisfaz estas hipóteses e que não é crescente em nenhuma vizinhança do ponto c pode ser encontrado em Lima (1976, p. 209).

c) Finalmente, sugerimos ao leitor reexaminar a demonstração do lema e notar que a hipótese de que a derivada existe no ponto c é muito forte. O mesmo resultado, com a mesma demonstração, é verdadeiro se se supõe apenas que existe a derivada lateral (isto é, $f'(c+)$ no caso "a" e $f'(c-)$ no caso "b").

Teorema 6 (Máximo Interior) — Seja $f\colon D \to R$, $D \subset R$, e seja c um ponto interior de D onde f tem um máximo relativo. Se f é derivável em c, então $f'(c) = 0$.

Prova:

Dado o lema anterior, é fácil ver que não podemos ter $f'(c) < 0$ nem $f'(c) > 0$.

C. Q. D.

É extremamente importante que este resultado seja bem entendido. Em particular, o simples fato de que a derivada de uma função se anula em um ponto não garante que naquele ponto a função possua algum extremo relativo. Por exemplo, a função $f\colon R \to R$ dada por $f(x) = x^3$ é monótona crescente e, no entanto, $f'(0) = 0$.

Uma outra observação, na mesma linha da anterior, é que os extremos relativos (mesmo que ocorram no interior do domínio) podem coincidir com pontos onde a função não é diferenciável, como é o caso da função valor absoluto que tem mínimo na origem.

Em conclusão, o Teorema 6 fornece apenas uma (importante) condição necessária para que um ponto interior do domínio de função seja um extremo relativo. Posteriormente nos aprofundaremos mais nesta questão e trataremos de mostrar que existe uma classe de funções — as funções côncavas e diferenciáveis — para as quais a condição é também suficiente.

Se a função f possui derivada em todos os pontos de seu domínio D, então podemos definir uma função $f'\colon D \to R$ que associa a cada $x \in D$ o valor da derivada de f no ponto x. Mais geralmente, se $X \subset D$ é o conjunto dos pontos onde f possui derivada, pode-se definir a função $f'\colon X \to R$ tal como acima (a função f' é chamada função derivada primeira de f).

Teorema 7 (Rolle) — Seja $f\colon [a, b] \to R$ contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e tal que $f(a) = f(b)$. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Prova:

Se f for constante em $[a, b]$, então, qualquer que seja $c \in (a, b)$, $f'(c) = 0$.

Caso contrário, f atinge um máximo M e um mínimo m (Teorema de Weierstrass) em $[a, b]$. Como ela não é constante, pelo menos um deles é atingido no ponto $c \in (a, b)$. Logo, $f'(c) = 0$.

C. Q. D.

Exemplos:

13 — Seja $f\colon I \to R$, onde I é um intervalo diferenciável em I, e sejam $a \in I$ e $b \in I$ duas raízes de f, isto é, $f(a) = f(b) = 0$. Então, a função $f'\colon I \to R$ tem uma raiz em (a, b). Note-se que $f/[a, b]$ satisfaz todas as hipóteses do Teorema de Rolle e, portanto, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

14 — Sejam $f\colon I \to R$ e $g\colon I \to R$ diferenciáveis no intervalo I e tais que $f(x) \cdot g'(x) - f'(x) \cdot g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Então, entre duas raízes de f existe uma raiz de g, isto é, se $a \in I$ e $b \in I$ são tais que $f(a) = f(b) = 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$.

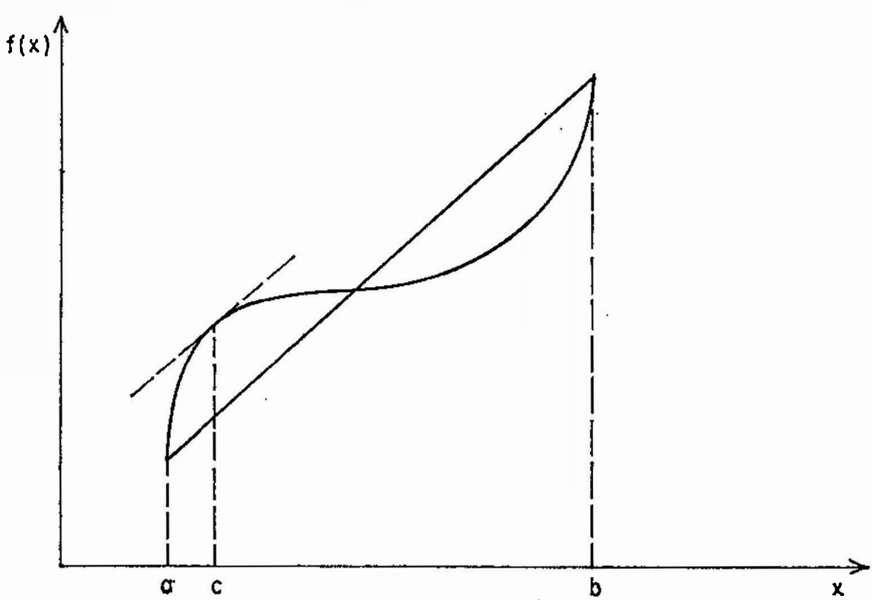
Note-se que, se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então a função $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ é bem definida em $[a, b]$ e satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. Portanto, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$, isto é, $\dfrac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{[g(c)]^2} = 0$, o que contradiz a hipótese inicial.

Teorema 8 (Teorema do Valor Médio de Lagrange) — Seja $f\colon [a, b] \to R$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Prova:

Desenhemos inicialmente uma figura que nos indicará exatamente o que deve ser feito para demonstrar o resultado. Do ponto de vista geométrico, o resultado do teorema garante que em algum ponto do intervalo aberto (a, b) a inclinação da tangente ao gráfico de f é paralela à reta que une os pontos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, cuja equação é $s(x) = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Para demonstrarmos o teorema, é suficiente notarmos que a função $\varphi\colon [a, b] \to R$ dada por $\varphi(x) = f(x) - s(x)$ satisfaz as hipó-



teses do Teorema de Rolle. Portanto, existe $c \in (a, b)$ tal que $\varphi'(c) = f'(c) - s'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$

C. Q. D.

Um enunciado equivalente para o Teorema do Valor Médio é apresentado no Teorema 9.

Teorema 9 — Sejam $h \in R$, $h > 0$, e $f: [a, a + h] \to R$ contínua em $[a, a + h]$ e diferenciável em $(a, a + h)$. Então, existe $\theta \in R$, $0 < \theta < 1$, tal que $f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta h)\, h$.

Prova:

Basta tomarmos $b = a + h$ e notarmos que $c \in (a, b)$ se, e somente se, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $c = a + \theta(b - a)$.

C. Q. D.

Corolário 1 — Seja $f: [a, b] \to R$ contínua em $[a, b]$ e tal que a derivada de f se anula em to os os pontos de (a, b). Neste caso, a função f é constante.

Prova:

Seja $x \in [a, b]$. $f/[a, x]$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio. Logo, existe $c \in (a, x)$ tal que $f(x) - f(a) = f'(c) \cdot (x - a) = 0$, isto é, $f(x) = f(a)$ para todo $x \in [a, b]$.

C. Q. D.

É importante que se observe que o corolário não é verdadeiro se o domínio de f não é um intervalo. Seja, por exemplo, $f: [1, 2] \cup [3, 4] \to R$ dada por $f(x) = 1$ se $x \in [1, 2]$ e $f(x) = 2$ se $x \in [3, 4]$. Neste caso, $f'(x) = 0$ para todo x no domínio de f, e esta não é constante.

Corolário 2 — Sejam $f: [a, b] \to R$ e $g: [a, b] \to R$ contínuas em $[a, b]$, deriváveis em (a, b) e tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Neste caso, $f(x)$ e $g(x)$ diferem apenas por uma constante.

Prova:

A função $h: [a, b] \to R$ dada por $h(x) = f(x) - g(x)$ é constante pelo Corolário 1.

C. Q. D.

Corolário 3 — Sejam $f: (a, b) \to R$ e $c \in (a, b)$. Suponha-se que f é derivável em $(a, b) - \{c\}$, contínua em c e que existe $\lim\limits_{x \to c} f'(x)$. Então, f é diferenciável em c e $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} f'(x)$.

Prova:

Sejam $L = \lim\limits_{x \to c} f'(x)$ e (x_n) uma seqüência em $(a, b) - \{c\}$ tal que (x_n) converge para c. Para cada $n \in N$, f restrita ao intervalo $[c, x_n]$ ou $[x_n, c]$, conforme seja $x_n > c$ ou $x_n < c$, satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio. Então, existe y_n em (c, x_n) ou (x_n, c) tal que $f(x_n) - f(c) = f'(y_n)(x_n - c)$, ou, ainda, $\dfrac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = f'(y_n)$.

A seqüência (y_n) converge para c e, portanto, $(f'(y_n))$ converge para L. Dessa maneira, $\dfrac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}$ converge para (x_n) é uma sucessão arbitrária, $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = L = f'(c)$.

C. Q. D.

Se não existe o limite de f' quando x tende para c, nada se pode afirmar quanto à existência da derivada no ponto c. Por exemplo, a função $f: R \to R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot sen \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

possui derivada em todo ponto $x \neq 0$ e $f'(x) = 2x \, sen \dfrac{1}{x} - cos \dfrac{1}{x}$.

Entretanto, não existe o limite de f' quando x tende para zero, pois as seqüências $(x_n) = \left(\dfrac{1}{2\pi_n}\right)$ e $(y_n) = \left(\dfrac{1}{(2n+1)\pi}\right)$ são tais que $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$, $\lim x_n = \lim y_n = 0$, $\lim f'(x_n) = -1$ e $\lim f'(y_n) = 1$.

Apesar disto, f é derivável na origem, como mostramos no exemplo 8, o que obviamente só acontece porque a função f' não é contínua na origem.

Considerando a função $g: R \to R$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

pode-se verificar que também não existe o limite de g' quando x tende para zero. Neste caso, no entanto, não existe a derivada de g no ponto zero (exemplo 7).

Corolário 4 — Seja $f: (a, b) \to R$ derivável em (a, b). Então, se $c \in (a, b)$ e f' é descontínua em c, esta descontinuidade é de 2.ª espécie.

Prova:

Como c é uma descontinuidade de f', não existe (Corolário 3) o limite de f' quando x tende para c. Logo, as descontinuidades de f' não são removíveis. Entretanto, como é derivável em c, temos que $f'(c-) = f'(c) = f'(c+)$.

Suponha-se que $L = \lim\limits_{x \to c^+} f'(x)$. Então, por um procedimento análogo ao adotado na demonstração do Corolário 3 (considere-se uma sucessão (x_n) em $(a, b) - \{c\}$ tal que $x_n > c$ e $\lim x_n = c$), pode-se mostrar que $\lim\limits_{x \to c^+} f'(x) = f'(c+)$.

Da mesma forma, se $\lim\limits_{x \to c^-} f'(x) = L'$, temos $L' = f'(c-)$.

Portanto, se existirem os limites laterais, eles deverão ser iguais entre si e também iguais a $f'(c)$, o que contradiz a hipótese de que f' é descontínua no ponto c.

Logo, as descontinuidades de f' não podem ser de 1.ª espécie.

C. Q. D.

Corolário 5 — Sejam I um intervalo em R e $f: I \to R$ derivável em I. Então:

a) $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in I$ se, e somente se, f é não decrescente em I; e

b) se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, f é crescente em I.

Prova:

a) Sejam $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in I$ e $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ tais que $x_2 > x_1$. $f/[x_1, x_2]$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio. Assim, $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1)$ para algum $c \in (x_1, x_2)$. Como $f'(c) \geqslant 0$, $f(x_2) \geqslant f(x_1)$.

Por outro lado, dado um ponto $c \in I$, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$ para todo $x \in I$, uma vez que f é monótona não decrescente. Assim, $f'(c) =$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0.$$

b) A demonstração é a mesma da primeira parte do item "a". Note-se apenas que, sendo $f'(c) > 0$, teremos necessariamente $f(x_2) > f(x_1)$.

C. Q. D.

A recíproca da parte "b" do Corolário 5 não é verdadeira. Por exemplo, a função $f: R \to R$ dada por $f(x) = x^3$ possui derivada nula na origem e é monótona crescente, como já havíamos mencionado.

Também deve ser observado que valem resultados análogos para as funções monótonas não crescentes e monótonas decrescentes, isto é, sob as hipóteses do Corolário 5, temos que: a) $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in I$ se, e somente se, f é não crescente em I; e b) se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, f é monótona decrescente em I.

Corolário 6 — Seja $f: [a, b] \to R$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in (a, b) \cap (a, a + \delta)$, então f tem mínimo relativo no ponto a.

Prova:

Se $x \in (a, a + \delta) \cap (a, b)$, $f/[a, x]$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio. Neste caso, existe $c \in (a, x)$ tal que

$f(x) - f(a) = f'(c)\ (x - a) \geqslant 0$. Portanto, $f(x) \geqslant f(a)$ para todo $x \in (a, a + \delta) \cap [a, b]$.

C. Q. D.

Corolário 7 — Seja $f: [a, b] \to R$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se existe um número real $\delta > 0$ tal que $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in (b - \delta, b) \cap (a, b)$, então f tem máximo relativo no ponto b.

Prova:

Se $x \in (b - \delta, b) \cap (a, b)$, então existe $c \in (x, b)$ tal que $f(b) - f(x) = f'(c)\ (b - x) \geqslant 0$.

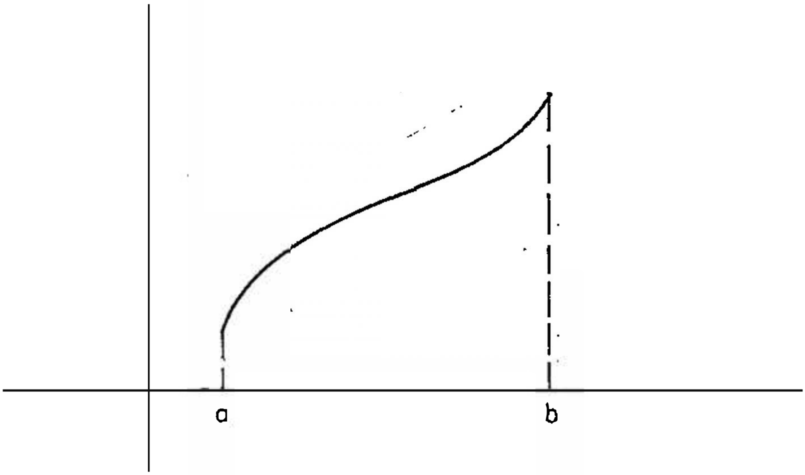
C. Q. D.

Corolário 8 — Seja $f: [a, b] \to R$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se existir um número real $\delta > 0$ tal que $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in (a, b) \cap (a, a + \delta)$, então f tem máximo relativo no ponto a.

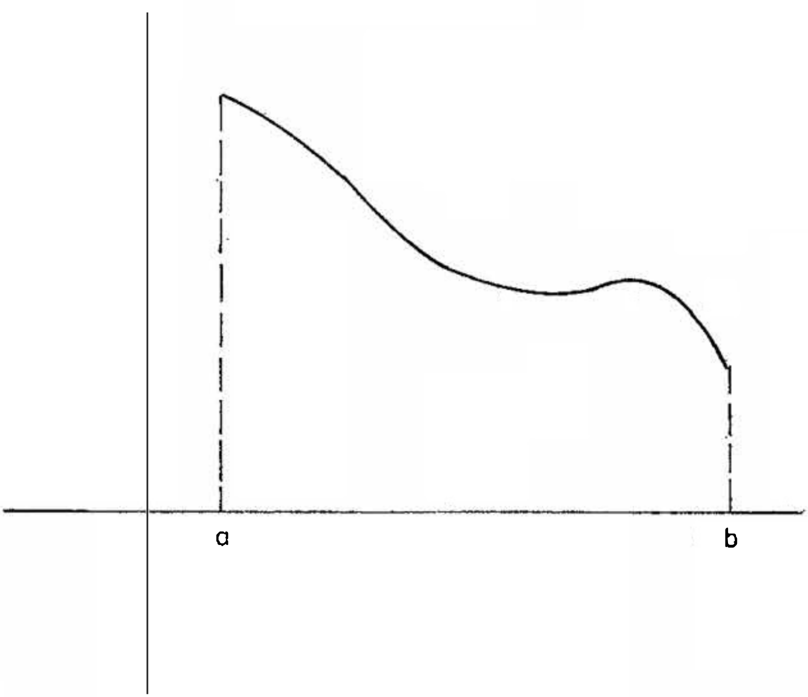
Corolário 9 — Seja $f: [a, b] \to R$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se existir um número real $\delta > 0$ tal que $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in (a, b) \cap (b - \delta, b)$, então f tem um mínimo relativo no ponto b.

Passaremos agora a procurar identificar condições suficientes para que num ponto x do domínio da função f ela possua máximo ou mínimo relativo. Os Corolários 6-9 acima já nos dão uma condição desta natureza para os pontos extremos do intervalo onde a função está definida. É conveniente inclusive traçarmos figuras representativas dos resultados destes corolários (página seguinte), uma vez que estas idéias simples sobre extremos que não ocorrem no interior do domínio aparecem, de maneira um pouco diferente, em problemas de otimização mais complexos.

Exploremos um pouco mais estes corolários com o objetivo de obter condições *suficientes* com relação aos extremos da função. Já sabemos que, se f atinge um extremo no interior do domínio e se ela é derivável neste ponto, a derivada é nula. Geometricamente,

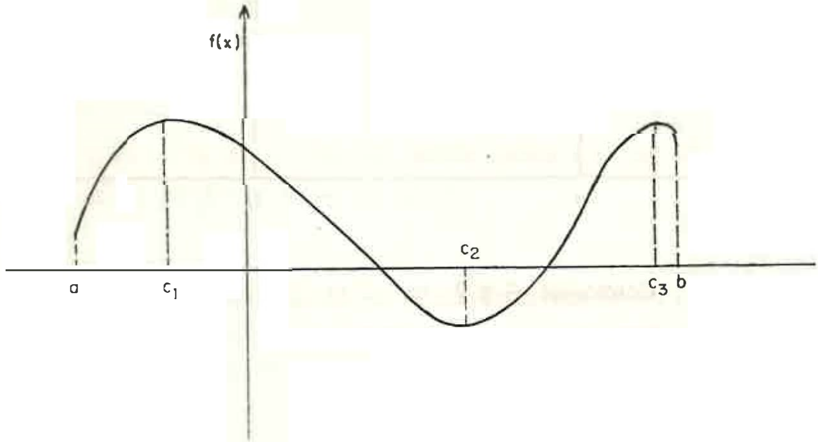


Corolários 6 e 7

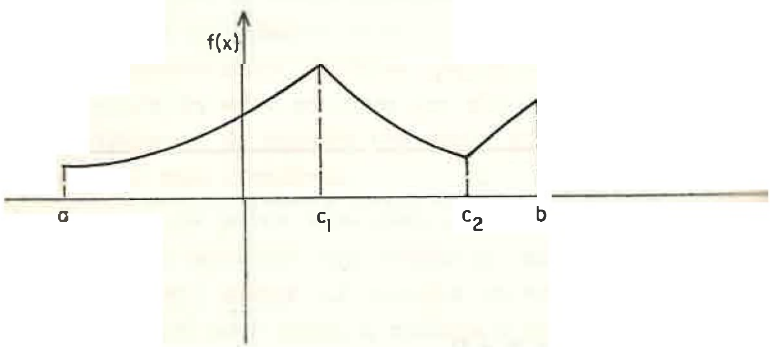


Corolários 8 e 9

a diferença entre um máximo relativo e um mínimo relativo (ambos interiores) é bastante óbvia. Os pontos c_1 e c_3 na figura a seguir são máximos, pois a tangente ao gráfico de f tem inclinação positiva à sua esquerda e negativa à sua direita. O inverso acontece no ponto c_2, que é um mínimo relativo.



O que se torna interessante, entretanto, é que a diferenciabilidade de f no ponto onde ela tem extremo não é importante, isto é, se ela é diferenciável numa vizinhança perfurada do ponto, o mesmo comportamento da tangente caracteriza os máximos e os mínimos, como ilustra a figura a seguir.



Portanto, é possível estabelecer um conjunto de *condições suficientes* para identificar os extremos de uma função no interior de seu domínio.

Teorema 10 — Seja $f: [a, b] \rightarrow R$ contínua no ponto $c \in (a, b)$ e diferenciável numa vizinhança V de c, exceto possivelmente no ponto c. Então:

a) f tem máximo relativo em c se existe um número real $\delta > 0$ tal que $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in V \cap (c - \delta, c)$ e $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in V \cap (c, c + \delta)$;

b) f tem mínimo relativo em c se existe um número real $\delta > 0$ tal que $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in V \cap (c - \delta, c)$ e $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in V \cap (c, c + \delta)$; e

c) f não possui extremo relativo em c se f' não troca de sinal em uma vizinhança do ponto c.

Prova:

a) Pelo Corolário 7, qualquer que seja $x \in (c - \delta, c) \cap V$, $f(c) \geqslant f(x)$. Pelo Corolário 8, para todo $x \in V \cap (c, c + \delta)$, $f(c) \geqslant f(x)$. Logo, f tem máximo relativo no ponto c.

b) Utilize-se os Corolários 6 e 9.

c) Suponha-se que $f'(x) \geqslant 0$ numa vizinhança perfurada W de c de raio δ. Pelo Corolário 7, $f(c) \geqslant f(x)$ para todo $x \in (c - \delta, c) \cap V$. Pelo Corolário 6, para todo $x \in (c, c + \delta) \cap V$, $f(c) \leqslant f(x)$. Portanto, c não é um extremo relativo (o caso em que $f'(x) \leqslant 0$ demonstra-se analogamente).

C. Q. D.

Exemplos:

15 — Seja $f: R \rightarrow R$ dada por $f(x) = x^2 - 5x + 6$. f é diferenciável em R e $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 5/2$, o que significa que, no ponto $x = 5/2$, f pode ter um máximo relativo, um mínimo relativo ou nenhum dos dois. Para tentarmos identificar a natureza deste ponto, procuremos utilizar o Teorema 10. $f'(x) = 2x - 5$ e, portanto, $f'(x) < 0$ para todo $x < 5/2$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > 5/2$. Conclui-se que f tem um mínimo relativo no ponto $x = 5/2$.

16 — Seja $f: R \to R$ dada por $f(x) = (x - 1)^4$. f é diferenciável em R e $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 1$. Como $f'(x) < 0$ para todo $x < 1$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > 1$, f tem mínimo relativo em $x = 0$.

Observemos que, com um mínimo de raciocínio, poderíamos ir um pouco mais além da constatação de que, no ponto $x = 1$, f tem mínimo relativo, porque $f(x) \geqslant 0$ em R e $f(x) = 0$ somente no ponto $x = 1$. Dessa forma, $f(1) < f(x)$ para todo $x \in R - \{1\}$, o que significa que f tem, na verdade, um mínimo global (ou absoluto) neste ponto. (Os extremos globais serão cuidadosamente definidos posteriormente.)

17 — Seja $f: R \to R$ dada por $f(x) = (x - 1)^3$. f é derivável em R e $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 1$. Além disto, $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in R$, o que significa que f não tem extremo no ponto $x = 1$.

18 — Seja $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^{2/3}}{x^2 + 8}$$

Note-se que f é contínua em R e diferenciável para todo $x \neq 0$. No ponto $x = 0$, f não é diferenciável, pois:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^{1/3}\,(x^2 + 8)} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

Os extremos de f, já sabemos, ocorrerão nos pontos onde $f'(x) = 0$ ou então no ponto $x = 0$. Para todo $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{4\,(4 - x^2)}{3\,x^{1/3}\,(x^2 + 8)^2}$$

e, portanto, $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 2$ e $x = -2$. Além disto, se $0 < x < 2$, $f'(x) > 0$ e, se $x > 2$, $f'(x) < 0$. Portanto, f tem máximo relativo em $x = 2$.

De maneira semelhante, conclui-se que f tem máximo relativo em $x = -2$.

Falta-nos examinar o comportamento de f' numa vizinhança da origem, ponto em que f não é derivável (porém, é contínua). Note-se que, se $x \in (-2, 0)$, $f'(x) < 0$ e, se $x \in (0, 2)$, $f'(x) > 0$. Concluímos, assim, que f tem mínimo relativo no ponto $x = 0$.

19 — Seja $f: R \to R$ definida por $f(x) = e^x x^{1/3}$. f é contínua em R e derivável em $R - \{0\}$. No ponto $x = 0$, f não é derivável, pois:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} = \frac{e^x}{x^{2/3}} = +\infty$$

Examinemos os candidatos a extremo da função. Pode-se verificar que $f'(x) = e^x \left(\frac{1}{3 \ x^{2/3}} + x^{1/3} \right)$ para todo $x \neq 0$. Então, $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = -1/3$ e, além disto, $f'(x) < 0$ se $x < -1/3$ e $f'(x) > 0$ se $x > -1/3$. Disto se conclui que f tem mínimo no ponto $x = -1/3$.

Numa vizinhança do ponto $x = 0$, a função $f'(x)$ não troca de sinal, o que significa que f não tem máximo ou mínimo na origem.

20 — Seja $f: R_+ \to R$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Se $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$. Logo, f é monótona crescente em $(0, \infty)$. Entretanto, se notarmos que $f(x) > f(0)$ para todo $x \in R_+ - \{0\}$, verificamos que f é monótona crescente em seu domínio.

21 — Seja $f: R \to R$ dada por $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 8$. Como f é derivável em R, a pesquisa dos extremos resume-se a examinar os pontos onde $f'(x) = 0$. Então, teremos que $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$, o que nos dá $f'(5/3) = 0$ e $f'(1) = 0$. Utilizando conhecimentos anteriores sobre o trinômio do segundo grau, podemos afirmar que: para $x < 1$, $f'(x) > 0$; para $1 < x < 5/3$, $f'(x) < 0$; e, para $x > 5/3$, $f'(x) > 0$. Em síntese, o ponto $x = 1$ é um ponto de máximo relativo e o ponto $x = 5/3$ é um ponto de mínimo relativo.

22 — Seja $f\colon R \to R$ dada por $f(x) = \frac{1}{3} x^3 - x^2 + x + 10$. f é derivável em R e $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 1$. Além disto, como $x = 1$ é a única raiz do trinômio $f'(x) = x^2 - 2x + 1$, segue-se que f' não troca de sinal numa vizinhança de $x = 1$. Portanto, f não tem máximo relativo ou mínimo relativo neste ponto.

23 — Daremos agora um exemplo que mostra que as condições do Teorema 10 não são necessárias para ocorrência de extremos.

Seja $f\colon R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \left(2 + sen \dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Note-se que, se $x \neq 0$, $f'(x) = 4x^3 \left(2 + sen \dfrac{1}{x}\right) - x^2 \cos \dfrac{1}{x}$ e, como $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$, $f'(0) = 0$, isto é, f é diferenciável em R e f' é uma função contínua.

A função f tem um mínimo no ponto $x = 0$, pois $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ para todo $x \in R - \{0\}$. Entretanto, dada *qualquer vizinhança* da origem, existem pontos à direita de zero com f' maior e menor do que zero. O mesmo se dá com os pontos à esquerda de zero em *qualquer vizinhança* deste ponto.

Até o momento estivemos preocupados em extrair implicações teóricas do Teorema do Valor Médio. Entretanto, existem algumas aplicações interessantes deste resultado que permitem o estabelecimento de certas desigualdades. Vejamos dois exemplos desta natureza.

24 — A desigualdade de Bernoulli generalizada é a seguinte: para todo $h > -1$ e $r \geqslant 1$, $(1 + h)^r \geqslant 1 + rh$.

Para demonstrar esta desigualdade, considere-se a função $f\colon R \to R$ definida por $f(x) = (1 + x)^r$. f é contínua e diferenciável em R. Dados $x = 0$ e $h > -1$, a função $f/[0, h]$, ou $f/[h, 0]$, conforme $h > 0$ ou $h < 0$, satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio, o que significa que existe $t \in (0, 1)$ tal que $f(x + h) = f(x) + f'(x + th)\,h$. Substituindo os valores, temos $(1 + h)^r = 1 + rh(1 + th)^{r-1}$.

Há dois casos a considerar. Se $h \geqslant 0$, $(1 + th)^{r-1} > 1$, donde obtém-se $(1 + h)^r \geqslant 1 + rh$. Se $-1 < h < 0$, $(1 + th)^{r-1} < 1$, $rh\,(1 + th)^{r-1} > rh$ e, portanto, $(1 + h)^r > 1 + rh$.

25 — Dados $a > 0$ e $h > 0$, verifiquemos que $a\,e^{-ah} < \dfrac{1 - e^{-ah}}{h} < a$.

Seja $f\colon R \to R$ definida por $f(x) = e^{-ax}$. $f/[0, h]$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio e, portanto, existe $t \in (0, 1)$ tal que $e^{-ah} = 1 - ah\,e^{-ath}$, ou, ainda, $\dfrac{1 - e^{-ah}}{h} = a\,e^{-ath}$.

Disto se obtém a desigualdade a partir dos seguintes fatos:

a) $e^{-ath} < 1$, uma vez que $ath > 0$; e

b) $e^{-ath} > e^{-ah}$, uma vez que a função exponencial e^{-ax} é monótona decrescente.

V.1.2 — A Fórmula de Taylor

Seja $f\colon D \to R$, $D \subset R$, derivável em D. Já vimos que é possível definir uma função $f'\colon D \to R$, chamada função derivada primeira de f. Da mesma maneira, se f' é derivável em D ou em um subconjunto X de D, podemos definir a função derivada segunda de f pondo $f''\colon X \to R$, sendo $f''(x) = (f')'(x)$. Em geral, dado um número natural $n > 1$, se a função derivada de ordem $(n - 1)$ é derivável em um subconjunto X de D, podemos definir a função derivada n-ésima de f pondo $f^{(n)}\colon X \to R$, sendo $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$.

Definição 5 — Seja $I \subset R$ um intervalo e $f\colon I \to R$:

a) diz-se que f é n vezes diferenciável no intervalo I quando, para todo $x \in I$, existe $f^{(n)}(x)$, sendo n um número natural;

b) diz-se que f é n vezes diferenciável no ponto $c \in I$ se existe um intervalo aberto J, com $c \in J$ e tal que f é $(n - 1)$ vezes diferenciável em $I \cap J$, e existe $f^{(n)}(c)$, sendo n um número natural;

c) diz-se que f é de classe C^n em I, $n \in N$, se f é n vezes diferenciável em I e $f^{(n)}$ é uma função contínua no intervalo I, e neste caso indicaremos $f \in C^n(I)$, ou, quando o domínio estiver suficientemente claro, simplesmente $f \in C^n$ (convenciona-se, em geral, que $f \in C^0$ significa que f é contínua); e

d) diz-se que f é de classe C^∞ quando $f \in C^0$ e $f \in C^n$ para todo $n \in N$.

Exemplos:

26 — O polinômio $p: R \to R$ tal que $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ (onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$, são constantes reais) é de classe C^∞. Note-se que $p'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}$ é ainda um polinômio. Mais geralmente, dado $k \in N$, $k < n$, $p^{(k)}$ é um polinômio e, portanto, derivável. Além disto, se $k = n$, $p^{(n)}(x) = n!\, a_n$ (onde, por definição, $n! = 1, 2, \ldots, n$) e, portanto, $p^{(n+k)}(x) = 0$ para todo $k \in N$.

27 — A função $f: R \to R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é diferenciável em R, mas não é duas vezes diferenciável em R. Note-se também que $f \notin C^1$.

28 — A função $f: R \to R$ dada por $f(x) = e^x$ é de classe C^∞, uma vez que $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n \in N$.

O principal resultado desta subseção é a obtenção da fórmula de Taylor. É interessante observar que esta fórmula é uma extensão do Teorema do Valor Médio, onde o "acréscimo" da função $(f(c+h) - f(c))$ é aproximadamente calculado incluindo-se termos quadráticos, cúbicos, etc.

Teorema 11 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange) — Seja $f: [a, b] \to$ de classe C^n em $[a, b]$ e $(n + 1)$ vezes diferenciável no intervalo (a, b). Então, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + f''(a)\frac{(b - a)^2}{2!} + \ldots +$$

$$+ f^n(a)\frac{(b - a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

Prova:

Seja $\varphi: [a, b] \to R$ definida da seguinte maneira:

$$\varphi(x) = f(b) - \left\{ f(x) + f'(x) \cdot (b - x) + f''(x)\frac{(b - x)^2}{2!} + \ldots + \right.$$

$$\left. + f^{(n)}(x) \cdot \frac{(b - x)^n}{n!} + k\frac{(b - x)^{n+1}}{(n + 1)!} \right\}$$

onde k é um número real definido de maneira que $\varphi(a) = 0$. A função φ é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e tal que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$. Como:

$$\varphi'(c) = \frac{(k - f^{(n+1)}(c)) \cdot (b - c)^n}{n!}$$

segue-se que $k = f^{(n+1)}(c)$ e que:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(b - a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

uma vez que $\varphi(a) = 0$.

C. Q. D.

Uma formulação equivalente do teorema acima é a seguinte:

Teorema 12 — Sejam $h \in R$, $a \in R$ e $f: [a, a + h] \to R$ de classe C^n em $[a, a + h]$ e $(n + 1)$ vezes diferenciável no intervalo $(a, a + h)$. Então, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}h^n + f^{(n+1)}(a + \theta h)\frac{h^{(n+1)}}{(n + 1)!}$$

Exemplos:

29 — Seja $f: R \to R$ definida por $f(x) = (1 + x)^2$. A função $f \in C^\infty$ e, portanto, dados $a \in R$ e $b \in R$, podemos "expandi-la" segundo a fórmula de Taylor. Observe-se que:

$f'(x) = 2(1 + x)$;

$f''(x) = 2$; e

$f^{(n)}(x) = 0$ para todo $n \geqslant 3$.

Assim, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
f(b) &= f(a) + 2\,(1 + a)\,(b - a) + \frac{2\,(b - a)^2}{2\,!} = \\
&= f(a) + 2\,(1 + a)\,(b - a) + (b - a)^2
\end{aligned}
$$

Neste caso, expandindo até o termo de grau 2, obtém-se uma aproximação exata do valor de $f(b)$.

30 — Seja $f: R \to R$ definida por $f(x) = e^x$ e sejam $a = 0$ e $b \in R$. Como $f \in C^\infty$, a fórmula de Taylor garante a existência de c entre 0 e b, isto é, $c \in (0, b)$ ou $c \in (b, 0)$ tal que:

$$
e^b = e^0 + e^0(b) + e^0 \cdot \frac{b^2}{2} + e^0\,\frac{b^3}{3!} + \ldots + \frac{e^c}{(n+1)\,!} \cdot b^{(n+1)}
$$

onde n é um número natural qualquer. Por exemplo, se $n = 5$:

$$
e^b = 1 + b + \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{6} + \frac{b^4}{24} + \frac{b^5}{120} + \frac{e^c \cdot b^6}{720}
$$

Tomando $b = 1$, a fórmula acima nos permite aproximar o valor do número e, pois se transforma em:

$$
e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{e^c}{6!}
$$

O termo $\frac{e^c}{6!}$ é o erro de aproximação. Note-se que, quando n tende para infinito, $\frac{e}{(n+1)!}$ tende para zero. Como $\frac{e^c}{(n+1)!} <$ $< \frac{e}{(n+1)!}$, temos que:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots \quad (2)$$

Sugerimos ao leitor comparar este exemplo com o exemplo 28 do Capítulo III.

31 — Seja $f: R \to R$ definida por $f(x) = \cos x$. Uma vez que $f \in C^\infty$, podemos "expandi-la" pela fórmula de Taylor até o termo que quisermos. Assim, tomando $a = 0$ e $b = x$, temos que existe c compreendido entre 0 e x tal que:

$$\cos = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + (\operatorname{sen} c) \cdot \frac{x^7}{7!}$$

Mais geralmente:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r(x)$$

onde $r(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot (\cos)^{2n+1}(c)$, em que $(\cos)^{2n+1}(c)$ é a derivada de ordem $(2n+1)$ da função co-seno no ponto c. Note-se que:

$$\left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|$$

converge para zero, pois:

$$\lim \left| \frac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} \right| \cdot \left| \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} \right| = 0 < 1$$

Como $|(\cos)^{2n+1}(c)| \leqslant 1$, $r(x)$ converge para zero quando n tende para infinito. Isto significa que:

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{3}$$

converge para *cos x*.

Nos dois exemplos anteriores expandimos a função f e observamos que o resto da expansão até o termo de ordem n convergia para zero. Isto significa que as expressões (2) e (3) convergem para o número e e para a função *cos x*.

Assim, dada uma função $f \in C^\infty$ no intervalo I, chama-se *Série de Taylor* de f em torno do ponto a pertencente ao interior de I a expressão:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)\,(x-a)^n}{n!} + \ldots$$

Toda função $f \in C^\infty$ possui uma série de Taylor. Entretanto, nada garante que ela seja convergente e, mesmo quando convergente, que ela converge para o valor da função no ponto x (isto ocorre se, e somente se, o resto, em qualquer expansão finita, converge para zero). Quando a série de Taylor converge para $f(x)$, diz-se que f é uma função analítica. Mais precisamente, temos que $f: I \to R$, I intervalo aberto, é uma *função analítica* se, para todo $a \in I$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $|x - a| < \varepsilon$, a série de Taylor de f converge para $f(x)$.

Não entraremos mais a fundo no estudo das funções analíticas neste texto. Convém mencionar (sem procurar demonstrar) que os polinômios, as funções racionais, a função exponencial e as funções *sen* e *cos* são analíticas.

V.1.2.1 — Primeira Aplicação da Fórmula de Taylor: Máximos e Mínimos

Examinaremos agora o problema de determinação de condições suficientes para caracterizar os extremos de uma função. No Teorema 6 já nos deparamos com condições impostas sobre o comportamento do sinal da derivada primeira numa vizinhança do ponto. Procuraremos agora estabelecer estas condições considerando as derivadas de ordem superior da função f. O resultado básico é o teorema a seguir.

Teorema 13 — Seja f: $[a, b] \to R$ contínua em $[a, b]$, de classe C^{n-1} em (a, b), $n \geqslant 2$, e suponha-se que exista $f^{(n)}$ no ponto $x_0 \in (a, b)$, onde se verifica o seguinte:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Então, podemos afirmar que:

a) se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$ $(f^{(n)}(x_0) > 0)$, f tem máximo (mínimo) relativo no ponto x_0; e

b) se n é impar, o ponto x_0 não é de máximo nem de mínimo.

Prova:

Considerando, à guisa de introdução, o lema demonstrado imediatamente antes do Teorema 6 e as observações que a ele se seguem, podemos afirmar que:

a) se $f^{(n)}(x_0) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f^{(n-1)}(x) < 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap (a, b)$ e $f^{(n-1)}(x_0) > 0$ para todo $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap (a, b)$; e

b) se $f^{(n)}(x_0) < 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f^{(n-1)}(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap (a, b)$ e $f^{(n-1)}(x) < 0$ para todo $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap (a, b)$.

Suponha-se agora que $f^{(n)}(x_0) > 0$ e seja n um número par. Seja $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap (a, b)$. A função $f/[x, x_0]$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Taylor. Portanto, existe c (x, x_0) tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f^{(n-1)}(c) \, \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

Isto significa que $f^{(n-1)}(c) \nless 0$, pois $c \in (x_0 - \delta, x_0) \cap (a, b)$ e $(x - x_0)^{n-1} < 0$. Logo, $f(x) > f(x_0)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap (a, b)$.

Seja agora $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap (a, b)$. Como $f/[x_0, x]$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Taylor, existe $c \in (x_0, x)$ tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f^{(n-1)}(c) \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Como $f^{(n-1)}(c) > 0$, $c \in (x_0, x_0 + \delta) \cap (a, b)$ e $(x - x_0)^{n-1} > 0$, segue-se também que $f(x) > f(x_0)$ para todo $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap \cap (a, b)$.

Conclui-se que f tem mínimo relativo (estrito) no ponto x_0.

Suponha-se agora que n é um número ímpar. Baseados nas observações acima, concluímos que $f^{(n-1)}(c)\ (x - x_0)^{n-1} < 0$ se $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap (a, b)$ e $f^{(n-1)}(c)\ (x - x_0)^{n-1} > 0$ se $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap (a, b)$, isto é, $f(x) < f(x_0)$ se $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap (a, b)$ e $f(x) > f(x_0)$ se $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap (a, b)$. Em conclusão, f não possui extremo em x_0.

O caso em que $f^{(n)}(x_0) < 0$ pode ser tratado de maneira semelhante.

C. Q. D.

Fazendo $n = 2$ no teorema anterior, obtém-se o seguinte importante corolário:

Corolário (Condições Suficientes de Segunda Ordem). — Seja $f\colon [a, b] \to R$ contínua em $[a, b]$, de classe C^1 em (a, b), e suponha-se que existe f'' no ponto $x_0 \in (a, b)$, onde $f'(x_0) = 0$. Então, se $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$, f tem mínimo (máximo) relativo em x_0.

Exemplos:

32 — Retomando o exemplo 21, observe-se que $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 8$ é de classe C^∞. Além disto, $f''(x) = 6x - 8$, ou seja, $f''(5/3) > 0$ e $f''(1) < 0$. Baseados no corolário anterior, concluímos que f tem um mínimo relativo no ponto $x = 5/3$ e um máximo relativo no ponto $x = 1$.

33 — Seja $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^4$. Claramente, $f \in C^\infty$, e $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0)$ e $f^{(4)}(0) = 24$.

Note-se que, neste caso, nada se pode afirmar sobre a natureza do ponto $x = 0$ com base simplesmente no corolário anterior, porque $f''(0) = 0$ é um caso não considerado.

Entretanto, o Teorema 13 é aplicável neste caso. Com base nele, conclui-se que f tem mínimo relativo, pois 4 é um número par e $f^{(4)}(0) > 0$.

34 — Com base ainda no Teorema 13, conclui-se que $f: R \to R$ dada por $f(x) = x^3$ não tem máximo relativo ou mínimo relativo na origem.

35 — Mais geralmente, seja $n \in N$ e seja $f: R \to R$ dada por $f(x) = x^n$. Então, $f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$ e $f^{(n)}(0) = n!$.

Se n é par, a função tem mínimo relativo na origem. Se n é ímpar, então, na origem, f não tem máximo relativo nem mínimo relativo. Neste caso (n ímpar), é interessante observar que $f'(x) = n\, x^{n-1} \geqslant 0$, isto é, f é monótona não decrescente (Corolário 5 do Teorema do Valor Médio). Entretanto, como $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$, afirmamos que ela é monótona crescente em R.

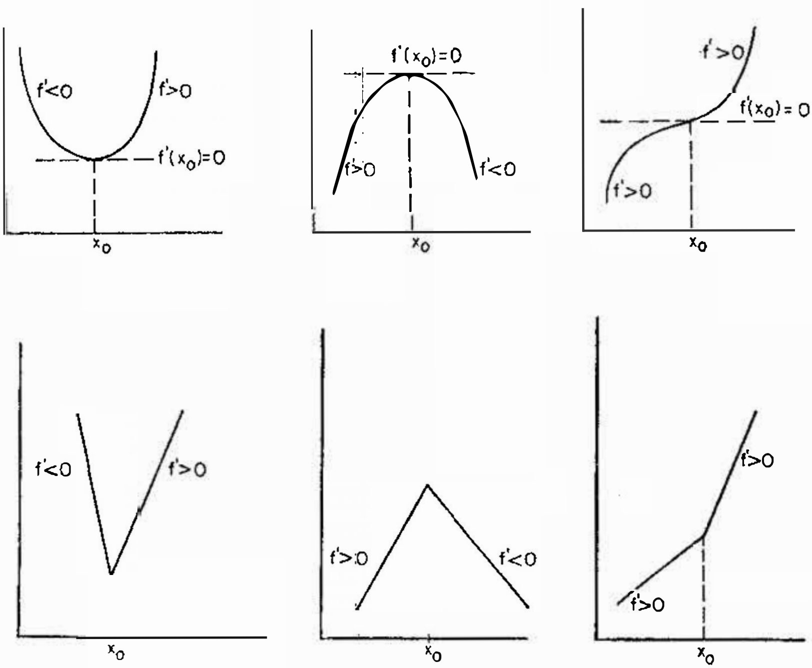
36 — Seja $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

f é uma função contínua em R. Se $x \neq 0$, ela é a composta de duas funções contínuas. A continuidade na origem é conseqüência de que o $\lim\limits_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0$. Quando $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}\, e^{-1/x^2}$ Além disto, pode-se mostrar que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$ e, portanto, $f'(0) = 0$. Mais geralmente, pode ser verificado que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in N$.

Este exemplo ilustra o fato de que as condições estabelecidas no Teorema 13 são suficientes (porém não necessárias, uma vez que f tem mínimo relativo na origem) e encerra o estudo de máximos e mínimos que faremos nesta seção. Entretanto, convém fazermos um pequeno sumário destes resultados, de forma que possam ser melhor utilizados.

Consideremos a função $f\colon [a, b] \to R$. Se f tem derivadas com sinal constante em alguma vizinhança de a ou b, então neste ponto haverá um extremo relativo (Corolários 6-9 do Teorema do Valor Médio). Se $x_0 \in (a, b)$ e se f é derivável numa vizinhança V de x_0, exceto possivelmente em x_0, o Teorema 10 estabelece condições suficientes — em função do comportamento do sinal de f' numa vizinhança de x_0 — para a existência de extremos. Alguns casos típicos estão apresentados nas seis figuras a seguir.



Em alguns casos, o estudo do sinal da derivada primeira pode não ser uma tarefa computacionalmente simples ou analiticamente interessante. Condições suficientes para identificação de máximos e mínimos relativos são estabelecidas no Teorema 13 e seu importante corolário.

Por fim, procuremos estabelecer condições necessárias de segunda ordem para a ocorrência de extremos. Suponha-se que f satisfaz as hipóteses do corolário do Teorema 13. Se x_0 é um ponto interior do domínio de f onde ela tem máximo relativo, então deve-se ter $f''(x_0) \leqslant 0$. Se, por outro lado, f tem mínimo relativo em x_0 (interior do domínio), então $f''(x_0) \geqslant 0$. Se $f'(x_0) = 0$ (x_0 interior do domínio) e se x_0 não é máximo relativo nem mínimo relativo, então $f''(x_0) = 0$.

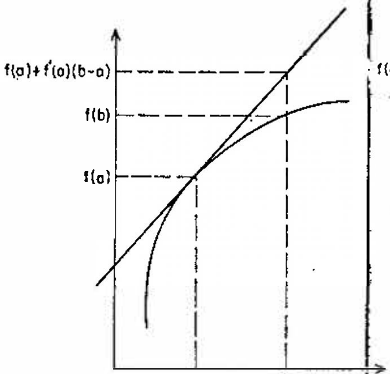
V.1.2.2 — Segunda Aplicação da Fórmula de Taylor: Funções Côncavas e Convexas

Nesta aplicação faremos uso da fórmula de Taylor para caracterizar as *Funções Côncavas* e as *Funções Convexas*, que desempenham papel extremamente importante em toda a teoria de otimização e também na Teoria Econômica Moderna (nesta subseção trataremos do caso das funções diferenciáveis, ao passo que o caso mais geral será estudado no Capítulo IX).

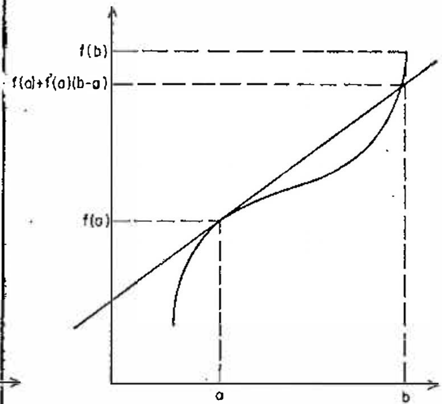
No que se segue, procederemos da seguinte forma: inicialmente, definiremos precisamente função côncava e função convexa e examinaremos uma caracterização equivalente das mesmas; em seguida, mostraremos que uma função (duas vezes diferenciável) é côncava se, e somente se, sua derivada segunda é não positiva; por fim, trataremos, brevemente, das funções estritamente côncavas (convexas). Em todo o desenvolvimento enfatizaremos as funções côncavas, uma vez que os resultados análogos para as funções convexas são obtidos imediatamente a partir dos primeiros.

Definição 6 — Seja I um intervalo e seja $f: I \rightarrow R$ diferenciável em I. A função f é côncava (convexa) em I se, quaisquer que sejam $a \in I$ e $b \in I$, tivermos $f(b) \leqslant f(a) + f'(a)\ (b - a)$ ($f(b) \geqslant f(a) + f'(a)\ (b - a)$).

Geometricamente, a definição de função côncava significa que, se traçarmos a tangente ao gráfico da função f num ponto a de seu domínio, todo o gráfico de f fica abaixo ou coincide com a tangente. Mais especificamente, a expressão $f(a) + f'(a)\ (b - a)$ é o valor no ponto b da função linear que representa a tangente ao gráfico no ponto a e $f(b)$ é o valor da função em b (veja-se a figura a seguir).

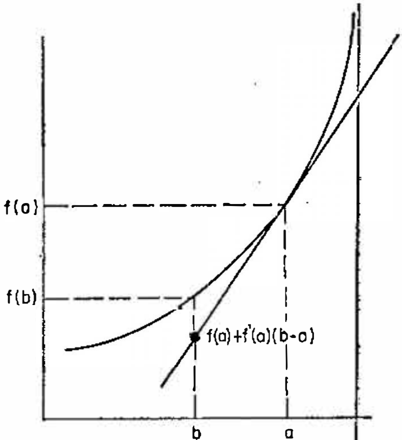


Função côncava

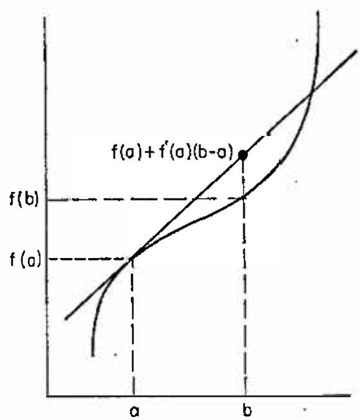


Função não-côncava

A função representada na figura à esquerda é côncava. Entretanto, a função à direita não o é, pois traçando a tangente no ponto a encontramos um ponto b no gráfico de f, onde $f(b) > f(a) + f'(a)\ (b - a)$. Exemplos análogos são apresentados a seguir com relação às funções convexas. O gráfico à esquerda representa uma função convexa, enquanto no gráfico à direita a função não é convexa.



Função convexa



Função não-convexa

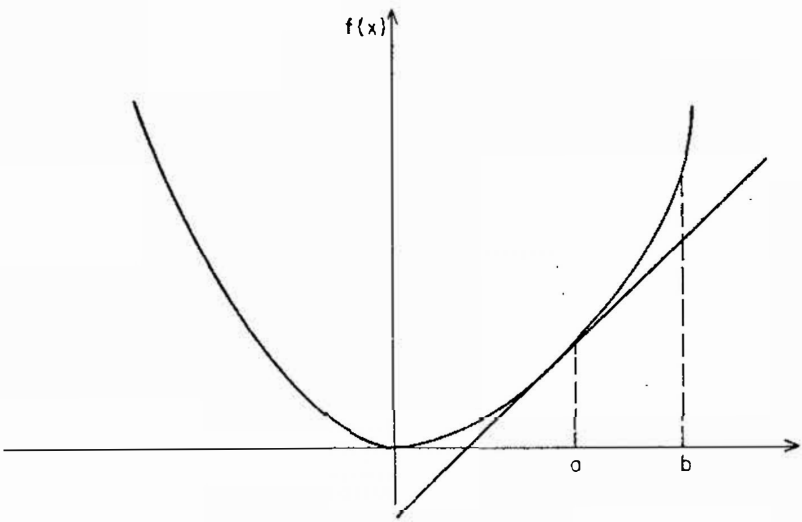
Exemplos:

37 — Seja $f\colon R \to R$ dada por $f(x) = x^2$. A função f é convexa, pois, dados $a \in R$ e $b \in R$:

$$b^2 = [(b - a) + a]^2 = (b - a)^2 + 2a(b - a) + a^2 = (b - a)^2 +$$

$$+ f(a) + f'(a)\,(b - a) \geqslant f(a) + f'(a)\,(b - a)$$

O gráfico de f está desenhado a seguir.



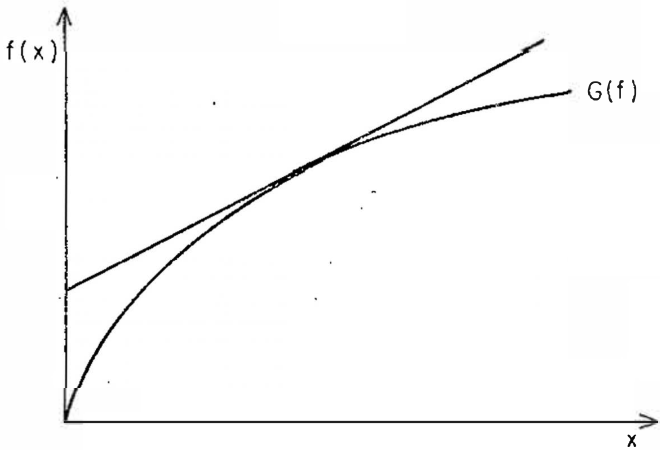
38 — Seja $f\colon R_+ - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Mostremos que f é uma função côncava. Sejam $a \in R_+ - \{0\}$ e $b \in R_+ - \{0\}$. Desejamos mostrar que $\sqrt{b} \leqslant \sqrt{a} + \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\,(b - a)$, expressão que é equivalente às seguintes:

$$2\sqrt{ab} \leqslant 2a + (b - a)$$

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a + b}{2}$$

Esta última desigualdade – a conhecida relação entre as médias geométricas e aritméticas de dois números positivos – pode ser demonstrada considerando-se que:

$$0 \leqslant (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$$



39 – A função f: $R_+ - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é convexa. Sejam dados $a \in R_+ - \{0\}$ e $b \in R_+ - \{0\}$. Queremos mostrar que $\dfrac{1}{b} \geqslant \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2}(b - a)$. Equivalentemente, temos as expressões:

$$\frac{a}{b} \geqslant 1 - \frac{1}{a}(b - a)$$

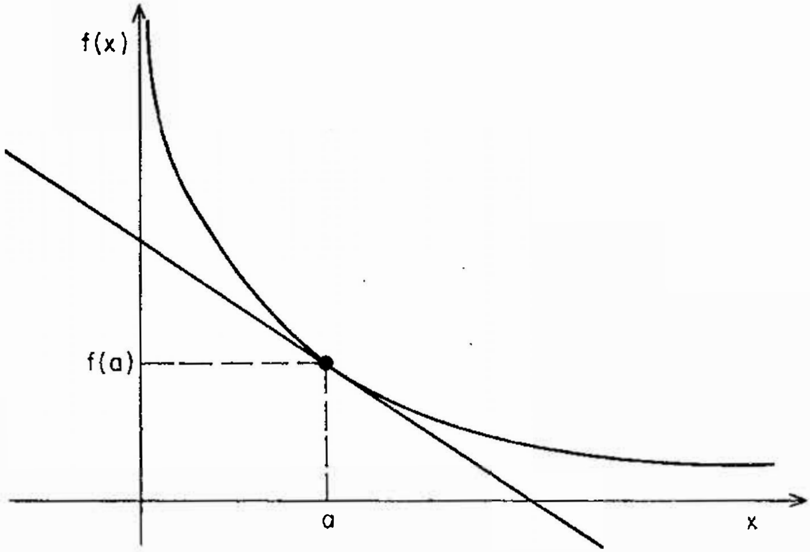
ou:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$$

ou ainda:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geqslant 0$$

Esta última expressão conclui a verificação da convexidade de f (veja-se o gráfico a seguir).



Definição 7 — A função $f \colon D \to R$, $D \subset R$, tem um *máximo absoluto* ou um *máximo global* (mínimo absoluto ou mínimo global) no ponto $x_0 \in D$ se $f(x_0) \geqslant f(x)$ $(f(x_0) \leqslant f(x))$ para todo $x \in D$. Diz-se que f tem um *máximo absoluto estrito* ou um *máximo global estrito* (mínimo absoluto estrito ou mínimo global estrito) em $x_0 \in D$ se $f(x_0) > f(x)$ $(f(x_0) < f(x))$ para todo $x \in D - \{x_0\}$.

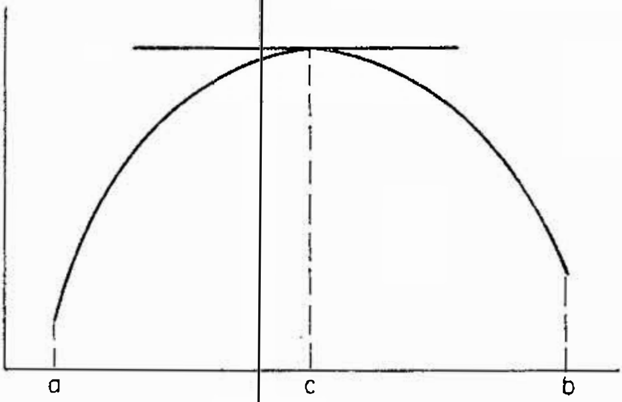
Em vista da Definição 6, o seguinte teorema tem demonstração imediata (na formulação deste resultado e nas demais partes desta subseção, I designará um intervalo):

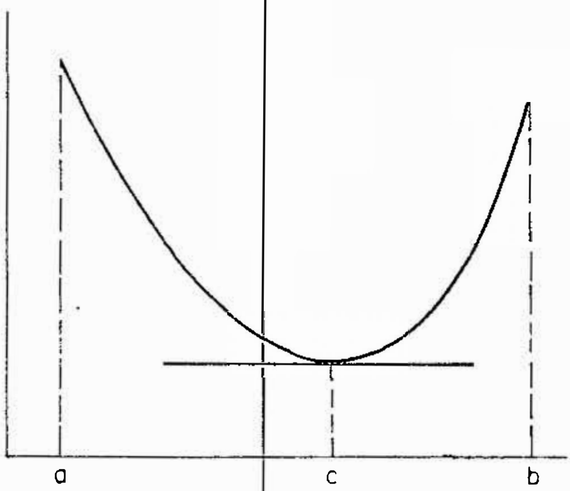
Teorema 14 — Seja $f \colon I \to R$ uma função côncava e seja c um ponto interior de I. Se $f'(c) = 0$, f tem máximo absoluto no ponto c.

Se observarmos que uma função $g \colon I \to R$ é convexa se, e somente se, $(-g) \colon I \to R$ for uma função côncava, obtém-se imediatamente um teorema semelhante ao anterior para estas funções.

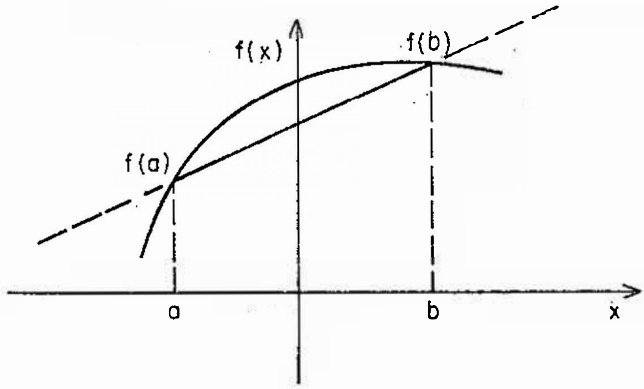
Teorema 15 — Seja $f: I \to R$ uma função convexa e seja c um ponto interior de I. Se $f'(c) = 0$, f tem mínimo absoluto no ponto c.

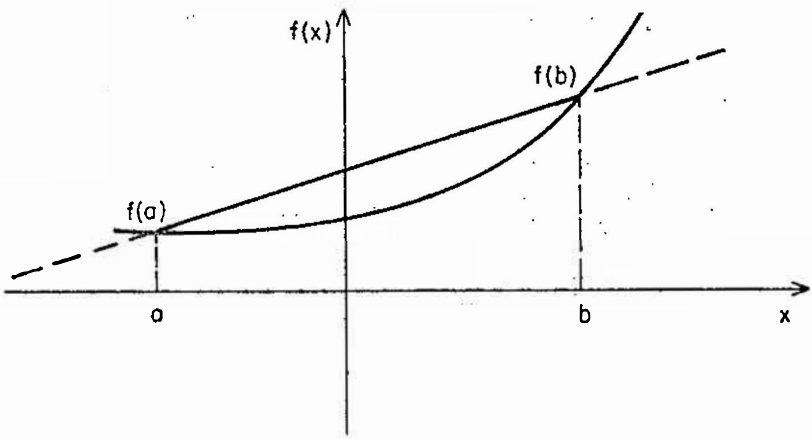
Figuras ilustrativas destes resultados são apresentadas a seguir, a primeira referindo-se ao Teorema 14 e a segunda ao Teorema 15.





Existe uma maneira alternativa de caracterizar as funções côncavas utilizando a secante que passa por dois pontos quaisquer do gráfico, e não sua tangente, isto é, uma função é côncava (convexa) se, e somente se, o seu gráfico fica acima (abaixo) da secante no intervalo compreendido pelos dois pontos. Ilustramos a idéia nas figuras a seguir.





Lema: Seja $f: I \to R$ côncava e diferenciável em I. Então. $f': I \to R$ é uma função monótona não crescente.

Prova:

Sejam $x \in I$ e $y \in I$, $x > y$. Como f é côncava:

$$f(x) \leqslant f(y) + f'(y)\ (x - y)$$

$$f(y) \leqslant f(x) + f'(x)\ (y - x)$$

Portanto, $f(x) \leqslant f(x) + f'(x)\ (y - x) + f'(y)\ (x - y)$, ou seja, $(x - y)\ (f'(y) - f'(x)) \geqslant 0$. Segue-se que $f'(y) \geqslant f'(x)$.

C. Q. D.

Analogamente, pode-se mostrar que, se f é uma função convexa (diferenciável), f' é monótona não decrescente.

Teorema 16 — Seja $f: I \to R$ diferenciável em I. A função f é côncava se, e somente se, dados $a \in I$ e $b \in I$, o gráfico de f fica acima da secante que liga os pontos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. Em outras palavras, para todo $x \in (a, b)$:

$$f(x) \geqslant f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ (x - a)$$

Prova:

Suponhamos, inicialmente, que, para todo $x \in (a, b)$, $f(x) \geqslant f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\ (x - a)$. Então:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Por definição, $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Além disto, como no limite as desigualdades permanecem, segue-se que:

$$f'(a) \geqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o que mostra que f é côncava.

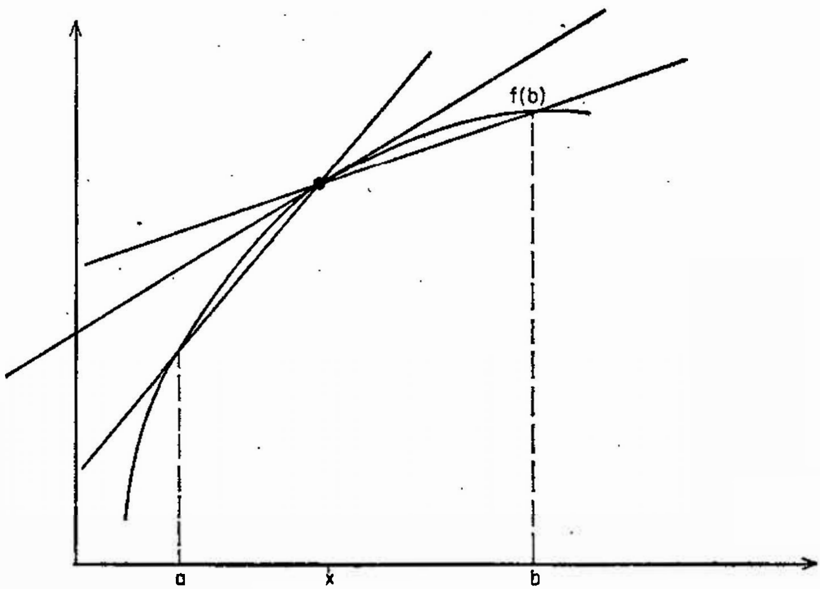
Suponhamos agora que f é côncava e sejam $a \in I$, $b \in I$, $b > a$, e $x \in (a, b)$. Então:

$$f(a) \leqslant f(x) + f'(x) \quad (a - x)$$
$$f(b) \leqslant f(x) + f'(x) \quad (b - x)$$

As duas desigualdades acima mostram que a tangente ao gráfico de f no ponto x está acima do gráfico. Em particular, acima de $f(a)$ e $f(b)$. Da primeira relação, obtemos agora que:

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \geqslant f'(x)$$

isto é, a inclinação da secante que passa por $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ é maior do que a inclinação da tangente no ponto x.



Substituindo $f'(x)$ na segunda desigualdade, tem-se:

$$f(b) - f(x) \leqslant f'(x) \quad (b - x) \leqslant \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \quad (b - x)$$

que diz que a inclinação da secante que passa por $(b, f(b))$ e $(x, f(x))$ é menor do que a a secante que passa por $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$.

Finalmente, manipulando e ta última desigualdade, vem:

$$f(b)\ (a - x) - f(x)\ (a - x) \geqslant f(a)\ (b - x) - f(x)\ (b - x)$$

ou:

$$f(b)\ (a - x) - f(x)\ (b - x) - f(x)\ (a - b) \geqslant$$
$$\geqslant f(a)\ (b - \quad) - f(x)\ (b - x)$$

ou ainda:

$$f(x)\ (b - a) \geqslant f(a)\ (b - x) - f(b)\ (a - x) =$$
$$= f(a)\ (b - a) \qquad (f(a) - f(b))\ (a - x)$$

Por fim, concluímos que:

$$f(x) \geqslant f(a) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}\ (a - x)$$
$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ (x - a)$$

C. Q. D.

Essa caracterização das funções côncavas (e a correspondente caracterização para as funções convexas) pela secante ao gráfico é interessante, pois independe da hipótese de diferenciabilidade. No Capítulo IX trataremos novamente das funções côncavas, e nesta oportunidade estaremos interessados em propriedades mais gerais, independentemente da diferenciabilidade da função, e portanto utilizaremos como definição esta relação entre o gráfico e a secante a ele.

Tendo em vista que no tratamento das funções com domínio contido em R^p a notação mais conveniente não é a do teorema anterior, é útil que o enunciemos utilizando notação mais usual.

Teorema 17 — A função $f: I \to R$ (diferenciável) é côncava se, e somente se, para todo $a \in I$ e $b \in I$ e para todo $\theta \in [0, 1]$, tivermos:

$$f(\theta a + (1 - \theta)\, b) \geqslant \theta f(a) + (1 - \theta)\, f(b)$$

Prova:

Se f é côncava, então:

$$f(x) \geqslant f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

para todo $a \in I$, $b \in I$ e $x \in (a, b)$. Suponha-se, sem perda de generalidade, $b > a$. Pondo $\theta = \dfrac{b - x}{b - a}$, segue-se que $\theta \in (0, 1)$, que $x = \theta a + (1 - \theta)\, b$ e que $(x - a) = (1 - \theta)\,(b - a)$, isto é:

$$f(\theta a + (1 - \theta)\, b) \geqslant f(a) + [f(b) - f(a)]\,(1 - \theta)$$

Note-se que a desigualdade acima se verifica (como igualdade) para $\theta = 0$ ou $\theta = 1$ e para $a = b$.

Por outro lado, se vale a condição do teorema, então $x \in (a, b)$ se, e somente se, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $x = \theta a + (1 - \theta)\, b$. Logo:

$$f(x) \geqslant f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

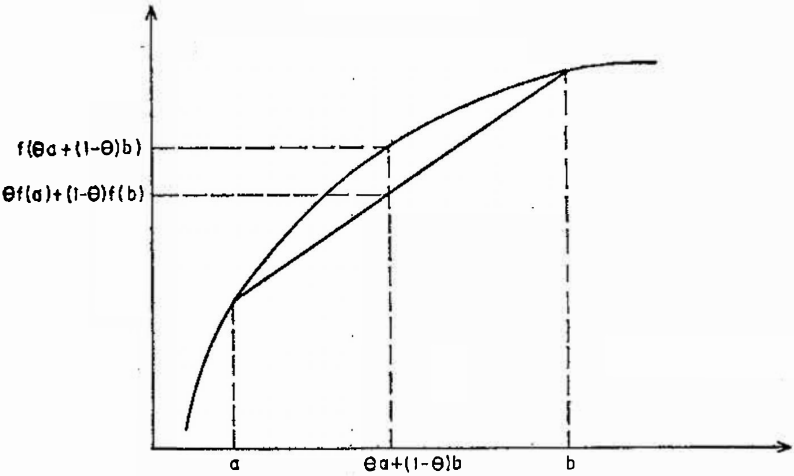
C. Q. D.

A figura da página a seguir corresponde a esta versão da definição da função côncava.

Teorema 18 — Seja $f: I \to R$ de classe C^1 em I e duas vezes diferenciável em I. A função f é côncava se, e somente se, $f''(x) \leqslant 0$ para todo $x \in I$.

Prova:

Se f é côncava, f' é monótona não crescente, então $f''(x) \leqslant 0$ para todo $x \in I$ (Corolário 5 do Teorema do Valor Médio).



Suponhamos agora que $f''(x) \leqslant 0$ para todo $x \in I$ e sejam $a \in I$, $b \in I$ com $a < b$. A função $f/[a, b]$ satisfaz as hipóteses para aplicação da fórmula de Taylor. Portanto, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f(b) = f(a) + f'(a) \quad (b - a) + \frac{f''(c) \quad (b-a)^2}{2} \leqslant$$

$$\leqslant f(a) + f'(a) \quad (b - a)$$

Logo, $f(b) \leqslant f(a) + f'(a) \quad (b - a)$, o que nos permite concluir que f é côncava.

C. Q. D.

Um teorema análogo pode ser demonstrado para as funções convexas a partir da observação de que g é convexa se, e somente se, $(-g)$ é côncava.

Teorema 19 — Seja $f: I \to R$ de classe C^1 em I e duas vezes diferenciável em I. A função f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geqslant 0$ para todo $x \in I$.

Com auxílio destes teoremas, fica bastante simples verificarmos se uma função é côncava ou convexa.

Exemplos:

40 — A função $f: R \to R$ dada por $f(x) = x^2$ é convexa, pois $f''(x) = 2 > 0$.

41 — A função $f: R_+ - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é côncava, pois $f''(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}} < 0$.

42 — A função $f: R_+ - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é convexa, pois $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0$.

43 — Seja $f: R \to R$ dada por $f(x) = e^{ax}$, $a \in R - \{0\}$. Então, $f''(x) = a^2 \cdot e^{ax} > 0$, isto é, f é uma função convexa.

44 — A função $f: R \to R$ dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, não é côncava nem convexa, pois $f''(x) = 6ax + 2b$, e esta expressão muda de sinal no ponto $x = -\dfrac{b}{3a}$.

45 — A função $f: R \to R$ dada por $f(x) = ax + b$ é côncava e convexa, pois $f''(x) = 0$.

Definição 8 — A função $f: I \to R$ diferenciável em I é estritamente côncava (estritamente convexa) se, para todo $a \in I$, $b \in I$, $a \neq b$:

$$f(b) < f(a) + f'(a)\ (b - a) \quad (f(b) > f(a) + f'(a)\ (b - a))$$

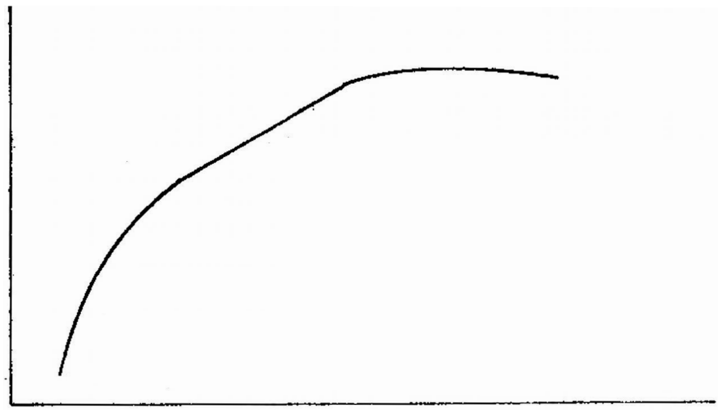
Todas as figuras que apresentamos anteriormente, na verdade, representaram funções estritamente côncavas ou convexas. As funções que são côncavas, mas não estritamente côncavas, podem apresentar trechos lineares em seus gráficos. O mesmo vale para as funções convexas que não são estritamente convexas.

Os principais resultados com relação às funções estritamente côncavas são os seguintes (demonstração a cargo do leitor):

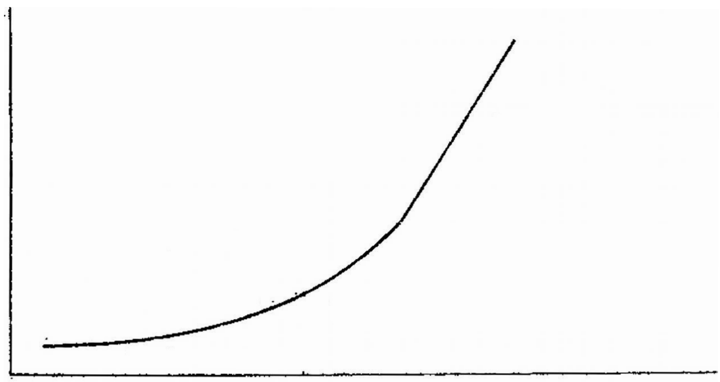
a) se $c \in I$ é tal que $f'(c) = 0$, então c é um máximo absoluto estrito de f;

b) f' é uma função monótona decrescente; e

c) se f satisfaz as hipóteses do Teorema 18 e $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente côncava.



Função côncava que não é estritamente côncava



Função convexa que não é estritamente convexa

É extremamente importante a observação de que não vale a recíproca da proposição "c", isto é, não é verdade que, se f é estritamente côncava, $f''(x) < 0$. Êste fato é de natureza semelhante ao que ocorre com a recíproca da parte "b" do Corolário 5 do Teorema do Valor Médio. O exemplo disto é a função $f: R \to R$ dada por $f(x) = -x^4$, que é estritamente côncava e, apesar disto, $f''(0) = 0$.

Verifiquemos que f é uma função estritamente côncava. Note-se, primeiro, que $f''(x) = -12x^2 \leqslant 0$ para todo $x \in R$, ou seja, f é côncava. Se f não é estritamente côncava, então existem dois números reais a e b, $a \neq b$, tais que $f(a) = f(b) + f'(b)\ (a - b)$, isto é:

$$- a^4 = - b^4 - 4b^3\ (a - b)$$

Manipulando esta expressão, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} 0 &= (b^4 - a^4) - 4b^3\ (b - a) = (b - a)\ [-3b^3 + a^2b + ab^2 + \\ &+ a^3] = (b - a)\ [(a^3 - b^3) + b\ (a^2 - b^2) + b^2\ (a - b)] = \\ &= (b - a)\ (a - b)\ [(a^2 + ab + b^2) + b\ (a + b) + b^2] = \\ &= -\ (a - b)^2\ [(a + b)^2 + 2b^2] \end{aligned}$$

Esta expressão é anulada se, e somente se, $a = b$, o que contradiz a hipótese inicial de que $a \neq b$.

Resta mencionar, ainda, que os fatos análogos são verdadeiros para as funções estritamente convexas. Não os tornaremos mais explícitos por julgarmos que já foram suficientemente denunciados no decorrer de toda a análise anterior.

V.1.3 — Regra de L'Hospital

A Regra de L'Hospital é a maneira mais simples de tratarmos certas formas indeterminadas. Para tornar a apresentação mais clara procuraremos fazer — à guisa de introdução — uma pequena apresentação das chamadas formas indeterminadas, que são as seguintes:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\ .\ \infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ \infty^0 \text{ e } 1^\infty$$

Examinemos alguns exemplos de funções que apresentam uma destas indeterminações. Sejam $\frac{x}{x}$, $\frac{x^3}{x}$, $\frac{x}{x^2}$ e $\frac{x \cos 1/x}{x}$ definidas em $R - \{0\}$. Em todos os casos acima temos que os limites do numerador e do denominador quando x tende para zero são iguais a zero. Note-se, entretanto, que o comportamento destas funções numa vizinhança da origem é totalmente distinto. Assim, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = 0$ e os outros dois limites, quando x tende para zero, não existem.

Em síntese, dadas $f\colon D \to R$ e $g\colon D \to R$, $D \subset R$, com $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ (a podendo ser mais ou menos infinito) e sendo $g(x) \neq 0$ para todo $x \in D$, o fato de que $\dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ é uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ não nos dá nenhuma informação sobre o comportamento da função $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ numa vizinhança de a.

Teorema 20 (Regra de L'Hospital) — Sejam f e g diferenciáveis em (a, b) e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Suponha-se que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ e que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Então, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Prova:

Nesta demonstração faremos uso do Teorema do Valor Médio generalizado, que estabelece que, se f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que $[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)$ (ver exercício n.º 5).

Seja p um número real tal que $L < p$ e seja r, número real, $r \in (L, p)$. Como $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, dado $\varepsilon = r - L$, existe $c_1 \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f'(y)}{g'(y)} < r$ para todo $y \in (a, c_1)$.

Sejam $x \in (a, c_1)$, $z \in (a, c_1)$ tais que $x < z$. $f/[x, z]$ e $g/[x, z]$ satisfazem as hipóteses do Teorema do Valor Médio generalizado e, portanto, existe $\xi \in (x, z)$ tal que:

$$\frac{f(x) - f(z)}{g(x) - g(z)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < r$$

Como g não é constante em (a, b), sempre podemos encontrar x e z tais que $g(x) \neq g(z)$, o que mostra que a expressão acima é bem definida.

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(z)}{g(x) - g(z)} \leqslant r < p$, isto é, $\dfrac{f(x)}{g(x)} < p$ para todo $x \in (a, c_1)$.

Como isto vale para todo $p > L$, segue-se que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant L$ para todo $x \in (a, c_1)$, e disto decorre que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant L$.

Seja agora $p \in R$ tal que $p < L$ e seja $r \in R$ tal que $p < r < L$. Portanto, dado $\varepsilon = L - r$, existe $c_2 \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(y)}{g(y)} > r$ para todo $y \in (a, c_2)$. De maneira análoga ao caso anterior, mostra-se que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant L$ para todo $x \in (a, c_2)$. Portanto, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant L$.

Em conclusão, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

C. Q. D.

Exemplos:

46 — Seja $f\colon R - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{x}$. Observe-se que $f/(0, 1)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 20. Portanto, como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$, então $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

47 — Seja $h\colon R - \{0\} \to R$ dada por $h(x) = \dfrac{x^2}{x}$. A função $h/(0, 1)$ satisfaz as hipóteses para aplicação da Regra de L'Hospital e, portanto, $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{1} = 0$.

48 — Seja $f\colon R - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. $f/(0, 1)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 20. Então, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1$.

Façamos agora algumas observações sobre a Regra de L'Hospital.

a) a Regra é ainda válida se L é mais ou menos infinito e se a também não é finito;

b) se, ao invés da hipótese $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, tivermos que $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, ou $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, também vale a Regra de L'Hospital – para demonstração, ver Rudin (1964, pp. 94-5); e

c) por fim, convém observar que outros tipos de indeterminação podem ser reduzidos aos casos considerados acima por meio de transformações adequadas.

Exemplos:

49 – Seja $f: R_+ - \{0\} \to R$ dada por $f(x) = x \log x$ ($\log =$ = logaritmo na base e). A função f não apresenta uma indeterminação dos tipos que podem ser tratados pela Regra de L'Hospital quando x tende para zero. Entretanto, se notarmos que $f(x) = \dfrac{\log x}{1/x}$, percebemos que o limite do denominador quando x tende para zero é $+\infty$ e, portanto (ver observação "b" anterior),
$$\lim_{x\to 0+} x \log x = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

50 – Seja $f: R \to R$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$. f apresenta uma indeterminação da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ quando x tende para ∞. Portanto, podemos aplicar a Regra de L'Hospital, isto é, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

51 – Seja $f: R_+ - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = x^x$. Esta função apresenta uma indeterminação do tipo 0^0 quando x tende para zero pela direita. Para aplicarmos a Regra de L'Hospital teremos que efetuar algumas transformações na função f. Inicialmente, consideremos $h: (0, \infty) \to R$ dada por $h(x) = \log f(x)$, isto é, $h(x) =$ $= x \log x$. Portanto (ver exemplo 49), $\lim_{x\to 0+} h(x) = 0$.

Note-se, agora, que $f(x) = e^{h(x)}$ e que, pela continuidade da função exponencial:

$$\lim_{x \to 0+} e^{h(x)} = e^{\lim\limits_{x \to 0+} h(x)} = 1$$

Conclui-se, assim, que $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$.

52 — Seja $f\colon R - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$. f apresenta uma indeterminação do tipo 1^∞ quando x tende para $+\infty$. Entretanto, utilizando uma transformação adequada, poderemos resolver o problema de calcular o limite quando x tende para $+\infty$ por meio da Regra de L'Hospital.

Seja $f/(0, +\infty)$ e definamos $h\colon (0, +\infty) \to R$ por $h(x) = \log f(x) = x \log (1 + 1/x)$. A função h pode ser ainda reescrita da seguinte forma:

$$h(x) = \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$$

Podemos, portanto, notar que ela apresenta uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ quando x tende para infinito. Utilizando a Regra de L'Hospital, obtém-se que:

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{-1/x^2}{1 + 1/x}}{\dfrac{-1}{x^2}} = 1$$

Tirando proveito da continuidade da função exponencial, obtém-se que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)} = e$$

V.2 — Diferenciabilidade de Funções de p Variáveis

Nesta seção procuraremos estudar a noção de diferenciabilidade para funções definidas em subconjuntos de R^p com valores em R. O leitor perceberá, ao longo da apresentação, que tal estudo apresenta semelhanças com o que fizemos na seção anterior. Entretanto, existem dificuldades adicionais, principalmente em função da estrutura do espaço R^p e, em menor escala, da notação mais pesada que deverá ser adotada.

Para evitar muitas repetições ao longo desta seção, sempre que nos referirmos a uma função f — salvo menção explícita em contrário — estaremos tratando do seguinte: $f: D \to R$, onde D é um subconjunto *aberto* de R^p. Da mesma forma, sendo D aberto, $c \in D$ é automaticamente um ponto de acumulação deste conjunto. Também omitiremos esta qualificação no que se segue.

Definição 9 — Seja $f: D \to R$ e seja $c \in D$. Diz-se que f possui a i-ésima *derivada parcial* no ponto c se existe o seguinte limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c + e_i h) - f(c)}{h}$$

onde $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ e $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ é o i-ésimo vetor da base canônica de R^p e $h \in R$.

Caso exista, o limite acima é a i-ésima derivada parcial de f no ponto c.

Convém notar que a derivada parcial de uma função é a maneira mais simples que nos poderia ocorrer para generalizar a definição da seção anterior. Se escrevermos o limite acima explicitando os componentes dos vetores, observaremos uma semelhança muito grande com o que fizemos anteriormente:

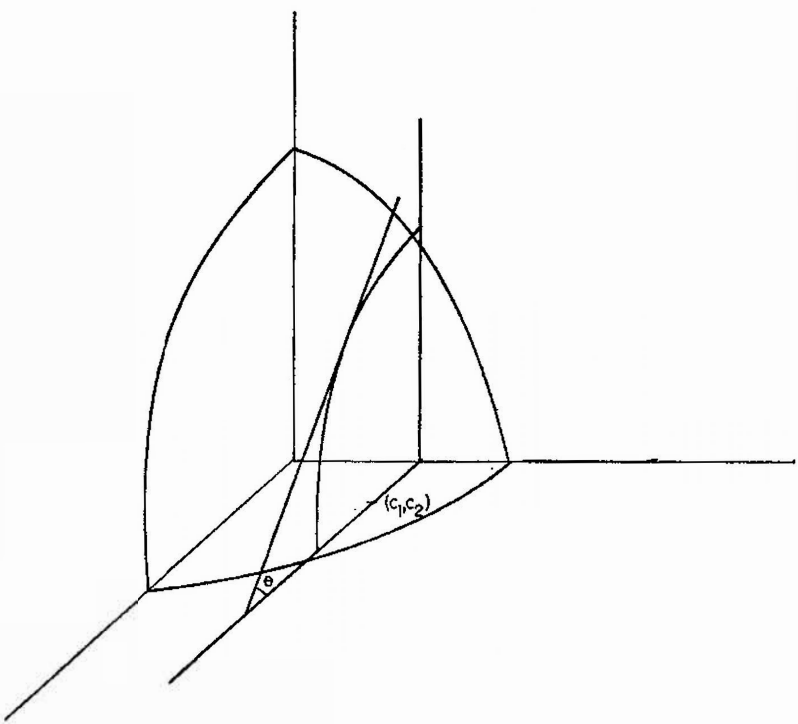
$$\lim_{h \to 0} \frac{f((c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_p) + (0, \ldots, h, \ldots, 0)) - f((c_1, c_2, \ldots, c_p))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(c_1, c_2, \ldots, c_i + h, \ldots, c_p) - f(c_1, c_2, \ldots, c_p)}{h}$$

Mais explicitamente ainda, a i-ésima derivada parcial de f no ponto $c \in D$ é a derivada da função de uma variável $g_i\colon H \to R$ definida por $g_i(x_i) = f(c_1, c_2, \ldots, x_i, \ldots, c_p)$, sendo $H = \{x_i \in R\colon (c_1, c_2, \ldots, x_i, \ldots, c_p) \in D\}$.

Portanto, valem para as derivadas parciais todos os teoremas demonstrados na seção anterior. Por exemplo, se existe a i-ésima derivada parcial no ponto c, a função g_i é contínua em c_i (veremos adiante que a existência das derivadas parciais não assegura a continuidade de f) e a regra da cadeia pode ser aplicada, assim como o Teorema do Valor Médio, desde que sejam satisfeitas as hipóteses correspondentes. Valem também as "fórmulas" de derivação vistas anteriormente.

Considerando uma função definida num subconjunto de R^2, sua segunda derivada parcial num ponto (c_1, c_2) é a inclinação da tan-



gente à curva formada pela interseção do gráfico de f (que está contido em R^3) com o plano perpendicular ao plano $(x_1, x_2, 0)$ e que passa pelo ponto $(c_1, 0, 0)$. Neste caso, a tangente trigonométrica do ângulo θ é a segunda derivada parcial de f no ponto (c_1, c_2).

Infelizmente, a existência das derivadas parciais de uma função não garante muita coisa com relação ao comportamento p-dimensional da função. Por exemplo, ela pode possuir todas as derivadas parciais — e, portanto, ser contínua em cada uma destas variáveis — sem, no entanto, ser contínua. Um *exemplo* disto é o seguinte:

53 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

A função f não é contínua na origem (exemplo 10 do Capítulo IV). Entretanto, como:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$$

existem as derivadas parciais de f na origem e elas são nulas. Além disto, as funções $g_1(x) = f(x, 0)$ e $g_2(x) = f(0, y)$ são, obviamente, contínuas.

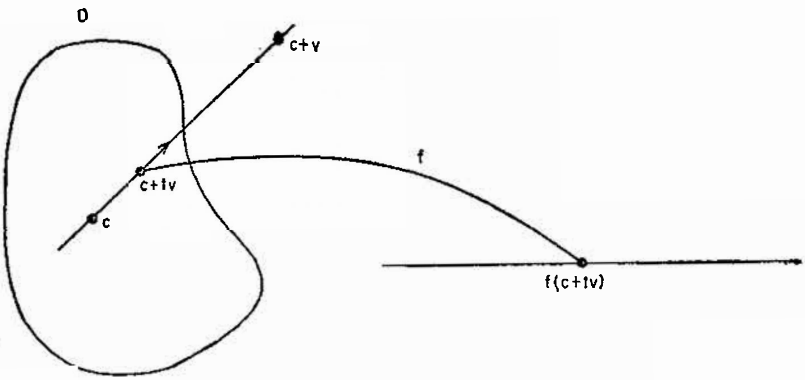
Fatos desta natureza, num certo sentido, deveriam ser esperados, pois quando calculamos as derivadas parciais de uma função estamos nos restringindo ao comportamento da mesma nas direções dos eixos coordenados em R^p. Portanto, uma noção mais geral de derivada deveria levar em conta outras direções em R^p (esta noção está contida na definição a seguir).

Definição 10 — Seja $c \in D$ e $v \in R^p - \{0\}$. Diz-se que f possui *derivada direcional* na direção v, no ponto c, se existe:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(c + tv) - f(c)}{t}$$

Caso exista, o limite acima é a derivada direcional de f na direção v (ou segundo o vetor v).

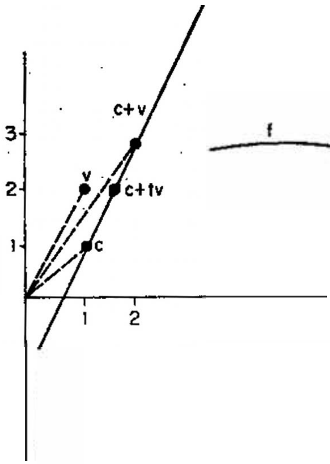
Esta derivada é simplesmente a derivada no ponto $t = 0$ da função (de uma variável) $f_o\lambda\colon I \to R$, onde I é um intervalo em R que contém a origem e $\lambda\colon I \to D$ é definida por $\lambda(t) = c + tv$. Geometricamente, $\lambda(I)$ é a porção do segmento de reta que liga os pontos c e $c + v$ em R^p que está contida em D.

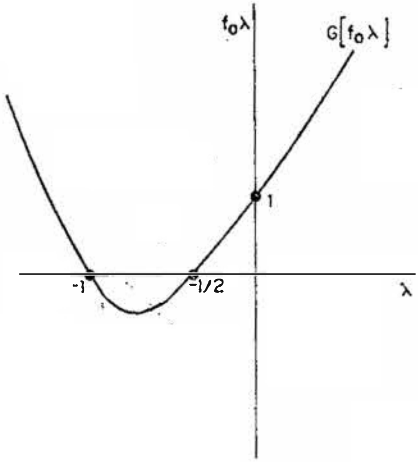


Para exemplificar, considere-se a função $f\colon R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = xy$ e sejam $c = (1, 1)$ e $v = (1, 2)$. A função λ, neste caso, é dada por $\lambda(t) = c + tv = (1 + t, 1 + 2t)$ para todo $t \in R$. $f_o\lambda(t) = f[\lambda(t)] = (1 + t)\ (1 + 2t)$ e, portanto, $(f_o\lambda)'(0) = 3$ (ver figura na página seguinte).

Quando consideramos o vetor e_i da base canônica de R^p como o vetor v da Definição 10, a derivada direcional na direção e_i é simplesmente a i-ésima derivada parcial da função. No exemplo acima, quando tomamos $v = (1, 0)$, $f_o\lambda(t) = (1 + t)$ e, portanto, $(f_o\lambda)'(0) = 1$, que é a primeira derivada parcial de f no ponto $(1, 1)$.

A notação que será utilizada para a derivada direcional de f segundo o vetor v, no ponto c, é $\dfrac{\partial f}{\partial v}(c)$. Dessa forma, para ser consistente com a notação, a i-ésima derivada parcial de f no ponto





c deveria ser anotada $\dfrac{\partial f}{\partial e_i}(c)$. Tal, entretanto, não é a prática usual, pois indica-se esta derivada por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(c)$. Não fugiremos a esta regra, porém cabe uma advertência quanto ao seu uso. Freqüentemente nos deparamos com a seguinte situação: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$. Neste caso, o x_i tem duas funções diferentes (e daí algumas confusões que as vezes são feitas) : ele indica a direção segundo a qual estamos calculando a derivada e também é um componente do vetor que indica o ponto onde a derivada está sendo calculada. Num caso destes, adotar a notação $f_i(x)$ parece uma boa solução salomônica.

Exemplos:

54 — Seja f definida no exemplo 53 e examinemos a existência das derivadas direcionais de f na origem. Seja $v = (v_1, v_2) \in R^2 -$ $- \{0\}$ e considere-se:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left\{\frac{t^2 v_1 v_2}{t^2(v_1^2 + v_2^2)}\right\} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left\{\frac{v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2}\right\}$$

Portanto, se $v_1 = 0$ ou $v_2 = 0$, o limite acima existe e é zero, o que, como já havíamos observado, corresponde à existência das derivadas parciais de f. Entretanto, se $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$, o limite acima é infinito (portanto, não existe em R), significando que não existem as demais derivadas direcionais de f.

55 — Seja agora $f: R^2 \to R$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{x^2 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Examinemos a existência das derivadas direcionais de f na origem. Dado $v = (v_1, v_2) \in R^2 - \{0\}$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (f(tv) - f(0, 0)) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ \frac{t^3\, v_1\, v_2^2}{t^2 (v_1^2 + t^2\, v_2^4)} \right\} = \lim_{t \to 0} \frac{v_1\, v_2^2}{v_1^2 + t^2\, v_2^4}$$

Portanto, se $v_1 \neq 0$, o limite acima será $\dfrac{v_2^2}{v_1}$ e, se $v_1 = 0$, o limite é zero, o que significa que existem todas as derivadas direcionais de f.

Apesar disto, f não é contínua na origem. Para verificarmos isto, basta considerarmos a seqüência $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n} \right)$ em R^2. Temos que $\lim\, (x_n) = (0, 0)$ e, no entanto, $\lim\, (f(x_n)) = 1/2 \neq f(0, 0)$.

56 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2\,x\,y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dado $v \in R^2 - \{0\}$, a derivada direcional de f segundo v, no ponto $(0, 0)$ (se existir), é dada por:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ \frac{2\, v_1\, v_2}{v_1^2 + v_2^2} - 1 \right\}$$

Este limite existe em R se, e somente se, o termo entre chaves é nulo; o que ocorre se, e somente se, $v_1 = v_2$, significando que somente existem as derivadas na direção dos vetores $v = (v_1, v_1)$.

57 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x^{1/3} \cdot y^{1/3}$ e sejam $v \in R^2 - \{0\}$ e $c = (0, 0)$. Então:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ t^{2/3} \cdot v_1^{1/3} \cdot v_2^{1/3} \right\} = \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{v_1^{1/3} \cdot v_2^{1/3}}{t^{1/3}} \right\}$$

O limite acima existe se, e somente se, $v_1 = 0$ ou $v_2 = 0$. Neste caso, o limite é zero. Nas demais direções, f não possui derivada direcional.

Considere-se agora o ponto $c = (0, c_2)$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(c + tv) - f(c)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv_1, c_2 + tv_2) - f(0, c_2)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^{1/3} \cdot v_1^{1/3} (c_2 + tv_2)^{1/3}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{v_1^{1/3} (c_2 + tv_2)^{1/3}}{t^{2/3}}$$

O limite acima existe se, e somente se, $v_1 = 0$. Nos demais casos, f não possui derivada naquela direção.

Já procuramos generalizar a noção de derivada de duas maneiras e, no entanto, observamos que as tentativas são insuficientes para nos darem informações sobre o comportamento p-dimensional da função. Para podermos provar resultados análogos aos da seção anterior para uma função definida num subconjunto de R^p, necessitamos de uma noção mais forte, qual seja, a de diferenciabilidade.

Definição 11 — Seja $f: D \to R$ e seja $c \in D$. A função f é *diferenciável* no ponto c se:

a) existem as derivadas parciais de f em c; e

b) para todo $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p) \in R^p$ tal que $c + h \in D$, temos:

$$f(c + h) = f(c) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(c) \cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c) \cdot h_p + r(h)$$

onde $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$.

A qualificação mais importante da definição acima é de que $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$, o que significa simplesmente que $r(h)$ tende a zero mais rapidamente do que $|h|$ e, dessa forma, a expressão $f(c) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(c) \cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c) \cdot h_p$ é uma boa aproximação para f numa vizinhança do ponto c. Na verdade, esta expressão é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$.

Formas equivalentes de apresentar a parte "b" da definição de diferenciabilidade de f no ponto c são:

a) para todo $h \in R^p$ tal que $c + h \in D$, temos $f(c + h) = f(c) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(c) \cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c) \cdot h_p + |h| \cdot \varphi(h)$, onde $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$ e $\varphi(0) = 0$; e

b) f é diferenciável em $c \in D$ se o limite abaixo existe e é nulo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c) - \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) \cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c) \cdot h_p\right]}{|h|}$$

Denotaremos a expressão:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(c) \cdot h_2 + \ldots + \frac{\partial h}{\partial x_p}(c) \cdot h_p$$

por $df(c) \cdot h$, onde:

$$df(c) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c), \frac{\partial f}{\partial x_2}(c), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)\right)$$

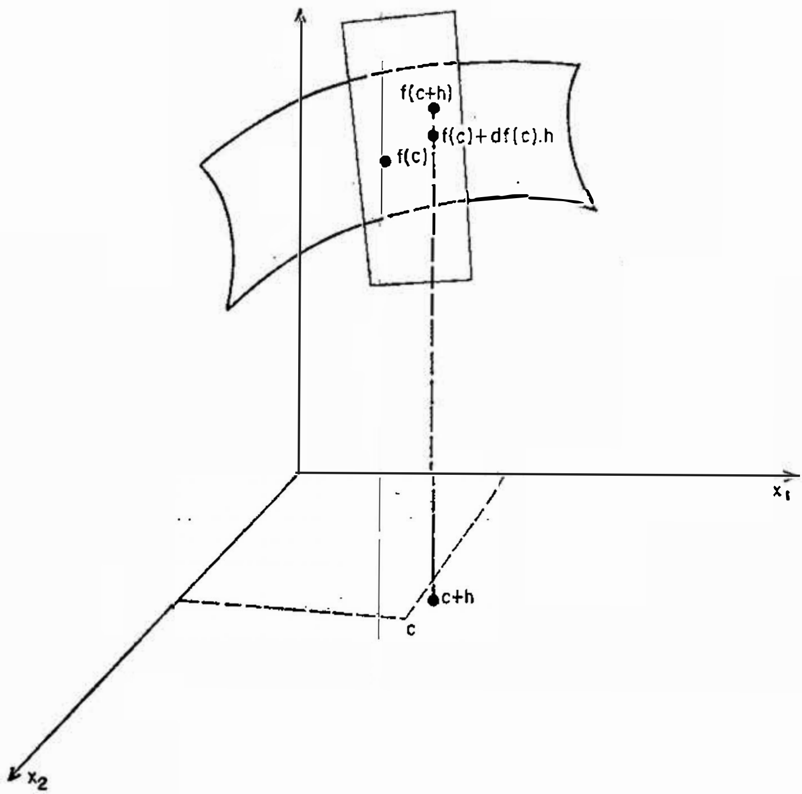
é o vetor das derivadas parciais de f no ponto c. $df(c)$ é chamada a diferencial de f no ponto c. Observe-se que, dados $h \in R^p$, $w \in R^p$, $\alpha \in R$ e $\beta \in R$, $df(c) \cdot (\alpha h + \beta w) = \alpha df(c) \cdot h + \beta \cdot df(c) \cdot w$, isto é, $df(c)$ é a matriz (neste caso, um vetor $1 \times p$) de uma função linear de R^p em R. A notação $df(c) \cdot h$, portanto, indica o valor desta função no ponto $h \in R^p$.

Com esta notação, a definição de diferenciabilidade pode ser assim reescrita:

$$f(c + h) = f(c) + df(c) . h + r(h)$$

onde $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{|h|} = 0.$

Voltando agora à noção geométrica associada à diferenciabilidade, podemos visualizar uma função diferenciável num ponto como sendo aquela que pode ser linearmente bem aproximada neste ponto. A importância disto é que, em geral, é mais fácil trabalhar com funções lineares. A figura a seguir procura ilustrar este fato.



Passemos agora a considerar alguns exemplos:

58 — Seja $\pi_1: R^2 \to R$ dada por $\pi_1(x, y) = x$. Dado $c \in R^2$, existem $\frac{\partial \pi_1}{\partial x}(c)$ e $\frac{\partial \pi_1}{\partial y}(c)$ e, para todo $h \in R^2$:

$$\pi_1(c + h) = \pi_1(c) + \frac{\partial \pi_1}{\partial x}(c) \, . h_1 + \frac{\partial \pi_1}{\partial y}(c) \, . h_2$$

pois $\pi_1(c + h) = c_1 + h_1$, $\pi_1(c) = c_1$, $\frac{\partial \pi_1}{\partial x}(c) = 1$ e $\frac{\partial \pi_1}{\partial y}(c) = 0$.

Logo, $r(h) = 0$ para todo $h \in R^2$ e concluímos que π_1 é uma função diferenciável em todos os pontos de R^2. Sua diferencial no ponto $c \in R^2$ é $d\,\pi_1(c) = (1, 0)$.

59 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = xy$. Dados $c \in R^2$ e $h \in R^2$:

$$f(c + h) = (c_1 + h_1)\ (c_2 + h_2)$$
$$f(c) = c_1\, c_2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(c) = c_2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(c) = c_1$$

Portanto, $r(h) = f(c + h) - f(c) - \frac{\partial f}{\partial x}(c) \, . h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(c) \, . h_2 = h_1\, h_2$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{h_1\, h_2}{|\,h|} = \lim_{h \to 0} \frac{h_1\, h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

uma vez que:

$$\left| \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leqslant 1$$

e h_2 tende para zero quando h tende para zero.

60 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Já vimos que f possui derivadas parciais nulas no ponto $(0, 0)$. Portanto, para todo $h \in R^2$, temos:

$$r(h) = \frac{h_1\ h_2}{h_1^2 + h_2^2}$$

e assim o limite de $\dfrac{r(h)}{|h|}$ quando h tende para zero não se anula (para verificar isto, considere-se a sucessão $(1/n,\ 1/n)$ em R^2). Em outras palavras, f não é diferenciável.

Este exemplo é um dos casos em que, apesar da existência das derivadas parciais, a função f não é diferenciável. É interessante observar que, neste caso, as derivadas parciais não são funções contínuas no ponto $(0, 0)$. Para verificarmos isto, analisemos a primeira derivada parcial, ou seja, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Dado $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\ \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

Considerando a seqüência $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right)$ em R^2, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) = \dfrac{12}{25} \cdot n$, que é uma sucessão divergente. Portanto, não existe o limite de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ quando (x, y) tende para $(0, 0)$, o que confirma que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ não é uma função contínua.

61 — Seja $f\colon R^p \to R$ uma função linear. Como já vimos, a cada função linear existe uma matriz A associada tal que $f(x) = A.x$ para todo $x \in R^p$. Neste caso, A é uma matriz $1 \times p$, isto é, um vetor de R^p. É fácil ver que f é diferenciável e que $df(c) = A$ para todo $c \in R^p$, pois $f(x + h) = f(x) + f(h) = A.x + A.h$.

Logo, $r(h) = 0$ para todo $h \in R^p$, donde se segue que $df(c) = A$.

Passaremos agora a investigar algumas das principais propriedades das funções diferenciáveis.

Teorema 21 — Se f é diferenciável em $c \in D$, f é contínua em c.

Prova:

f é diferenciável em c se existem as derivadas parciais $f_i(c)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, e $f(c + h) = f(c) + df(c).h + r(h)$, sendo $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{|h|} = 0$. Desta última condição segue-se que $\lim\limits_{h \to 0} r(h) = 0$ e, portanto, $\lim\limits_{h \to 0} f(c + h) = f(c)$.

C. Q. D.

Teorema 22 — Se f é diferenciável em $c \in D$, então para todo $v \in R^p - \{0\}$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$, existe a derivada direcional de f e, além disto, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(c) = df(c).v$.

Prova:

Como f é diferenciável em $c \in D$, qualquer que seja $t \in R$ tal que $c + tv \in D$, temos que:

$$f(c + tv) = f(c) + df(c).tv + r(tv), \quad \lim_{t \to 0} \frac{r(tv)}{|tv|} = 0$$

Assim:

$$\frac{f(c + tv) - f(c)}{t} = df(c).v + \frac{r(tv)}{t}$$

donde se segue que:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(c + tv) - f(c)}{t} = \lim_{t \to 0} \left[df(c).v + \frac{r(tv)}{t} \right] = df(c).v$$

uma vez que:

$$\lim_{t \to 0+} \frac{r(tv)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{r(tv)}{t|v|} \cdot |v| = 0$$

e:

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{r(tv)}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{r(tv)}{-|t|\,|v|} \cdot |v| = 0$$

C. Q. D.

Teorema 23 (Teorema do Valor Médio) — Seja $f: D \to R$ diferenciável em D. Sejam $c \in D$ e $h \in R^p$ tais que $c + h \in D$ e, além disto, o segmento de reta que une os pontos c e $c + h$ está totalmente contido em D. Nestas condições, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $f(c + h) = f(c) + df(c + \theta h) . h$.

Prova:

Seja $h \in R^p$ e seja $\phi: [0, 1] \to R$ definida por $\phi(t) = f(c + th)$. Inicialmente, mostraremos que ϕ é diferenciável em $(0, 1)$. Dado $\bar{t} \in (0, 1)$:

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{\phi(\bar{t} + \eta) - \phi(\bar{t})}{\eta} =$$

$$= \lim_{\eta \to 0} \frac{f((c + \bar{t}h) + \eta h) - f(c + \bar{t}h)}{\eta} = \frac{\partial f}{\partial h}(c + \bar{t}h)$$

uma vez que f é diferenciável no ponto $c + \bar{t}h$. Além disto, nestas condições temos que:

$$\phi'(\bar{t}) = \frac{\partial f}{\partial h}(c + \bar{t}h) = df(c + \bar{t}h) . h$$

Temos então que ϕ é contínua em $[0, 1]$ (f é diferenciável em D) e diferenciável em $(0, 1)$. Aplicando o Teorema do Valor Médio para funções de uma variável, segue-se que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\theta)$, ou, ainda, $f(c + h) = f(c) + df(c + \theta h) . h$.

C. Q. D.

Antes de explorarmos algumas implicações do Teorema do Valor Médio, devemos observar que, com a mesma demonstração acima, o resultado continua verdadeiro se admitirmos apenas que f é diferenciável no segmento de reta que une c e $c + h$, exceto possivelmente nos extremos, e que f é contínua em todo o segmento (incluindo os extremos).

Corolário 1 — Seja f diferenciável no conjunto aberto convexo D e seja $M \in R$ tal que $|df(c)| \leqslant M$ para todo $c \in D$. Então, para todo $x \in D$ e $y \in D$, $|f(x) - f(y)| \leqslant M\, |x - y|$. Em outras palavras, f é Lipschitziana.

Prova:

Dados $x \in D$ e $y \in D$, o segmento de reta que une x a y está contido em D (pois este é convexo). Então, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $f(x) = f(y) + df(y + \theta\, (x - y)) \cdot (x - y)$.

Portanto, $|f(x) - f(y)| = |df(y + \theta\, (x - y)) \cdot (x - y)| \leqslant \leqslant |df(y + \theta\, (x - y))|\, |x - y| \leqslant M\, |x - y|$.

C. Q. D.

Corolário 2 — Seja f diferenciável no conjunto aberto conexo D e seja $df(x) = 0$ para todo $x \in D$. A função f é, neste caso, a função constante.

Prova:

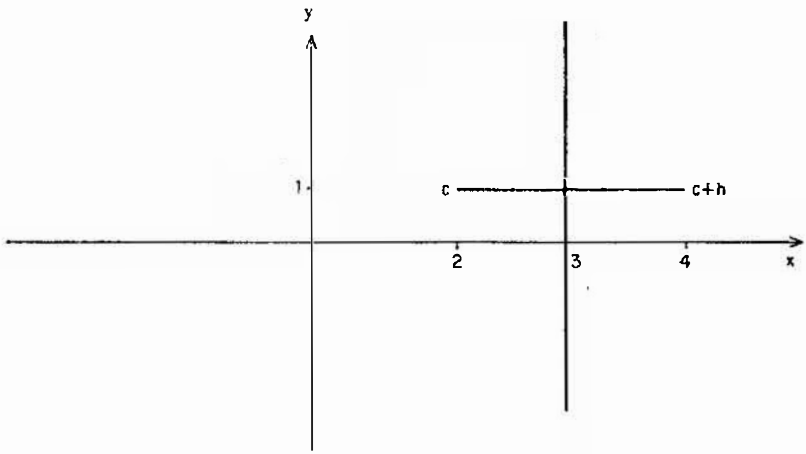
Seja $c \in D$ e consideremos o conjunto $D_1 = \{x \in D\colon f(x) = f(c)\}$. Queremos mostrar que D_1 é um conjunto aberto. Como $D_1 \neq \phi$ $(c \in D_1)$, seja $x \in D_1$. O conjunto D é aberto e, portanto, existe uma bola aberta $B(x, r)$, $r > 0$, totalmente contida em D. Como a bola é um conjunto convexo, por definição, ela contém o segmento de reta que une x a z, sendo $z \in B(x, r)$. O Teorema do Valor Médio e a hipótese de que $df = 0$ nos permitem concluir que $f(x) = f(z)$. Mas então $z \in D_1$ e, sendo z arbitrário, $B(x, r) \subset D_1$. Logo, D_1 é aberto.

Seja agora o conjunto $D - D_1 = \{x \in D\colon f(x) \neq f(c)\}$. Como f é contínua, segue-se do Corolário 2 do Teorema 10 do Capítulo IV que $D - D_1$ é aberto. Ora, mas D é conexo e $D = D_1 \cup (D - D_1)$, o que só é possível se $D - D_1 = \phi$.

C. Q. D.

Consideremos, como ilustração, um exemplo em que o segmento de reta que une os pontos c e $c + h$ não está contido no domínio de f e mostremos que o Teorema do Valor Médio não se verifica.

62 — Seja $f: D \to R$, $D = R^2 - \{(x, y) : x = 3\}$ definida por $f(x, y) = \dfrac{y}{x-3}$ e sejam $(c_1, c_2) = (2, 1)$ e $h = (h_1, h_2) = (2, 0)$.



Claramente, o segmento de reta que liga c e $c + h$ não está em D. Note-se que $f(c) = -1$, $f(c + h) = 1$ e $df(c + \theta h) = \left(\dfrac{1}{(2\theta - 1)^2}, \dfrac{1}{(2\theta - 1)}\right)$. Portanto, $1 = -1 + \dfrac{-1}{(2\theta - 1)^2}(2) + \dfrac{1}{2\theta - 1} \cdot 0$, ou seja, $2\theta^2 - 2\theta + 1 = 0$.

Esta equação não tem raízes reais e, portanto, não existe θ que satisfaça $f(c + h) = f(c) + df(c + \theta h) . h$.

V.2.1 — Teorema de Schwarz

Definição 12 — Seja $f: D \to R$. Diz-se que f é duas vezes diferenciável no ponto $c \in D$ se f é diferenciável em D e se as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}: D \to R$, $i = 1, 2, \ldots, p$, são diferenciáveis no ponto c.

Quando f é duas vezes diferenciável no conjunto D, existem p^2 funções: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}: D \to R$ definidas por $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x)$, que são as (funções) derivadas parciais de segunda ordem de f. Quando $i \neq j$ em $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}$, estas derivadas são chamadas de *derivadas mistas* ou *derivadas cruzadas*.

A noção de função duas vezes diferenciável num ponto $c \in D$ pode ser facilmente estendida. Por exemplo, diz-se que f é três vezes diferenciável no ponto $c \in D$ se f é duas vezes diferenciável em D e se as funções $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}: D \to R$ são diferenciáveis no ponto $c \in D$, $i, j = 1, 2, \ldots, p$.

Definição 13 — Seja $f: D \to R$. Diz-se que f é de classe C^1 em D, indica-se $f \in C^1(D)$ ou simplesmente $f \in C^1$, quando existem todas as derivadas parciais em D e essas são funções contínuas em D. Se $f \in C^1(D)$ e se $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1(D)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, então diz-se que f é de classe C^2 em D, indica-se $f \in C^2(D)$.

De maneira geral, diremos que f é de classe C^k em D ($f \in C^k(D)$), $k \geqslant 1$, se f possui todas as derivadas parciais em D e estas são funções de classe C^{k-1} em D. Diz-se que f é de classe C^∞ quando f é contínua e f é de classe C^k para todo $k \in N$. Quando f é contínua, costuma-se também dizer que $f \in C^0$.

Exemplo:

63 — A função $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x\, y$ é de classe C^∞, pois é contínua e:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$ para todo $(x, y) \in R^2$ são contínuas;

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = 1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} = 1$ para todo $(x, y) \in R^2$ são contínuas; e

c) as demais derivadas parciais de ordem superior são nulas em todos os pontos de R^2.

Veremos agora que, apesar de a existência das derivadas parciais não garantir a diferenciabilidade da função, se estas derivadas forem contínuas (isto é, $f \in C^1$) f será diferenciável (veja-se o exemplo 60).

Teorema 24 — Seja $f: D \to R$, $f \in C^1$. Então, f é diferenciável.

Prova:

Seja $c = (c_1, c_2, \ldots, c_p) \in D$ e seja dado $\varepsilon > 0$. Então, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo $y \in D$, $|y - c| < \delta(\varepsilon)$, teremos $|f_i(y) - f_i(c)| < \frac{\varepsilon}{p}$, $i = 1, 2, \ldots, p$ (f_i é a i-ésima derivada parcial de f).

Seja agora $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $z_1 = (c_1, x_2, \ldots, x_p)$, $z_2 = (c_1, c_2, x_3, \ldots, x_p)$, $\ldots$, $z_j = (c_1, c_2, \ldots, c_j, x_{j+1}, \ldots, x_p)$, $\ldots$, $z_{p-1} = (c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}, x_p)$, $z_p = c$ e façamos $z_0 = x$.

Note-se que, se $|z_0 - z_p| < \delta(\varepsilon)$, então $|z_j - z_p| < \delta(\varepsilon)$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Além disto:

$$f(z_0) - f(z_p) = [f(z_0) - f(z_1)] + [f(z_1) - f(z_2)] + \\ + \ldots + [f(z_{p-1}) - f(z_p)]$$

Como D é um conjunto aberto, existe bola de centro em $z_p = c$ totalmente contida em D. Se x pertence a esta bola, então os z_j também pertencem a ela. Como a bola é um conjunto convexo, dados z_{j-1} e z_j, o segmento de reta que une estes dois pontos está totalmente contido em D. Seja então $g: [c_j, x_j] \to R$ definida por $g(y) = f(c_1, c_2, \ldots, c_{j-1}, y, x_{j-1}, \ldots, x_p)$. g é uma função contínua em $[c_j, x_j]$ (pois as derivadas parciais existem) e diferenciável em (c_j, x_j). Pelo Teorema do Valor Médio para funções de uma variável, existe $\xi \in (c_j, x_j)$ tal que $g(x_j) - g(c_j) = g'(\xi)(x_j - c_j)$. Logo, tem-se:

$$f(z_{j-1}) - f(z_j) = f_j(\bar{z}_j) \quad (x_j - c_j)$$

Portanto:

$$f(z_0) - f(z_p) = (x_1 - c_1)\, f_1(\bar{z}_1) + (x_2 - c_2)\, f_2(\bar{z}_2) +$$
$$+ \ldots + (x_p - c_p)\, f_p(\bar{z}_p)$$

ou, ainda:

$$f(x) - f(c) - [(x_1 - c_1)\, f_1(c) + (x_2 - c_2)\, f_2(c) +$$
$$+ \ldots + (x_p - c_p)\, f_p(c)] = (x_1 - c_1)\, [f_1(\bar{z}_1) - f_1(c)] +$$
$$+ (x_2 - c_2)\, [f_2(\bar{z}_2) - f_2(c)] + \ldots + (x_p - c_p)\, [f_p(\bar{z}_p) - f_p(c)] \quad (4)$$

Reescrevendo uma vez mais com uma notação mais compacta, temos:

$$f(x) - f(c) - df(c) \cdot (x - c) = r(x)$$

onde $r(x)$ é, por definição, o lado direito da equação (4).

Para terminarmos a demonstração, devemos mostrar ainda que $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{r(x)}{|x - c|} = 0$. Para tanto, seja $x \in D$ tal que $|x - c| < \delta$. Então, $|f_j(\bar{z}_j) - f_j(c)| < \varepsilon / p$ e, portanto:

$$\left| \frac{r(x)}{|x - c|} \right| \leqslant \frac{|x_1 - c_1|}{|x - c|} \, |f_1(\bar{z}_1) - f_1(c)| + \ldots +$$
$$+ \frac{|x_p - c_p|}{|x - c|} \, |f_p(\bar{z}_p) - f_p(c)| \leqslant |f_1(\bar{z}_1) - f_1(c)| +$$
$$+ \ldots + |f_p(\bar{z}_p) - f_p(c)| < p \cdot \frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon$$

C. Q. D.

Este teorema é muito importante, pois em grande parte das aplicações as funções que aparecem são de classe C^1 ou mesmo C^2. Nestas aplicações, quase sempre é menos trabalhoso verificar que as derivadas parciais são contínuas do que utilizar a definição de diferenciabilidade.

Exemplos:

64 — Seja $f\colon R^2 - \{0\} \to R$ definida por $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. Verifiquemos que f é diferenciável. Para tanto, note-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cdot \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^4}$$

e:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

são funções contínuas em $R^2 - \{0\}$. Pelo teorema acima, f é diferenciável neste conjunto.

65 — A função $f\colon R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$ é diferenciável, pois $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$ são funções contínuas.

Teorema 25 (Schwarz) — Seja $f\colon D \to R$, $f \in C^2$ em D. Então, para todo $c \in D$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(c),\ i, j = 1, 2, \ldots, p$$

Prova:

Consideremos inicialmente $D \subset R^2$ e indiquemos o valor de f no ponto $x = (x_1, x_2) \in D$ por $f(x_1, x_2)$. Sejam $c = (c_1, c_2) \in D$ e $\Delta(h, k) = f(c_1 + h, c_2 + k) - f(c_1, c_2 + k) - f(c_1 + h, c_2) + f(c_1, c_2)$.

Note-se agora que:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}(c) = \lim_{k \to 0} \lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h, k)}{hk}$$

Como D é aberto, existe $B(c, r) \subset D$, sendo $r > 0$. Sejam (h, k) tais que $(c_1 + h, c_2 + k) \in B(c, r)$ e consideremos a função $g\colon [c_2, c_2 + k] \to R$ definida por $g(z) = f(c_1 + h, z) - f(c_1, z)$.

g é uma função contínua em $[c_2, c_2 + k]$ e derivável em $(c_2, c_2 + k)$. Pelo Teorema do Valor Médio para funções de uma variável, pode-se afirmar que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $\Delta(h, k) = g(c_2 + k) - g(c_2) = g'(c_2 + \theta k) .k$.

Portanto:

$$\Delta(h, k) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1 + h, c_2 + \theta k) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1, c_2 + \theta k)\right] k$$

uma vez que:

$$g'(c_2 + \theta k) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1 + h, c_2 + \theta k) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1, c_2 + \theta k)$$

Utilizando ainda uma vez mais o Teorema do Valor Médio, podemos afirmar que existe $\gamma \in (0, 1)$ tal que:

$$\Delta(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2}(c_1 + \gamma h, c_2 + \theta k) \, . \, hk$$

Utilizando a definição de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1}(c)$, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1}(c) = \lim_{k \to 0} \lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h, k)}{hk} =$$

$$= \lim_{k \to 0} \lim_{h \to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2}(c_1 + \gamma h ; c_2 + \theta k)$$

Como $f \in C^2$, segue-se que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1}(c) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2}(c)$.

O caso em que $D \subset R^p$ pode ser demonstrado de maneira análoga ao acima.

C. Q. D.

Tendo em vista o Teorema de Schwarz, fica fácil entender por que, no exemplo 63, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}(x, y) = 1$, o que se segue imediatamente do fato de que $f \in C^2$.

Um exame cuidadoso da prova acima revelará que, na verdade, provamos o seguinte fato (um pouco mais geral do que o enunciado) : se f é diferenciável e a função $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2}: D \to R$ é contínua em D, então existem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1}: D \to R$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1}$.

Um exemplo de uma função que não possui as derivadas mistas iguais é o seguinte: seja $f\colon R^2 \to R$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, \text{ se } (x, y) = (0, 0) & \end{cases}$$

Para $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cdot \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

e:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cdot \frac{x^4 - 4y^2x^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

Além disto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Portanto, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ são contínuas. Elas também são contínuas na origem, pois:

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} y \cdot \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} =$$

$$= \lim_{(x, y) \to (0, 0)} x \cdot \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{x^4 - 2x^2y^2 + y^4} = 0$$

uma vez que:

$$\left| \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \right| \leqslant 1 \quad \text{e} \quad \lim_{(x, y) \to (0, 0)} x = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} y = 0$$

Portanto, f é de classe C^1 e, em conseqüência disto, é diferenciável.

Calculemos agora $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0, 0)$. Por definição:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0, 0) = \lim_{x\to 0}\ \lim_{y\to 0} \frac{f(x, y) - f(0, y) - f(x, 0) + f(0, 0)}{xy} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\ \lim_{y\to 0} \frac{xy(x^2 - y^2)}{xy(x^2 + y^2)} = \lim_{x\to 0}\ \lim_{y\to 0} \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x}(0, 0) = \lim_{y\to 0}\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1$$

Isto mostra que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0, 0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0, 0)$. Tal acontece porque f não é uma função de classe C^2. Na verdade, f não é duas vezes diferenciável no ponto $(0, 0)$, como mostraremos a seguir. Note-se que no ponto $(0, 0)$ a função $\dfrac{\partial f}{\partial x}: R^2 \to R$ possui as derivadas parciais $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0, 0) = -1$.

Além disto, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(h, k) = \dfrac{k\,[h^4 - k^4] - 4\,h^2\,k^3}{(h^2 + k^2)^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Portanto, para que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ seja diferenciável na origem, é necessário e suficiente que seja nulo o limite abaixo, quando (h, k) tende para $(0, 0)$:

$$\frac{r(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{k\,[h^4 - k^4] - 4\,h^2\,k^3 + k\,[h^2 + k^2]^2}{(h^2 + k^2)^2 \cdot \sqrt{h^2 + k^2}}$$

Se considerarmos a sucessão $(1/n, 2/n)$ em $R^2 - \{0\}$, veremos que:

$$\lim \left(\frac{r(1/n, 2/n)}{\sqrt{1/n^2 + 4/n^2}} \right) = -\frac{3}{50 \cdot \sqrt{5}}$$

e portanto o limite de $\dfrac{r(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ não é zero quando (h, k) tende para $(0, 0)$.

Para finalizar a discussão do Teorema de Schwarz, convém mencionar que é possível demonstrá-lo mesmo quando f é duas vezes diferenciável. Entretanto, como o caso das funções de classe C^2 é muito importante nas aplicações econômicas, nos restringimos a ele [ver Lima (1981)].

V.2.2 — Teorema de Taylor

Procuraremos, nesta subseção, desenvolver o Teorema de Taylor para funções definidas em subconjuntos de R^p com valores em R. Conceitualmente, a demonstração do teorema é totalmente baseada no Teorema de Taylor para funções de uma variável.

Procederemos inicialmente ao cálculo das derivadas superiores, à guisa de preparação para o teorema.

Sejam $f: D \to R$, $c \in D$, $h \in R^p$. Para todo $t \in R$ tal que $c + th \in D$, definamos $\phi(t) = f(c + th)$.

Já vimos, na demonstração do Teorema do Valor Médio, que ϕ é derivável em todo ponto onde $f(c + th)$ o seja. Além disto:

$$\phi'(t) = df(c + th) \cdot h = \sum_{i=1}^{p} f_i(c + th)\, h_i$$

onde o símbolo $\sum\limits_{i=1}^{p}$ é utilizado para indicar a soma. Assim:

$$\sum_{i=1}^{p} f_i(c + th)\, h_i = f_1(c + th) \cdot h_1 + f_2(c + th) \cdot h_2 + \ldots + f_p(c + th)\, h_p$$

Consideremos agora a função:

$$\alpha_j(t) = f_j(c + th)$$

onde $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Aplicando o mesmo resultado acima à função α_j, obtemos que, se $f_j(c + th)$ é diferenciável:

$$\alpha'_j(t) = df_j(c + th) \cdot h \tag{5}$$

$df_j(c + th)$ é o vetor das p derivadas da função f_j, ou seja:

$$df_j(c+th) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_j}(c+th), \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_j}(c+th), \ldots,\right.$$

$$\left. \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_p\, \partial x_j}(c+th)\right) = (f_{1j}(c+th), f_{2j}(c+th), \ldots, f_{pj}(c+th))$$

Portanto, podemos escrever (5) da seguinte maneira:

$$\alpha'_j(t) = df_j(c+th) \,.\, h = \sum_{i=1}^{p} f_{ij}(c+th) \,.\, h_i$$

Esta fórmula vale para $j = 1, 2, \ldots, p$.

Agora, note-se que:

$$\phi'(t) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j(t) \,.\, h_j.$$

e, portanto:

$$\phi''(t) = \sum_{j=1}^{p} \alpha'_j(t)\, h_j = \sum_{j=1}^{p} \left[\sum_{i=1}^{p} f_{ij}(c+th) \cdot h_i\right] h_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} f_{ij}(c+th)\, h_i\, h_j$$

Considerando agora $\gamma_{ij}(t) = f_{ij}(c+th)$, obtém-se que $\gamma'_{ij}(t) = df_{ij}(c+th) \,.\, h$.

O vetor $df_{ij}(c+th)$ tem como componentes as p derivadas parciais da função f_{ij}, ou seja:

$$df_{ij}(c+th) = (f_{1ij}(c+th), f_{2ij}(c+th), \ldots, f_{pij}(c+th))$$

Por fim, obtém-se:

$$\phi'''(t) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} \gamma'_{ij}(t)\, h_i\, h_j = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{p} f_{kij}(c+th)\, h_k\right) h_i\, h_j =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} f_{kij}(c+th) \cdot h_k\, h_i\, h_j$$

Analogamente aos anteriores, obtém-se que:

$$\phi^{k}(t) = \sum_{i_1=1}^{p} \sum_{i_2=1}^{p} \cdots \sum_{i_k=1}^{p} f_{i_1, i_2, \ldots, i_k}(c + th)\, h_{i_1} h_{i_2}, \ldots, h_{i_k}$$

onde:

$$f_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2}\, \partial x_{i_3} \ldots \partial x_{i_k}}$$

Teorema 26 (Fórmula de Taylor) — Seja $f: D \to R$ e suponha-se que $f \in C^k$, $k \geqslant 1$, em D. Se o segmento de reta que une c e $c + h \in D$, $h \in R^p$, estiver contido em D, então existe $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$f(c+h) = f(c) + \sum_{i=1}^{p} f_i(c) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(c)\, h_i h_j + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{p} \sum_{i_2=1}^{p} \cdots \sum_{i_k=1}^{p} f_{i_1, i_2, \ldots, i_k}(c + \theta h)\, h_{i_1} h_{i_2}, \ldots, h_{i_k}$$

Prova:

Seja $\phi: [0, 1] \to R$ definida por $\phi(t) = f(c + th)$. Por hipótese, ϕ é contínua em $[0, 1]$ e de classe C^k em $(0, 1)$. Pelo Teorema de Taylor para funções de uma variável, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2}\phi''(0) + \ldots + \frac{1}{k!}\phi^{k}(\theta)$$

Tendo em vista as considerações anteriores, segue-se que:

$$f(c+h) = f(c) + \sum_{i=1}^{p} f_i(c) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(c)\, h_i h_j + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{p} \sum_{i_2=1}^{p} \cdots \sum_{i_k=1}^{p} f_{i_1, i_2, \ldots, i_k}(c + \theta h)\, h_{i_1} h_{i_2}, \ldots, h_{i_k}$$

C. Q. D.

Para encerrar, faremos uma observação e daremos um exemplo. A observação é a seguinte: as hipóteses do teorema acima podem ser modificadas de maneira que t hamos $f \in C^{k-1}$ e k vezes diferenciável. A demonstração é a mesma, pois o Teorema de Taylor para funções de uma variável pode ser ainda aplicado à função ϕ.

Exemplo:

66 — Seja $f\colon R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = e^{xy}$. $f \in C^\infty$ e, portanto, podemos "expandi-la" segundo a fórmula de Taylor até um termo de ordem tão grande quanto se queira. Façamos isto considerando até as derivadas de ordem 3, sendo $c = (0; 0)$:

$$f(0, 0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y^2 e^{xy} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}(x, y) = e^{xy}(1 + xy);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x^2 e^{xy} \; ; \; \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) = y^3 e^{xy} \; ; \; \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) = x^3 e^{xy};$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \cdot \partial y}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \, \partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \, \partial y \, \partial x}(x, y) = y\, e^{xy}\,[2 + yx]$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \, \partial x}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \, \partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \, \partial x \, \partial y}(x, y) = x\, e^{xy}\,[2 + xy]$$

Portanto:

$$f(h, k) = 1 + [f_x(0, 0) \cdot h + f_y(0, 0) \cdot k] + \frac{1}{2}[f_{xx}(0, 0) \cdot h^2 +$$

$$+ 2f_{xy}(0, 0)\, hk + f_{yy}(0, 0)\, k^2] + \frac{1}{6}[f_{xxx}(\theta h, \theta k)\, h^3 +$$

$$+ 3f_{xxy}(\theta h, \theta k)\, h^2 k + 3f_{yyx}(\theta h, \theta k)\, hk^2 + f_{yyy}(\theta h, \theta k)\, k^3] = 1 +$$

$$+ [0] + \frac{1}{2}[2hk] + \frac{1}{6}[(\theta k)^3 e^{\theta^2 hk} h^3 + 3(\theta k)\, e^{\theta^2 hk}[2 + \theta h]\, h^2 k +$$

$$+ 3(\theta h)\, e^{\theta^2 hk}[2 + \theta k]\, hk^2 + (\theta h)^3 e^{\theta^2 (hk)} k^3$$

V.2.2.1 – Primeira Aplicação da Fórmula de Taylor: Máximos e Mínimos Relativos

Definição 14 – Seja $f: D \to R$. Diz-se que:

a) f tem máximo (mínimo) relativo em $c \in D$ se existe uma vizinhança V de c tal que, para todo $x \in V \cap D$, $f(c) \geqslant f(x)$ $(f(c) \leqslant f(x))$. Se tivermos $f(c) > f(x)$ $(f(c) < f(x))$ para todo $x \in V \cap D$, $x \neq c$, então f tem máximo (mínimo) relativo estrito em c.

b) f tem máximo (mínimo) absoluto em $c \in D$ se $f(c) \geqslant f(x)$ $(f(c) \leqslant f(x))$ para todo $x \in D$. Se tivermos $f(c) > f(x)$ $(f(c) < < f(x))$ para todo $x \in D$, $x \neq c$, então f tem máximo (mínimo) absoluto estrito em c.

Sempre que existe máximo ou mínimo num ponto $c \in D$, diremos que f tem um extremo no ponto c. Nosso objetivo é caracterizar os extremos de uma função diferenciável – quando eles existirem – e apresentar condições (suficientes) que nos permitam identificar os máximos e os mínimos.

Dada uma função diferenciável $f: D \to R$, diremos que c é um ponto crítico de f se $df(c) = 0$, isto é, se todas as derivadas direcionais (em particular as parciais) se anulam no ponto c.

Teorema 27 – Seja $c \in D$ um ponto onde f tem um extremo relativo. Então, c é um ponto crítico de f, isto é, $df(c) = 0$.

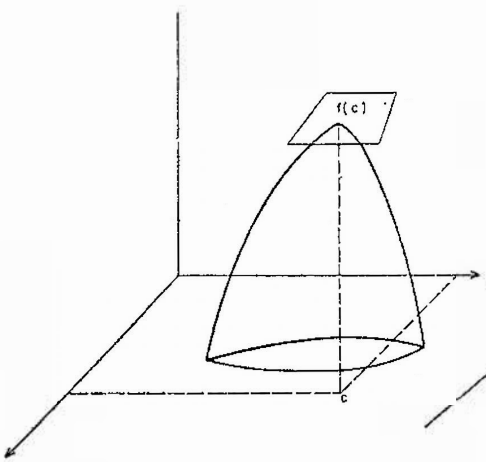
Prova:

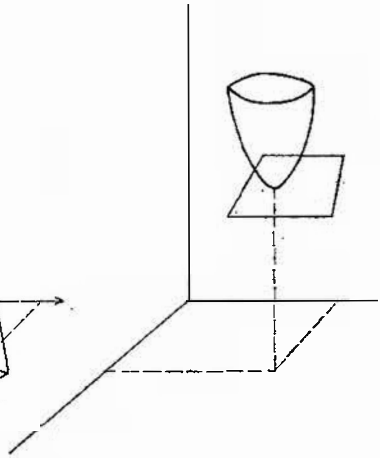
Seja $v \in R^p$, $v \neq (0, 0)$, uma direção e seja $\phi(t) = f(c + tv)$ para todo $t \in R$ tal que $c + tv \in D$. Admitamos, para fixar idéias, que c é um máximo relativo de f. Então, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in (-\delta, \delta)$, $\phi(0) \geqslant \phi(t)$. Pelo teorema do máximo interior para funções de uma variável, sabemos que $\phi'(0) = 0$. Ora, $\phi'(t) = = df(c + tv).v$ e, portanto, $\phi'(0) = df(c).v = 0$. Como v é arbitrário, segue-se que $df(c) = 0$.

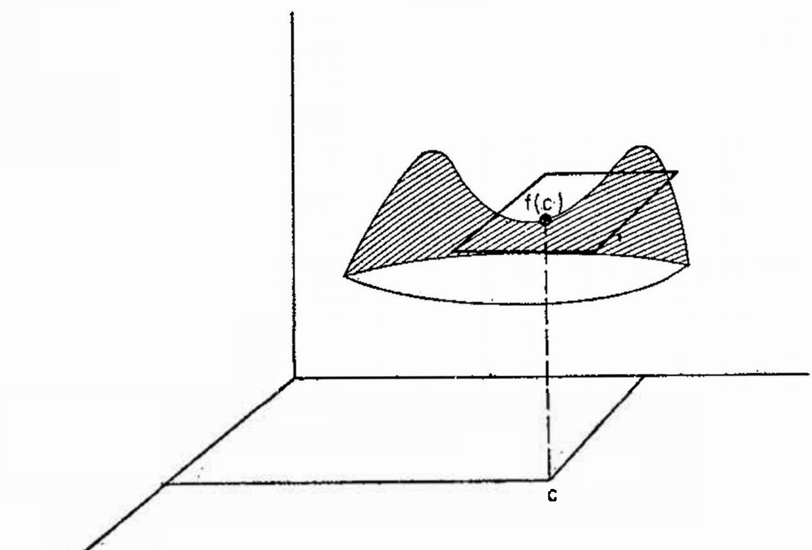
C. Q. D.

Intuitivamente, o fato de que $df(c) = 0$ significa (no caso de $D \subset R^2$) que a aproximação linear ao gráfico de f no ponto

$(c, f(c))$ é horizontal, isto é, paralela ao plano do chão. As figuras a seguir ilustram três casos possíveis: num deles, f tem máximo relativo; no outro, f tem mínimo relativo; e, no outro, não existe máximo ou mínimo relativo.







Tendo em vista que a condição $df(c) = 0$ é apenas necessária para a ocorrência de extremos relativos, passaremos agora a estudar as condições suficientes para que um ponto crítico seja um máximo relativo ou um mínimo relativo, ou nem máximo nem mínimo. Faremos, entretanto, uma pequena digressão para falar sobre formas quadráticas, uma vez que elas desempenham um papel central nas condições a serem estudadas.

Definição 15 — Uma forma quadrática Q é uma função $Q: R^p \to R$ definida por $Q(h) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} h_i h_j$, onde a_{ij} são constantes (reais) tais que $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, p$.

Exemplos:

67 — $Q: R^2 \to R$ dada por $Q(h_1, h_2) = h_1^2 + h_1h_2 + h_2h_1 + h_2^2 = h_1^2 + 2\, h_1h_2 + h_2^2$ é uma forma quadrática onde os coeficientes são $a_{11} = a_{22} = a_{12} = a_{21} = 1$. É interessante notar que esta forma quadrática pode também ser escrita, em forma matricial, da seguinte maneira:

$$Q(h_1, h_2) = (h_1 \;\; h_2) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

68 — $Q: R^2 \to R$ dada por $Q(h_1, h_2) = h_1^2 + h_2^2$ é uma forma quadrática cujos coeficientes são $a_{11} = a_{22} = 1$ e $a_{12} = a_{21} = 0$. Escrevendo sob a forma matricial, obtém-se que:

$$Q(h_1, h_2) = (h_1 \;\; h_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Definição 16 — Seja $Q: R^p \to R$ uma forma quadrática. Diz-se que:

a) Q é *positiva definida* se $Q(h) > 0$ para todo $h \in R^p - \{0\}$;

b) Q é *positiva semidefinida* se $Q(h) \geqslant 0$ para todo $h \in R^p$;

c) Q é *negativa definida* se $Q(h) < 0$ para todo $h \in R^p - \{0\}$;

d) Q é *negativa semidefinida* se $Q(h) \leqslant 0$ para todo $h \in R^p$; e

e) Q é *indefinida* se existem $h_1 \in R^p$ e $h_2 \in R^p$ tais que $Q(h_1) < 0$ e $Q(h_2) > 0$.

Exemplos:

69 — $Q: R^2 \to R$ definida por $Q(h_1, h_2) = (h_1 + h_2)^2 = h_1^2 + 2h_1 h_2 + h_2^2$ é positiva semidefinida, pois $Q(h_1, h_2) > 0$ se $h_1 \neq -h_2$ e $Q(h_1, h_2) = 0$ se $h_1 = -h_2$.

70 — $Q: R^2 \to R$ definida por $Q(h_1, h_2) = h_1^2 + h_2^2$ é positiva definida, pois $Q(h_1, h_2) > 0$ para todo $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$.

71 — $Q: R^2 \to R$ definida por $Q(h_1, h_2) = h_1^2 - h_2^2$ é indefinida. Por exemplo: $Q(0, 1) = -1 < 0$ e $Q(1, 0) = 1 > 0$.

Seja f uma função duas vezes diferenciável no ponto $x \in D$, onde podemos definir a seguinte forma quadrática associada à função f: $Q: R^p \to R$ dada por $Q(h) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(x) \,.\, h_i h_j$. Esta é a forma quadrática fundamental para as condições suficientes que estudaremos a seguir. Para enfatizar que a forma quadrática acima depende do ponto x, escreveremos:

$$Q(h; x) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(x) \,.\, h_i h_j$$

Esta expressão já é nossa conhecida, pois é um termo da fórmula de Taylor. Em função disto, seu sinal será extremamente importante para nos dar informações sobre a natureza dos pontos críticos de f.

Defina-se a *Matriz Hessiana* de f por:

$$H(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots\cdots & f_{1p}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots\cdots & f_{2p}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{p1}(x) & f_{p2}(x) & \cdots\cdots & f_{pp}(x) \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema de Schwarz (admitindo-se apenas que f é duas vezes diferenciável), $f_{ij}(x) = f_{ji}(x)$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, p$, isto é, a *Matriz Hessiana* de f é uma *Matriz Simétrica.*

Pode-se verificar que:

$$Q(h; x) = (h_1 \; h_2 \; \ldots \; h_p) \; H(x) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix}$$

ou, mais simplesmente:

$$Q(h; x) = h \; H(x) \; h$$

A forma quadrática Q é chamada a *forma quadrática Hessiana de f*.

Exemplos:

72 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = xy$. Como $f \in C^2$ (e, portanto, duas vezes diferenciável), podemos calcular a matriz hessiana de f num ponto $(x, y) \in R^2$. Baseando-nos no exemplo 63, segue-se que:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A forma quadrática hessiana de f é:

$$Q(h_1, h_2; x, y) = (h_1 \; h_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2h_1h_2$$

Note-se que esta forma quadrática é indefinida.

73 — Seja $f: R^2 \to R$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$. $f \in C^2$ e, portanto, podemos determinar sua matriz hessiana num ponto $(x, y) \in R^2$:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A forma quadrática hessiana de f num ponto $(x, y) \in R^2$ é:

$$Q(h_1, h_2; x, y) = (h_1 \ h_2)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2h_1^2 + 2h_2^2$$

Observe-se que esta forma quadrática é positiva definida.

74 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + y^2$. Como $f \in C^2$, dado $(x, y) \in R^2$:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 4y \\ 4y & 2 + 4x \end{bmatrix}$$

e:

$$Q(h_1, h_2; x, y) = (h_1 \ h_2)\begin{bmatrix} 2 & 4y \\ 4y & 2 + 4x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

No ponto $(x, y) = (0, 0)$:

$$Q(h_1, h_2; 0, 0) = (h_1 \ h_2)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

é uma forma quadrática positiva definida. No ponto $(x, y) = (-1/2, -1)$:

$$Q(h_1, h_2; -1/2, -1) = (h_1 \ h_2)\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \\ = 2h_1^2 - 16h_1h_2$$

é uma forma quadrática indefinida.

Condições necessárias e suficientes para que uma forma quadrática seja definida (positiva ou negativa) ou semidefinida (positiva ou negativa) serão apresentadas a seguir. Iremos nos concentrar na forma quadrática hessiana da função f e a apresentaremos na forma de determinantes de submatrizes de $H(x)$. O leitor que não estiver familiarizado com cálculo de determinantes pode, sem perda da seqüência lógica (mas, talvez, sem entender completamente alguns dos exemplos), passar diretamente para o próximo teorema.

Dada uma matriz quadrada A, designaremos por $|A|$ ou *det* A o seu determinante.

Seja $H(x)$ a matriz hessiana da função f. Os *menores principais sucessivos* de $H(x)$ são:

a) menor principal sucessivo de ordem 1: $H_1 = f_{11}(x)$;

b) menor principal sucessivo de ordem 2:

$$H_2 = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} = f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) - f_{12}(x) \cdot f_{21}(x)$$

c) menor principal sucessivo de ordem k $(k < p)$:

$$H_k = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1k}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \dots & f_{kk}(x) \end{vmatrix}$$

d) menor principal sucessivo de ordem p: $H_p = det\ H(x)$.

Com esta terminologia, temos agora os seguintes resultados:

a) a forma quadrática hessiana $Q(h; x)$ é positiva definida se, e somente se, $H_1 > 0$, $H_2 > 0$, $H_3 > 0$, $\dots$, $H_p > 0$; e

b) a forma quadrática hessiana $Q(h; x)$ é negativa definida se, e somente se, $H_1 < 0$, $H_2 > 0$, $H_3 < 0$, $\dots$, $(-1)^p \cdot H_p > 0$.

Exemplos:

75 — A forma quadrática do exemplo 72 não é positiva ou negativa definida, pois $H_1 = 0$.

76 — A forma quadrática do exemplo 73 é positiva definida, pois $H_1 = 2 > 0$ e $H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$.

Os resultados acima são apresentados sem demonstrações, mas os interessados nelas podem consultar, por exemplo, Hadley (1967), Debreu (1952) ou, em geral, qualquer livro de Álgebra Linear.

Para caracterizarmos as formas quadráticas semidefinidas, necessitamos do conceito de *menor principal* (note-se que anteriormente tínhamos *menor principal sucessivo*). Dada a matriz $H(x)$ de f, define-se o *menor principal de ordem k* como sendo:

$$H_k^{\pi} = \begin{vmatrix} f_{ii}(x) & f_{ij}(x) & \dots & f_{ik}(x) \\ f_{ji}(x) & f_{jj}(x) & \dots & f_{jk}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{ki}(x) & f_{kj}(x) & \dots & f_{kk}(x) \end{vmatrix}$$

sendo $(i, j, \dots, k)$ uma permutação qualquer de k inteiros pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \dots, p\}$. Para exemplificar, considere-se a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Os menores principais de ordem *1* de A são:

$$A_1^{\pi} = a_{11} \quad \text{e} \quad a_{22}$$

Os menores principais de ordem *2* são:

$$A_2^{\pi} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}$$

Vejamos um exemplo com uma matriz *3* x *3*:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a) os menores principais de ordem *1* são a_{11}, a_{22} e a_{33};

b) os menores principais de ordem *2* são:

– considerando as permutações de $(1, 2)$, obtém-se:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}$$

— considerando as permutações de $(2, 3)$, obtém-se:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} a_{33} & a_{32} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}$$

— considerando as permutações de $(1, 3)$, obtém-se:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}$$

c) os menores principais de ordem 3 são:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Com a terminologia acima, temos que:

a) a forma quadrática hessiana $Q(h; x)$ é positiva semidefinida se, e somente se, $H_k^{\pi} \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, p$; e

b) a forma quadrática hessiana $Q(h; x)$ é negativa semidefinida se, e somente se, $(-1)^k H_k^{\pi} \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, p$. (Para demonstração destes resultados, ver Debreu (1952).)

Observe-se que é essencial que examinemos todos os menores principais (e não apenas os menores principais sucessivos), como mostra o exemplo a seguir. Seja:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e seja a forma quadrática $Q: R^2 \to R$ dada por:

$$Q(h_1, h_2) = (h_1 \; h_2) \; A \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = h_2^2 \geq 0$$

Q é positiva semidefinida e não é negativa semidefinida. Porém, se examinarmos apenas os menores principais sucessivos, teremos

$A_1 = 0$ e $A_2 = 0$, o que nos poderia induzir à conclusão errônea de que Q é negativa semidefinida. Obviamente, isto não acontece se levamos em conta os menores principais: $A_1^\pi = 0$ e 1 e $A_2^\pi = 0$ e 0.

Considerando os resultados "a" e "b" anteriores, podemos, por exclusão, dizer que a forma quadrática $Q(h; x)$ é indefinida quando seus menores principais não satisfazem as condições estabelecidas em "a" e "b". Mais intuitivamente, $Q(h; x)$ é indefinida se pelo menos um dos menores principais tem sinal "estritamente contrário ao esperado". Por exemplo, se sabemos que $H_1^\pi \geqslant 0$ e se $H_2^\pi < 0$ (para alguns dos menores em questão), já sabemos que a forma quadrática não é definida. Logo, ela será indefinida.

Iremos agora tratar com algum detalhe o caso em que a forma quadrática Q está definida em R^2. Neste caso, temos que:

a) Q é positiva (negativa) definida se, e somente se, $f_{11}(x) > 0$ e $f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) > f_{12}^2(x)$ $(f_{11}(x) < 0$ e $f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) > f_{12}^2(x))$; e

b) Q é indefinida se, e somente se, $f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) < f_{12}^2(x)$.

A prova destas afirmativas é relativamente simples. Considere-se a expressão $Q(h; x) = f_{11}(x)\ h_1^2 + 2f_{12}(x)\ h_1h_2 + f_{22}(x)\ h_2^2$. Observe-se o seguinte: se $Q(h; x)$ é definida, então $f_{11}(x) \neq 0$, pois, dado $h = (h_1, 0)$, $h_1 \neq 0$, $Q(h; x) = f_{11}(x) \cdot h_1^2$; se Q é indefinida e $f_{11}(x) = 0$, então $f_{12}(x) \neq 0$ e, em conseqüência disto, $f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) - f_{12}^2(x) < 0$; e, se $f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) - f_{12}^2(x) < 0$ e $f_{11}(x) = 0$, então $f_{12}(x) \neq 0$ e, portanto, Q é indefinida.

Para completar a demonstração, falta-nos examinar os casos em que $f_{11}(x) \neq 0$. Nestas condições, $Q(h; x)$ pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$Q(h; x) = f_{11}(x) \left\{ h_1^2 + 2\,\frac{f_{12}(x)}{f_{11}(x)}\,h_1\,h_2 + \frac{f_{22}(x)}{f_{11}(x)}\,h_2^2 \right\} =$$

$$= f_{11}(x) \left\{ h_1^2 + 2\,\frac{f_{12}(x)}{f_{11}(x)}\,h_1\,h_2 + \left(\frac{f_{12}(x)}{f_{11}(x)}\,h_2\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{f_{22}(x)}{f_{11}(x)} \cdot h_2^2 - \frac{f_{12}^2(x)}{f_{11}^2(x)}\,h_2^2 \right\} = f_{11}(x) \left\{ \left(h_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{f_{12}(x)}{f_{11}(x)}\,h_2\right)^2 + \left(\frac{h_2}{f_{11}(x)}\right) \cdot (f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) - f_{12}^2(x)) \right\}$$

Portanto, se $f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) - f_{12}^2(x) < 0$, teremos $Q(h; x)$ indefinida. Reciprocamente, se $Q(h; x)$ é indefinida, $f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) - f_{12}^2(x) < 0$.

Além disto, para $Q(h; x)$ ser definida é necessário e suficiente que $f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) > f_{12}^2(x)$. Neste caso, teremos $Q(h, x) > 0$ se $f_{11}(x) > 0$ e $Q(h; x) < 0$ se $f_{11}(x) < 0$.

Vejamos agora as condições necessárias e suficientes para Q ser semidefinida: Q é positiva (negativa) semidefinida se, e somente se, $f_{11}(x) \geqslant 0$, $f_{22}(x) \geqslant 0$ e $f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) \geqslant f_{12}^2(x)$ $(f_{11}(x) \leqslant 0$, $f_{22}(x) \leqslant 0$ e $f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) - f_{12}^2(x) \geqslant 0)$.

Consideremos, separadamente, dois casos.

Caso a: $f_{11}(x) = 0$. Então, $Q(h; x) = 2f_{12}(x)\, h_1 h_2 + f_{22}(x)\, h_2^2$. Se $Q(h; x) \geqslant 0$ para todo $h \in R^2$, então $f_{12}(x) = 0$ e $f_{22}(x) \geqslant 0$, isto é, $f_{11}(x) \geqslant 0$, $f_{22}(x) \geqslant 0$ e $f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) - f_{12}^2(x) \geqslant 0$. Se, por outro lado, esta última condição se verifica, tem-se $f_{12}(x) = 0$ e, portanto, $Q(h; x) \geqslant 0$ para todo $h \in R^2$.

Caso b: $f_{11}(x) \neq 0$. Se Q é positiva semidefinida, então (ver desenvolvimento feito acima) $f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) - f_{12}^2(x) \geqslant 0$, $f_{11}(x) \geqslant 0$ e $f_{22}(x) \geqslant 0$. Por outro lado, satisfeita esta condição, Q é positiva semidefinida em vista do desenvolvimento acima.

As condições necessárias e suficientes para $Q(h; x) \leqslant 0$ para todo $h \in R^2$ são obtidas de maneira semelhante.

Teorema 28 (Condições Suficientes de Segunda Ordem) — Seja $f \in C^2$ em D e seja $c \in D$ um ponto crítico de f. Se a forma quadrática hessiana $Q(h; c)$ é positiva definida (negativa definida), f tem mínimo relativo estrito (máximo relativo estrito) no ponto c. Se $Q(h; c)$ é indefinida, então f não tem máximo ou mínimo no ponto c.

Prova:

Suponhamos que $Q(h; c)$ é positiva definida.

Inicialmente, note-se que a esfera $S = \{x \in R^p: |x| = 1\}$ é um conjunto compacto. Além disto, dado $x \in R^p$, $Q(h; x)$ restrito ao conjunto S atinge um mínimo, pois Q é contínua e S é compacto

(Teorema de Weierstrass). Seja $h^* \in S$ este ponto. Portanto, para todo $\tilde{h} \in S$, $Q(\tilde{h}; x) \geqslant Q(h^*, x)$.

Seja agora $h \in R^p - \{0\}$. Como $\dfrac{h}{|h|} \in S$, temos que:

$$Q\left(\frac{h}{|h|}; x\right) \geqslant Q(h^*; x)$$

Como:

$$Q\left(\frac{h}{|h|}; x\right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(x) \cdot \frac{h_i}{|h|} \cdot \frac{h_j}{|h|} = \frac{1}{|h|^2} \cdot Q(h; x)$$

segue-se que:

$$Q(h, x) \geqslant |h|^2\, Q(h^*; x)$$

Concentremo-nos agora no ponto $c \in D$. Pelo que acabamos de ver, $Q(h; c) \geqslant |h|^2\, Q(h^*, c)$ para todo $h \in R^p$. Além disto, $Q(h^*, c) > 0$, pois Q é positiva definida. Como $Q(h^*; x)$ é uma função contínua de x (pois $f \in C^2$), existe $\delta > 0$ tal que, para todo $h \in R^p$ com $|h| < \delta$, $Q(h^*, c + h) > 0$.

Seja agora $h \in R^p$ tal que $c + h \in D$ e tal que o segmento de reta que une c e $c + h$ está totalmente compreendido em D (tal h existe porque D é aberto). Pela fórmula de Taylor, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$f(c + h) = f(c) + \frac{1}{2}\, Q(h; c + \theta h)$$

(lembre-se de que $df(c) = 0$, uma vez que c é um ponto crítico de f).

Do que observamos na parte inicial da demonstração, vem que:

$$f(c + h) = f(c) + \frac{1}{2}\, Q(h; c + \theta h) \geqslant f(c) +$$

$$+ \frac{|h|^2}{2}\, Q(h^*; c + \theta h)$$

Restringindo, se necessário, h para que $0 < |h| < \delta$, obtém-se, por fim, que $Q(h^*; c + \theta h) > 0$, donde se segue que:

$$f(c + h) \geqslant f(c) + \frac{1}{2} |h|^2 Q(h^*; c + \theta h) > f(c)$$

Como isto vale para todo $h \in R^p$ tal que $0 < |h| < \delta$, f tem um mínimo relativo no ponto c.

Suponha-se agora que $Q(h; c)$ é negativa definida. Então, $-Q(h; c)$ é positiva definida e é a forma quadrática hessiana da função $g: D \to R$ dada por $g(x) = -f(x)$. Pelo que acabamos de demonstrar, g tem um ponto de mínimo relativo em c. Ora, isto é o mesmo que dizer que f tem máximo relativo no ponto c.

Suponha-se, por fim, que $Q(h; c)$ é indefinida. Neste caso, existem $h_1 \in R^p - \{0\}$ e $h_2 \in R^p - \{0\}$ tais que $Q(h_1; c) > 0$ e $Q(h_2; c) < 0$. Além disto, sendo D um conjunto aberto, existe $\gamma > 0$ tal que, para todo $t \in (-\gamma, \gamma)$, $c + th_1 \in D$ e $c + th_2 \in D$. Ainda mais, como $Q(h_1; x)$ e $Q(h_2; x)$ são contínuas na variável x ($f \in C^2$), $Q(h_1; c + th_1) > 0$ e $Q(h_2; c + th_2) < 0$, onde, se necessário for, tomamos um intervalo menor do que o intervalo $(-\gamma, \gamma)$.

Pela fórmula de Taylor, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$f(c + th_1) = f(c) + \frac{1}{2} Q(th_1; c + \theta\, th_1) = f(c) + \frac{1}{2} t^2 Q(h_1; c + \theta\, th_1) > f(c)$$

$$f(c + th_2) = f(c) + \frac{1}{2} Q(th_2; c + \theta\, th_2) = f(c) + \frac{1}{2} t^2 Q(h_2; c + \theta\, th_2) < f(c)$$

Portanto, em qualquer vizinhança de c existem pontos $c + th_1$ e $c + th_2$ tais que $f(c + th_1) > f(c)$ e $f(c + th_2) < f(c)$. Logo, f não tem máximo ou mínimo no ponto c.

C. Q. D.

Exemplos:

77 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = xy(x - 1)$, f é uma função de classe C^2. Seus pontos críticos são dados pela solução do seguinte sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(2x - 1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(x - 1) = 0$$

Portanto, os pontos em que $df = 0$ são: $p_1 = (0, 0)$ e $p_2 = (1, 0)$. Podemos agora verificar se as condições suficientes estabelecidas no teorema anterior podem nos auxiliar na identificação de extremos:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x - 1 \\ 2x - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando o ponto p_1, temos que $H_1 = 0$ e $H_2 = -1 < 0$. Portanto, este não é um ponto de máximo nem de mínimo.

Da mesma maneira, no ponto p_2 temos $H_1 = 0$ e $H_2 = -1 < 0$, isto é, p_2 também não é um ponto de máximo nem de mínimo na função.

78 — Seja $f: R^3 \to R$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Como $f \in C^2$, procuraremos aplicar as condições suficientes estabelecidas acima. O único ponto crítico de f é $(0, 0, 0)$. Além disto:

$$H(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Note-se que:

$$H_1 = 2 > 0; \; H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad \text{e} \quad H_3 = -8 < 0$$

Portanto, a origem não é um extremo relativo da função.

79 — A função $f: R^2 \to R$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ tem um mínimo relativo no ponto $(0, 0)$. É fácil concluir que este é um mínimo absoluto, pois $f(x, y) \geqslant 0$ para todo $(x, y) \in R^2$.

80 — Seja agora $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x^4 + y^4$. f é de classe C^2 e o único ponto crítico que possui é a origem. Entretanto:

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso, as condições suficientes estabelecidas no Teorema 28 não nos auxiliam na identificação da natureza (máximo, mínimo ou nenhum) do ponto crítico.

Tal como no exemplo anterior, é fácil concluir que f tem mínimo (absoluto) na origem, pois $f(x, y) \geqslant 0$ para todo $(x, y) \in R^2$.

Este exemplo ilustra o caso em que, apesar de a condição suficiente não ser satisfeita, o ponto crítico é um extremo da função, o que significa que as condições suficientes não são necessárias.

81 — Modificando ligeiramente o exemplo anterior, pode-se ver que também a condição (suficiente) para que o ponto não seja de máximo ou mínimo não é necessária. Considere-se $f: R^2 \to R$ dada por $f(x, y) = x^4 + y^3$. f tem um único ponto crítico $(0, 0)$ e:

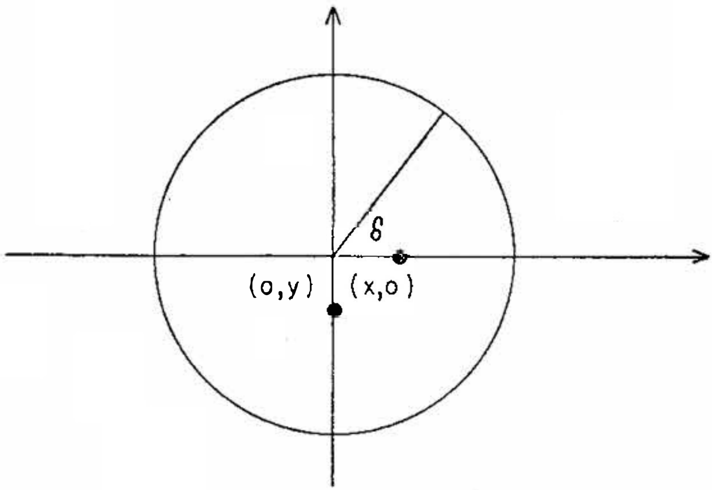
$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entretanto, a origem não é um ponto de máximo ou de mínimo, pois:

$$f(0, y) \leqslant f(0, 0) \leqslant f(x, 0)$$

qualquer que seja $y \leqslant 0$ e $x \in R$, o que significa que numa vizinhança (tão pequena quanto se queira) da origem existem pontos onde f é maior (ou igual) e pontos onde f é menor (ou igual) que $f(0, 0)$.

Tal como no caso das funções de uma variável, é possível estabelecer condições suficientes mais poderosas envolvendo o cálculo de derivadas de ordem superior a 2. Entretanto, pela dificuldade prática e operacional dos cálculos daí advindos, e também porque nas aplicações econômicas as condições suficientes de segunda ordem são bastante potentes, não entraremos no estudo deste teorema.



Teorema 29 (Condições Necessárias de Segunda Ordem) — Seja $f \in C^2$ em D e seja c um extremo de f. Se c é um mínimo (máximo) relativo, $Q(h; c)$ é positiva (negativa) semidefinida.

Prova:

Seja $h \in R^p$ e seja $t \in R$ tal que $c + th \in D$ (t existe, pois D é aberto). Como c é um ponto de mínimo relativo, temos que:

a) $df(c) = 0$; e

b) existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in R$, $|t| < \delta$, $f(c + th) \geqslant \geqslant f(c)$.

Seja, portanto, $0 < |t| < \delta$ e $c + th \in D$. A fórmula de Taylor garante que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$f(c + th) = f(c) + \frac{1}{2} Q(th; c + \theta\, th)$$

ou, ainda:

$$f(c + th) - f(c) = \frac{1}{2} Q(th; c + \theta\, th) \geqslant 0$$

Portanto, $\frac{t^2}{2} Q(h; c + \theta\, th) \geqslant 0$. Como Q é contínua, segue-se que:

$$\lim_{t \to 0} Q(h; c + \theta\, th) = Q(h; c) \geqslant 0$$

O caso em que c é um ponto de máximo segue-se imediatamente se considerarmos a forma $-Q(h; c)$.

C. Q. D.

Examinemos por um instante as condições estabelecidas nos Teoremas 28 e 29. Para simplificar, escrevamos:

$$Q_c > 0 \ (< 0) \quad \text{e} \quad Q_c \geqslant 0 \ (\leqslant 0)$$

quando a forma quadrática hessiana for positiva (negativa) definida e semidefinida, respectivamente. Uma cadeia de implicações que vimos é a seguinte:

$$Q_c > 0 \implies c \text{ mínimo relativo} \implies Q_c \geqslant 0$$

Já vimos que c mínimo não implica $Q_c > 0$ (exemplo 80). Também é verdade que $Q_c \geqslant 0$ não implica c mínimo, o que significa que podemos ter $Q_c \geqslant 0$ e c ser um ponto que não é de máximo ou de mínimo. O exemplo a seguir mostra um caso destes.

82 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = 3x^2 - x^3 - 6y^4$. Os pontos críticos de f são dados pela solução do sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x - 3x^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -24y^3$$

Portanto, temos: $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (2, 0)$. A matriz hessiana de f é:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 6 - 6x & 0 \\ 0 & -72y^2 \end{bmatrix}$$

No ponto $P_1 = (0, 0)$, $H(0, 0)$ é positiva semidefinida. Entretanto, $(0, 0)$ não é um ponto de máximo ou de mínimo de f, pois para todo $y \in R$ e para todo $x < 3$ temos:

$$f(0, y) = -6y^4 \leqslant f(0, 0) \leqslant f(x, 0)$$

Concluindo, o ponto $(0, 0)$ não é de máximo ou de mínimo e a forma quadrática hessiana $Q(h; (0, 0))$ é positiva semidefinida, isto é, $Q_c \geqslant 0$ não implica c mínimo.

Apenas para completar o estudo de f e apresentar mais um exemplo de que máximo não implica $Q_c < 0$, examinemos o ponto crítico $P_2 = (2, 0)$. $H(2, 0)$ é negativa semidefinida.

Verifiquemos agora que f tem máximo absoluto em P_2. Note-se que $f(2, 0) = 4$. É necessário e suficiente entremostrarmos que $3x^2 - x^3 - 6y^4 \leqslant 4$ para todo $(x, y) \in R^2$. Esta condição – equivalente ainda a $(3x^2 - x^3 - 4) - 6y^4 \leqslant 0$ para todo $(x, y) \in R^2$ – é satisfeita, pois $-6y^4 \leqslant 0$ e $3x^2 - x^3 - 4 \leqslant 0$, tendo em vista que a função $(3x^2 - x^3)$ tem máximo absoluto em $x = 4$ e, neste ponto, seu valor é exatamente 4.

Nos Teoremas 28 e 29 também estabelecemos o seguinte:

$$Q_c < 0 \Longrightarrow c \text{ máximo} \Longrightarrow Q_c \leqslant 0$$

$$Q_c \text{ indefinida} \Longrightarrow c \text{ não é máximo ou mínimo}$$

Observações análogas à anterior valem neste caso, isto é, as implicações contrárias não são verdadeiras. Além disto, se c não é máximo nem mínimo, Q_c pode ser indefinida, positiva semidefinida (porém não positiva definida) ou negativa semidefinida (porém não negativa definida).

V.2.2.2 — Segunda Aplicação da Fórmula de Taylor: Funções Côncavas e Convexas

Nesta aplicação da fórmula de Taylor, faremos uma apresentação semelhante ao que fizemos para funções de uma variável. As definições e os teoremas, com as devidas modificações, são os mesmos já apresentados, de maneira que a leitura desta parte deverá ser amena.

Definição 17 — Seja $D \subset R^p$ um conjunto *convexo* e aberto e seja $f\colon D \to R$ diferenciável. Diz-se que f é uma *função côncava* (função convexa) se, para todo $x \in D$, $y \in D$:

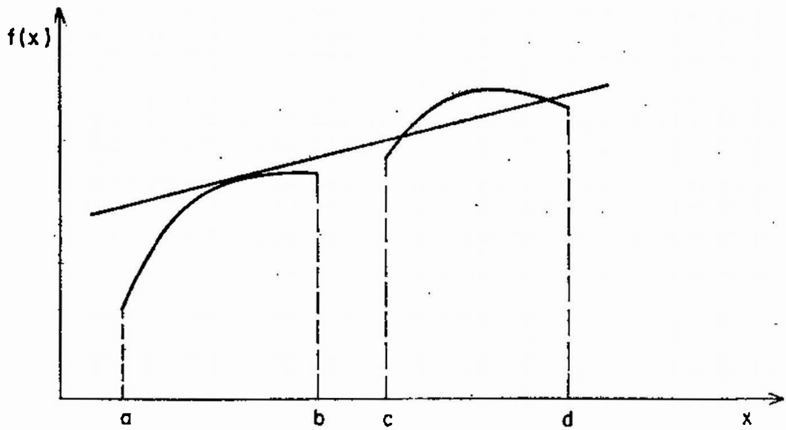
$$f(x) \leqslant f(y) + df(y) \cdot (x - y) \quad (f(x) \geqslant f(y) + df(y) \cdot (x - y))$$

Diz-se ainda que f é *estritamente côncava* (estritamente convexa) se, para todo $x \in D$, $y \in D$, $x \neq y$:

$$f(x) < f(y) + df(y) \cdot (x - y) \quad (f(x) > f(y) + df(y) \cdot (x - y))$$

Esta definição é uma generalização óbvia da Definição 6. Note-se que o conjunto D é, por hipótese, convexo, enquanto na Definição 6 tínhamos um intervalo I (que também é convexo). Uma expressão como a que define a função côncava (função convexa) certamente pode, se tomarmos os devidos cuidados, ser bem definida, mesmo que D não seja convexo. Entretanto, neste caso, muitas das propriedades interessantes desta classe de funções são perdidas. Por exemplo, considere-se a figura a seguir, onde f está definida em $(a, b) \cup (c, d)$. Esta função não é côncava (pela definição anterior) e, entretanto, sua derivada segunda é sempre negativa.

Teorema 30 — Seja $f\colon D \to R$, $D \subset R^p$ aberto e convexo, e suponha-se que f é diferenciável em D. Uma condição necessária e suficiente para que f seja côncava é que, para todo $\theta \in [0, 1]$ e para todo $x \in D$, $y \in D$, tenhamos $f(\theta x + (1 - \theta)\, y) \geqslant \theta f(x) + (1 - \theta)\, f(y)$.



Prova:

Sejam $x \in D$, $y \in D$ e suponha-se que:

$$f(\theta x + (1 - \theta)\, y) \geqslant \theta f(x) + (1 - \theta)\, f(y)$$

para todo $\theta \in [0, 1]$. Isto significa que:

$$f\,[\theta\,(x - y) + y] - f(y) \geqslant \theta\,[f(x) - f(y)]$$

Se $\theta \neq 0$, podemos reescrever esta expressão da seguinte forma:

$$\frac{f\,[\theta\,(x - y) + y] - f(y)}{\theta} \geqslant f(x) - f(y)$$

Portanto:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{f\,[\theta\,(x - y) + y] - f(y)}{\theta} \geqslant f(x) - f(y)$$

Ora, o limite acima é, por definição, a derivada direcional de f no ponto y na direção de $(x - y)$. Como f é diferenciável:

$$\frac{\partial f}{\partial\,(x - y)}\,(y) = df(y) \,.\, (x - y)$$

e conclui-se que f é uma função côncava.

Suponha-se agora que f seja côncava e sejam $x \in D$, $y \in D$ e $\theta \in (0, 1)$ (se $\theta = 0$ ou $\theta = 1$, nada há para demonstrar). Então:

$$f(x) - f(\theta x + (1 - \theta) y) \leqslant (1 - \theta)\, df(\theta x + (1 - \theta) y) \cdot (x - y)$$

$$f(y) - f(\theta x + (1 - \theta) y) \leqslant (-\theta)\, df(\theta x + (1 - \theta) y) \cdot (x - y)$$

Destas duas desigualdades obtém-se:

$$\frac{f(x) - f(\theta x + (1 - \theta) y)}{1 - \theta} \leqslant df(\theta x + (1 - \theta) y) \cdot (x - y) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{f(y) - f(\theta x + (1 - \theta) y)}{-\theta}$$

Considerando a primeira e a última expressão acima, segue-se a conclusão desejada.

C. Q. D.

Valem também os seguintes resultados:

a) f é convexa se, e somente se, para todo $\theta \in [0, 1]$ e para todo $x \in D$, $y \in D$:

$$f(\theta x + (1 - \theta) y) \leqslant \theta f(x) + (1 - \theta) f(y)$$

Prova:

f é convexa se, e somente se, f é côncava.

b) f é estritamente côncava se, e somente se, para todo $\theta \in (0, 1)$ e para todo $x \in D$, $y \in D$, $x \neq y$:

$$f(\theta x + (1 - \theta) y) > \theta f(x) + (1 - \theta) f(y)$$

Prova:

Se $f(\theta x + (1 - \theta) y) > \theta f(x) + (1 - \theta) f(y)$ para todo $\theta \in (0, 1)$ e para todo $x \in D$, $y \in D$, $x \neq y$, então (pelo teorema anterior) $f(\theta x + (1 - \theta) y) \leqslant f(y) + \theta df(y)\ (x - y)$. Segue-se que $\theta df(y) \cdot (x - y) \geqslant f(\theta x + (1 - \theta) y) - f(y) > \theta[f(x) - f(y)]$. A outra parte da demonstração fica a cargo do leitor.

c) f é estritamente convexa em D se, para todo $\theta \in [0, 1]$ e para todo $x \in D$, $y \in D$, $x \neq y$, $f(\theta x + (1 - \theta) y) < \theta f(x) + (1 - \theta) f(y)$.

Prova:

f é estritamente convexa se, e somente se, $-f$ é estritamente côncava.

Como já havíamos mencionado anteriormente, grande parte da atração que as funções côncavas (convexas) exercem deve-se ao seu bom comportamento com relação a máximos (mínimos). *Se $c \in D$ é um ponto crítico de uma função côncava (convexa) diferenciável, então c é um ponto de máximo absoluto (mínimo absoluto)*, o que se comprova facilmente na Definição 17. *Além disto, quando f é estritamente côncava (estritamente convexa), c é um máximo absoluto estrito (mínimo absoluto estrito).* A verificação desta afirmativa faz-se da seguinte forma: suponha-se f estritamente côncava e suponha-se que c e c', $c \neq c'$, sejam máximos (absolutos) de f. Então, $f(c) = f(c')$. Dado $\theta \in (0, 1)$, $f(\theta c + (1 - \theta) c') > \theta f(c) + (1 - \theta) f(c') = f(c)$, o que representa uma contradição com o fato de que c é um máximo absoluto de f.

Teorema 31 — Seja $f: D \to R$, $D \subset R^p$ aberto e convexo e $f \in C^2$. Então:

a) f é côncava se, e somente se, $Q(h; x)$ (a forma quadrática hessiana) é negativa semidefinida "para todo" $x \in D$; e

b) f é convexa se, e somente se, $Q(h; x)$ é positiva semidefinida "para todo" $x \in D$.

Prova:

a) Suponha-se que $Q(h; x)$ é negativa semidefinida para todo $x \in D$. Seja $h \in R^p$ tal que $x + h \in D$. Como D é convexo, o segmento que une x e $x + h$ está contido em D. Pela fórmula de Taylor, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$f(x + h) = f(x) + df(x) \cdot h + \frac{1}{2} Q(h; x + \theta h) \leqslant$$

$$\leqslant f(x) + df(x) \cdot h$$

Portanto, f é côncava.

Suponha-se agora que f é côncava em D e que existam $x_0 \in D$ e $h_0 \in R^p - \{0\}$ tais que $Q(h_0; x_0) > 0$.

Como Q é contínua, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $y \in D$ com $|y - x_0| < \delta$, temos $Q(h_0; y) > 0$. Seja $\alpha > 0$ tal que $0 < |\alpha h_0| < \delta$. "Para todo" $\theta \in (0, 1)$:

$$Q(\alpha h_0;\ x_0 + \theta(\alpha h_0)) = \alpha^2 Q(h_0;\ x_0 + \theta\, \alpha h_0) > 0$$

A fórmula de Taylor, por outro lado, garante que "existe" $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$f(x_0 + \alpha h_0) = f(x_0) + df(x_0) \cdot \alpha h_0 + \frac{1}{2} Q(\alpha h_0;\ x_0 + \theta(\alpha h_0)) =$$

$$= f(x_0) + df(x_0) \cdot \alpha h_0 + \frac{\alpha^2}{2} Q(h_0;\ x_0 + \theta(\alpha h_0)) >$$

$$> f(x_0) + df(x_0) \cdot (\alpha h_0)$$

Isto contradiz a hipótese de que f é côncava.

b) O resultado segue-se imediatamente de que f é convexa se, e somente se, $-f$ é côncava.

C. Q. D.

Teorema 32 — Seja $f: D \to R$, $D \subset R^p$ aberto e convexo e $f \in C^2$. Então:

a) se $Q(h; x)$ é negativa definida "para todo" $x \in D$, f é estritamente côncava; e

b) se $Q(h; x)$ é positiva definida "para todo" $x \in D$, f é estritamente convexa.

Prova:

a) Dado $x \in D$ e dado $h \in R^p$ tal que $x + h \in D$, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$f(x + h) = f(x) + df(x) \,.\, h + \frac{1}{2} Q(h;\ x + \theta h) <$$

$$< f(x) + df(x) \,.\, h$$

b) f é estritamente convexa se, e somente se, $-f$ é estritamente côncava.

C. Q. D.

Exemplos:

83 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = xy$. f não é uma função côncava nem convexa em R^2, pois a forma quadrática hessiana é indefinida, isto é:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo $H_1 = 0$ e $H_2 = -1 < 0$.

84 — Seja $f: D \to R$, $D = \dot{R}^2_+ = \{(x, y) \in R^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}$ definida por $f(x, y) = x^\alpha \cdot y^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\alpha + \beta \leqslant 1$. f é uma função côncava em D. Note-se, inicialmente, que $f \in C^2$ em D. Examinemos a forma quadrática hessiana de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \alpha x^{\alpha-1} \cdot y^\beta; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \beta x^\alpha \cdot y^{\beta-1}$$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha - 1)\, x^{\alpha-2}\, y^\beta & \alpha\beta \cdot x^{\alpha-1} \cdot y^{\beta-1} \\ \alpha\beta\, x^{\alpha-1} \cdot y^{\beta-1} & \beta(\beta - 1)\, x^\alpha \cdot y^{\beta-2} \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$H_1^\pi = \alpha(\alpha - 1)\, x^{\alpha-1}\, y^\beta < 0 \quad \text{e} \quad \beta(\beta - 1)\, x^\alpha \cdot y^{\beta-2} < 0$$

$$H_2^\pi = \begin{vmatrix} \alpha(\alpha - 1)\, x^{\alpha-\beta}\, y^\beta & \alpha\beta\, x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1} \\ \alpha\beta\, x^{\alpha-1} \cdot y^{\beta-1} & \beta(\beta - 1)\, x^\alpha \cdot y^{\beta-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha\beta \cdot x^{2\alpha-2} \cdot y^{2\beta-2}\, (1 - \alpha - \beta) \geqslant 0$$

$$\text{e} \quad \begin{vmatrix} \beta(\beta - 1)\, x^\alpha \cdot y^{\beta-2} & \alpha\beta\, x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1} \\ \alpha\beta\, x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1} & \alpha(\alpha - 1)\, x^{\alpha-2}\, y^\beta \end{vmatrix} \geqslant 0$$

Logo, $Q(h; (x, y))$ é negativa semidefinida para todo $(x, y) \in D$ e, em conseqüência, f é côncava.

Quando $\alpha + \beta < 1$, a função f é estritamente côncava, uma vez que $Q(h; (x, y))$ será negativa definida.

Se $\alpha + \beta = 1$, então $Q(h; (x, y))$ é negativa semidefinida, porém não é negativa definida. Baseados no teorema anterior nada podemos afirmar com relação à concavidade estrita de f. Entretanto, sejam $z = (x, x) \in D$ e $z' = (x', x') \in D$, $z \neq z'$. Dado $\theta \in (0, 1)$, $f(\theta z + (1 - \theta) z') = f(\theta x + (1 - \theta) x', \theta x + (1 - \theta) x') = = (x + (1 - \theta) x')^{\alpha} (\theta x + (1 - \theta) x')^{1-\alpha} = \theta x + (1 - \theta) x' = \theta f(z) + (1 - \theta) f(z')$. Isto mostra que f não é estritamente côncava quando $\alpha + \beta = 1$.

85 — A função $f: R^2 \rightarrow R$ definida por $f(x, y) = x^4 + y^4$ é convexa. Note-se que $f \in C^2$ é:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 12\, x^2 & 0 \\ 0 & 12\, y^2 \end{bmatrix}$$

sendo, portanto, a forma quadrática hessiana positiva semidefinida.

É conveniente observar que a forma quadrática acima mencionada não é positiva definida. Entretanto, como verificaremos a seguir, f é estritamente convexa.

Se f não é estritamente convexa, existem $(a, b) \in R^2$ e $(x, y) \in R^2$, $(a, b) \neq (x, y)$, tais que:

$$f(a, b) + df(a, b) \cdot ((x, y) - (a, b)) = x^4 + y^4$$

isto é:

$$[(x^4 - a^4) - 4a^3 (x - a)] + [(y^4 - b^4) - 4b^3 (y - b)] = 0$$

ou, ainda:

$$(x - a)^2 [(x + a)^2 + 2a^2] + (y - b)^2 [(y + b)^2 + 2b^2] = 0$$

Entretanto, esta igualdade é verdadeira se, e somente se, $x = a$ e $y = b$, o que é contrário à hipótese. Logo, f é estritamente côncava.

V.3 — Derivadas de Funções de R^p em R^q

Faremos, nesta seção, uma breve extensão da teoria para tratar as funções vetoriais, isto é, funções cujo conjunto de valores é um subconjunto de R^q, $q \geqslant 1$. A apresentação se constituirá na definição de diferenciabilidade, na demonstração da Regra da Cadeia (que ainda não demonstramos sequer para as funções de p variáveis) e aplicações simples.

Seja $D \subset R^p$ um conjunto aberto e seja $f: D \to R^q$. Recordemos que f possui q funções componentes $f^i: D \to R$, isto é, dado $x \in D$, $f(x) = (f^1(x), f^2(x), \ldots, f^q(x))$.

Definição 18 — Seja $f: D \to R^q$, $D \subset R^p$ aberto. Diz-se que f é diferenciável em $c \in D$ se:

a) existem as derivadas parciais $\dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}(c)$, $i = 1, 2, \ldots, q$ e $j = 1, 2, \ldots, p$; e

b) para todo $h \in R^p$ tal que $c + h \in D$:

$$f(c+h) = f(c) + Df(c) \,.\, h + r(h) \tag{6}$$

sendo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$$

e, por definição:

$$Df(c) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1}(c) & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_2}(c) & \ldots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_p}(c) \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x_1}(c) & \dfrac{\partial f^2}{\partial x_2}(c) & \ldots & \dfrac{\partial f^2}{\partial x_p}(c) \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial f^q}{\partial x_1}(c) & \dfrac{\partial f^q}{\partial x_2}(c) & \ldots & \dfrac{\partial f^q}{\partial x_p}(c) \end{bmatrix}$$

Observações com relação à Definição 18:

a) Do ponto de vista formal, esta definição é semelhante à Definição 11. Entretanto, no presente caso, (6) é uma equação vetorial, isto é, representa, na verdade, um conjunto de q igualdades de escalares. Note-se que $Df(c).h$ é um vetor cujos elementos são $(df^1(c).h, df^2(c).h, \ldots, df^q(c).h)$, e que $r(h)$ é um vetor cujos elementos são $r(h) = (r^1(h), r^2(h), \ldots, r^q(h))$.

b) A matriz $Df(c)$ é chamada a *matriz jacobiana* de f no ponto c.

c) Em certos casos, é conveniente escrever a condição (6) da definição da seguinte maneira (equivalente):

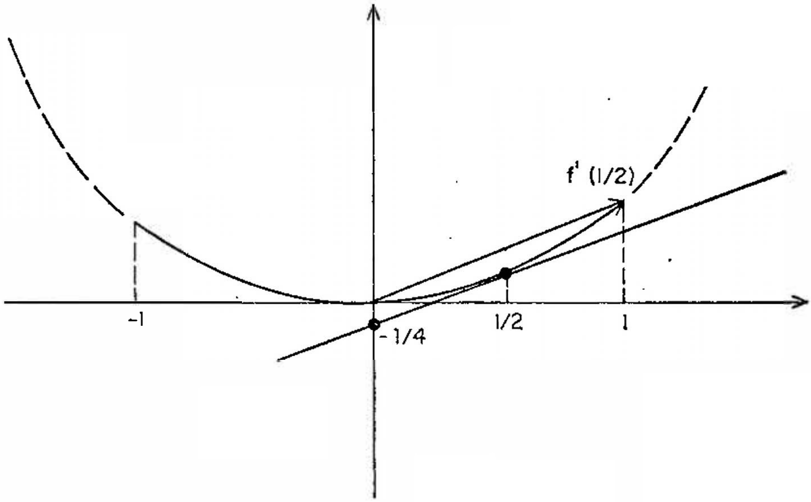
$$f(c + h) = f(c) + Df(c).h + |h| \, \rho(h)$$

sendo $\lim\limits_{h \to 0} \rho(h) = 0$ e $\rho(0) = 0$.

d) Já vimos, quando estudamos limites, que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{|h|} = 0$ se, e somente se, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r^i(h)}{|h|} = 0$. Segue-se desta observação que f é diferenciável no ponto c se, e somente se, cada função componente f^i é diferenciável em c, $i = 1, 2, \ldots, q$.

e) Quando $D \subset R$, f associa a cada $t \in D$ o vetor $f(t) = (f^1(t), f^2(t), \ldots, f^q(t))$. A diferenciabilidade de f é então equivalente à das funções (de uma variável) f^i, $i = 1, 2, \ldots, q$. Neste caso, indicaremos $Df(t)$ simplesmente $f'(t) = ((f^1)'(t), (f^2)'(t), \ldots, (f^q)'(t))$. Por exemplo, considere-se $f: (-1, 1) \to R^2$ definida por $f(t) = (t, t^2)$. O conjunto de valores de f é o trecho da parábola $y = x^2$ compreendido entre os pontos $x = -1$ e $x = 1$ (ver a figura a seguir).

Para cada $t \in (-1, 1)$, $f'(t) = (1, 2t)$. Por exemplo, $f'(1/2) = (1, 1)$ representado na figura. Note-se que a inclinação do vetor $(1, 1)$ é igual à da parábola $y = x^2$ no ponto $x = 1/2$, ou seja, ele tem a mesma inclinação da reta tangente à parábola no ponto $x = 1/2$ (equação desta reta: $-1/4 + x$). Por esta razão, ele também será chamado vetor tangente. No próximo capítulo voltaremos a este assunto um pouco mais cuidadosamente.



Para enunciarmos a Regra da Cadeia necessitamos de saber multiplicar duas matrizes A e B, sendo A com m linhas e n colunas e B com n linhas e p colunas. O produto $A.B$ é a matriz C de m linhas e p colunas cujo elemento i, j é:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

As propriedades do produto matricial que utilizaremos a seguir são $(A.B).C = A.(B.C)$ e $A(B + C) = AB + AC$, desde que seja possível efetuar as multiplicações indicadas.

Teorema 33 (Regra da Cadeia) — Sejam $D \subset R^p$ e $V \subset R^q$ conjuntos abertos. Sejam $f\colon D \to R^q$ e $g\colon V \to R^k$ tais que $f(D) \subset V$. Se f é diferenciável em $x \in D$ e g é diferenciável em $y = f(x)$, então $g_o f\colon D \to R^k$ é diferenciável em x e $D(g_o f)\ (x) =$ $= [g(f(x))].Df(x)$.

Prova:

Como f é diferenciável em x, para todo $h \in R^p$ tal que $x + h \in D$ temos:

$$f(x + h) = f(x) + Df(x) \ .\ h + |h|\ \rho(h),\ \rho(0) = 0$$

e:

$$\lim_{h \to 0}\ (h) = 0$$

Da mesma forma, para todo $k \in R^p$ tal que $y + k \in V$ temos:

$$g(y + k) = g(y) + Dg(y) \; . \; k + |k| \; \sigma(k), \; \sigma(0) = 0$$

e:

$$\lim_{k \to 0} \sigma(k) = 0$$

Tomando $k = f(x + h) - f(x) = Df(x) \; . \; h + |h| \; \rho(h)$, obtém-se (após algumas substituições):

$$g_o f(x + h) = g_o f(x) + (D[g(f(x))] \, . \, Df(x)) \; . \; h + |h| \; \gamma(h)$$

onde:

$$\gamma(h) = D[g(f(x))] \; \rho(h) + \left| Df(x) \; . \; \frac{h}{|h|} + \rho(h) \right| \sigma(Df(x) \; . \; h + |h| \; \rho(h))$$

e:

$$\lim_{h \to 0} \gamma(h) = 0$$

pois $Df(x) \; \dfrac{h}{|h|}$ é limitada e $\sigma(Df(x) \; . \; h + |h| \; \rho(h))$ tende a zero quando h tende a zero e os demais limites são todos iguais a zero.

Portanto, $(g_o f)$ é diferenciável no ponto x.

C. Q. D.

Um caso particular interessante da Regra da Cadeia é o seguinte: seja $f\colon D \to R^q$, $D \subset R$ aberto, f diferenciável em $t \in D$, e seja $g\colon V \to R$, $V \subset R^q$ aberto, $f(D) \subset V$ diferenciável em $f(t)$. Então, $g_o f$ é diferenciável em t e, indicando as derivadas parciais de g por $g_1, g_2, \ldots, g_q$, tem-se:

$$(g_o f)'(t) = dg(f(t)) \cdot f'(t) = (g_1(f(t)), g_2(f(t)), \ldots, g_q(f(t))) \cdot$$

$$\cdot \; ((f^1)'(t), (f^2)'(t), \ldots, (f^q)'(t)) = \sum_{i=1}^{q} g_i(f(t)) \cdot (f^i)'(t)$$

Como aplicação imediata disto, seja $f\colon D \to R$, $D \subset R^p$ aberto e diferenciável em D e sejam $c \in D$, $h \in R^p$. Definamos ϕ para todo

$t \in R$ tal que $c + th \in D$ da seguinte forma: $\phi(t) = f(c + th)$ (note-se que $\phi = f_0\lambda$, sendo $\lambda(t) = c + th$).

Pela Regra da Cadeia, $\phi'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(c + th) \cdot h_i$. Este resultado já tinha sido obtido na seção anterior por um procedimento diferente do que descrevemos acima.

Outra conseqüência da Regra da Cadeia é a seguinte: seja $f: D \to R$, $D \subset R^p$ diferenciável em $c \in D$. Já vimos que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(c) = df(c) \cdot v$ para todo $v \in R^p - \{0\}$, sendo que, por definição, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(c) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(c + tv) - f(c)}{t}$. Suponha-se agora que $\lambda: [-\varepsilon, \varepsilon] \to D$ é tal que $\lambda(0) = c$ e $\lambda'(0) = v$, e considere-se também a função $f_0\lambda: [-\varepsilon, \varepsilon] \to R$. $f_0\lambda$ é diferenciável e, pela Regra da Cadeia, $(f_0\lambda)'(0) = df(\lambda(0)) \cdot \lambda'(0) = df(c) \cdot v$, isto é, na definição da derivada direcional podemos considerar, se f for diferenciável, qualquer λ com as propriedades $\lambda(0) = c$ e $\lambda'(0) = v$.

Como uma outra aplicação da Regra da Cadeia provaremos agora um resultado de extrema importância pela sua utilização em Teoria Econômica: o Teorema de Euler para funções homogêneas.

Definição 19 — Seja $f: R^p \to R$. Diz-se que f é homogênea do grau k se, "para todo" $x \in R^p$ e "para todo" $\lambda > 0$, $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$.

Exemplos:

86 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x^\alpha . y^\beta$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Para qualquer $\lambda > 0$ e $(x, y) \in R^2$:

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^\alpha (\lambda y)^\beta = \lambda^{\alpha + \beta} \cdot x^\alpha \cdot y^\beta = \lambda^{\alpha + \beta} f(x, y)$$

Portanto, f é homogênea do grau $\alpha + \beta$.

87 — Seja $f: R^3 \to R$ definida por $f(x, y, z) = ax + by + cz$, sendo a, b, c constantes reais. Para todo $\lambda > 0$ e $(x, y, z) \in R^3$:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = a\lambda x + b\lambda y + c\lambda z = \lambda f(x, y, z)$$

Portanto, f é homogênea do grau 1.

88 — Seja $Q: R^p \to R$ definida por $Q(h) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} h_i h_j$, $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, p$. Dados $\lambda > 0$ e $h \in R^p$:

$$Q(\lambda h) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} (\lambda h_i) (\lambda h_j) = \lambda^2 . Q(h)$$

Logo, Q é homogênea do grau 2.

89 — A função $f: R \to R$ definida por $f(x) = a + bx$ não é homogênea.

Teorema 34 (Euler) — Seja $f: R^p \to R$ diferenciável em R^p. Para que f seja homogênea do grau k é necessário e suficiente que, para todo $x \in R^p$, $kf(x) = df(x) . x$.

Prova:

Suponha-se que f é homogênea do grau k.

Dado $x \in R^p$, seja $\phi(\lambda) = f(\lambda x)$ para todo $\lambda > 0$. Pela Regra da Cadeia (f é diferenciável e (λx) é diferenciável), $\phi'(\lambda) = \sum_{i=1}^{p} f_i(\lambda x) . x_i$. Como f é homogênea do grau k, $\phi(\lambda) = \lambda^k f(x)$ e $\phi'(\lambda) = k . \lambda^{k-1} f(x)$. Segue-se que, para todo $\lambda > 0$:

$$k\lambda^{k-1} f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(\lambda x) . x_i$$

Fazendo-se $\lambda = 1$, segue-se que $kf(x) = df(x) . x$.

Suponha-se agora que, para todo $x \in R^p$, $kf(x) = df(x) . x$.

Seja $h(\lambda) = \dfrac{\phi(\lambda)}{\lambda^k}$ e note-se que:

$$h'(\lambda) = \frac{\lambda^k \phi'(\lambda) - k\lambda^{k-1}\phi(\lambda)}{\lambda^{2k}} = \frac{\phi'(\lambda)}{\lambda^k} - \frac{k\phi(\lambda)}{\lambda^{k+1}} =$$

$$= \frac{df(\lambda x) \cdot x}{\lambda^k} - \frac{\lambda\, df(\lambda x) \cdot x}{\lambda^{k+1}} = 0$$

Portanto, $h(\lambda)$ é constante e, como $h(1) = f(x)$, segue-se que $\phi(\lambda) = \lambda^k f(x)$.

C. Q. D.

Exercícios

1. Seja $f: D \to R$, $D \subset R$, e seja $a \in D$ um ponto de acumulação dos conjuntos $\{x \in D: x > a\}$ e $\{x \in D: x < a\}$. Mostre que, se existem $f'(a+)$ e $f'(a-)$, então f é contínua em a. Dê um exemplo para mostrar que a existência das derivadas laterais não é necessária para a continuidade da função.

2. Utilizando o Teorema do Valor Médio, mostre que, para todo $x > 0$, $e^x > 1 + x$.

3. Utilizando o resultado do exercício anterior, mostre que, para todo $n \in N$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$ $\left(\text{sugestão: } \dfrac{e^x}{x^n} > \dfrac{x}{(n+1)^{(n+1)}}\right)$

4. Seja $f: R \to R$ tal que $|f(x) - (y)| \leqslant (x - y)^2$ para todo $x \in R$ e $y \in R$. Mostre que f é constante.

5. (Teorema do Valor Médio Generalizado) — Sejam $f: [a, b] \to R$ e $g: [a, b] \to R$ contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b). Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)\,[g(b) - g(a)] = g'(c)\,[f(b) - f(a)]$.

Sugestão: se $g(b) \neq g(a)$, considere $\phi: [a, b] \to R$ definida por $\phi(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{g(x) - g(a)}{g(b) - g(a)}\,(f(b) - f(a))$.

6. Seja $f: R_+ \to R$ tal que: a) f é contínua em R_+; b) f' existe em $R_+ - \{0\}$; c) $f(0) = 0$; e d) f' é monótona crescente. Seja

$g\colon R_+ - \{0\} \to R$ definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Mostre que g é monótona crescente e que $f' \geqslant g$.

7. Seja $h\colon R \to R$ definida por $h(x) = sen\ x$. Mostre que h é diferenciável em R e que $h'(x) = cos\ x$. (Observação: neste e nos problemas que se seguem utilize livremente seus conhecimentos anteriores sobre as funções trigonométricas, logaritmo e exponencial. Em particular, lembre-se que elas são contínuas.)

Sugestões: a) $sen\ a - sen\ b = 2\ sen\ \dfrac{a-b}{2} \cdot cos\ \dfrac{a+b}{2}$; e b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{x} = 1$.

8. Seja $g\colon R \to R$ definida por $g(x) = cos\ x$. Mostre que g é diferenciável em R e que $g'(x) = -sen\ x$.

9. Seja $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to R$ definida por $f(x) = tgx$. Mostre que f é diferenciável neste intervalo e que $f'(x) = \dfrac{1}{cos^2 x}$.

10. Seja $f\colon R_+ - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = log\ x$ ($log =$ = logaritmo na base e). Mostre que f é diferenciável em $R_+ - \{0\}$ e que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Sugestão: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

11. Seja $f\colon R - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = log\ |x|$. Mostre que f é derivável em $R - \{0\}$ e que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

12. Seja $h\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ definida por $h(x) = sen\ x$. Mostre que h possui uma inversa diferenciável em $(-1, 1)$ e que a derivada desta inversa no ponto $c \in (-1, 1)$ é $\dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}}$

Sugestão: ver o exercício 5 do Capítulo IV e o Teorema 5 deste capítulo.

13. Seja $f\colon [1, e] \to [0, 1]$ definida por $f(x) = log\ x$. Mostre que f possui uma inversa diferenciável. Seja $g\colon [0, 1] \to [1, e]$ a inversa de f. Mostre que $g'(y) = g(y)$ para todo $y \in [0, 1]$.

14. Identifique os pontos de máximo e mínimo relativos nas funções abaixo:

a) $f\colon R \to R,\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5;$

b) $f\colon R \to R,\ f(x) = x^{2/3}\,(1 - x);$

c) $f\colon R_+ \to R,\ f(x) = \sqrt{x\,(x-1)^2};$

d) $f\colon R \to R,\ f(x) = (x^2 - 1)^{1/3};$

e) $f\colon R \to R,\ f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5;$ e

f) $f\colon R \to R,\ f(x) = (x^2 - 1)^3.$

15. Dê exemplos de:

a) uma função que possua máximo relativo em um ponto onde a derivada segunda é nula;

b) uma função que possui derivada primeira diferente de zero num ponto e derivada segunda nula neste ponto;

c) uma função cujos extremos ocorrem somente nos pontos onde ela não é derivável;

d) uma função definida num conjunto aberto que possui um máximo absoluto e um mínimo absoluto;

e) uma função diferenciável que não seja duas vezes diferenciável;

f) uma função de classe C^1 duas vezes diferenciável e que não seja de classe C^2; e

g) uma função de classe C^∞ que não seja um polinômio.

16. Por que a função $f\colon R \to R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

não pode ser a derivada de nenhuma função definida em R?

17. Seja $f\colon I \to R$ uma função diferenciável no intervalo I e tal que $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in I$. Mostre que, se f' não é identicamente nula em nenhum intervalo contido em I, então f é decrescente.

Sugestão: sabe-se que f não é crescente; se ela não é decrescente em I, então existem $a \in I$, $b \in I$, $a < b$, tais que $f(a) = f(b)$, e conseqüentemente f é constante em (a, b).

18. Justifique as passagens na demonstração abaixo e complete quando julgar necessário:

Teorema: Seja $f: I \to R$ tal que f é diferenciável no intervalo I e $f': I \to R$ é uma função não crescente. Mostre que f é côncava em I.

Prova:

Sejam $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ tais que $x_2 > x_1$.
Dado $\lambda \in [0, 1]$, seja $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$.

Note-se que:

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) - f(y) = \lambda [f(x_1) - f(y)] + (1 - \lambda) [f(x_2) - f(y)]$$

Existem números reais a e b:

$$x_1 < a < y \quad \text{e} \quad y < b < x_2$$

tais que:

$$f(y) - f(x_1) = f'(a)(y - x_1) = (1 - \lambda) f'(a)(x_2 - x_1)$$
$$f(x_2) - f(y) = f'(b)(x_2 - y) = \lambda f'(b)(x_2 - x_1)$$

Logo:

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) - f(y) = \lambda (1 - \lambda)(f'(a) - f'(b))(x_1 - x_2)$$

Portanto:

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \leqslant f(y)$$

para todo $x_1 \neq x_2$.

19. Mostre que $f: I \to R$ é estritamente côncava se, e somente se, para todo $a \in I$, $b \in I$, $a \neq b$, $f(\lambda a + (1 - \lambda) b) > \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b)$ para todo $\lambda \in (0, 1)$.

20. Com as hipóteses do teorema do exercício 18, mostre que, se f' é decrescente, f é estritamente côncava.

21. Mostre que, se $f: I \to R$ é duas vezes diferenciável em I se $f''(x) \leqslant 0$ para todo $x \in I$ e f'' não é identicamente nula em nenhum intervalo contido em I, então f é estritamente côncava.

22. Verifique se as funções abaixo são côncavas ou convexas:

a) $f: R \to R, f(x) = e^x;$

b) $f: R_+ - \{0\} \to R, f(x) = \log x;$

c) $f: R \to R, f(x) = x^3;$

d) $f: R \to R, f(x) = x^2.$

e) $f: R \to R, f(x) = -x^4$

f) $f: R \to R, f(x) = \log (1 + x^2);$

g) $f: R_+ - \{0\} \to R, f(x) = \dfrac{1}{x} \{x \sqrt{x} + x \log x - 1\};$

h) $f: R \to R, f(x) = e^{ax}$, sendo a uma constante; e

i) $f: R_+ - \{0\} \to R$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, 0 < x \leqslant 1 \\ 1 + x, 1 < x \leqslant 5 \\ -x^2 + 11x - 24, x > 5 \end{cases}$$

f é estritamente côncava? Por quê?

23. Examine a diferenciabilidade das funções abaixo nos respectivos domínios:

a) $f: R^p \to R$ dada por $f(x) = \langle x, x \rangle;$

b) $f: R^2 \to R$ dada por $f(x) = xy$; e

c) $f: R^2 \to R$ dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

24. Seja $f: R^2 \to R$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostre que:

a) f é contínua em R^2;

b) f possui todas as derivadas direcionais no ponto $(0, 0)$; e

c) f não é diferenciável em $(0, 0)$.

25. Seja $f: R^2 \to R$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{xy}, \text{ se } xy \neq 0 \\ 0, \text{ se } xy = 0 \end{cases}$$

Mostre que:

a) f é contínua em R^2;

b) f é diferenciável em todo ponto $(c_1, c_2) \in R^2$ tal que $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$;

c) f é diferenciável no ponto $(0, 0)$; e

d) f não é diferenciável nos pontos $(0, c_2)$, $c_2 \neq 0$, ou $(c_1, 0)$, $c_1 \neq 0$ (existem as derivadas parciais nestes pontos?; existem as derivadas direcionais?).

26. (Teorema de Schwarz) — Seja $f: D \to R$, $D \subset R^2$ duas vezes diferenciável em $c \in D$. Então:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c)$$

Sugestão: dado $c \in D$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(c_1 - \varepsilon, c_1 + \varepsilon) \times (c_2 - \varepsilon, c_2 + \varepsilon) \in D$.

Seja $\phi: (-\varepsilon, \varepsilon) \to R$ definida por:

$$\phi(t) = f(c_1 + t, c_2 + t) - f(c_1 + t, c_2) - f(c_1, c_2 + t) + f(c_1, c_2)$$

Seja $h(x) = f(x, c_2 + t) - f(x, c_2)$.

Então, $\phi(t) = h(c_1 + t) - h(c_1)$.

Logo, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$\phi(t) = h(c_1 + \theta t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} (c_1 + \theta t, c_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x_1} (c_1 + \theta t, c_2) \right\} \cdot t$$

Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} (c_1 + \theta t, c_2 + t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} (c_1, c_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (c_1, c_2)\, \theta t +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1} (c_1, c_2)\, t + tp(t)$$

sendo $\lim\limits_{t \to 0} p(t) = 0$.

Portanto:

$$\phi(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1} (c)\ t^2 + \gamma(t)\, t^2, \quad \lim_{t \to 0} \gamma(t) = 0$$

Assim:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1} (c)$$

Para finalizar, repetir tudo isto com a função:

$$h(y) = f(c_1 + t, y) - f(c_1, y)$$

27. Encontre os pontos críticos das funções abaixo e identifique os pontos de máximo, os de mínimo e os que não são extremos (todas as funções são definidas em R^2):

a) $f(x, y) = xy(x - 1)$;

b) $f(x, y) = (x + 1)\ (y + 2)$;

c) $f(x, y) = x^2 + y^2$;

d) $f(x, y) = x^4 + y^4$;

e) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$; e

f) $f(x, y) = 2x + 4y - x^2y^4$.

28. Dê um contra-exemplo mostrando que cada uma das afirmativas abaixo é falsa:

a) se c é um ponto de mínimo relativo estrito, então $Q(h; c)$ é positiva definida; e

b) se c é um ponto crítico, porém não é um extremo, então $Q(h; c)$ é indefinida.

Capítulo VI

O TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Neste capítulo procuraremos discutir o Teorema da Função Implícita e alguns tópicos correlatos: o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange e o Método da Estática Comparativa.

Na primeira seção, dedicada ao Teorema da Função Implícita, iniciamos com o estudo do vetor gradiente de uma função diferenciável e a definição dos vetores normal e tangente a uma "superfície". Demonstraremos apenas uma versão do referido teorema, qual seja, quando a função f tem valores em R. O caso das funções vetoriais será enunciado, porém não iremos prová-lo.

A segunda seção trata do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange; a Seção VI.3 faz uma apresentação das condições de segunda ordem para os problemas de otimização condicionada; e a Seção VI.4 apresenta os fundamentos do Método da Estática Comparativa.

VI.1 – O Teorema da Função Implícita: o Vetor Gradiente

No capítulo anterior chamamos o vetor das derivadas parciais de uma função diferenciável f num ponto c de $df(c)$. Naquela circunstância, estávamos mais interessados em enfatizar a linearidade da derivada e de como isto poderia ser utilizado para nos fornecer informações sobre o comportamento da própria função numa vizinhança do ponto.

O vetor gradiente de uma função diferenciável é $df(c)$.[1] A terminologia diferente justifica-se pelo fato de que examinaremos este vetor sob uma perspectiva um pouco diferente da anterior, isto é, procuraremos nesta parte do estudo obter algumas informações de caráter mais dinâmico sobre o comportamento de f. Utilizaremos, indistintamente, uma das seguintes notações para indicar o gradiente da função $f: D \to R$, $D \subset R^p$ aberto, diferenciável no ponto c: $grad\ f(c)$, $df(c)$.

VI.1.1 — Caminhos Diferenciáveis em R^p

Antes de enunciarmos as três propriedades básicas do vetor gradiente, faremos uma digressão para introduzir a noção de *caminho* em R^p.

Definição 1 — Dados $a \in R$, $b \in R$, $a < b$, uma função contínua $\lambda: [a, b] \to R^p$ chama-se um *caminho* em R^p.

É importante observarmos que na definição acima um caminho é uma função e não um conjunto em R^p. Entretanto, dado um caminho λ, $\lambda([a, b]) \subset R^p$ (ou seja, a imagem de $[a, b]$ por λ) é um conjunto associado a ele. A este conjunto chamaremos uma curva em R^p. Diferentes caminhos, porém, podem possuir idênticos conjuntos de valores, ou seja, podem estar associados à mesma curva.

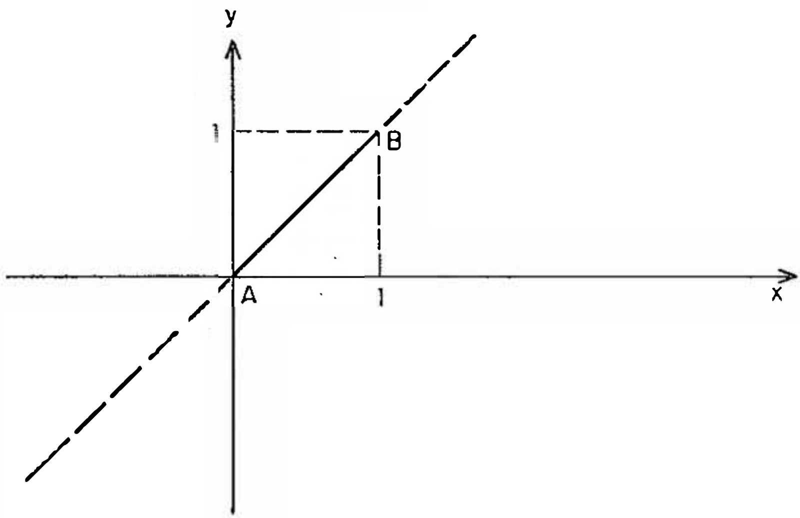
Exemplos:

1 — Seja $\lambda: [0, 1] \to R^2$ definido por $\lambda(t) = (t, t)$. λ é um caminho em R^2 e seu conjunto de valores é o segmento de reta AB, como na figura a seguir.

2 — Seja $\gamma: [0, 1/2] \to R^2$ definida por $\gamma(t) = (2t, 2t)$. γ é um caminho em R^2 (diferente de λ do exemplo anterior) e, no entanto, $\gamma([0, 1/2]) = \lambda([0, 1])$.

3 — Seja $\lambda: [0, 2\pi] \to R^2$ definida por $\lambda(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. λ é um caminho em R^2 e seu *conjunto de valores é a circunferência*

[1] Isto ocorre apenas porque estamos utilizando o produto interno canônico em R^p, ao passo que, se utilizarmos um outro, perde-se esta quase identidade entre a função linear df e o vetor gradiente. Mais detalhes sobre isto podem ser encontrados em Flemming (1977, Cap. IV) ou Lima (1981, Cap. 3).

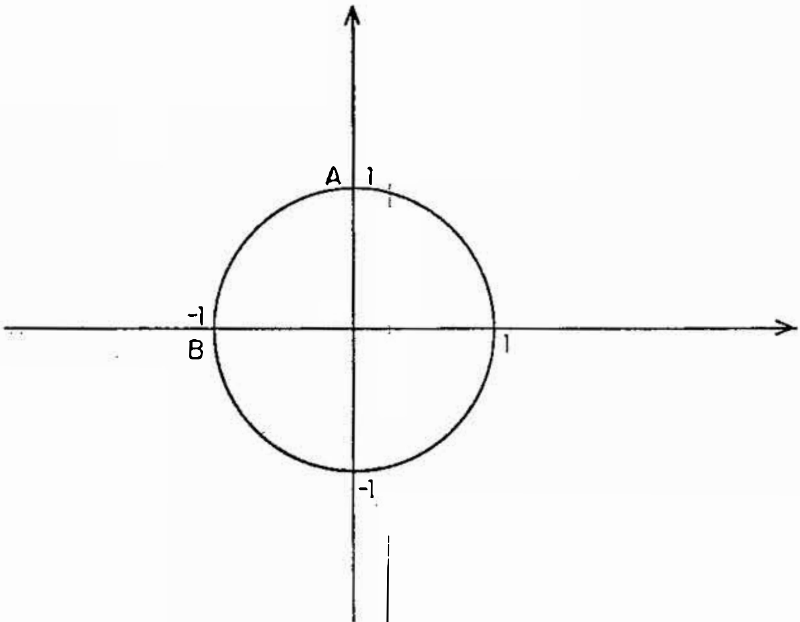


de raio 1 e centro na origem. Esta última afirmativa pode ser verificada notando-se que, se $(a, b) \in \lambda([0, 2\pi])$, então $a^2 + b^2 = 1$ e, portanto, $(a, b) \in S$. Por outro lado, como seno e co-seno definidos em $[0, 2\pi]$ são funções sobre o intervalo $[-1, 1]$, segue-se que, se $(a, b) \in S$, existe $t \in [0, 2\pi]$ tal que $\cos t = a$ e $\operatorname{sen} t = b$.

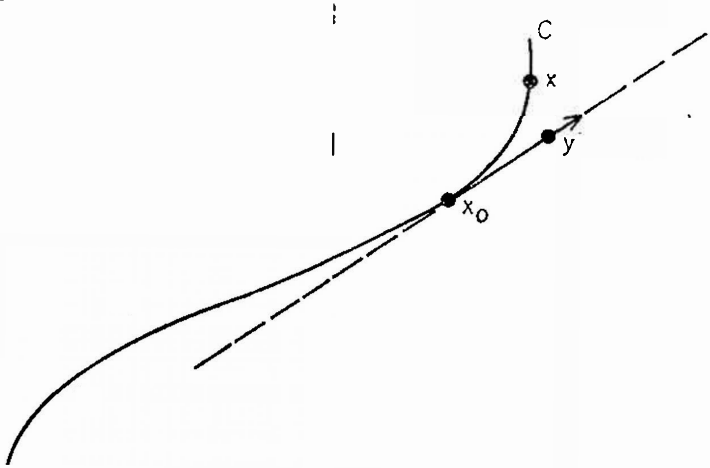
4 — O caminho γ: $[0, 2\pi] \to R^2$ definido por $\gamma(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$ tem o mesmo conjunto de valores que λ do exemplo anterior.

Intuitivamente, podemos pensar sobre um caminho da seguinte forma: a cada instante do "tempo", $\lambda(t)$ nos informa a localização de uma partícula cujo movimento se inicia no tempo a e termina no tempo b. A imagem do caminho é a trajetória descrita pela partícula. Como caminhos diferentes podem ter a mesma imagem, isto significa que a partícula pode descrever a mesma trajetória com velocidades diferentes.

No exemplo 3, para ilustrar esta idéia, fazendo $t = \pi/2$, temos $\lambda(1) = (0, 1)$, isto é, no tempo $t = \pi/2$ a partícula encontra-se no ponto A da figura a seguir. Considerando, por outro lado, o caminho γ do exemplo, no mesmo tempo $t = \pi/2$ ela encontra-se no ponto B da figura.



Quando $\lambda: [a, b] \rightarrow R^p$ é um caminho diferenciável (isto é, λ é diferenciável), já vimos que $\lambda'(t) = (\lambda_1'(t), \lambda_2'(t), \ldots, \lambda_p'(t))$. λ' é chamado *vetor tangente* ou *vetor velocidade* do caminho λ no ponto t. Geometricamente, a denominação de vetor tangente pode ser justificada da seguinte forma:



Dada a curva C, imagem de $[a, b]$ por λ, consideremos o seguinte:

$$x_0 = \lambda(0) \; ; \; x = \lambda(h) \; ; \; v = \lambda'(0) \; ; \; y = \lambda(0) + h\lambda'(0)$$

Note-se, agora, que:

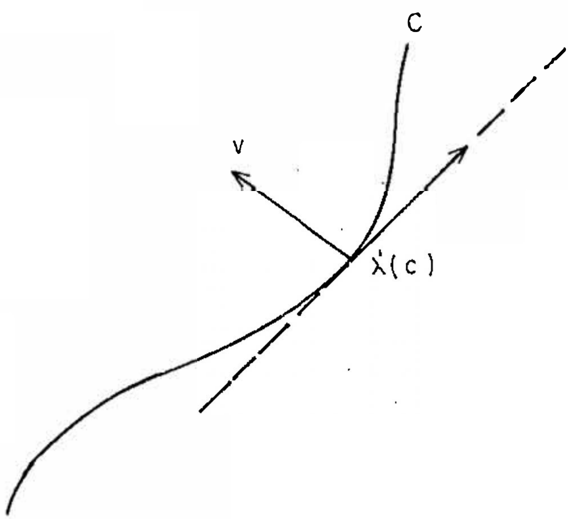
$$\lim_{h \to 0} \frac{|x - y|}{|x - x_0|} = \lim_{h \to 0} \frac{|\lambda(h) - \lambda(0) - h\lambda'(0)|}{|\lambda(h) - \lambda(0)|} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left| \dfrac{\lambda(h) - \lambda(0)}{h} - \lambda'(0) \right|}{\left| \dfrac{\lambda(h) - \lambda(0)}{h} \right|} = 0 \cdot \frac{1}{\lambda'(0)} = 0$$

se $\lambda'(0) \neq 0$.

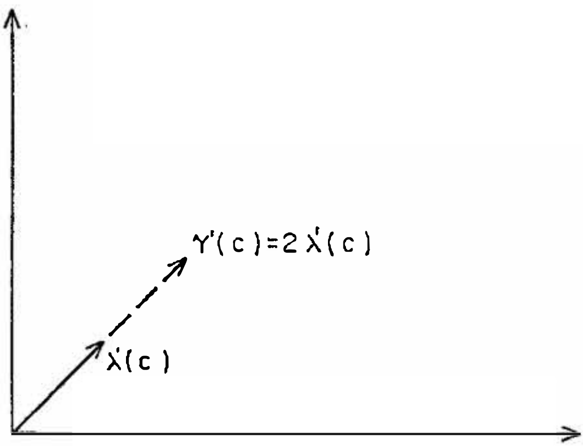
Isto significa que, se aproximarmos a variação $\lambda(h) - \lambda(0)$ pela variação ao longo do caminho linear $\lambda(0) + h\lambda'(0)$, teremos para h suficientemente pequeno uma boa aproximação. Obviamente, esta é a essência da noção de diferenciabilidade.

Dado um caminho diferenciável λ: $[a, b] \to R^p$, diremos que o vetor $v \in R^p$ é *normal* (ou perpendicular) ao caminho λ no ponto $c \in [a, b]$ se $< \lambda'(c), v > = 0$.



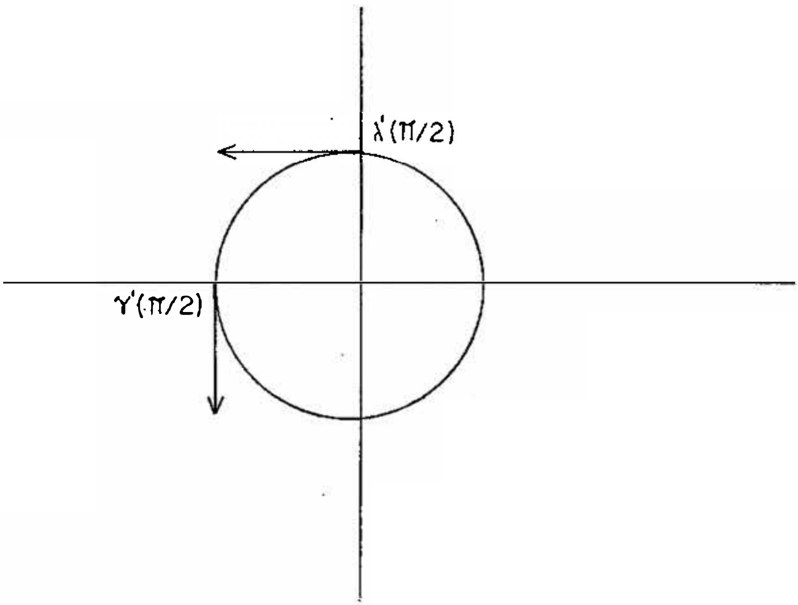
Exemplos:

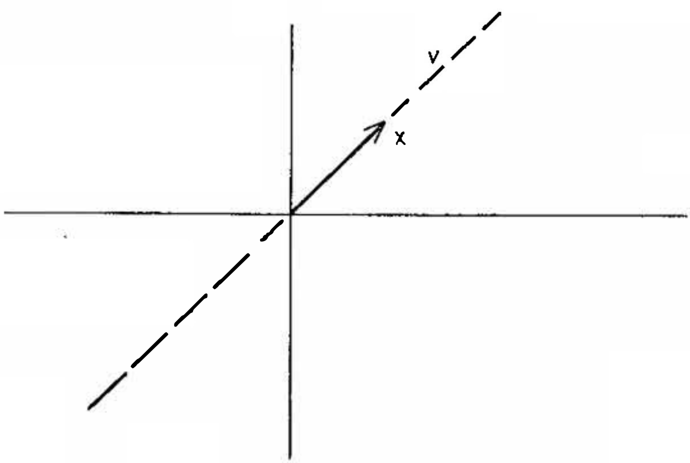
5 — Reexaminemos os caminhos dos exemplos 1 e 2. O vetor velocidade do caminho λ no ponto $c \in [a, b]$ é $\lambda'(c) = (1, 1)$ e o vetor velocidade do caminho γ no ponto c é $\gamma'(c) = (2, 2)$, o que ilustra a idéia de que o ponto percorre o mesmo caminho com velocidades diferentes. Na verdade, o caminho γ dá origem a um deslocamento com velocidade duas vezes maior do que λ.



6 — Nos exemplos 3 e 4, os vetores velocidade são, respectivamente, $\lambda'(t) = (-sen\ t, cos\ t)$ e $\gamma'(t) = 2\ (-sen\ 2t, cos\ 2t)$. No ponto $t = \pi/2$, $\lambda'(t) = (-1, 0)$ e $\gamma'(t) = (0, -2)$. Representamos os vetores velocidade na primeira figura da página a seguir.

Convém fazermos uma observação com respeito à representação geométrica dos vetores. Sempre que nos referimos a um vetor, devemos pensar nele como sendo um ponto de R^p. Nas aplicações que faremos a seguir é interessante que a isto adicionemos a noção de uma "seta" ligando a origem ao ponto de coordenadas x no espaço R^p. Desta forma, dizer que x aponta numa direção significa que a "seta" está sobre o caminho (linear) que define a direção (ver segunda figura da página a seguir, onde o vetor x aponta na direção de v).





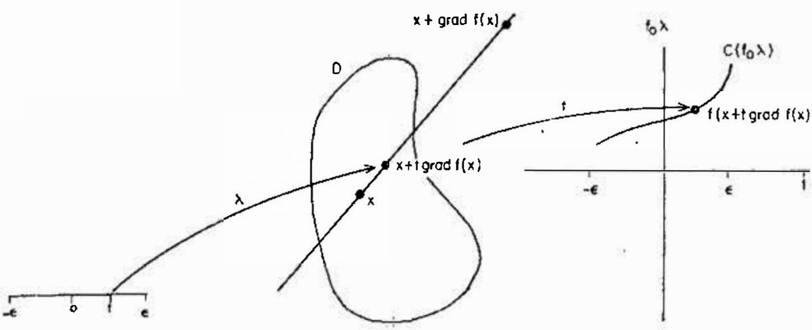
Uma outra observação útil é que, em geral, nas representações geométricas costuma-se traçar o vetor velocidade do caminho λ no ponto t a partir de $\lambda(t)$, e não da origem. Já adotamos este procedimento com os vetores $\lambda'(\pi/2)$ e $\gamma'(\pi/2)$ no exemplo 6. Neste caso, dizer que o vetor x aponta numa direção v significa que a seta com origem em $\lambda(t)$ está sobre o segmento que une $\lambda(t)$ e $\lambda(t) + v$.

VI.1.2 — Propriedades do Vetor Gradiente

Consideremos uma função $f: D \to R$, $D \subset R^p$ aberto e $f \in C^1$ em D (em geral, a hipótese de que $f \in C^1$ pode ser substituída pela diferenciabilidade de f). Também admitiremos que seja dado $x \in D$ tal que $grad\ f(x) \neq 0$. As três propriedades que examinaremos são:

a) *O vetor grad $f(x)$ aponta numa direção ao longo da qual f é crescente.* Isto significa, em outras palavras, o seguinte: dado o caminho λ: $(-\varepsilon, \varepsilon) \to D$ definido por $\lambda(t) = x + t\ grad\ f(x)$, a derivada da função $(f_o\lambda)$ no ponto $t = 0$ é positiva. Mais geralmente, qualquer que seja λ tal que $\lambda(0) = x$ e $\lambda'(0) = grad\ f(x)$, teremos $(f_o\lambda)'(0) > 0$.

Geometricamente, o resultado pode ser ilustrado como na figura a seguir.



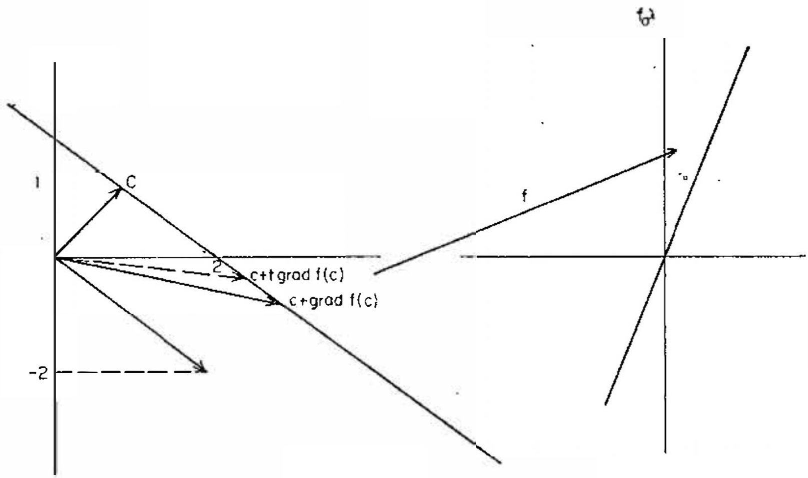
A demonstração da propriedade é imediata: basta utilizarmos a definição de derivada direcional para uma função diferenciável, isto é, $\dfrac{\partial f}{\partial\, grad\ f(x)}(x) = df(x) \cdot grad\ f(x) = |grad\ f(x)|^2 > 0.$

Exemplo:

7 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$. Dados $c = (1, 1)$, $(grad\ f(c) = (2, -2))$ e o caminho λ definido por $\lambda(t) = (1 + 2t, 1 - 2t)$ em alguma vizinhança do ponto $(0, 0)$, verifica-se então que:

$$f_o\lambda(t) = (1 + 2t)^2 - (1 - 2t)^2 = 8t$$

Esta é uma função crescente. Em termos da figura anterior, temos o seguinte:



É importante observar que a direção do gradiente não é a única em que f cresce. Por exemplo, f no ponto $(1, 1)$ é crescente na direção do vetor $c_1 = (1, 0)$.

A segunda propriedade do gradiente refere-se à taxa de crescimento da função.

b) *O crescimento de f é mais rápido na direção do gradiente,* isto é, dado $v \in R^p$, $|v| = |grad\ f(x)|$, e $\frac{\partial f}{\partial v}(x) \geq 0$, então

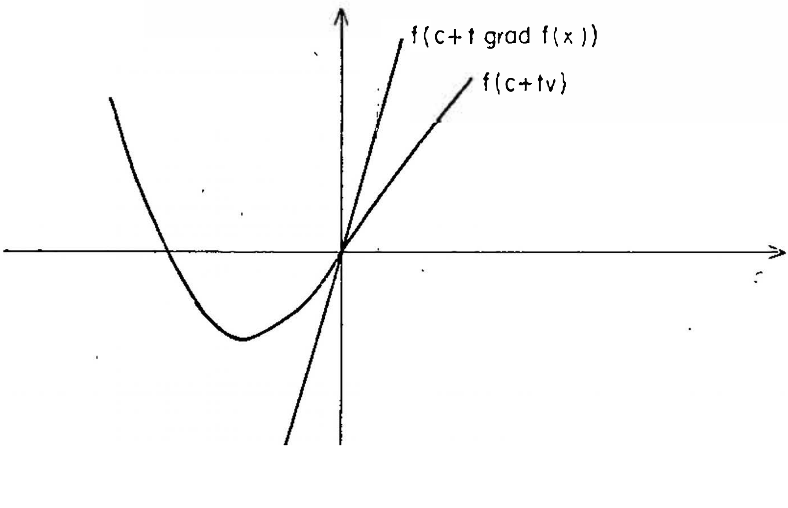
$\dfrac{\partial f}{\partial\, grad\ f(x)}(x) \geqslant \dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$. Demonstra-se isto facilmente com o auxílio da Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = < grad\ f(x), v > \leqslant |\ grad\ f(x)|\ |\ v\ | =$$
$$= |\ grad\ f(x)\ |\ |\ grad\ f(x)\ | = < grad\ f(x), grad\ f(x) > =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial\, grad\ f(x)} \cdot (x)$$

Exemplo:

8 — Considerando a função f do exemplo 7 e tomando $v = (2\sqrt{2}, 0)$, observamos que $|v| = |grad\ f(c)|$, $f(c + t\ grad\ f(c)) = 8t$ e $f(c + tv) = 1 + 4\sqrt{2}\ .\ t + 8t^3$.

É fácil ver que a derivada de f ao longo do caminho $c + tv$, em $t = 0$, é $4\sqrt{2}$, que é menor do que 8.



c) *Por fim, o vetor gradiente é perpendicular à superfície de nível da função f*. Esta propriedade requer algumas explicações e definições para que seja bem entendida.

Definição 2 — Dada uma função $f: X \to R$, $X \subset R^p$, chama-se uma "superfície de nível" c de f ao conjunto $N_c = \{x \in X: f(x) = c\}$, isto é, N_c é a imagem inversa do conjunto $\{c\}$ pela função f. Quando $D \subset R^2$, dizemos "curva de nível".

Exemplos:

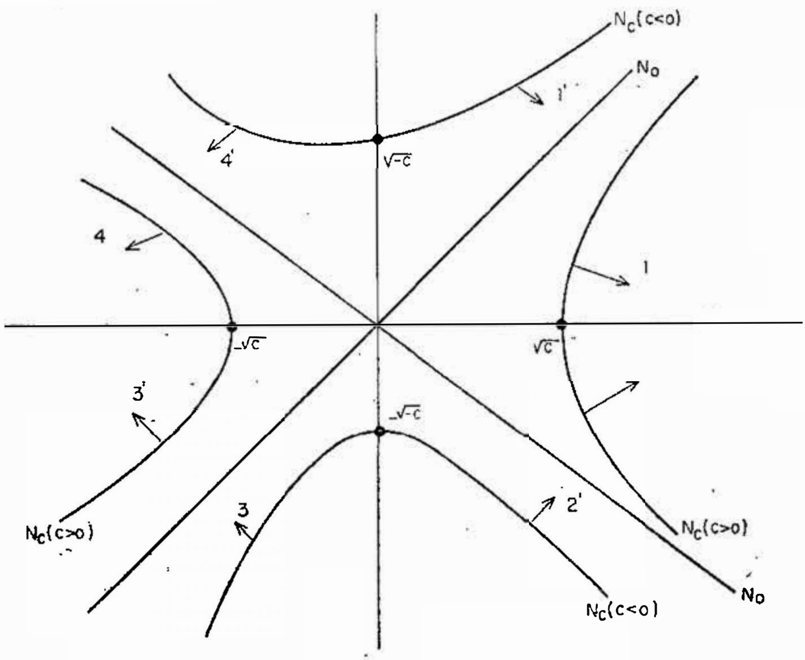
9 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$. As curvas de nível de f são as seguintes:

a) se $c = 0$, $f(x, y) = 0$ se, e somente se, $y = x$ ou $y = -x$, e, portanto, $N_0 = \{(x, y) \in R^2: y = x \text{ ou } y = -x\}$;

b) se $c > 0$, $f(x, y) = c$ se, e somente se, $x = \pm\sqrt{y^2 + c}$, e, portanto, para todo $c > 0$, $N_c = \{(x, y) \in R^2: x = \pm\sqrt{y^2 + c}\}$; e

c) se $c < 0$, $f(x, y) = c$ se, e somente se, $y = \pm\sqrt{x^2 - c}$, e, portanto, para todo $c < 0$, $N_c = \{(x, y) \in R^2: y = \pm\sqrt{x^2 - c}\}$.

No gráfico a seguir representamos alguns destes conjuntos ou curva de nível.



Observe-se que, se fixarmos um ponto $(x, y) \neq (0, 0)$ e calcularmos o gradiente de f neste ponto, ele aponta para a direção de crescimento de f. Podemos utilizar esta informação para saber, dadas duas curvas de nível, qual está associada com um valor maior da função. Por exemplo, dado $(x, y) \in R^2 - \{0\}$, $\text{grad } f(x, y) = (2x, -2y)$. Portanto, temos o seguinte:

— se (x, y) está no primeiro quadrante, o vetor gradiente aponta para o sudeste, o leste ou o sul (os vetores (1) e $(1')$ são representativos deste caso);

— se (x, y) está no quarto quadrante, o vetor gradiente aponta para o norte, o nordeste ou o leste (os vetores (2) e $(2')$ são representativos deste caso);

— se (x, y) está no terceiro quadrante, o vetor gradiente aponta para o noroeste, o norte ou o oeste (os vetores (3) e $(3')$ são representativos deste caso); e

— se (x, y) está no segundo quadrante, então o vetor gradiente de f aponta para o sul, o sudoeste ou o oeste (os vetores (4) e $(4')$ são representativos deste caso).

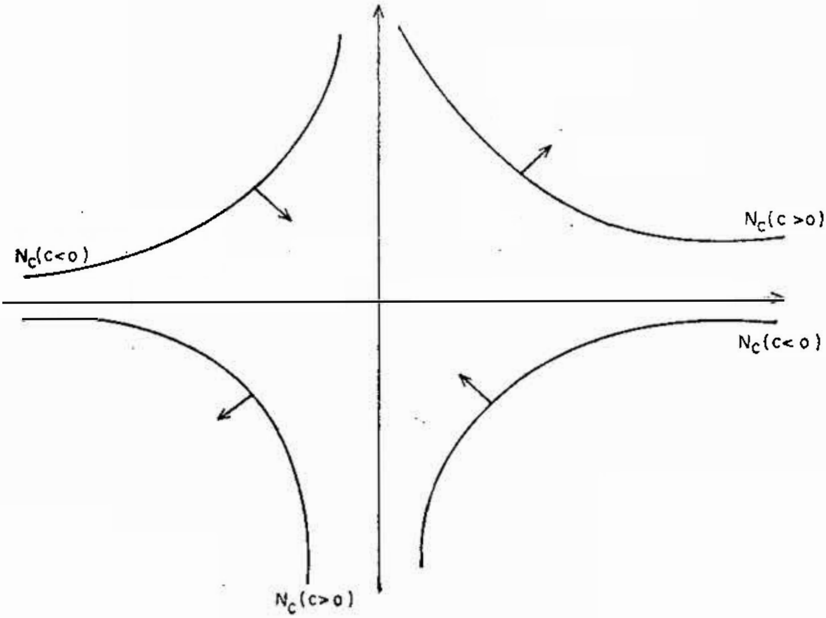
Em função disto, podemos afirmar que uma curva de nível mais "perto" da origem corresponde a um valor maior da função se $c < 0$ e a um valor menor da função se $c > 0$ (este raciocínio fundamenta-se no fato trivial de que duas curvas de nível não podem se cortar).

10 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = xy$. As curvas de nível de f são:

a) se $c = 0$, $f(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = 0$ ou $y = 0$, e, portanto, $N_0 = \{(x, y) \in R^2 : x = 0 \text{ ou } y = 0\}$; e

b) para todo $c \neq 0$, $f(x, y) = c$ se, e somente se, $xy = c$, e, portanto, $N_c = \{(x, y) \in R^2 : xy = c\}$ para todo $c \neq 0$.

Uma análise semelhante à que foi feita no exemplo anterior indica que o vetor gradiente aponta nas direções indicadas na figura a seguir.



11 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Neste caso, temos:

a) $N_c = \phi$ para todo $c < 0$;

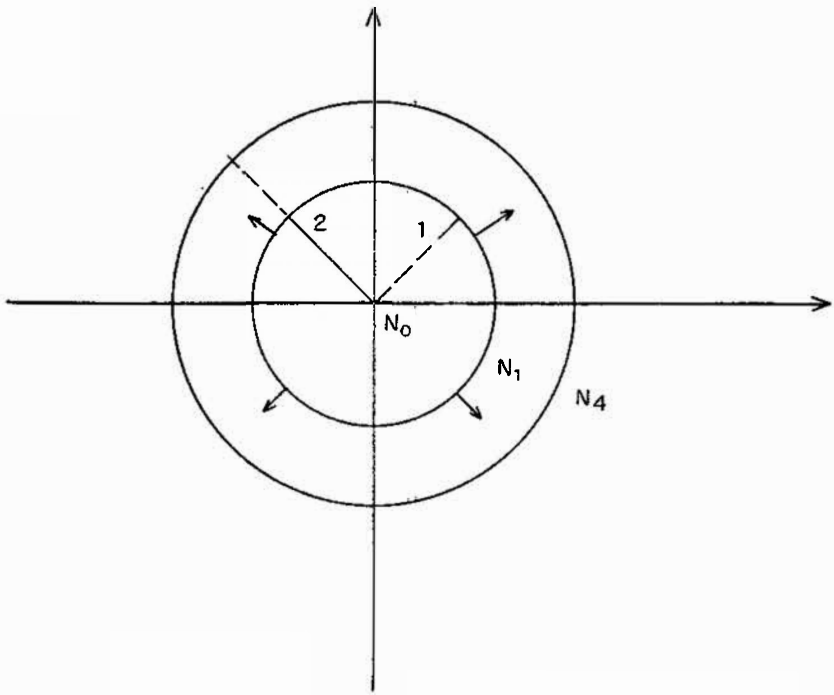
b) $N_0 = \{(0, 0)\}$; e

c) $N_c \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 = c\}$ para todo $c > 0$.

Voltemos agora à situação inicial, ou seja, onde $D \subset R^p$ é aberto e $f: D \to R$ é de classe C^1.

Definição 3 — Seja N_c a superfície de nível c de f e seja $x \in N_c$ tal que *grad* $f(x) \neq 0$. Se $\lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \to N_c$ é um caminho diferenciável tal que $\lambda(0) = x$, então $\lambda'(0)$ é um *vetor tangente* a N_c no ponto x.

Convém observar que o caminho λ tem valores em N_c, o que significa que $f(\lambda(t)) = c$. De maneira mais intuitiva, um vetor é



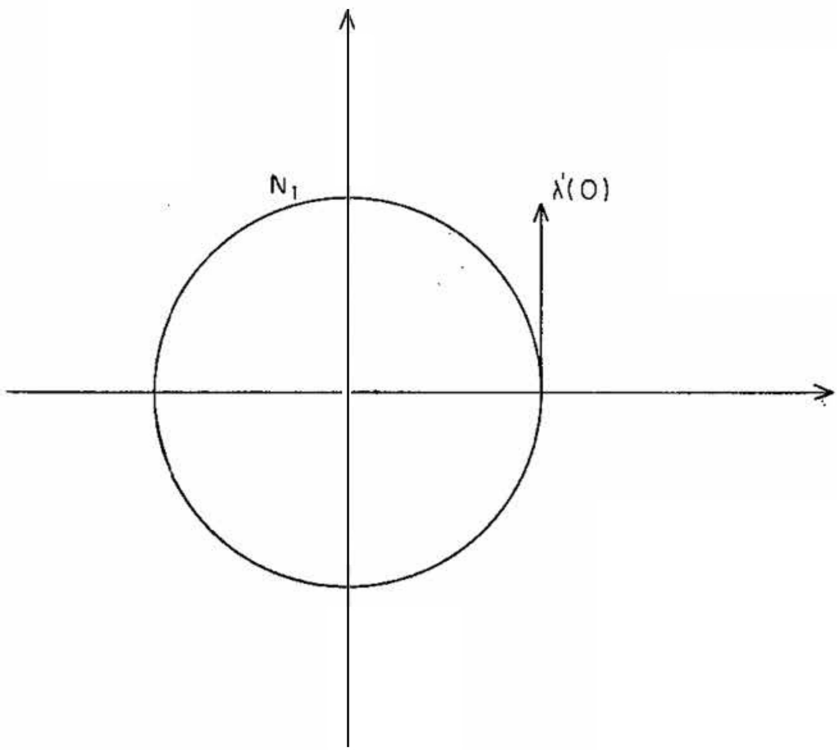
tangente a N_c no ponto $x \in N_c$ se ele é o vetor tangente a um caminho com as seguintes propriedades:

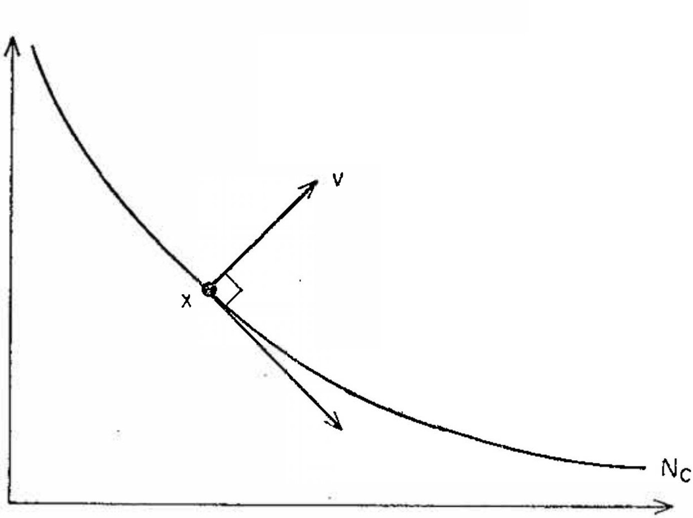
$$f(\lambda(t)) = c \text{ e } \lambda(0) = x$$

Exemplo:

12 — Considere-se a função do exemplo 11 e, também, o caminho λ: $(-\pi/2, \pi/2) \to N_1$ dado por $\lambda(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Um vetor tangente à curva N_1 no ponto $(1, 0)$ é $\lambda'(0) = (0, 1)$, representado na primeira figura da página a seguir.

Definição 4 — Sejam f, N_c e x tais como na Definição 3. Diz-se que v é *perpendicular* (ou normal) a N_c no ponto x se $< v, \lambda'(0) > = 0$, qualquer que seja o caminho diferenciável λ: $(-\varepsilon, \varepsilon) \to N_c$ com $\lambda(0) = x$.


N₁
λ'(0)


v
x
Nc

No exemplo anterior, o vetor $(1, 0)$ é perpendicular à curva de nível 1 no ponto $(1, 0)$ pois $< (1, 0), (0, 1) > = 0$.

Falta-nos tão-somente demonstrar a propriedade "c" anterior, qual seja, dado $x \in N_c$ com $grad\ f(x) \neq 0$, o vetor $grad\ f(x)$ é perpendicular a N_c no ponto x. Dado um caminho λ que satisfaz os requisitos da Definição 4, obtém-se, utilizando a Regra da Cadeia, que $0 = (f_o\lambda)'(0) = < grad\ f(x), \lambda'(0) >$, o que prova o resultado desejado.

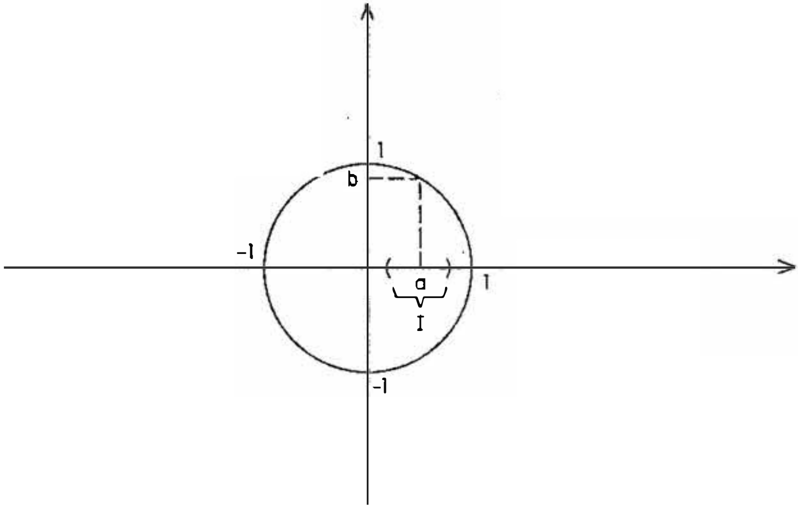
VI.1.3 — O Teorema da Função Implícita

Iniciamos o estudo do teorema com a apresentação de um exemplo ilustrativo do problema que procuraremos colocar. Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$ e consideremos a equação $f(x, y) = 1$, isto é, $x^2 + y^2 = 1$. Dados esta equação e um ponto $(x_0, y_0) \in R^2$ tal que $f(x_0, y_0) = 1$, desejamos indagar o seguinte: sob que condições é possível garantir que existe uma função $h: I \to J$, sendo I um intervalo aberto de centro em x_0 e J um intervalo de centro em y_0, tal que $y = h(x)$ para todo $x \in I$ e $f(x, h(x)) = 1$.

Se examinarmos a curva de nível 1 de f, observamos que tal é possível de ser feito num ponto como (a, b) da figura a seguir.

Neste caso, podemos, por exemplo, definir $h: I \to R$ tal que $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Entretanto, no ponto $(1, 0)$ isto não pode ser feito, pois, qualquer que seja o intervalo de centro em 1, o correspondente intervalo de centro em 0 conterá valores positivos e negativos de y. Entretanto, note-se que neste ponto é possível definirmos uma função $g: J \to I$, onde J é um intervalo de centro em 0 e I é um intervalo de centro em 1, tal que $x = g(y)$ e $f(g(y), y) = 1$. No caso específico, o valor de g num ponto $y \in J$ seria dado por $g(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

O problema a ser estudado nesta seção pode ser colocado, de maneira um pouco mais geral, da seguinte forma: dados $f: R^2 \to R$, $c \in R$ e $(\bar{x}, \bar{y}) \in R^2$ tais que $f(\bar{x}, \bar{y}) = c$, sob que condições poderemos garantir a existência de uma função $h: I \to J$, sendo I um intervalo aberto de centro em $\bar{x}$ e J um intervalo aberto de centro em y, tal que $y = h(x)$ e $f(x, h(x)) = c$ para todo $x \in I$? Além disto, sob que condições, se h existe, ela é diferenciável e qual a forma de sua derivada num ponto $x \in I$?



Condições suficientes para uma resposta afirmativa às questões de existência colocadas acima são fornecidas pelo Teorema da Função Implícita.

Teorema 1 (Teorema da Função Implícita) — Seja $f: D \to R$, $D \subset R^{p+1}$ aberto, de classe C^k $(k \geqslant 1)$. Se existe $(\bar{y}, \bar{x}) = (y, x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p) \in R^{p+1}$ tal que $f(\bar{y}, \bar{x}) = c$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\bar{y}, \bar{x}) \neq 0$, então existe um conjunto aberto $V \subset R^p$, contendo $\bar{x}$, e uma função $h: V \to R$ tal que $f(h(x), x) = c$ para todo $x \in V$ e $\bar{y} = h(\bar{x})$. Além disto, h é de classe C^k em V e, para todo $x \in V$, temos $\dfrac{\partial f}{\partial y}(h(x), x) \neq 0$ e:

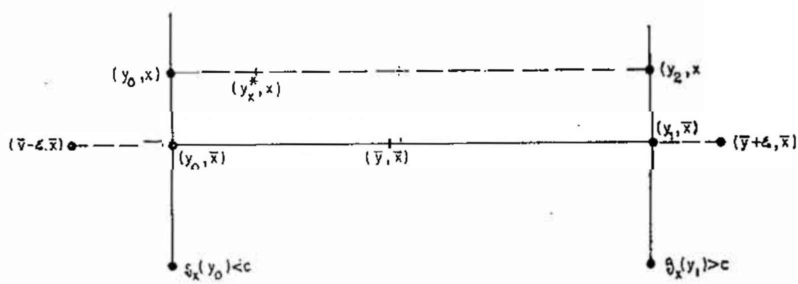
$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(h(x), x)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(h(x), x)}$$

Prova:

A demonstração será feita em três etapas: na primeira, garantiremos a existência de h; na segunda, mostraremos que ela é contínua; e, por fim, na terceira, indicaremos que $h \in C^k$ com derivadas parciais da forma acima.

a) Existência de h. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{y}, \bar{x}) > 0$. Como $f \in C^1$, existem V' aberto em R^p com $\bar{x} \in V'$ e $J = (\bar{y} - \varepsilon, \bar{y} + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, tais que $J \times V' \subset D$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(y, x) > 0$ para todo $(y, x) \in J \times V'$. Isto significa que a função g_x definida por $g_x(y) = f(y, x_1, \ldots, x_p)$ é monótona crescente em J para cada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ (fixo) em V'. Portanto, existem y_0 e y_1 em J tais que $g_{\bar{x}}(y_0) < c$ e $g_{\bar{x}}(y_1) > c$ (veja-se figura a seguir). Além disto, como f é contínua, existe V'', V'' aberto em R^p com $J \times V'' \subset D$, tal que $g_x(y_0) < c$ e $g_x(y_1) > c$ para todo $x \in V''$. Como g_x é contínua em J, existe (para cada $x \in V''$) $y^*_x \in [y_0, y_1]$ tal que $g_x(y^*_x) = c$ (teorema do valor intermediário para as funções contínuas). Como g_x é monótona crescente, y^*_x é único. Portanto, para todo $x \in V''$ existe um único elemento $y^*_x \in [y_0, y_1]$ associado a ele tal que $f(y^*_x, x) = c$. Isto define a função h do teorema.

Note-se, agora, que na argumentação acima temos, na verdade, dois conjuntos V' e V''. O domínio de h, que será denotado por V, é o aberto $V' \cap V''$. O conjunto de valores de h está contido em $\bar{J} = [y_0, y_1]$.



b) Continuidade de h. A função h, portanto, está definida da seguinte maneira: $h: V \to \overline{J} \subset R$ tal que, para todo $x \in V$, $f(h(x), x) = c$. Mostraremos agora que h é contínua em V. Seja $p \in V$ e (x_n) uma seqüência em V que converge para p. A seqüência $h(x_n)$ possui uma subseqüência, que ainda denotaremos $h(x_n)$, convergente para $y \in \overline{J}$, pois $\overline{J}$ é compacto. Devemos, portanto, mostrar que $y = h(p)$. Para cada $n \in N$, temos $f(h(x_n), x_n) = c$. Como f é contínua em $\overline{J} \times V$:

$$c = \lim f(h(x_n), x_n) = f(\lim h(x_n), \lim x_n) = f(y, p)$$

Como, para cada $p \in V$, o elemento $h(p)$ tal que $f(h(p), p) = c$ é único (isto é, h é uma função), segue-se que $y = h(p)$.

c) h é de classe C^k em V. Mostraremos inicialmente que existem as derivadas parciais de h e que:

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(h(x), x)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(h(x), x)} \tag{1}$$

para todo $x \in V$.

Seja $k_j = h(x + te_j) - h(x)$, sendo e_j o j-ésimo elemento da base canônica de R^p e $t \in R$ tal que $x + te_j \in V$. Então, $f(h(x + te_j), x + te_j) = f(h(x), x) = c$, isto é, $f(h(x) + k_j, x + te_j) - f(h(x), x) = 0$. Notando que t pode sempre ser escolhido (pois D é aberto) tão pequeno que o segmento da reta que une $(h(x) + k_j, x + te_j)$ e $(h(x), x)$ está contido em D, podemos afirmar (Teorema do Valor Médio) que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(h(x) + \theta k_j; x + \theta te_j)\, k_j + \frac{\partial f}{\partial x_j}(h(x) + \theta k_j; x + \theta te_j) \cdot t = 0$$

Considerando agora a expressão $\dfrac{h(x + te_j) - h(x)}{t}$ vem que:

$$\frac{h(x + te_j) - h(x)}{t} = \frac{k_j}{t} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(h(x) + \theta k_j; x + \theta te_j)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(h(x) + \theta k_j; x + \theta te_j)}$$

Quando t tende para zero, o limite acima existe e é igual à expressão (1), o que ocorre porque f é de classe C^1.

Finalmente, para mostrarmos que h é de classe C^k, basta notar que $\dfrac{\partial h}{\partial x_j}$ é de classe C^{k-1}, como se verifica facilmente a partir de (I).

C. Q. D.

Observações com relação ao Teorema da Função Implícita:

a) O teorema fornece apenas condições suficientes, as quais, entretanto, não são necessárias. Seja a função $f\colon R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = y^3 - x^3$. A equação $f(x, y) = 0$ define, em torno do ponto $(0, 0)$, a função $h\colon R \to R$ dada por $h(x) = x$ e, no entanto, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Observe-se que, neste caso, $f \in C^\infty$ e também $h \in C^\infty$.

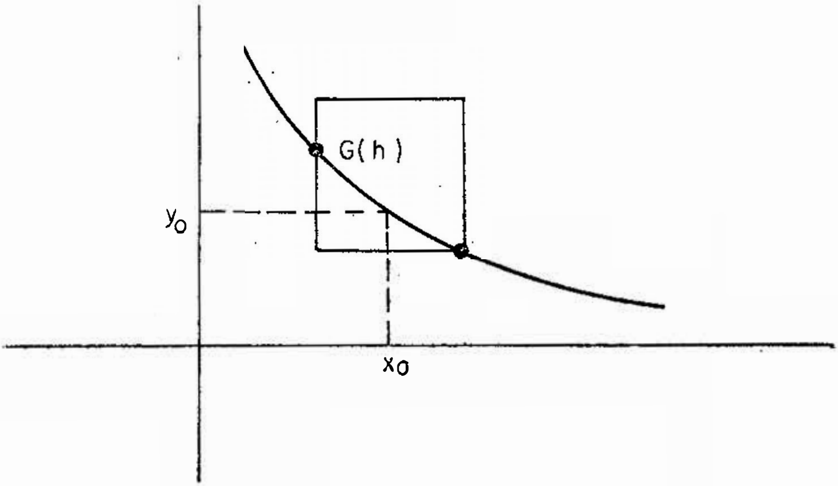
b) Relembrando que o gráfico de uma função $g\colon X \to R$, $X \subset R^p$, é o conjunto $G(g) = \{(x, g(x)) \in R^{p+1}\colon x \in X\}$, podemos também enunciar o *Teorema da Função Implícita* da seguinte maneira: *seja $f \in C^k$ no conjunto aberto $D \subset R^{p+1}$ e seja N_c a superfície de nível c de f tal que, para todo $x \in N_c$, grad $f(x) \neq 0$. Então, N_c é, numa vizinhança de cada ponto x, o gráfico de uma função $h\colon V \to R$, sendo V um subconjunto aberto de R^p.*

c) Com referência à observação "b", considere-se $f\colon R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$. A equação $f(x, y) = 0$ não é o gráfico de nenhuma função em qualquer vizinhança da origem (ver exemplo 9).

Neste caso, então, falha a hipótese de que *grad* $f(x) \neq 0$, pois *grad* $f(0, 0) = (0, 0)$.

Exemplos:

13 — Seja $f\colon R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x^2y + 2y^3 - 3x - 2y$. Note-se que, no ponto $(x, y) = (0, 0)$, *grad* $f(x, y) = (-3, -2)$ e, portanto, a curva de nível zero de f é, numa vizinhança da origem,



o gráfico de alguma função $h: V \to R$ tal que $f(x, h(x)) = 0$. Para todo $x \in V$:

$$h'(x) = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2 - 2}$$

14 — Voltando ao exemplo inicial (a função $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$), temos que a curva de nível 1 é a circunferência de raio 1. Qualquer que seja (x, y) tal que $x^2 + y^2 = 1$, teremos $grad\ f(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$. Portanto, em qualquer ponto a circunferência é localmente o gráfico de alguma função.

Iremos agora enunciar o *Teorema da Função Implícita* no caso em que o conjunto de valores da função é um subconjunto de R^q, $q \geqslant 1$.

Seja $f: D \times V \to R^q$, $D \subset R^q$, $V \subset R^p$ e tais que $D \times V$ seja um subconjunto aberto de $R^q \times R^p$. Dado um ponto $(x, \alpha) \in D \times V$, se f é diferenciável neste ponto, então a matriz $Df(x, \alpha)$ cujos elementos são as derivadas parciais de f é chamada a matriz jacobiana de f. $Df(x, \alpha)$ tem q linhas e $q + p$ colunas e pode ser dividida da seguinte forma:

$$Df(x, \alpha) = (D^1 f(x; \alpha)\,;\ D^2 f(x; \alpha))$$

onde:

$$D^1 f(x;\alpha) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1}(x,\alpha) \ldots\ldots \dfrac{\partial f^1}{\partial x_q}(x,\alpha) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f^q}{\partial x_1}(x,\alpha) \ldots\ldots \dfrac{\partial f^q}{\partial x_q}(x,\alpha) \end{bmatrix}$$

e:

$$D^2 f(x;\alpha) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial \alpha_1}(x,\alpha) & \dfrac{\partial f^1}{\partial \alpha_2}(x,\alpha) & \ldots & \dfrac{\partial f^1}{\partial \alpha_p}(x,\alpha) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^q}{\partial \alpha_1}(x,\alpha) & \dfrac{\partial f^q}{\partial \alpha_2}(x,\alpha) & \ldots & \dfrac{\partial f^q(x,\alpha)}{\partial \alpha_p} \end{bmatrix}$$

onde f^j é a j-ésima componente da função f, isto é, para todo $(x, \alpha) \in D \times V$, $f(x, \alpha) = (f^1(x, \alpha), f^2(x, \alpha), \ldots, f^q(x, \alpha))$.

No enunciado do teorema nos concentraremos na matriz $D^1 f(x; \alpha)$. Note-se que ela é uma matriz quadrada com q linhas e q colunas. Indicaremos por $det\ D^1 f(x; \alpha)$ o determinante desta matriz.

Por fim, convém ainda esclarecer o significado da afirmativa $f \in C^k$. Isto significa que, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$, as funções $f^j: D \times V \to R$ são de classe C^k.

Teorema 2 (Teorema da Função Implícita) — Seja $F: D \times V \to R^q$, $D \subset R^q$, $V \subset R^p$, $D \times V$ aberto, de classe C^k, $k \geq 1$, em $D \times V$. Se existe $(x_0, \alpha_0) \in D \times V$ tal que $F(x_0, \alpha_0) = c$, $c \in R^q$, e $det\ D^1F(x_0, \alpha_0) \neq 0$, então existe um conjunto aberto $U \subset R^p$ contendo α_0 e uma função $H: U \to R^q$ tal que $F(H(\alpha), \alpha) = c$, $H(\alpha_0) = x_0$ e $det\ D^1F(H(\alpha), \alpha) \neq 0$ para todo $\alpha \in U$. Além disto, H é de classe C^k em U e $DH(\alpha) = -[D^1F(H(\alpha), \alpha)]^{-1} D^2F(H(\alpha), \alpha)$ para todo $\alpha \in U$.

Omitiremos a demonstração do teorema. O leitor interessado pode, por exemplo, consultar Bartle (1976), Lima (1970 e 1981) ou ainda Rudin (1964).

Entretanto, é útil nos voltarmos para o enunciado do teorema para entendê-lo melhor. $F(x, \alpha) = c$ é uma equação vetorial que determina q equações reais, a saber:

$$
\begin{aligned}
&F^1(x_1, x_2, \ldots, x_q; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) = c_1 \\
&F^2(x_1, x_2, \ldots, x_q; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) = c_2 \\
&\vdots \\
&F^q(x_1, x_2, \ldots, x_q; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) = c_q
\end{aligned}
\tag{2}
$$

O teorema afirma que, se num ponto (x_0, α_0) que satisfaz o sistema acima o determinante de $D^1F(x_0, \alpha_0) \neq 0$, então é possível resolver (localmente) o sistema (2) de forma que se tenha:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= H^1(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \\
x_2 &= H^2(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \\
&\vdots \\
x_q &= H^q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)
\end{aligned}
$$

Além disto, é possível derivar a função H no conjunto U, e a derivada é dada pela fórmula anterior (na verdade, $H \in C^k$). Observe-se que $[D^1F(H(\alpha), \alpha)]^{-1}$ denota a matriz inversa de $D^1F(H(\alpha), \alpha)$. Algumas vezes nos cálculos práticos, no entanto, é mais fácil encontrar diretamente os elementos de $DH(\alpha)$.

Exemplos:

15 — Seja $F: R^2 \times R \to R^2$ definida por $F(x_1, x_2; \alpha) = (F^1(x_1, x_2; \alpha); F^2(x_1, x_2; \alpha))$. Suponha-se que $F \in C^k$, que no ponto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\alpha})$ temos $F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\alpha}) = 0$ e que:

$$
\det D^1F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\alpha}) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\alpha}) & \dfrac{\partial F^1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\alpha}) \\[2ex] \dfrac{\partial F^2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\alpha}) & \dfrac{\partial F^2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\alpha}) \end{bmatrix} \neq 0
$$

Então, existe $H \in C^k$, $H: V \to R^2$, $V \subset R$, definida por $H(\alpha) = (H^1(\alpha), H^2(\alpha))$, para todo $\alpha \in V$. Ao invés de calcularmos $DH(\alpha)$ pela fórmula dada no teorema, procederemos da seguinte maneira:

$$F^1(H^1(\alpha), H^2(\alpha), \alpha) = 0$$

$$F^2(H^1(\alpha), H^2(\alpha), \alpha) = 0$$

Por simplicidade de notação, omitiremos a referência aos pontos onde as derivadas abaixo são calculadas. Desta forma, obtém-se:

$$\frac{\partial F^1}{\partial x_1}\frac{dH^1}{d\alpha}(\alpha) + \frac{\partial F^1}{\partial x_2}\frac{dH^2}{d\alpha}(\alpha) = -\frac{\partial F^1}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial F^2}{\partial x_1}\frac{dH^1}{d\alpha}(\alpha) + \frac{\partial F^2}{\partial x_2}\frac{dH^2}{d\alpha}(\alpha) = -\frac{\partial F^2}{\partial \alpha}$$

Neste sistema, as derivadas parciais de F^1 e F^2 são conhecidas. As incógnitas são $\frac{dH^1}{d\alpha}(\alpha)$ e $\frac{dH^2}{d\alpha}(\alpha)$. Como o sistema é linear e o determinante da matriz formada pelos coeficientes das incógnitas é não nulo, vem (pela regra de Cramer) que:

$$\frac{dH^1}{d\alpha}(\alpha) = \frac{det\begin{bmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial \alpha}(.) & \frac{\partial F^1}{\partial x_2}(.) \\ -\frac{\partial F^2}{\partial \alpha}(.) & \frac{\partial F^2}{\partial x_2}(.) \end{bmatrix}}{det\,(D^1F(H^1(\alpha), H^2(\alpha), \alpha))}$$

sendo todas as derivadas no numerador calculadas no ponto $(H^1(\alpha), H^2(\alpha), \alpha)$. Da mesma forma:

$$\frac{dH^2}{d\alpha}(\alpha) = \frac{det\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x_1}(.) & -\frac{\partial F^1}{\partial \alpha}(.) \\ \frac{\partial F^2}{\partial x_1}(.) & -\frac{\partial F^2}{\partial \alpha}(.) \end{bmatrix}}{det\,(D^1F(H^1(\alpha), H^2(\alpha), \alpha))}$$

16 — Seja $F: R^2 \times R \rightarrow R^2$ definida por $F(x, y, \alpha) = (x^3 \alpha + xy^2 + \alpha y;\ \alpha^3 yx + \alpha y^2 x^2)$. Consideremos o sistema definido por:

$$F^1(x, y, \alpha) = x^3 \alpha + xy^2 + \alpha y = 3$$
$$F^2(x, y, \alpha) = \alpha^3 xy + \alpha y^2 x^2 = 2$$

e examinemos a existência de uma solução $H^1(\alpha)$, $H^2(\alpha)$ numa vizinhança do ponto $(1, 1, 1)$. Em caso de existir a solução, calcule-se, então, $\frac{dH^1}{d\alpha}(\alpha)$ e $\frac{dH^2}{d\alpha}(\alpha)$.

É suficiente para a existência da solução que $\det D^1F(1, 1, 1) \neq 0$, o que, na realidade, ocorre, pois:

$$D^1F(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Para calcular as derivadas da função H procedemos da mesma forma que no exemplo anterior:

$$(3x^2 \alpha + y^2) \frac{dH^1}{d\alpha} + (2\, x\, y + \alpha) \frac{dH^2}{d\alpha} = -(x^3 + y)$$

$$(\alpha^3 y + 2\, \alpha\, y^2 x) \frac{dH^1}{d\alpha} + (\alpha^3 x + 2\, \alpha\, y\, x^2) \frac{dH^2}{d\alpha} = -(3\, \alpha^2 x\, y + x^2 y^2)$$

Portanto:

$$\frac{dH_1}{d\alpha}(1) = \frac{\det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{dH_2}{d\alpha}(1) = \frac{\det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}} = -\frac{10}{3}$$

VI.2 — O Teorema dos Multiplicadores de Lagrange

Nesta seção procuraremos desenvolver um método para identificar pontos críticos do seguinte problema: dada a função $f\colon D \to R$ ($D \subset R^p$ aberto) de classe C^k ($k \geqslant 1$) e dada uma superfície de nível c, N_c, de f definida como a imagem inversa de alguma função $\varphi\colon D \to R$, $\varphi \in C^k$, quais são os pontos críticos de f restrita à superfície N_c, isto é, f/N_c?

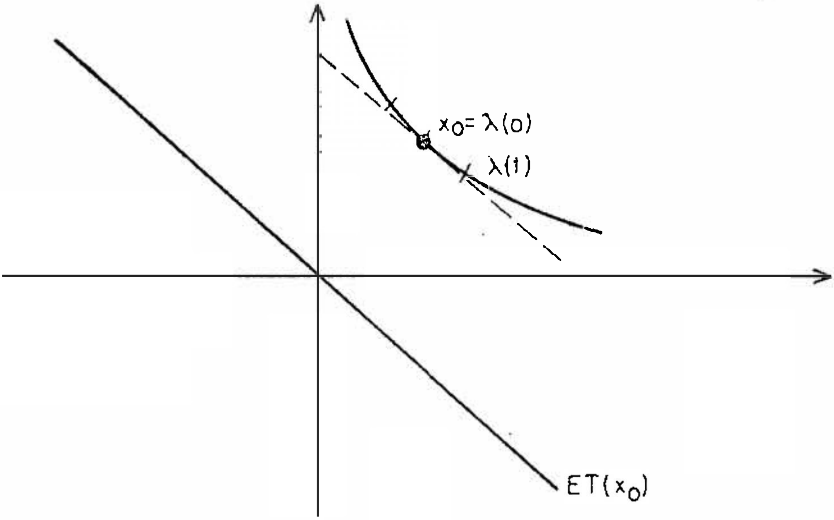
Seja, portanto, φ tal como acima, seja $N_c = \{x \in D\colon \varphi(x) = c\}$ e suponha-se que $grad\ \varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in N_c$.

Neste caso, então N_c é, numa vizinhança de qualquer de seus pontos, o gráfico de alguma função h definida num subconjunto aberto de R^{p-1}. *Um vetor tangente a N_c no ponto x é, por definição, $\lambda'(0)$, onde λ é um caminho diferenciável no ponto $t = 0$, definido da seguinte maneira: $\lambda\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to D$, $\varepsilon > 0$, com $\lambda(0) = x$ e* $(\varphi_o \lambda)\ (t) = c$, isto é, um vetor é tangente à superfície N_c se ele é tangente a algum caminho diferenciável no ponto $t = 0$ em que $\lambda(0) = x$.

Dado um ponto $x_0 \in N_c$, o conjunto de todos os vetores tangentes à superfície de nível N_c no ponto x_0 será indicado por $ET(x_0)$. Por exemplo, considerando a figura a seguir, o conjunto dos vetores tangentes a N_c no ponto x_0 coincide com a linha reta passando pela origem e com a mesma inclinação de N_c no ponto x_0. Mais especificamente, suponha-se que N_c é definida pela equação $x\,y = 1$ e que desejamos encontrar o conjunto dos vetores tangentes no ponto $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Mostraremos que $ET(1, 1) = \{(Z_1, Z_2) \in R^2\colon Z_1 = -Z_2\}$.

Seja $(Z_1, Z_2) \in ET(1, 1)$. Então, existe um caminho diferenciável em $t = 0$, $\lambda\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to N_c$ definido por $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t))$, sendo $\lambda(0) = (1, 1)$ e $\lambda'(0) = (Z_1, Z_2)$. Como a imagem de $[-\varepsilon, \varepsilon]$ está em N_c, $\lambda_1(t) \cdot \lambda_2(t) = 1$, isto é, o caminho λ deve ter a seguinte forma: $\lambda(t) = \left(\lambda_1(t), \dfrac{1}{\lambda_1(t)}\right)$. Portanto, $\lambda'(t) = \left(\lambda'_1(t), -\dfrac{\lambda'_1(t)}{[\lambda_1(t)]^2}\right)$ e $\lambda'(0) = (\lambda'_1(0), -\lambda'_1(0))$, donde se segue que



$Z_1 = -Z_2$. Acabamos de verificar que $ET(1, 1) \subset \{(Z_1, Z_2) \in \in R^2 \colon Z_1 = -Z_2\}$. Para provarmos que os conjuntos são iguais, tomemos agora $Z = (Z_1, Z_2)$ tal que $Z_1 = -Z_2$. Considere-se, por exemplo, o caminho $\lambda\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to N_o$ dado por $\lambda(t) = \left(1 + t Z_1, \frac{1}{1 + t Z_1}\right)$, onde ε é escolhido de maneira que $1 + t Z_1 \neq 0$. Segue-se, então, que $\lambda'(0) = (Z_1, -Z_1)$, isto é, $\lambda'(0) = (Z_1, Z_2)$.

Enunciaremos agora a propriedade mais importante deste conjunto $ET(x_0)$. A demonstração do teorema pode ser encontrada em Lima (1981) e Flemming (1977).

Teorema 3 — Seja $\varphi\colon D \to R$, $D \subset R^p$ aberto, de classe C^k $(k \geq 1)$, e seja N_c uma superfície de nível c de φ tal que *grad* $\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in N_c$. Então, qualquer que seja $x_o \in N_c$, $ET(x_o)$ é um espaço vetorial de dimensão $p - 1$.

Dada a noção de vetor tangente a uma superfície de nível N_o, a definição de *vetor normal* segue-se naturalmente. *Diz-se que $Z \in R^p$ é normal à superfície N_c (definida tal como no Teorema 3) no ponto x_o se $< v, Z > = 0$ para todo $v \in ET(x_o)$*. Em particular (propriedade "c" do vetor gradiente), *grad* $\varphi(x_0)$ é um vetor normal à superfície N_c.

Teorema 4 — Dada a superfície N_c (definida tal como no Teorema 3), o conjunto dos vetores normais a N_c no ponto x_0 é um *espaço vetorial* de dimensão *1*. Em particular, qualquer que seja o vetor v normal a N_c no ponto x_0, existe $\alpha \in R$ tal que $v =$ $= \alpha \; grad \; \varphi(x_0)$.

Como também não demonstraremos este teorema, ver, para uma demonstração num contexto semelhante ao desta seção, Flemming (1977).

Para evitar repetições excessivas, a situação típica a ser estudada agora é a seguinte: temos uma função $f: D \rightarrow R$ de classe $C^k \geq 1$, em D que é um subconjunto aberto de R^p; temos também uma superfície de nível c, N_c, definida como $\varphi^{-1}(c)$, onde $\varphi: D \rightarrow R$ é tal que $\varphi \in C^k$ é $grad \; \varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in N_c$. Continuaremos utilizando a notação f/N_c para indicar a restrição da função f à superfície N_c.

Definição 5 — A função f/N_c tem um *máximo* (mínimo) relativo no ponto $x_0 \in N_c$ se existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para todo $x \in V \cap N_c$, $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$. f tem *máximo relativo estrito* (mínimo relativo estrito) se $f(x_0) > f(x)$ $(f(x_0) <$ $< f(x))$ para todo $x \in V \cap (N_c - \{x_0\})$.

Teorema 5 — Seja $x_0 \in N_c$ um ponto de máximo (mínimo) relativo de f/N_c. Então, para todo $v \in ET(x_0)$, $< grad \; f(x_0), v > = 0$.

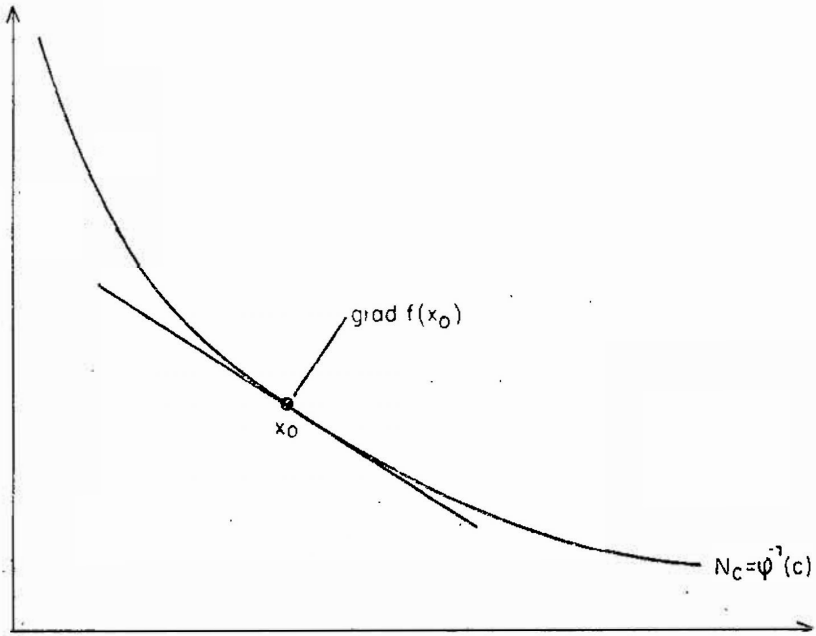
Prova:

Suponha-se que x_0 é um ponto de máximo de f/N_c. Seja o caminho (diferenciável no ponto $t = 0$) $\lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N_c$ tal que $\lambda(0) = x_0$. A função $f_0\lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow R$ tem (em decorrência do fato de que x_0 é um máximo relativo) um máximo relativo (interior) no ponto $t = 0$. Portanto, $(f_0\lambda)'(0) = 0$ e, pela Regra da Cadeia:

$$(f_0\lambda)'(0) = < grad \; f(x_0), \lambda'(0) > = 0$$

C. Q. D.

Geometricamente, este resultado significa que o vetor gradiente de f é perpendicular à superfície de nível N_c nos pontos de máximo ou de mínimo da função.



Em vista deste resultado, definiremos os pontos críticos de f/N_c pela condição acima, isto é, $x_0 \in N_c$ é um *ponto crítico* de f/N_c se $< grad\ f(x_0), v > = 0$ para todo $v \in ET(x_0)$.

É interessante observar que a restrição de f a N_c pode não ser efetiva, isto é, independentemente desta restrição, f pode ter um *ponto crítico* num certo elemento $x_0 \in D$. Por exemplo, se $f: R^2 \to R$ é dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$, sabemos que ela tem mínimo no ponto $(0, 0)$. Se definirmos a superfície de nível N_0 como $\varphi^{-1}(0)$, sendo $\varphi: R^2 \to R$, $\varphi(x, y) = x + y$, esta restrição é absolutamente inócua. f teria um mínimo, de qualquer forma, em $(0, 0)$.

Entretanto, o caso contrário pode ocorrer, como ilustraremos mais à frente, isto é, f pode não ter pontos críticos em D, porém f/N_c tem pontos críticos.

Teorema 6 (Multiplicador de Lagrange) — Sejam: a) $f: D \to R$, $D \subset R^p$ aberto, $f \in C^k$, $k \geqslant 1$; e b) N_c a superfície de nível c da função $\varphi: D \to R$, $\varphi \in C^k$, e tal que $grad\ \varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in N_c$. Então, $x_0 \in N_c$ é um *ponto crítico* de f/N_c se, e somente se, existe um número real λ tal que $grad\ f(x_0) = \lambda\ grad\ \varphi(x_0)$.

Prova:

Suponha-se que $x_0 \in N_c$ é um ponto crítico de f/N_c. Por definição, $< grad\ f(x_0), v > = 0$ para todo $v \in ET(x_0)$. Como N_c é uma superfície de nível de φ, $< grad\ \varphi(x_0), v > = 0$ para todo $v \in ET(x_0)$. Portanto (Teorema 4), existe $\lambda \in R$ tal que $grad\ f(x_0) = \lambda\ grad\ \varphi(x_0)$.

Por outro lado, se $grad\ f(x_0) = \lambda\ grad\ \varphi(x_0)$, então, para todo $v \in ET(x_0)$, $< grad\ f(x_0), v > = < \lambda\ grad\ \varphi(x_0), v > = \lambda < grad\ \varphi(x_0), v > = 0$. Logo, x_0 é um ponto crítico de f/N_c.

C. Q. D.

Antes de passarmos aos exemplos, convém frisar que o valor de λ nos informa se f teria ou não ponto crítico na ausência da restrição N_c. Se $\lambda \neq 0$, é claro que $grad\ f(x_0) \neq 0$ e, portanto, x_0 não é um ponto crítico de f em D. Por outro lado, $\lambda = 0$ significa que a restrição é inócua, isto é, x_0 é um ponto crítico de f em D.

Exemplos:

17 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$ e seja $\varphi: R^2 \to R$ definida por $\varphi(x, y) = x + y$ e $N_0 = \varphi^{-1}(0)$. Portanto, os pontos críticos de f/N_0 (note-se que f e N_0 satisfazem as hipóteses do Teorema 6) são encontrados resolvendo o sistema:

$$grad\ f(x, y) = \lambda\ grad\ \varphi(x, y)$$
$$x + y = 0$$

ou seja:

$$2x = \lambda$$
$$2y = \lambda$$
$$x + y = 0$$

Como pode ser verificado, a unica solução deste sistema é $x = y = 0$ e $\lambda = 0$. Como havíamos mencionado, isto se dá porque $(0, 0)$ é um ponto crítico de f em R^2.

18 — Sejam f e φ tais como no exemplo anterior e seja $N_2 = \varphi^{-1}(2)$. Os pontos críticos de f/N_2 são dados por:

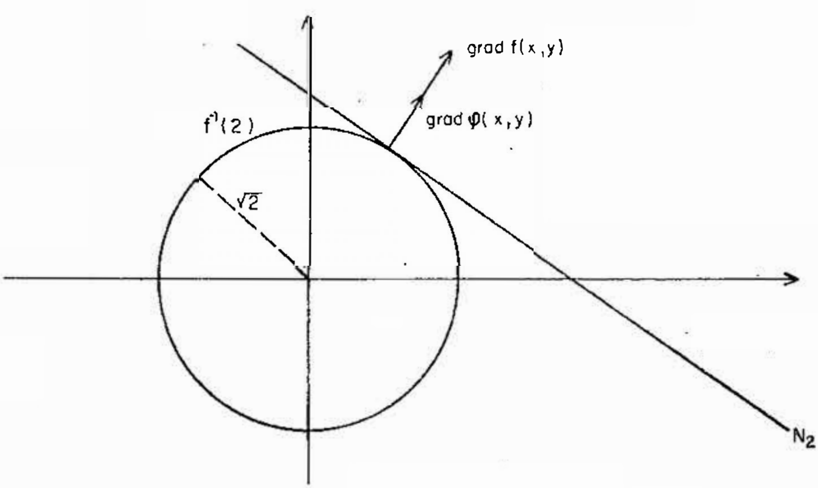
$$2x = \lambda$$

$$2y = \lambda$$

$$x + y = 2$$

Observe-se que $\lambda \neq 0$, pois, caso contrário, teríamos $x = y = 0$, o que não satisfaz $x + y = 2$. Portanto, devemos ter $\lambda \neq 0$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$. A solução do sistema é, então, $x = y = 1$ e $\lambda = 2$.

O valor de f no ponto $(1, 1)$ é 2. Podemos notar que $f^{-1}(2)$ define uma superfície de nível da função f (que, na verdade, é a circunferência de raio $\sqrt{2}$), na qual $grad\ f(x, y) \neq 0$ para todo (x, y). O Teorema do Multiplicador de Lagrange, então, afirma que as superfícies N_c e $f^{-1}(2)$ são tangentes, uma vez que possuem vetores normais que são proporcionais.



Esta interpretação geométrica nos permite, em alguns casos, saber se o ponto crítico de f é um máximo ou um mínimo, ou nenhum dos dois. No caso em questão, o gradiente f está apontando na direção nordeste, o que significa que, à medida que nos movimentarmos naquela direção, o valor de f aumenta e, em conseqüência, $(1, 1)$ é um mínimo de f/N_2.

19 — Seja $D = \mathring{R}^2_+$ (interior de R^2_+) e seja $f: D \to R$ definida por $f(x, y) = x^\alpha \cdot y^\beta$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Considere-se a superfície de nível c, $c \neq 0$, N_c da função $\varphi: R^2 \to R$ definida por $\varphi(x, y) = px + qy$, $p > 0$ e $q > 0$. Determinemos os pontos críticos de f/N_c. Convém observar que este é o problema típico da *Teoria do Consumidor*, onde f é uma função utilidade que representa as preferências do indivíduo, $\varphi^{-1}(c)$ a sua restrição orçamentária e p e q são os preços (dados para o indivíduo) dos dois bens x e y, respectivamente. No caso do consumidor, estaremos interessados não em todos os pontos críticos (caso exista mais de um), mas apenas naqueles que maximizam f/N_c.

Como f e N_c satisfazem as hipóteses do Teorema 6, os *pontos críticos* de f/N_c são aqueles para os quais existe $\lambda \in R$, que, juntamente com eles, é solução do sistema:

$$\lambda \, \alpha \, x^{\alpha-1} \, y^\beta = p \tag{3}$$

$$\lambda \, \beta \, x^\alpha \, y^{\beta-1} = q \tag{4}$$

$$px + qy = c \tag{5}$$

As equações (3) e (4) são obtidas de $grad\ f(x, y) = \lambda\, grad\ (x, y)$ e a equação (5) requer que a solução esteja em N_c.

Convém, inicialmente, observar que $\lambda \neq 0$ para que o sistema admita solução. Além disto, sendo $\lambda \neq 0$, teremos $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Dividindo (3) e (4), obtém-se:

$$qy = \frac{\beta}{\alpha} p \cdot x \tag{6}$$

e, substituindo em (5), temos:

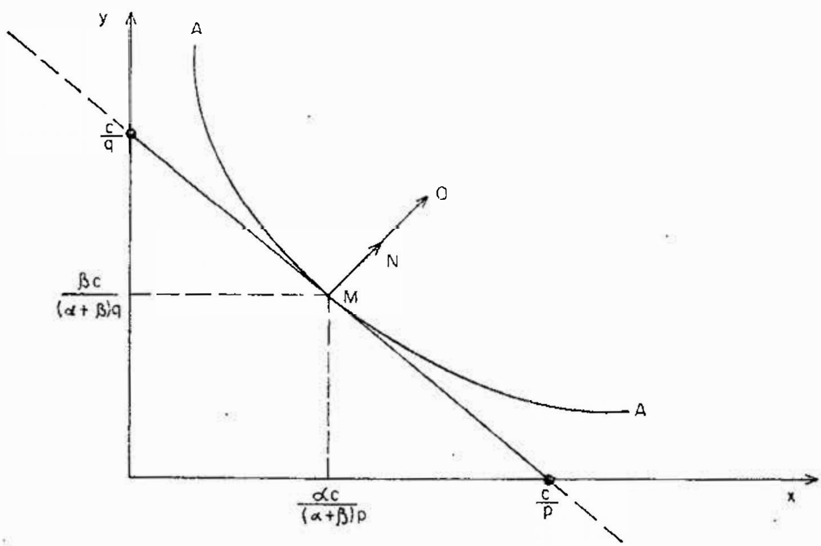
$$x = \frac{\alpha \ c}{(\alpha + \beta) \ p} \tag{7}$$

Para obtermos y, substituímos (7) em (6):

$$y = \frac{\beta c}{(\alpha + \beta) q} \tag{8}$$

O valor de λ é obtido de (3) ou (4).

A solução pode ser visualizada geometricamente na figura a seguir, onde AA é a curva de nível da função f, cujo valor coincide com o de f no *ponto crítico* encontrado. Os vetores MN e MO representam *grad* $f(x, y)$ e *grad* $\varphi(x, y)$ (não é possível identificá-los exatamente, pois isto depende do valor de λ). Também é importante notar que *grad* $\varphi(x, y) = (p, q)$, isto é, que o vetor de preços é perpendicular à curva de nível da função f.



Para finalizar o exemplo, podemos concluir que o ponto em questão é de máximo, pois a curva de nível de f à direita de AA corresponde a um valor maior da função (uma vez que o gradiente de f aponta na direção nordeste). Na linguagem da teoria do consumidor, as equações (7) e (8) são chamadas de equações de demanda dos bens x e y.

20 — O exemplo anterior pode ser generalizado. Suponha-se que $U: \mathring{R}^2_+ \to R$, $U \in C^2$ (hipótese usual na teoria do consumidor) e que $grad\ U(x, y) > 0$ (isto significa que as derivadas parciais de U são sempre positivas). Seja $c > 0$ a renda do consumidor e $p > 0$ e $q > 0$ os preços dos bens x e y. Desejamos, então, encontrar os pontos $(x, y) \in \mathring{R}^2_+$ tais que U/N_c seja um máximo, sendo $N_c = \{(x, y) \in \mathring{R}^2_+ : px + qy = c\}$.

Os pontos de máximo são dados pela solução do sistema:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \lambda p \tag{9}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \lambda q \tag{10}$$

$$px + qy = c \tag{11}$$

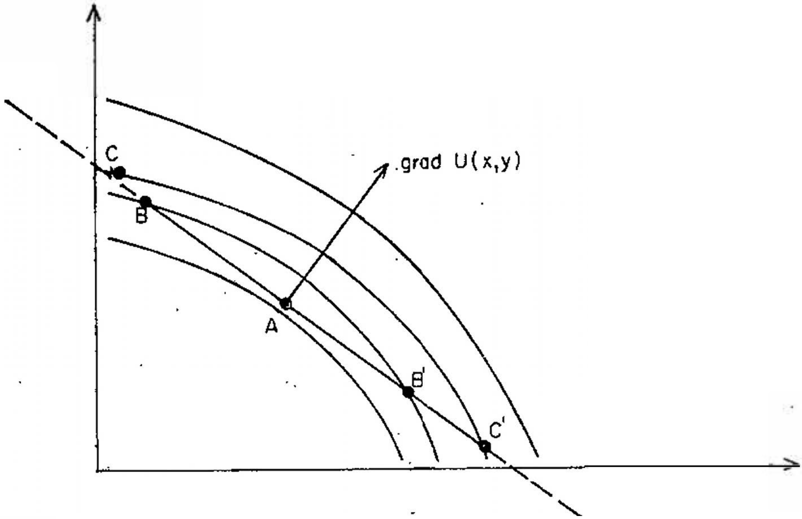
Com as hipóteses acima, $\lambda > 0$. Portanto, $grad\ U(x, y)$ estará apontando na direção nordeste.

Antes de fazermos a figura deste exemplo, convém mencionarmos que o problema acima pode não ter solução se não se supõe nada sobre o formato da curva de nível de f. Por exemplo, na situação a seguir (lembre-se de que U está definida no interior de R^2_+ e N_c é um conjunto totalmente contido em $\mathring{R}^2_+$, e os pontos $(c/p, 0)$ e $(0, c/q)$, em particular, não pertencem a N_c) o problema de encontrar um máximo de U/N_c não tem solução.

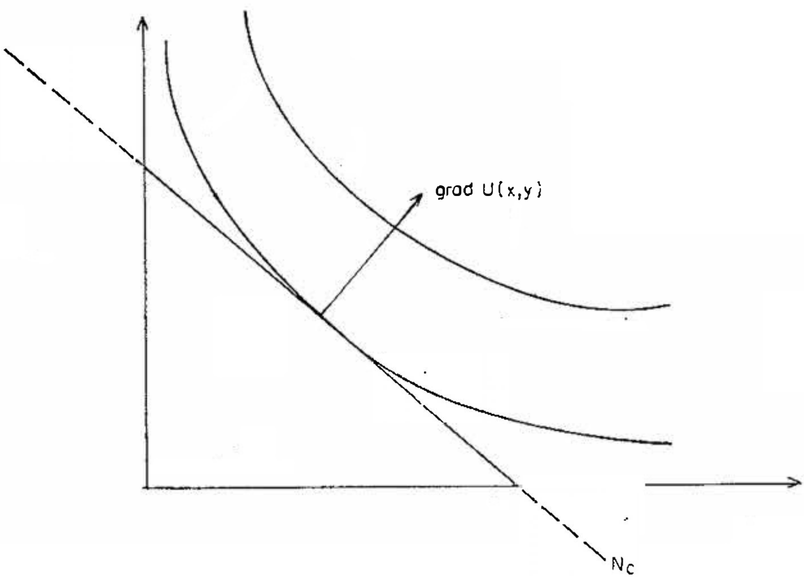
No ponto A, o gradiente de U aponta na direção nordeste. Os pontos B, B', C, C' estão sobre N_c, e neles f tem valor maior do que no ponto A. Isto ocorre, neste caso, porque N_c não é um conjunto compacto.

Um caso usual na teoria do consumidor em que o exercício acima faz sentido é quando as curvas de indiferença tiverem o formato indicado na segunda figura da página a seguir.

21 — Seja $\varphi: R^p \to R$, $\varphi \in C^k$ $(k \geqslant 1)$, e seja a superfície de nível c, N_c, de φ tal que $grad\ \varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in N_c$. Seja $\bar{x} \notin N_c$ e suponha-se que existe $x' \in N_c$ tal que a distância entre $\bar{x}$ e x' é mínima em relação a todos os pontos $x \in N_c$. Mostraremos que $x' - \bar{x}$ é perpendicular a N_c no ponto x'.



grad U(x,y)
C
B
A
B'
C'



grad U(x,y)
Nc

Para tanto, seja $f: R^p \rightarrow R$ definida por $f(x) = < \bar{x} - x, \bar{x} - x >$. Note-se que $f \in C^\infty$ e que ela tem mínimo restrito a N_c no ponto x'. Portanto, $grad\ f(x') = \lambda\ grad\ \varphi(x')$ para algum $\gamma \in R$. Seja $v \in ET(x')$. Então, como $< grad\ \varphi(x'), v > = 0$ e $grad\ f(x') = 2\ (x' - \bar{x})$, segue-se que $< \bar{x} - x', v > = = \frac{\lambda}{2} < grad\ \varphi(x'), v > = 0$.

Observe-se que neste exemplo partimos da hipótese de existência do ponto x', que, em geral, pode não existir. Se N_c é compacto, x' certamente existirá (Teorema de Weierstrass). Pode-se também mostrar (exercício 7) que, sob estas hipóteses, N_c é fechado e, portanto, existirá o ponto x'.

22 — Seja $f: R^3 \rightarrow R$ definida por $f(x, y, z) = x - y + 2z$ e seja $N_2 = \varphi^{-1}(2)$, onde $\varphi: R^3 \rightarrow R$ definida por $\varphi\ (x, y, z) = = x^2 + y^2 + 2z^2$. Encontramos os *pontos críticos* de f/N_2. Temos então que resolver o sistema:

$$(1, -1, 2) = \lambda\ (2x, 2y, 4z)$$

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$$

Notando inicialmente que nenhuma solução deste sistema é possível com $\lambda = 0$, temos então: $x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = -\frac{1}{2\lambda}$ e $z = \frac{1}{2\lambda}$.

Finalmente, obtém-se que $\lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Os pontos críticos de f/N_c são:

$$(x, y, z) = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$$

e:

$$(x, y, z) = (-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2)$$

Existe uma maneira equivalente de enunciar o Teorema do Multiplicador de Lagrange que, aliás, é mais usual nos textos de Economia.

Dados $f: D \to R$, $\varphi: D \to R$ satisfazendo as hipóteses do Teorema 6 e $N_c = \{x \in D: \varphi(x) = c\}$, define-se a função lagrangeana da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}: D \times R \to R$$

tal que $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda(c - \varphi(x))$. É fácil ver que $\mathcal{L} \in C^k$ se f e φ são de classe C^k.

Teorema 7 (Multiplicador de Lagrange) — Sejam $f: D \to R$, $D \subset R^p$ aberto, $f \in C^k$ $(k \geqslant 1)$, e N_c a superfície de nível c da função $\varphi: D \to R$, $\varphi \in C^k$ e tal que *grad* $\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in N_c$. Para que $x_0 \in N_c$ seja um ponto crítico de f/N_c, é necessário e suficiente que exista $\lambda \in R$ tal que (x_0, λ) é um ponto crítico de $\mathcal{L}$, isto é, $d\mathcal{L}(x_0; \lambda) = 0$.

Prova:

$$d\mathcal{L}(x, \lambda) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x, \lambda), \ldots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_p}(x, \lambda), \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, \lambda)\right).$$

Portanto, $d\mathcal{L}(x_0, \lambda) = 0$ se, e somente se, *grad* $f(x_0) = \lambda$ *grad* $\varphi(x_0)$ e $\varphi(x_0) = c$.

C. Q. D.

Consideraremos agora o caso em que, ao invés de uma única restrição, temos várias. A situação típica é a seguinte: a) uma função $f: D \to R$, $D \subset R^p$ aberto, $f \in C^k$, $k \geqslant 1$; b) uma função $\varphi: D \to R^q$ $(q < p)$, de classe C^k, $c \in R^q$; e c) um conjunto $N_c = \varphi^{-1}(c) = \{x \in D: \varphi(x) = c\}$, sendo que o posto da matriz Jacobiana [2] de φ, $D\varphi(x)$, é igual a q para todo $x \in N_c$.

Dado o conjunto N_c tal como definido acima, então as definições anteriores de vetor tangente a N_c e vetor normal se aplicam, isto é, $v \in R^p$ é um *vetor tangente* a N_c no ponto x_0 se existe um caminho

[2] O posto de uma matriz é dado pelo número (máximo) de linhas que são linearmente independentes. A condição "c" acima afirma que $D\varphi(x)$ tem q linhas que são linearmente independentes.

λ: $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N_c$ tal que $\lambda(0) = x_0$ e $\lambda'(0) = v$. Um vetor $z \in R^p$ é um *vetor normal* a N_c no ponto x_0 se $< z, v > = 0$ para todo $v \in ET(x_0)$ ($ET(x_0)$ é o conjunto dos vetores tangentes a N_c no ponto x_0).

Teorema 8 — Dada $\varphi: D \rightarrow R^q$ tal como definida anteriormente, segue-se então que, para todo $x_0 \in N_c$, $ET(x_0)$ é um *espaço vetorial* de dimensão $p - q$.

Teorema 9 — Dada $\varphi: D \rightarrow R^q$ tal como acima, então, para todo $x_0 \in N_c$, o conjunto dos vetores normais a N_c no ponto x_0 é um *espaço vetorial* de dimensão q e os vetores *grad* $\varphi_1(x_0)$, *grad* $\varphi^2(x_0), \ldots,$ *grad* $\varphi^q(x_0)$ (onde $\varphi^i: D \rightarrow R$ é a i-ésima coordenada de φ) formam uma base deste espaço.[3]

Teorema 10 (Multiplicadores de Lagrange) — Sejam $f: D \rightarrow R$, $D \subset R^p$ aberto, $f \in C^k$ $(k \geqslant 1)$ e N_c a superfície de nível c da função $\varphi: D \rightarrow R^q$ $(q < p)$, $\varphi \in C^k$, sendo o posto de $D\varphi(x)$ igual a q para todo $x \in N_c$. Então, para que $x_0 \in N_c$ seja um ponto crítico de f/N_c devem existir q números reais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ tais que *grad* $f(x_0) = \lambda_1$ *grad* $\varphi^1(x_0) + \lambda_2$ *grad* $\varphi^2(x_0) + \ldots + \lambda_q$ *grad* $\varphi^q(x_0)$.

Prova:

Apenas para facilitar a demonstração, recordemos que x_0 é um ponto crítico (por definição) de f/N_c se $<$ *grad* $f(x_0), v > = 0$ para todo $v \in ET(x_0)$.

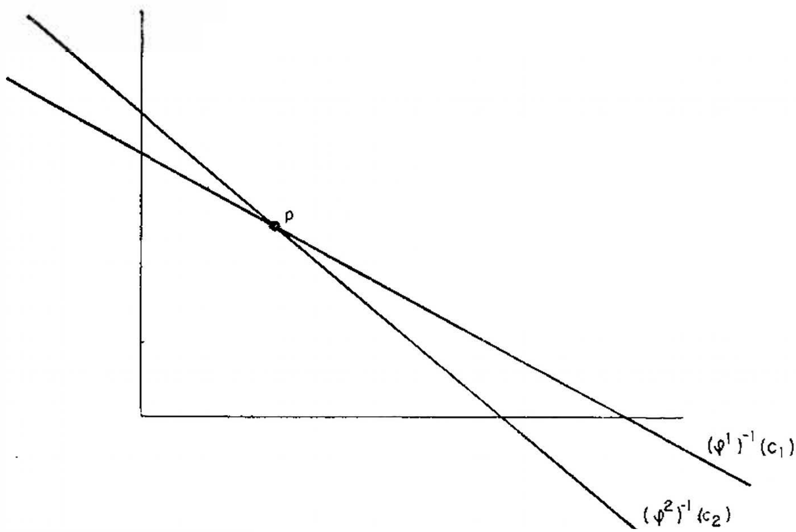
Suponha-se que x_0 é um ponto crítico de f/N_c. Portanto, *grad* $f(x_0)$ é um vetor normal a N_c que pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores da base deste espaço, isto é, existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ tais que *grad* $f(x_0) = \lambda_1$ *grad* $\varphi^1(x_0) + \lambda_2$ *grad* $\varphi^2(x_0) + \ldots + \lambda_q$ *grad* $\varphi^q(x_0)$.

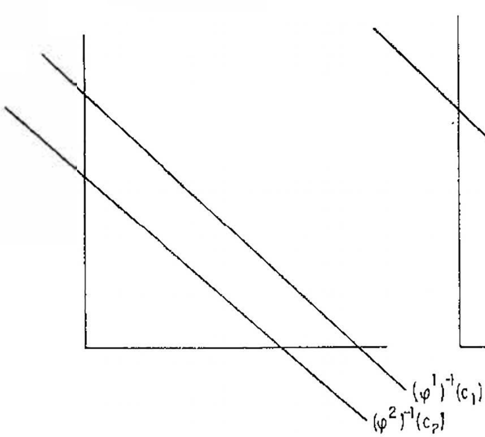
Suponha-se agora que existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ tais que *grad* $f(x_0) = \lambda_1$ *grad* $\varphi^1(x_0) + \lambda_2$ *grad* $\varphi^2(x_0) + \ldots + \lambda_q$ *grad* $\varphi^q(x_0)$. Dado um vetor $v \in ET(x_0)$, é fácil ver que $<$*grad* $f(x_0), v > = 0$.

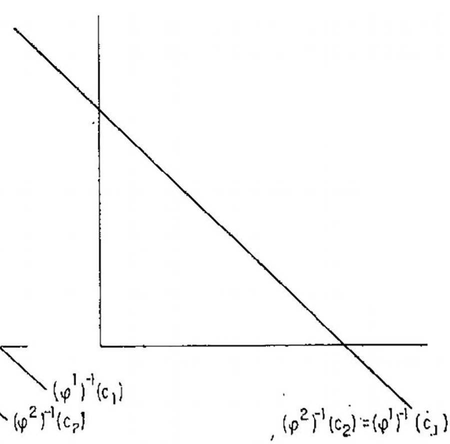
C. Q. D

[3] Para demonstrações destes teoremas, ver, por exemplo, Flemming (1977) e Lima (1981).

Encerrando esta seção, convém chamar a atenção para uma hipótese feita no teorema acima, qual seja, $q < p$. As figuras a seguir mostram que, se tal não ocorre, o teorema não é mais verdadeiro. Nelas, a função f está definida em R^2 e φ é uma função de R^2 em R^2. Observe-se que, no primeiro caso, existe um único ponto que pertence a N_c, no segundo, $N_c = \phi$ e, no último, temos na verdade uma única restrição.







VI.3 — Caracterização dos Pontos Críticos de f/N_c

Como já sabemos, os pontos críticos de uma função f/N_c podem ser pontos de máximo relativo, de mínimo relativo ou nenhum deles. Em vista disto, e do fato de que as considerações geométricas do tipo que apresentamos na seção anterior nem sempre podem ser feitas, procuraremos desenvolver condições necessárias e suficientes para caracterizar um ponto crítico de f/N_c. Na Seção VI.4 veremos ainda uma razão importante para nos preocuparmos com o problema.

A situação típica nesta seção é ainda a seguinte: a função $f\colon D \to R$, $D \subset R^p$ aberto, $f \in C^k$ $(k \geqslant 2)$, a superfície $N_c = \varphi^{-1}(c)$, sendo $\varphi\colon D \to R^q$, $q < p$, $\varphi \in C^k$, e o posto de $D\varphi(x)$ igual a q para todo $x \in N_c$. O ponto x_0 é um *ponto crítico* de f/N_c, isto é, $grad\ f(x_0) = \lambda_1\ grad\ \varphi^1(x_0) + \ldots + \lambda_q\ grad\ \varphi^q(x_0)$, sendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ números reais e $(x_0) = c$.

Definamos a função lagrangeana, neste caso, da seguinte maneira: $\mathcal{L}\colon D \times R^q \to R$ tal que $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 (c_1 - \varphi^1(x)) + \ldots + \lambda_q (c_q - \varphi^q(x))$ e $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$. Podemos escrevê-la, ainda, de forma mais compacta: $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + < \lambda, c - \varphi(x) >$.

Como f e φ são, no mínimo, de classe C^2, $\mathcal{L}$ é também (no mínimo) de classe C^2. Definiremos a forma quadrática hessiana de $\mathcal{L}$ por $\tilde{Q}\colon R^p \to R$ tal que:

$$\tilde{Q}(h; x) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i\, \partial x_j}(x)\ h_i h_j = h \cdot \mathcal{L}''(x) \cdot h$$

onde $\mathcal{L}''(x)$ é a matriz hessiana de $\mathcal{L}$ ignorando-se a variável λ, isto é:

$$\mathcal{L}''(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}(x) & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1\, \partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1\, \partial x_p}(x) \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_p\, \partial x_1}(x) & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_p\, \partial x_2}(x) & \ldots & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial^2 x_p}(x) \end{bmatrix}$$

Teorema 11 (Condições Suficientes de Segunda Ordem) — Sejam x_0 um ponto crítico de f/N_c e φ a função lagrangeana. Então:

a) se $\tilde{Q}(h; x_0)$ é negativa definida sujeita à condição de que $< grad\ \varphi^j(x_0), h > = 0$, $j = 1, 2, \ldots, q$, então o ponto x_0 é um máximo relativo de f/N_c, ou, dito de outra forma, se $\tilde{Q}(h;\ x_o) < 0$ para todo $h \in R^p - \{0\}$ tal que $< grad\ \varphi^j(x_o),\ h > = 0,\ j = 1, 2, \ldots, q$, x_o é um máximo relativo de f/N_c;

b) se $\tilde{Q}(h;\ x_o)$ é positiva definida sujeita à condição de que $< grad\ \varphi^j(x_o),\ h > = 0,\ j = 1, 2, \ldots, q$, então o ponto x_0 é um mínimo relativo de f/N_c; e

c) se $\tilde{Q}(h;\ x_o)$ é indefinida sujeita à condição de que $< grad\ \varphi^j(x_o),\ h > = 0,\ j = 1, 2, \ldots, q$, então o ponto x_0 não é um ponto de máximo ou de mínimo de f/N_c.

Teorema 12 (Condições Necessárias de Segunda Ordem) — Se x_o é um máximo relativo (mínimo relativo) de f/N_c, então $\bar{Q}(h,\ x_o) \leqslant 0$ $(\bar{Q}(h,\ x_o) \geqslant 0)$ para todo $h \in R^p$ tal que $< grad\ \varphi^j(x_o),\ h > = 0,\ j = 1, 2, \ldots, q$.

Tal como apresentados acima, estes teoremas são de difícil operacionalização. Entretanto, existe uma caracterização da forma quadrática com restrições lineares (como é o caso) em termos de determinantes semelhantes ao caso que discutimos no capítulo anterior.

Sejam dadas as matrizes A e B, sendo $A\ (n \times n)$ e $B\ (m \times n)$ com $m < n$. Formemos a matriz C da seguinte maneira:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & B_{(m \times n)} \\ B_{(n \times m)} & A \end{bmatrix}$$

onde B' é a matriz que se obtém trocando as linhas e as colunas de B e 0 é a matriz $m \times m$ cujos elementos são todos iguais a zero. C, portanto, é uma matriz $(m + n) \times (m + n)$.

Define-se então o menor principal sucessivo de ordem r da matriz C como:

$$\det C_r = \det \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mr} \\ b_{11} & & b_{m1} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1r} & & b_{mr} & a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{bmatrix},\ r = m + 1, m + 2, \ldots, n$$

Convém observar que C_r é, na verdade, uma matriz $(m + r)$ x x $(m + r)$.

Teorema 13 — Seja A simétrica, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ e B m x $m = \begin{bmatrix} b_{11} \ldots b_{1m} \\ b_{m1} \ldots b_{mm} \end{bmatrix}$ tal que $det\ B \neq 0$.

Então:

a) $h.A.h < 0$ para todo $h \neq 0$ tal que $B.h = 0$ se, e somente se, $(-1)^r.\ det\ C_r > 0,\ r = m + 1,\ m + 2, \ldots, n$; e

b) $h.A.h > 0$ para todo $h \neq 0$ tal que $B.h = 0$ se, e somente se, $(-1)^m.\ det\ C_r > 0,\ r = m + 1,\ m + 2, \ldots, n.$[4]

Poderemos agora modificar as condições suficientes de segunda ordem, de forma a trabalhar com os menores principais de uma matriz hessiana modificada. Sejam $\mathcal{L}_{ij}(x)$ o elemento genérico da matriz $\mathcal{L}''(x)$ e $\varphi^k_j(x)$ a derivada parcial da k-ésima componente da função φ com relação à variável j $(k = 1, 2, \ldots, q$ e $j = 1, 2, \ldots, p)$. Define-se, então, a matriz hessiana bordada de f/N_c da seguinte forma:

$$\widetilde{H}(x) = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & \varphi^1_1(x) & \varphi^1_2(x) & \ldots & \varphi^1_p(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \varphi^q_1(x) & \varphi^q_2(x) & \ldots & \varphi^q_p(x) \\ \varphi^1_1(x) & \ldots & \varphi^q_1(x) & \mathcal{L}_{11}(x) & \mathcal{L}_{12}(x) & \ldots & \mathcal{L}_{1p}(x) \\ \varphi^1_2(x) & & \varphi^q_2(x) & \mathcal{L}_{21}(x) & \mathcal{L}_{22}(x) & \ldots & \mathcal{L}_{2p}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ \varphi^1_p(x) & & \varphi^q_p(x) & \mathcal{L}_{p1}(x) & \mathcal{L}_{p2}(x) & \ldots & \mathcal{L}_{pp}(x) \end{bmatrix}$$

Observe-se que $\widetilde{H}(x)$ é uma matriz $(p + q)$ x $(p + q)$ que satisfaz as condições do Teorema 13, isto é, $\mathcal{L}''(x)$ é simétrica e o posto de $D\varphi(x)$ é q. Portanto, temos o seguinte:

a) se $(-1)^r\ det\ \widetilde{H}_r > 0,\ r = q + 1,\ q + 2, \ldots, p$ no ponto $x_o \in N_c$, então x_o é um máximo de f/N_c;

[4] Para uma demonstração deste teorema, assim como caracterizações das formas semidefinidas, ver Debreu (1952).

b) se $(-1)^q \det \tilde{H}_r > 0$; $r = q+1, q+2, \ldots, p$, então x_0 é um mínimo de f/N_c; e

c) se um dos menores principais sucessivos tiver um sinal estritamente contrário ao "esperado", x_0 não será um ponto de máximo ou de mínimo de f/N_c.

Vejamos algumas aplicações simples deste resultado.

Exemplo:

23 — Consideremos uma simplificação do exemplo 19. Seja $f: R^2 \to R$ dada por $f(x, y) = x\, y$ e seja $\varphi: R^2 \to R$ dada por $\varphi(x, y) = \tilde{p}\, x + \tilde{q}\, y$, $\tilde{p} > 0$, $\tilde{q} > 0$. Dado $c \in R$, $c > 0$, $\varphi^{-1}(c)$ determina a superfície de nível c, N_c, de φ. O ponto crítico de f/N_c é (ver exemplo 19):

$$(x, y) = \left[\frac{c}{2\tilde{p}}, \frac{c}{2\tilde{q}}\right]$$

Vejamos se as condições suficientes de segunda ordem podem nos auxiliar na identificação da natureza deste ponto crítico. Neste caso, temos $p = 2$ e $q = 1$. A matriz hessiana bordada é, simplesmente:

$$\tilde{H}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_1(x, y) & \varphi_2(x, y) \\ \varphi_1(x, y) & \mathcal{L}_{11}(x, y) & \mathcal{L}_{12}(x, y) \\ \varphi_2(x, y) & \mathcal{L}_{21}(x, y) & \mathcal{L}_{22}(x, y) \end{bmatrix}$$

ou seja:

$$\tilde{H}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{p} & \tilde{q} \\ \tilde{p} & 0 & 1 \\ \tilde{q} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $q + 1 = p$, basta-nos considerar $\det \tilde{H}_2$ que coincide com $\det \tilde{H}(x, y)$. Note-se, então, que $\det \tilde{H}(x, y) = 2\, \tilde{p}\, \tilde{q} > 0$. Portanto, este é um ponto de máximo relativo de f.

O caso em que existe apenas uma restrição $(q = 1)$ aparece em muitos problemas econômicos. Portanto, vamos particularizar ainda mais as condições suficientes acima para facilitar a sua efetiva utilização:

a) se $(-1)^r \det \tilde{H}_r > 0$, $r = 2, 3, \ldots, p$, então f/N_c tem máximo no ponto x_0;

b) se $\det \tilde{H}_r < 0$, $r = 2, 3, \ldots, p$, então f/N_c tem mínimo no ponto x_0; e

c) se um dos menores principais sucessivos tiver um sinal estritamente contrário ao esperado, x_0 não é um ponto de máximo ou de mínimo.

Na situação acima, o menor principal sucessivo de ordem r é o determinante da seguinte matriz $(r + 1) \times (r + 1)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_r \\ \varphi_1 & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \cdots & \mathcal{L}_{1r} \\ \varphi_2 & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \cdots & \mathcal{L}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_r & \mathcal{L}_{r1} & \mathcal{L}_{r2} & & \mathcal{L}_{rr} \end{bmatrix}$$

Vejamos mais alguns exemplos.

24 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$ e seja $N_4 = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 = 4\}$. Os pontos críticos de f/N_4 são dados por:

$$2x = 2\lambda x$$
$$-2y = 2\lambda y$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

Note-se que não se pode ter $\lambda = 0$ (pois neste caso teríamos $x = 0$ e $y = 0$ nas duas primeiras equações, o que não satisfaz a terceira) e, além disto, $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Supondo que $y \neq 0$ e dividindo a primeira equação pela segunda, encontramos $x\, y = -x\, y$, o que significa que $x = 0$. Daí, temos que $(0, 2)$ e $(0, -2)$ são pontos críticos de f/N_4. Da mesma forma, $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ são pontos críticos.

Dado $(x, y) \in R^2$, a matriz hessiana bordada de f/N_c é:

$$\tilde{H}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2-2\lambda \end{bmatrix}$$

Para identificar quais são os pontos críticos, dentre os acima mencionados, em que f atinge máximo e em que f atinge mínimo, verifiquemos as condições suficientes de segunda ordem. Para tanto, examinemos $\tilde{H}(x, y)$ em cada um dos quatro pontos críticos:

a) Ponto crítico $(0, 2)$. $(\lambda = -1)$:

$$\tilde{H}(0, 2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Necessitamos então, neste caso, apenas examinar o sinal de $\det \tilde{H}_2 = \det \tilde{H}(0, 2) = -64 < 0$. Portanto, $(0, 2)$ é um ponto de mínimo relativo de f/N_{λ}.

b) Ponto crítico $(0, -2)$. $(\lambda = -1)$:

$$\tilde{H}(0, -2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $\det \tilde{H}(0, -2) = -64 < 0$, $(0, -2)$ também é um ponto de mínimo relativo.

c) Ponto crítico $(2, 0)$. $(\lambda = 1)$:

$$\tilde{H}(2, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Como $det\ \tilde{H}\ (2,\ 0) = 64 > 0$, o ponto $(2,\ 0)$ é um máximo relativo de f/N_4.

d) É fácil ver que $(-2,\ 0)$ também é um ponto de máximo relativo de f.

Sugerimos ao leitor fazer uma representação gráfica da solução deste problema e verificar que se poderia ter chegado a esta conclusão por métodos geométricos.

25 — Seja $f: R^3 \to R$ dada por $f(x,\ y,\ z) = x^2 - y^2 - z^2$ e seja $N_4 = \{(x,\ y,\ z) \in R^3: x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$. Os pontos críticos de f/N_4 são dados pela solução do sistema:

$$\begin{aligned} 2\ x &= 2\ \lambda\ x \\ -2\ y &= 2\ \lambda\ y \\ -2\ z &= 2\ \lambda\ z \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$

A solução deste sistema requer que $\lambda \neq 0$ e $x \neq 0$, ou $y \neq 0$ ou $z \neq 0$. Analisemos apenas o caso em que $x \neq 0$ (os outros dois são deixados ao leitor como exercício). Neste caso, a solução do sistema nos dá os seguintes pontos críticos: $(2,\ 0,\ 0)$ e $(-2,\ 0,\ 0)$. A matriz hessiana bordada de f/N_4 é:

$$\tilde{H}\ (x,\ y,\ z) = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2 & 2z \\ 2x & 2 - 2\lambda & 0 & 0 \\ 2y & 0 & -2 - 2\lambda & 0 \\ 2z & 0 & 0 & -2 - 2\lambda \end{bmatrix}$$

Examinemos cada um dos pontos acima:

a) Em $(2,\ 0,\ 0)$, temos $\lambda = 1$ e:

$$\tilde{H}\ (2,\ 0,\ 0) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det \tilde{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 64 > 0$$

e:

$$\det \tilde{H}_3 = (-1)\ 4\ \det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = -256 < 0$$

Portanto, $(2, 0, 0)$ é um ponto de máximo local de $f/\dot{N}_4$.

b) Em $(-2, 0, 0)$, temos:

$$\det \tilde{H}_2 = 64 > 0$$

e:

$$\det \tilde{H}_3 = (-1)\ (-4)\ \det \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = -256 < 0$$

Portanto, $(-2, 0, 0)$ também é um ponto de máximo local de f/N_4.

VI.4 — O Método da Estática Comparativa

Iniciemos a discussão do Método da Estática Comparativa [5] examinando dois exemplos simples:

[5] É importante observar que, nesta apresentação, evitaremos discutir as questões mais polêmicas relacionadas com as possíveis limitações da Estática Comparativa. Procuraremos apenas mostrar quais são as peças fundamentais (do ponto de vista matemático) que justificam o método.

26. — Imaginemos que, num mercado competitivo, são dadas as curvas de demanda e oferta do produto, especificadas da seguinte maneira:

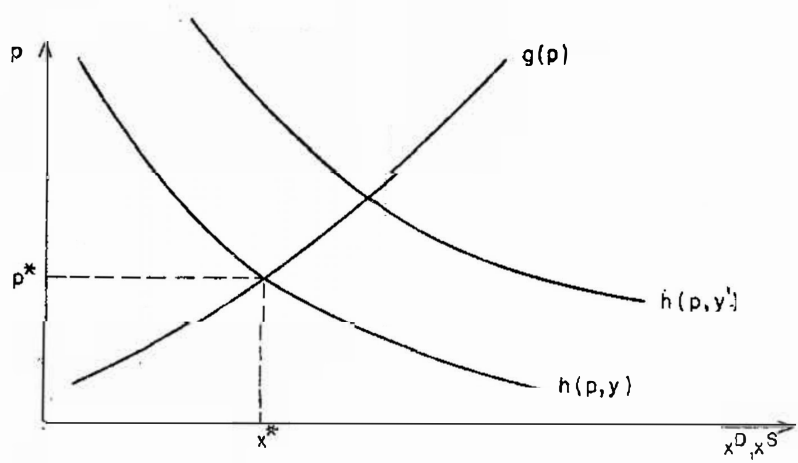
$$x^D = h\,(p,\ y) \tag{12}$$

$$x^s = g\,(p) \tag{13}$$

A equação (12) descreve o comportamento da quantidade demandada como uma função de preço do produto, p, e da renda, y. As hipóteses usuais sob h são as seguintes: $h\colon \mathring{R}^2_+ \rightarrow R_+$ é de classe C^1 e $\dfrac{\partial h}{\partial p}(p, y) < 0$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(p, y) > 0$ para todo $(p, y) \in \mathring{R}^2_+$.

A equação (13) descreve o comportamento da oferta do produto como uma função do preço. Admitiremos que $g\colon \mathring{R}_+ \rightarrow R_+$ é de classe C^1 e que $g' > 0$ para todo $p \in \mathring{R}_+$.

Dado um valor de y, se existe $(p^*, x^*) \in \mathring{R}_+ \times R_+$ tal que $h(p^*, y) = g(p^*)$, dizemos que (p^*, x^*) é um equilíbrio neste mercado. A representação gráfica deste equilíbrio é usualmente feita da seguinte forma:



Considerando o equilíbrio representado acima, uma questão que se segue naturalmente é indagar como variam p^* e x^* quando y varia. Neste exemplo simples, é fácil ver que um aumento de y aumenta h para cada p, pois a função $f(y) = h(p, y)$ é monótona crescente. Este fato está representado no gráfico acima pelo deslocamento da curva $h(p, y)$ para $h(p, y')$, onde o preço e a quantidade de equilíbrio são superiores a p^* e x^*.

Este método gráfico, embora bastante popular nos textos de Economia, em certos casos pode não estar disponível em função da natureza do problema. Contudo, se examinarmos as hipóteses feitas a respeito de h e g, veremos que elas nos permitem a utilização do teorema da função implícita e, desta forma, uma resposta mais analítica para a questão.

Se (p^*, x^*) é um equilíbrio no mercado, então $h(p^*, y) - g(p^*) = 0$.

Dadas as hipóteses acima a respeito de h e g, existe uma função $\pi: V \to R$, $V \subset \overset{\circ}{R}_+$ aberto, $\pi \in C^1$, tal que $h(\pi(y), y) - g(\pi(y)) = 0$, ou seja, de forma mais intuitiva, numa vizinhança do ponto de equilíbrio o preço de equilíbrio é uma função de classe C^1 da renda. Além disto, sabemos que:

$$\frac{d\pi}{dy} = - \left[\frac{\frac{\partial h}{\partial p}(\pi(y), y) - \frac{\partial g}{\partial p}(\pi(y))}{\frac{\partial h}{\partial y}(\pi(y), y)} \right]^{-1} > 0$$

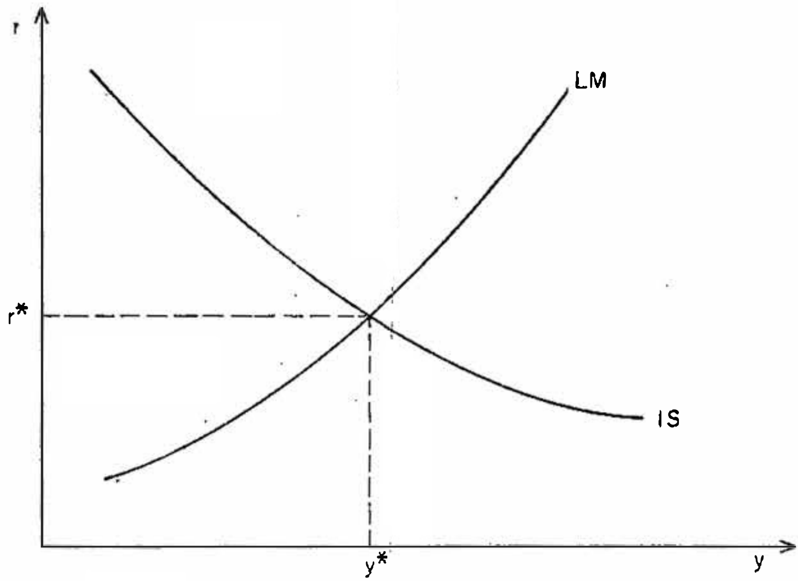
27 — Consideremos agora um modelo macroeconômico de uma economia fechada e sem governo. Sejam as equações que descrevem o equilíbrio neste modelo:

$$y = C(y) + I(r) \qquad (14)$$

$$m = L(y, r) \qquad (15)$$

A equação (14) é a de equilíbrio no mercado de bens e serviços. $C: R_+ \to R_+$ (a função consumo) descreve o consumo como função do nível de renda e $I: R_+ \to R_+$ descreve o nível do investimento como função da taxa de juros. Admitiremos que $C \in C^1$ e $I \in C^1$ e que $1 > \dfrac{\partial C}{\partial y} > 0$ e $\dfrac{\partial I}{\partial r} < 0$ para todo $y \in R_+$ e para todo $r \in R_+$.

A equação (15) é a de equilíbrio no mercado de moeda. $L: \mathring{R}^2_+ \rightarrow$ $\rightarrow R$ (a função de demanda de moeda) é, por hipótese, de classe C^1 e $\dfrac{\partial L}{\partial r} < 0$ e $\dfrac{\partial L}{\partial y} > 0$ para todo $(y, r) \in \mathring{R}^2_+$. Na equação (15), m é o estoque real de moeda. Um equilíbrio macroeconômico (quando existe) é um par (y^*, r^*) tal que (14) e (15) se verificam, dado um valor para o estoque real de moeda. A representação gráfica deste equilíbrio é a seguinte:



As curvas *IS* e *LM* são, respectivamente, as contrapartidas das equações (14) e (15).

Dado o equilíbrio macroeconômico (y^*, r^*), a pergunta que se segue naturalmente é acerca de como variam y^* e r^* quando varia m. Considere-se o sistema (14) e (15) reescrito da seguinte forma:

$$F(y, r) \equiv y - C(y) - I(r) = 0 \qquad (14')$$

$$G(y, r; m) \equiv m - L(y, r) = 0 \qquad (15')$$

Neste caso, a questão se resume em saber se (14') e (15') determinam y e r como funções diferenciáveis de m e, em caso afirmativo, qual o sinal destas derivadas.

De acordo com o Teorema da Função Implícita, se o determinante jacobiano for diferente de zero, a resposta à pergunta colocada (existência de funções diferenciáveis) será positiva. Note-se, portanto, que:

$$det \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\partial C}{\partial y} & - \dfrac{\partial I}{\partial r} \\ - \dfrac{\partial L}{\partial y} & - \dfrac{\partial L}{\partial r} \end{bmatrix} = \left(1 - \frac{\partial C}{\partial y}\right)\left(- \frac{\partial L}{\partial r}\right) - \frac{\partial I}{\partial r} \cdot \frac{\partial L}{\partial y} > 0$$

Desta maneira, em uma vizinhança do ponto (y^*, r^*) existem as funções (implicitamente determinadas) $y^* = y^*(m)$ e $r^* = r^*(m)$. Para calcular $\dfrac{dy^*}{dm}$ e $\dfrac{dr^*}{dm}$ procedemos de maneira semelhante ao que fizemos na Seção VI.1 (exemplos 15 e 16), isto é:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy^*}{dm} + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{dr^*}{dm} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy^*}{dm} + \frac{\partial G}{\partial r} \frac{dr^*}{dm} = - \frac{\partial G}{\partial m}$$

ou seja:

$$\left(1 - \frac{\partial C}{\partial y}\right) \frac{dy^*}{dm} - \frac{\partial I}{\partial r} = 0$$

$$- \frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy^*}{dm} - \frac{\partial G}{\partial r} \frac{dr^*}{dm} = - 1$$

onde as derivadas parciais de F e G são calculadas no ponto (y^*, r^*). Deste sistema de equações, obtemos:

$$\frac{dy^*}{dm} = \frac{- \partial I / \partial r}{\left(1 - \dfrac{\partial C}{\partial y}\right)\left(- \dfrac{\partial L}{\partial r}\right) - \left(\dfrac{\partial I}{\partial r} \dfrac{\partial L}{\partial y}\right)} > 0$$

e:

$$\frac{\partial r^*}{\partial m} = \frac{-\left(1 - \dfrac{\partial C}{\partial y}\right)}{\left(1 - \dfrac{\partial C}{\partial y}\right)\left(-\dfrac{\partial L}{\partial r}\right) - \left(\dfrac{\partial I}{\partial r}\,\dfrac{\partial L}{\partial y}\right)} < 0$$

É interessante observar que, tanto no exemplo 26 quanto no exemplo 27, foi possível obtermos informações quantitativas sobre as derivadas envolvidas, isto é, o método utilizado nos permitiu determinar a direção da mudança e também a sua magnitude.

Do ponto de vista da Teoria Econômica,[6] estes dois exemplos são representativos das situações tipicamente encontradas. Em geral, temos um sistema de equações que definem um equilíbrio — dados os valores de alguns parâmetros — e desejamos investigar como ele se altera quando variam tais parâmetros, isto é, temos um sistema (para não tornar excessivamente cansativa a exposição, evitaremos explicitar o domínio das funções e as propriedades diferenciais das mesmas, o que já foi detalhadamente desenvolvido na Seção VI.1):

$$F(x, \alpha) = 0$$

onde x é o vetor das q variáveis endógenas (ou de controle) e α é um vetor de p parâmetros. Dado que este sistema determina as q funções $x_i = h_i(\alpha)$, qual é o sinal de $\dfrac{\partial x_i}{\partial \alpha_i}$ no ponto de equilíbrio inicial? Já vimos que o *Teorema da Função Implícita* é, em geral, o instrumento mais adequado para tentarmos responder à pergunta. Quando se verificam as hipóteses do teorema podemos — pelos procedimentos já indicados — calcular as derivadas parciais de interesse.

[6] Referências interessantes sobre o método da *Estática Comparativa* são Samuelson (1971), Intriligator (1971), Takayama (1974) e Silberberg (1978), nos quais esta apresentação se baseia.

É útil que procuremos estudar, desde a sua formulação, a natureza de um problema econômico bastante comum.[7] Para tanto, sejam:

a) $F: D \times V \rightarrow R$, $D \subset R^q$, $V \subset R$, $D \times V$ aberto e F de classe C^2 em $D \times V$; e

b) $g: D \times V \rightarrow R^k$, $g \in C^2$, $k < q$, de classe C^2 em $D \times V$ e $N_c = \{x \in D: g(x, \alpha) = c\}$ (note-se que α é tratado, por ora, como uma constante).

Nosso problema consiste, portanto, em determinar $x^* \in D$ que maximiza $F(x, \alpha)$ com as restrições:

$$\begin{aligned} g_1(x, \alpha) &= c_1 \\ &\vdots \\ g_k(x, \alpha) &= c_k \end{aligned}$$

Supondo que existe x^* que resolve este problema, então ele deve satisfazer o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x_1}(x^*, \alpha) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^*, \alpha) + \ldots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x^*, \alpha) = 0 \\
&\frac{\partial F}{\partial x_2}(x^*, \alpha) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x^*, \alpha) + \ldots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(x^*, \alpha) = 0 \\
&\vdots \\
&\frac{\partial F}{\partial x_q}(x^*, \alpha) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_q}(x^*, \alpha) + \ldots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_q}(x^*, \alpha) = 0 \\
&g_1(x^*, \alpha) = c_1 \\
&\vdots \\
&g_k(x^*, \alpha) = c_k
\end{aligned}$$

7 No que se segue trataremos da questão abstratamente. Aqueles que preferirem podem materializar o problema para o caso da teoria do consumidor ou da produção.

que possui $(q + k)$ equações e $(q + k)$ variáveis e é o sistema de equilíbrio a que nos referimos anteriormente. Se quisermos agora determinar como variam os x_i^* em função do parâmetro α, é suficiente que a matriz jacobiana deste sistema tenha determinante diferente de zero. Em primeiro lugar, é legítimo falarmos da matriz jacobiana, pois f e g são função de classe C^2. Em segundo lugar, note-se que as variáveis deste sistema são $x_1, x_2, \ldots, x_q, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Portanto, a matriz jacobiana é encontrada derivando-se cada uma das equações acima com relação a estas variáveis. Com um pouco de paciência, o leitor se convencerá de que tal matriz é simplesmente a matriz hessiana bordada de F/N_c, o que quer dizer que, se se verificam as condições suficientes de máximo (ou de mínimo, quando for o caso), o sistema de equilíbrio acima admite uma solução em função do parâmetro α (esta solução é de classe C^2 e as derivadas parciais $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}$ podem ser calculadas pela fórmula dada pelo *Teorema da Função Implícita*).

Convém chamar a atenção para o fato de que a solução obtida é de caráter local, sendo, entretanto, em muitos casos, possível garantir pelo menos o sinal das derivadas de maneira global. Isto é possível nos exemplos 26 e 27 que utilizamos para iniciar esta seção.

Consideremos o problema de minimização de custos de uma firma em competição perfeita e suponhamos que ela utiliza os insumos K e L para produzir Y segundo a função de produção $F: \mathring{R}_+^2 \rightarrow R_+ - \{0\}$, $Y = F(K, L)$. Admitiremos que $F \in C^2$, com derivadas parciais positivas, e que os preços dos fatores (dados para a firma) K e L sejam r e w, respectivamente. Seja $\overline{Y} > 0$. Como $\mathit{grad}\, F(K, L) \neq 0$, a equação $\overline{Y} = F(K, L)$ define, em qualquer ponto (K^0, L^0), implicitamente uma função $L = h(K)$ tal que $\overline{Y} = F(K, h(K))$. Faremos a seguinte hipótese adicional: para todo (K, L) tal que $\overline{Y} = F(K, L)$, $\frac{d^2L}{dK^2} > 0$ (onde $\frac{d^2L}{dK^2}$ indica a derivada segunda da função h acima).

A firma procura determinar K^*, L^* tais que resolvam o seguinte problema: minimizar $wL + rK$ com a restrição $\overline{Y} = F(K, L)$.

A função lagrangeana para este problema é:

$$\mathcal{L}(K, L; \lambda) = wL + rK + \lambda(\overline{Y} - F(K, L))$$

K^* e L^*, portanto (se existirem), devem ser uma solução do sistema:

$$w - \lambda \frac{\partial F}{\partial L} = 0$$

$$r - \lambda \frac{\partial F}{\partial K} = 0$$

$$\overline{Y} - F(K^*, L^*) = 0$$

onde as derivadas parciais de F são calculadas no ponto (K^*, L^*). Dada a hipótese de que $\dfrac{d^2L}{dK^2} > 0$, pode-se mostrar que as condições suficientes de segunda ordem para mínimo são satisfeitas. Portanto, o sistema acima define, implicitamente, as funções $K(w, r, \overline{Y})$, $L(w, r, \overline{Y})$ e $\lambda(w, r, \overline{Y})$, cujas derivadas podem ser determinadas pela fórmula do Teorema da Função Implícita.

$C(w, r, \overline{Y}) = wL(w, r, \overline{Y}) + rK(w, L, \overline{Y})$ é a função de custo da firma numa vizinhança do ponto (K^*, L^*). Como $L(..)$ e $K(.)$ são diferenciáveis (na verdade, C^2), C é diferenciável. A função $\dfrac{\partial C}{\partial Y}$ é o custo marginal da firma. Uma propriedade extremamente importante que se verifica em problemas como estes é que $\dfrac{\partial C}{\partial Y}(w, r, \overline{Y}) = \lambda$, isto é, o multiplicador de Lagrange é o custo marginal da firma, o que é uma conseqüência do chamado Teorema da Envoltória que demonstraremos a seguir.

Consideremos o seguinte problema: maximizar (ou minimizar) $F(x, \alpha)$ com $g(x, \alpha) = 0$, sendo $F: D \times V \rightarrow R$, $D \subset R^q$, $V \subset R$, $D \times V$ aberto, F de classe C^2 em $D \times V$, e $g: D \times V \rightarrow R$, g de classe C^2 em $D \times V$. Suponha-se que x^* maximiza F com a restrição $g(x^*, \alpha) = 0$ e que as condições suficientes de segunda ordem sejam satisfeitas. Então, existem funções $h_i: W \rightarrow R$, $W \subset R$ aberto, tais que $x_i = h_i(\alpha)$, $i = 1, 2, \ldots, q$, $h_i \in C^2$.

Teorema 14 (Teorema da Envoltória) — Nas condições especificadas acima, vale o seguinte:

$$\frac{d}{d\alpha} F(h_1(\alpha), h_2(\alpha), \ldots, h_q(\alpha), \alpha) = \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x^*, \alpha) + \lambda \frac{\partial g}{\partial \alpha}(x^*, \alpha)$$

Prova:

Pela Regra da Cadeia:

$$\frac{dF}{d\alpha}(x^*, \alpha) = \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x^*, \alpha) \cdot \frac{dh_1}{d\alpha}(\alpha) + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x^*, \alpha) \frac{dh_q}{d\alpha}(\alpha) + \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x^*, \alpha)$$

Além disto, $g(h_1(\alpha), h_2(\alpha), \ldots, h_q(\alpha), \alpha) = 0$ é uma identidade para todo $\alpha \in W$. Portanto:

$$\lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x^*, \alpha) \cdot \frac{dh_1}{d\alpha}(\alpha) + \ldots + \lambda \frac{\partial g}{\partial \alpha}(x^*, \alpha) \cdot \frac{dh_1}{d\alpha}(\alpha) +$$

$$+ \lambda \frac{\partial g}{\partial \alpha}(x^*, \alpha) = 0$$

Somando as duas equações acima e notando que:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*, \alpha) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*, \alpha) = 0$$

(pois x^* é um máximo), obtém-se o resultado desejado.

C. Q. D.

Intuitivamente, o Teorema da Envoltória diz que o impacto total de uma variação em α sobre o valor de F pode ser medido, numa vizinhança do equilíbrio, pelo seu impacto parcial $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$, levando em conta o seu efeito sobre a restrição, qual seja, $\lambda \frac{\partial g}{\partial \alpha}$. Um caso particular importante é o seguinte: maximizar $F(x)$ com $\alpha - g(x) = 0$.

O Teorema da Envoltória implica que:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \lambda$$

isto é, λ indica qual a variação de F por unidade de variação de α numa vizinhança do ponto de equilíbrio. Este resultado, aplicado ao exemplo da firma que minimiza custos, garante que:

$$\frac{\partial C}{\partial Y}(r, w, \bar{Y}) = \lambda$$

A versão do Teorema da Envoltória para um problema de maximização sem restrição é a seguinte:

Teorema 15 — Seja x^* um ponto onde a função $f\colon D \times V \to R$, $D \subset R^q$, $V \subset R$, $D \times V$ aberto, $f \in C^2$, tem um máximo (mínimo) relativo e no qual as condições suficientes de segunda ordem para máximo (mínimo) são satisfeitas. Então:

$$\frac{dF}{d\alpha}(x^*, \alpha) = \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x^*, \alpha)$$

Prova:

Pela Regra da Cadeia:

$$\frac{df}{d\alpha}(x^*, \alpha) = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{dh_1}{d\alpha} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_q}\frac{dh_q}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \alpha}$$

uma vez que x^* é um máximo (mínimo) de f.

C. Q. D.

Intuitivamente, o resultado diz que, numa vizinhança do ponto de máximo, a variação de F, fixados os valores de x, é igual à variação de F quando os valores de x se ajustam de maneira ótima.

Consideremos um exemplo ilustrativo: seja $\pi(x)$ o lucro de uma firma expresso como uma função da quantidade produzida e sejam

$R(x)$ a receita, $C(x)$ o custo da firma e t um imposto pago por unidade de venda. Então:

$$\pi(x) = R(x) - C(x) - tx$$

A produção que maximiza o lucro da firma é x^*, em que $R'(x^*) = C'(x^*) + t$. Se admitirmos que $R''(x^*) - C''(x^*) < 0$ (condição suficiente para máximo), então a equação $R'(x^*) - C'(x^*) = t$ define x^* como uma função de t numa vizinhança do equilíbrio. Pelo Teorema da Envoltória:

$$\frac{d\pi(x^*)\ (t)}{dt} = \frac{\partial\pi}{\partial t}(x^*) = -x^*$$

isto é, a imposição de um imposto reduz o lucro da firma, e esta redução é a mesma, quer ela ajuste a quantidade produzida ou não. Se chamamos de "curva de curto prazo" a curva de resposta do lucro da firma quando x permanece constante e se chamamos de "curva de longo prazo" a curva de resposta quando se permite que a produção se ajuste ao nível ótimo, o teorema garante que estas curvas são tangentes no ponto de equilíbrio.

Exercícios

1. Dados os caminhos abaixo, faça uma representação da curva associada, encontre o vetor tangente ao caminho no ponto especificado (e represente-o) e um vetor normal ao caminho:

a) $\lambda: [-1, 1] \to R^2$ dado por $\lambda(t) = (t^2, 1 - t^2)$ $\left(\text{ponto } t = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

b) $\lambda: [-1, 1] \to R^2$ dado por $\lambda(t) = (t, 2t)$ (ponto $t = 0$);

c) $\lambda: R \to R^2$ dado por $\lambda(t) = (cos^2 t, sen^2 t)$ (ponto $t = \pi/4$); e

d) $\lambda: [-1/2, 1/2] \to R^2$ dado por $\lambda(t) = \left(1 + t, \frac{1}{1+t}\right)$ (ponto $t = 0$).

2. Dadas as funções abaixo, represente as curvas de nível pedidas e indique a direção do crescimento da função:

a) $f: R^2 \to R$ dada por $f(x, y) = xy(x - 1)$ (curvas N_0 e N_{10});

b) $f: R^2 \to R$ dada por $f(x, y) = (x + 1)(y + 2)$ (curvas N_0 e N_1);

c) $f: R^2 \to R$ dada por $f(x, y) = min\{x, y\}$ (curvas N_0, N_1 e N_{-1});

d) $f: R^2 \to R$ dada por $f(x, y) = min\{x^2, y\}$ (curvas N_0, N_1 e N_{-1});

e) $f: R^2 \to R$ dada por $f(x, y) = -x^2 - y^2$ (curvas N_0 e N_{-1}); e

f) $f\colon R^2_+ \to R$ dada por $f(x, y) = max\{x, y\}$ (curvas N_0, N_1 e N_{-1}).

3. Seja $U\colon D \to R$, $D \subset R^2_+$ aberto, $U \in C^2$, considere a superfície de nível c, N_c, da função U e suponha que $grad\ U(x, y) \neq 0$ para todo (x, y) tal que $U(x, y) = c$. Pede-se:

a) Mostre — cuidadosamente — que N_c define implicitamente uma função $h\colon V \to R$ $(V \subset R$ aberto) em cada ponto $(x, y) \in N_c$.

b) Dado $(x_0, y_0) \in N_c$ com $\frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, mostre que:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

c) Calcule (se existir) $\frac{d^2y}{dx^2}$. Qual a relação entre $\frac{d^2y}{dx^2}$ e a concavidade e/ou convexidade das curvas de nível da função U?

d) Admita que as curvas de nível de U sejam estritamente convexas. Qual o sinal $\frac{d^2y}{dx^2}$? Justifique.

4. Seja $f\colon R^3 \to R$ definida por $f(x, y, z) = z^3 - xy - y - z$. Pergunta-se:

a) Dada a superfície de nível zero, N_0, de f, ela é o gráfico de alguma função numa vizinhança do ponto $(0, 0, 0) \in N_0$?

b) Qual o conjunto de vetores normais a N_0 no ponto $(0, 0, 0)$?

c) Qual o conjunto dos vetores tangentes a N_0 no ponto $(0, 0, 0)$?

d) Qual a equação do plano tangente a N_0 no ponto $(0, 0, 0)$?

Definição: Dado $x_0 \in N_0$, o plano tangente a N_0 no ponto x_0 é o conjunto dos vetores $x \in R^p$ tais que $x = x_0 + Z$, sendo $Z \in ET(x_0)$.

5. Seja $f\colon R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = xy$. Pede-se:

a) represente a curva de nível 1, N_1, de f;

b) encontre um caminho diferenciável λ tal que $f_o\lambda(t) = 1$ para todo t no domínio de λ;

c) represente os vetores $\lambda'(0)$ e $grad\ f(1, 1)$; e

d) sendo $Z_0 = (1, 1)$, encontre o plano tangente a N_1 no ponto Z_0.

6. Utilizando o Teorema do Multiplicador de Lagrange, encontre os pontos críticos das funções abaixo restritas à superfície N_0 e identifique os pontos de máximo e de mínimo relativos (sugestão: faça figuras):

a) $f: R^2 \to R$ dada por $f(x, y) = ax + by$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, e $N_1 = \alpha^{-1}(\{1\})$, sendo $\alpha: R^2 \to R$ definida por $\alpha(x, y) = x^2 + y^2$;

b) $f: R^2 \to R$ dada por $f(x, y) = x + y$ e $N_1 = \alpha^{-1}(\{1\})$, sendo $\alpha: R^2 \to R$ definida por $\alpha(x, y) = xy$;

c) $f: R^2 \to R$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $N_{-1} = \alpha^{-1}(\{-1\})$, sendo $\alpha: R^2 \to R$ definida por $\alpha(x, y) = y - x^2$;

d) $f: R^2 \to R$ dada por $f(x, y) = y - x^2$ e $N_1 = \alpha^{-1}(\{1\})$, sendo $\alpha: R^2 \to R$ definida por $\alpha(x, y) = x^2 + y^2$; e

e) $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = xy$ e $N_1 = \alpha^{-1}(\{2\})$, sendo $\alpha: \overset{\circ}{R}_+ \to R$ definida por $\alpha(x, y) = x + y$.

Mostre que a média geométrica de dois números positivos é menor ou igual à média aritmética destes números e generalize para n números positivos.

7. Mostre que, sob as hipóteses do exemplo 21, N_c é um conjunto fechado e que, portanto, existe $x' \in N_c$ à distância mínima de $\bar{x}$.

Capítulo VII

INTEGRAL DE RIEMANN

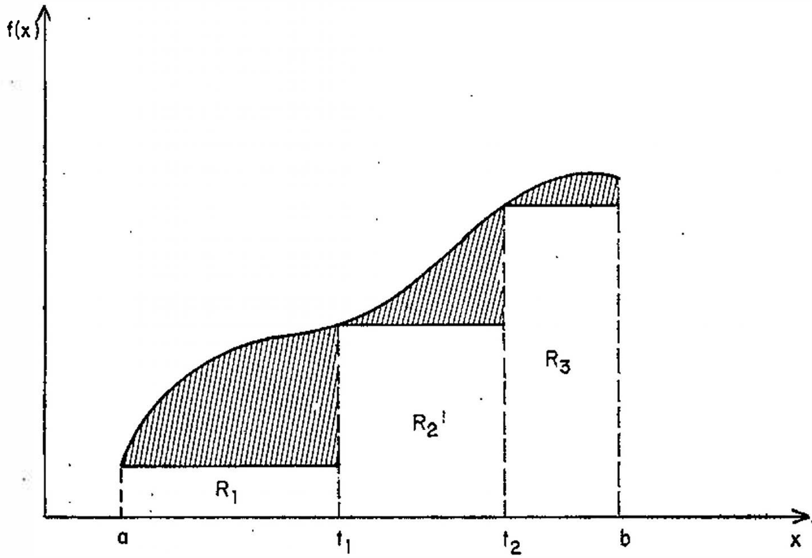
A idéia básica deste capítulo é familiarizar o leitor com os elementos básicos da Integral de Riemann, além de tentar caracterizar também os principais aspectos do cálculo das integrais. O capítulo está organizado da seguinte maneira: na Seção VII.1 apresentaremos a definição e as principais propriedades da integral; na Seção VII.2 discutiremos o Teorema Fundamental do Cálculo Integral; e na Seção VII.3 introduziremos a Integral de Riemann-Stieltjes.

VII.1 — A Integral de Riemann

Da nossa experiência anterior com certos conjuntos regulares (por exemplo, polígonos), sabemos calcular sua área, mas quando consideramos conjuntos mais gerais a definição de áreas é algo imprecisa. A Integral de Riemann que estudamos nesta seção é uma forma de se definir tais áreas. Tal como outros conceitos importantes em análise, esta integral é um limite (de áreas de polígonos) que nos permitirá chegar à definição desejada.

Inicialmente, é interessante fazermos algumas considerações geométricas simples para facilitar a compreensão do material que se segue.

Suponhamos que a figura a seguir seja o gráfico da função contínua $f\colon [a, b] \to R$. Nosso objetivo é calcular a área compreendida entre o gráfico e o eixo das abscissas no intervalo $[a, b]$. Uma aproxi-

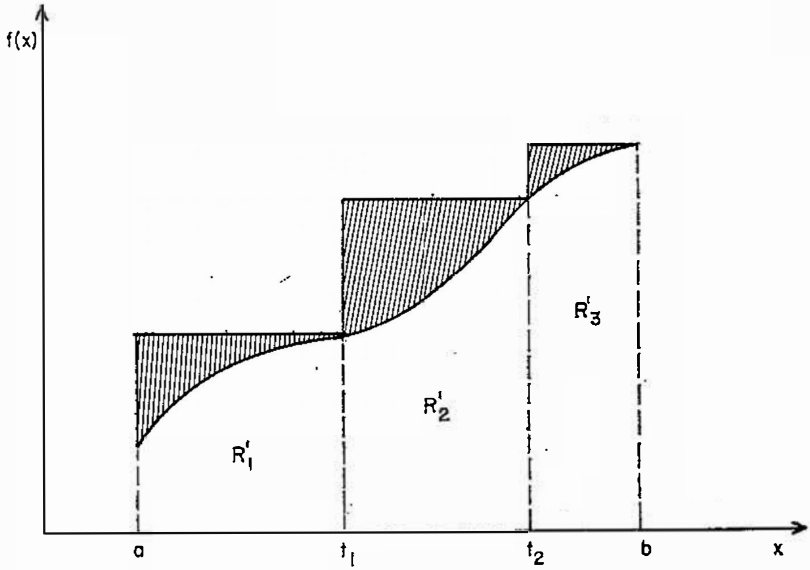


mação para isto seria a soma das áreas dos retângulos R_1, R_2 e R_3. É claro, da observação da figura, que esta não é uma aproximação muito precisa, pois a verdadeira área está subestimada (a subestimação total é dada pela soma das partes hachuradas).

Uma maneira de diminuirmos este erro é considerarmos, ao invés de apenas três, um número maior de retângulos (por exemplo, cinco). Considerando um número ainda maior (10, 100, 1.000.000), esta aproximação torna-se cada vez mais precisa.

Uma questão que se coloca imediatamente é a seguinte: por que escolher os retângulos da maneira que fizemos anteriormente e não como indicamos a seguir? Neste caso, a área estaria superestimada. Porém, tal como anteriormente, esta superestimação tende a ser menor com o número de retângulos considerados.

A definição da integral, portanto, baseia-se em aproximações desta natureza. De maneira pouco precisa, a integral (quando existir) é o limite da soma das áreas de retângulos quando o seu número tende ao infinito.



Feita esta discussão inicial, passemos a considerar a definição da integral mais formalmente. Seja, portanto, f: $[a, b] \rightarrow R$ uma *função limitada* (observe-se que, se f não é limitada, nem sempre as áreas dos retângulos das figuras anteriores estarão definidas no conjunto dos números reais). Uma "partição" P do intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos $\{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < < t_{n-1} < t_n = b\}$.

Sendo f uma função limitada, em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ existem $M_i = sup \{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ e $m_i = inf \{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$. Denotaremos por $M = sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$ e por $m = = inf \{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Definição 1 — A soma inferior de f na partição P, $\underline{S}(f, P)$, é o número real $\sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})$. A soma superior de f na partição P, $\overline{S}(f, P)$, é o número real $\sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1})$.

É fácil ver que nas duas figuras anteriores a aproximação da área foi feita utilizando a soma inferior (no primeiro caso) e a soma superior (no segundo caso).

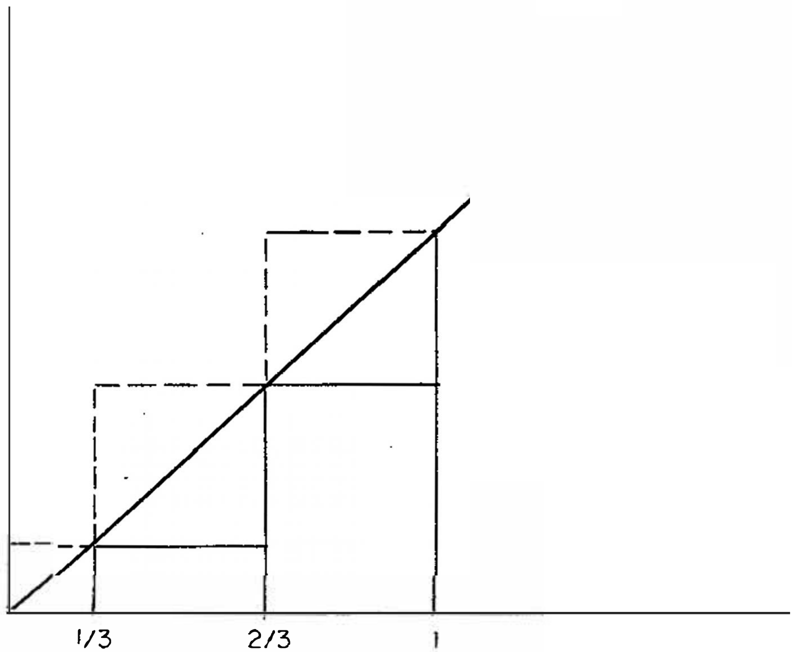
Exemplo:

1 — Seja $f\colon [0, 1] \to R$ definida por $f(x) = x$ e seja $P = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$ uma partição de $[0, 1]$. A soma inferior é:

$$\underline{S}(f, P) = 0 \,.\, 1/3 + 1/3\ (2/3 - 1/3) + 2/3\,(1 - 2/3) = 1/3$$

e a soma superior é:

$$\overline{S}(f, P) = 1/3\ (1/3) + 2/3\ (2/3 - 1/3) + 2/3\,(1 - 2/3) = 1/3$$



Uma observação simples que se segue das definições de soma inferior e soma superior é a seguinte:

$$m\,(b - a) \leqslant \underline{S}(f, P) \leqslant \overline{S}(f, P) \leqslant M\,(b - a)$$

Seja P uma partição de $[a, b]$. Uma partição pontilhada P^* de $[a, b]$ é a partição P de $[a, b]$ e um conjunto de escalares $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tais que $t_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant t_i$.

Definição 2 — Seja P^* uma partição pontilhada de $[a, b]$. A soma de Riemann de f em P^* é o número real:

$$S(f, P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ (t_i - t_{i-1})$$

Dada uma partição P, define-se a norma de P por:

$$|P| = max\ \{|t_1 - t_0|, |t_2 - t_1|, \ldots, |t_n - t_{n-1}|\}$$

Definição 3 — A função $f\colon [a, b] \to R$ é integrável em $[a, b]$ se existe o seguinte limite:

$$\lim_{|P| \to 0} S(f, P^*)$$

Em caso afirmativo, o valor do limite é a integral de f em $[a, b]$.

Procuremos explicitar mais cuidadosamente o significado da expressão:

$$\lim_{|P| \to 0} S(f, P^*)$$

uma vez que ele difere um pouco da definição apresentada no Capítulo III. Diremos que o limite acima existe e é igual a I se, dado $\varepsilon > 0$, existe um número real $\delta > 0$ tal que, qualquer que seja a partição P de $[a, b]$ com $|P| < \delta$ e qualquer que seja a partição P^* (isto é, qualquer que seja a escolha dos escalares $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $t_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant t_i$), teremos:

$$|S(f, P^*) - I| < \varepsilon \tag{1}$$

Esta definição difere da que foi apresentada no Capítulo III, pois, dada uma partição P com $|P| < \delta$, existem vários valores possíveis para $S(f, P^*)$, dependendo da escolha dos escalares. Isto significa que $S(f, P^*)$ não é uma função de P (ou $|P|$), e é neste sentido que este conceito de limite é novo.

Uma observação que será válida para praticamente todo este capítulo é a seguinte: se f não é uma função limitada, não há possibilidade de que (1) se verifique para nenhuma partição P, pois sempre pode-se escolher os elementos de P^* de maneira que a soma de Riemann torne-se arbitrariamente grande.

A caracterização das funções integráveis pode também ser feita utilizando-se as somas inferior e superior. Discutiremos agora alguns resultados preliminares para obtermos esta caracterização.

Inicialmente, note-se que, dada uma partição P e uma partição pontilhada (qualquer) P^*, vale o seguinte: $\underline{S}(f, P) \leqslant S(f, P^*) \leqslant \overline{S}(f, P)$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado e seja $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$. Como $m_i = \inf \{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, existe $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que $m_i > f(\xi_i) - \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, isto é:

$$S(f, P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) + \varepsilon$$

ou seja, existe uma partição pontilhada P^* para a qual vale o seguinte: $S(f, P^*) < \underline{S}(f, P) + \varepsilon$.

Da mesma maneira, existe uma partição pontilhada P^{**} tal que $S(f, P^{**}) > \overline{S}(f, P) - \varepsilon$.

Dadas duas partições de $[a, b]$, P e Q, diz-se que Q é mais fina (ou é um refinamento) do que P se $P \subset Q$.

Sejam P e Q partições de $[a, b]$ definidas da seguinte maneira: $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < t_{i+1} \ldots t_n = b\}$ e $Q = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < r < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b\}$, isto é, Q é obtida incluindo-se um ponto na partição P. Observe-se agora que:

$$\underline{S}(f, Q) - \underline{S}(f, P) = m' (t_i - r) + m'' (r - t_{i-1}) - m_i (t_i - t_{i-1})$$

sendo $m_i = \inf \{f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, $m' = \inf \{f(x): x \in [r, t_i]\}$ e $m'' = \inf \{f(x): x \in [t_{i-1}, - r]\}$.

Portanto:

$$m_i \leqslant min \{m', m''\}$$

e:

$$t_i - t_{i-1} = (t_{i-r}) + (r - t_{i-1})$$

Destas observações segue-se que $\underline{S}(f, Q) - \underline{S}(f, P) \geqslant 0.$

Um argumento de indução mostra que, se Q é mais fina do que P, então $\underline{S}(f, Q) \geqslant \underline{S}(f, P)$. Da mesma maneira, pode-se mostrar que $\overline{S}(f, Q) \leqslant \overline{S}(f, P)$ para todas as partições P e Q com $P \subset Q$. Portanto, dadas P e Q, $P \subset Q$, vale o seguinte:

$$\underline{S}(f, P) \leqslant \underline{S}(f, Q) \leqslant \overline{S}(f, Q) \leqslant \overline{S}(f, P)$$

Sejam agora P e Q duas partições quaisquer. Como $P \cup Q$ é um refinamento de P e de Q, segue-se que:

$$\underline{S}(f, P) \leqslant \overline{S}(f, Q) \tag{2}$$

Definição 4 — A integral superior de f: $[a, b] \rightarrow R$ limitada é o número real $\inf\limits_{P} \overline{S}(f, P)$. A integral inferior de f é o número real $\sup\limits_{P} \underline{S}(f, P)$.

Convém observar que tanto o *inf* quanto o *sup* na definição acima são tomados com relação a todas as partições. Segue-se então, de (2), que as integrais superior e inferior sempre existem, pois a soma inferior é limitada superiormente e a soma superior é limitada inferiormente.

Indicaremos a integral superior de f em $[a, b]$ por:

$$\overline{\int_a^b} f(x) \; dx$$

e a integral inferior por:

$$\underline{\int_a^b} f(x) \ dx$$

Teorema 1 – Dada a função $f: [a, b] \to R$, f limitada, temos que:

$$\underline{\int_a^b} f(x) \ dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x) \ dx$$

Prova:

Pela definição de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição P de $[a, b]$ tal que:

$$\overline{\int_a^b} f(x) \ dx + \varepsilon > \overline{S}(f, P)$$

Da mesma forma, existe uma partição Q de $[a, b]$ tal que:

$$\underline{\int_a^b} f(x) \ dx - \varepsilon < \underline{S}(f, Q)$$

Portanto:

$$\overline{\int_a^b} f(x) \ dx + \varepsilon > \overline{S}(f, P) \geqslant \underline{S}(f, Q) > \underline{\int_a^b} f(x) \ dx - \varepsilon$$

ou seja:

$$\overline{\int_a^b} f(x) \ dx + 2\varepsilon > \underline{\int_a^b} f(x) \ dx$$

para todo $\varepsilon > 0$, isto é:

$$\overline{\int_a^b} f(x) \ dx \geqslant \underline{\int_a^b} f(x) \ dx$$

C. Q. D.

Teorema 2 — Seja $f: [a, b] \to R$ uma função limitada. Para que f seja integrável, é necessário e suficiente que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ dx = \overline{\int_a^b} f(x)\ dx$$

Prova:

Suponha-se inicialmente que f seja integrável. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda partição P com $|P| < \delta$ e para toda partição pontilhada P^*:

$$|S(f, P^*) - I| < \varepsilon/3$$

sendo I o valor da integral de f em $[a, b]$. Pela definição de ínfimo, existe uma partição P' de $[a, b]$ tal que:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ dx + \varepsilon/3 > \overline{S}(f, P')$$

Tomando, se for necessário, uma partição Q mais fina do que P' (sendo, em conseqüência, $|Q| < \delta$), segue-se que:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ dx + \varepsilon/3 > \overline{S}(f, P') \geqslant \overline{S}(f, Q)$$

ou seja:

$$\frac{\varepsilon}{3} > \overline{S}(f, Q) - \overline{\int_a^b} f(x)\ dx \geqslant 0$$

Temos então que:

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\ dx - I\right| \leqslant \left|\overline{\int_a^b} f(x)\ dx - \overline{S}(f, Q)\right| +$$

$$+ \left|\overline{S}(f, Q) - I\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + |\overline{S}(f, Q) - I|$$

Por fim, note-se que existe uma soma de Riemann $S(f, Q^*)$ tal que $S(f, Q^*) > \overline{S}(f, Q) - \varepsilon/3$ Desta maneira:

$$|\overline{S}(f, Q) - I| \leqslant |\overline{S}(f, Q) - S(f, Q^*)| + |S(f, Q^*) - I| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

pois Q^* é uma partição pontilhada de $[a, b]$ com $|Q| < \delta$.

Portanto:

$$\left| \overline{\int_a^b} f(x) \, dx - I \right| < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, isto é:

$$\overline{\int_a^b} f(x) \, dx = I$$

De maneira semelhante mostra-se que:

$$\underline{\int_a^b} f(x) \, dx = I$$

Suponha-se agora que $I = \sup\limits_P \underline{S}(f, P) = \inf\limits_P \overline{S}(f, P)$, isto é, que as integrais inferior e superior sejam iguais. Então, dado $\varepsilon > 0$, existem partições P e Q tais que:

$$I + \frac{1}{2}\varepsilon > \overline{S}(f, P)$$

$$I - \frac{1}{2}\varepsilon < \underline{S}(f, Q)$$

Seja agora $V = P \cup Q$ e note-se que:

$$\overline{S}(f, V) \leqslant \overline{S}(f, P) < I + \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\underline{S}(f, V) \geqslant \underline{S}(f, Q) > I - \frac{1}{2}\varepsilon$$

Portanto:

$$\overline{S}(f, V) < I + \varepsilon/2 < \underline{S}(f, V) + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$$

isto é:

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \varepsilon$$

Este resultado garante que f é integrável, como demonstraremos nos Lemas 1 e 2 a seguir.

C. Q. D.

Lema 1 — Suponha-se que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se P é uma partição de $[a, b]$ com $|P| < \delta$, tem-se $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$. Neste caso, f é uma função integrável.

Prova:

Note-se que, da condição acima, segue-se que:

$$I \leqslant \overline{S}(f, P) < \underline{S}(f, P) + \varepsilon \leqslant i + \varepsilon$$

sendo $I = \inf\limits_{P} \overline{S}(f, P)$ e $i = \sup\limits_{P} \underline{S}(f, P)$.

Logo, $I < i + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, o que significa que $I \leqslant i$. Portanto, $I = i$, uma vez que já provamos que $I \geqslant i$ (Teorema 1).

Assim, podemos escrever:

$$I + \varepsilon = i + \varepsilon \geqslant \underline{S}(f, P) + \varepsilon > \overline{S}(f, P) \geqslant S(f, P^*) \geqslant$$
$$\geqslant \underline{S}(f, P) > \overline{S}(f, P) - \varepsilon \geqslant I - \varepsilon$$

qualquer que seja a partição pontilhada P^*. Então:

$$I - \varepsilon < S(f, P^*) < I + \varepsilon$$

ou seja, f é integrável.

C. Q. D.

Lema 2 — Suponha-se que, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição P de $[a, b]$ tal que $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$. Neste caso, f é uma função integrável.

Prova:

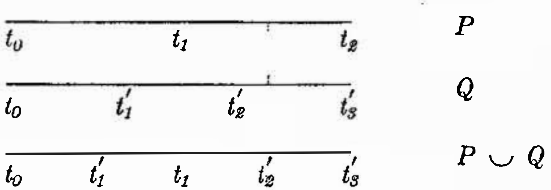
Seja $M = sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$ e seja P tal que:

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon/2$$

Seja N o número de pontos da partição P e seja Q tal que:

$$|Q| < \frac{\varepsilon}{8N(M+1)}$$

Note-se que a partição Q contém, no máximo, $N - 2$ intervalos que contenham pontos de P em seu interior. Além disto, a partição $P \cup Q$, que é mais fina do que P e Q, tem norma menor do que $|Q|$. Sejam $\overline{S}(f; Q) = \Sigma\, M_j(t_j - t_{j-1})$ e $\overline{S}(f, P \cup Q) = \Sigma\, M'_j(t'_j - t'_{j-1})$. Observe-se agora que, se o intervalo (t_{j-1}, t_j) não contém pontos de P, então ele aparece na soma superior referente a $P \cup Q$:



Portanto:

$$\overline{S}(f, Q) - \overline{S}(f, P \cup Q) = \Sigma\, M_j(t_j - t_{j-1}) - \Sigma\, M'_j(t'_j - t'_{j-1}) =$$
$$= \Sigma^* M_j(t_j - t_{j-1}) - \Sigma^{**} M'_j(t'_j - t'_{j-1})$$

onde $\Sigma^* M_j(t_j - t_{j-1})$ é a soma referente aos intervalos de Q que contém elementos de P (que são, no máximo, $N - 2$) e $\Sigma^{**} M'_j(t'_j - t'_{j-1})$ é a soma dos elementos de $P \cup Q$ que não foram cancelados na subtração. Assim, notando que $M_j \leqslant M$ e que $(t_j - t_{j-1}) \leqslant |Q|$, vem que:

$$\overline{S}(f, Q) - \overline{S}(f, P \cup Q) \leqslant (N - 2)\, M\, .\, |Q| \leqslant 2(N-2)\, M|Q|$$

ou seja:

$$\overline{S}(f, Q) \leqslant \overline{S}(f, P \cup Q) + 2(N - 2)\, M|Q|$$

Além disto, tem-se:

$$\overline{S}(f, Q) \leqslant \overline{S}(f, P \cup Q) + 2(N - 2)\, M|Q| \leqslant \overline{S}(f, P) +$$
$$+ 2(N - 2)\, M|Q|$$

pois $P \cup Q$ é mais fina do que Q. Logo:

$$\overline{S}(f, Q) \leqslant \overline{S}(f, P) + 2(N - 2)\, M|Q| \leqslant \overline{S}(f, P) +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{4}\,\frac{(N - 2)\, M}{N(M + 1)} \leqslant \overline{S}(f, P) + \frac{\varepsilon}{4}$$

Da mesma maneira:

$$\underline{S}(f, Q) \geqslant \underline{S}(f, P) - \frac{1}{4}\,\varepsilon$$

e, portanto:

$$\overline{S}(f, Q) - \underline{S}(f, Q) \leqslant \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) + \frac{1}{2}\,\varepsilon < \varepsilon$$

Mostramos então que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se Q é uma partição com $|Q| < \delta$, $\overline{S}(f, Q) - \underline{S}(f, Q) < \varepsilon$. Pelo lema anterior, f é integrável.

C. Q. D.

Os teoremas anteriores mostraram a equivalência entre a definição de função integrável dada no início do capítulo e o conceito definido a partir da existência do limite das somas de Riemann. Veremos posteriormente que este último enfoque é mais adequado para o tratamento da integral de Riemann-Stieltjes.

Definição 5 — Seja $f: [a, b] \to R$, $b > a$, uma função integrável em $[a, b]$. Define-se então:

a) $\displaystyle\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$; e

b) $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0.$

Passaremos agora a discutir algumas das principais propriedades das funções integráveis. Antes, porém, relembramos que o conceito de limite que define a integral não é o mesmo que discutimos no Capítulo III. Em vista disto, deve-se provar (e isto fica a cargo do leitor) que a integral, quando existe, é única.

Teorema 3 — Sejam $f: [a, b] \to R$ e $g: [a, b] \to R$ funções integráveis em $[a, b]$. Então:

a) se $f(x) \leqslant g(x)$ e, para todo $x \in [a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \leqslant \int_a^b g(x)\, dx$;

b) para todo número real k, kf é integrável e $\displaystyle\int_a^b kf(x)\, dx = = k\int_a^b f(x)\, dx$; e

c) $(f + g)$ é integrável em $[a, b]$ e $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$

Prova:

a) Sejam $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ e $J = \displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ e suponha-se que $I > J$. Obtém-se, então, uma contradição com a hipótese $f(x) \leqslant \leqslant g(x)$.

b) A demonstração é trivial.

c) Com a mesma notação adotada em "a", vem que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|P| < \delta$ e se P^* é uma partição pontilhada:

$$|S(f, P^*) - I| < \varepsilon/2$$

$$|S(g, P^*) - I| < \varepsilon/2$$

Portanto:

$$|S(f, g, P^*) - (I + J)| \leqslant |S(f, P^*) - I| + |S(g, P^*) - I| < \varepsilon$$

para toda partição pontilhada P^* com $|P| < \delta$.

C. Q. D.

Teorema 4 — Seja $f\colon [a, b] \to R$ e $c \in (a, b)$. Se f é integrável em $[a, b]$, então ela é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$ e:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, dx$$

Prova:

Sendo f limitada, existe $k \in R$ tal que $|f(x)| < k$ para todo $x \in [a, b]$. Sejam $I = \int_a^c f(x)\, dx$ e $J = \int_c^b f(x)\, dx$. Dado $\varepsilon > 0$, seja δ tal que $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4k}$ e seja P^* uma partição pontilhada de $[a, b]$ com $|P| < \delta$. Seja $[t_{i-1}, t_i]$ o intervalo da partição P que contém o ponto c e note-se que:

$$S(f, P^*) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot [t_j - t_{j-1}] = \sum_{j=1}^{i-1} f(\xi_j)\, [t_j - t_{j-1}] +$$

$$+ f(\xi_i)\, [t_i - t_{i-1}] + \sum_{j=i+1}^{n} f(\xi_j)\, [t_j - t_{j-1}]$$

Definamos agora:

$$S_1 = \sum_{j=1}^{i-1} f(\xi_j)\, (t_j - t_{j-1}) + f(c)\, (c - t_{i-1})$$

$$S_2 = f(c)\, (t_i - c) + \sum_{j=i+1}^{n} f(\xi_j)\, (t_j - t_{j-1})$$

Portanto, $|S_1 - I| < \frac{1}{4}\,\varepsilon$ e $|S_2 - J| < \frac{1}{4}\,\varepsilon$, quaisquer que sejam as partições pontilhadas de $[a, c]$ e $[c, b]$ com norma menor do que $\delta' > 0$. Portanto:

$$|S_1 + S_2 - (I + J)| < \frac{1}{2}\,\varepsilon$$

e, além disto:

$$|S(f, P^*) - (S_1 + S_2)| = |f(\xi_i) - f(c)|\,(t_i - t_{i-1}) \leqslant$$
$$\leqslant \{|f(\xi_i)| + |f(c)|\}\,(t_i - t_{i-1}) < 2k \cdot \frac{\varepsilon}{4k} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalmente, vem que:

$$|S(f, P^*) - (I + J)| \leqslant |S(f, P^*) - (S_1 + S_2)| +$$
$$+ |S_1 + S_2 - (I + J)| < \varepsilon$$

qualquer que seja a partição P^* com $|P| < \delta$.

C. Q. D.

A recíproca deste resultado é também verdadeira, isto é, se $f\colon [a, b] \to R$ é integrável em $[a, c]$ $[c, b]$, $c \in (a, b)$, então f é integrável em $[a, b]$ e vale a igualdade do Teorema 4. A demonstração deste resultado é deixada a cargo do leitor.

Teorema 5 — Seja $f\colon [a, b] \to R$ integrável e seja $g\colon [a, b] \to R$ tal que f e g diferem apenas em um número finito de pontos. Então, g é integrável e:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

Prova:

Suponha-se que f e g diferem apenas no ponto $\bar{x} \in [a, b]$. Dada uma partição pontilhada P^* de $[a, b]$:

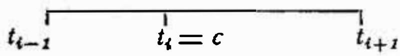
$$S(f, P^*) - S(f, g^*) = \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\,(t_i - t_{i-1})$$

Note-se que:

a) se $\xi_i \neq c$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $S(f, P^*) = S(f, g^*)$;

b) se $\xi_i = c$ para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então $S(f, P^*) - S(f, g^*) = (f(c) - g(c))\ (t_k - t_{k-1})$; e

c) finalmente, pode ocorrer que $\xi_i = \xi_{i+1} = c$.



Neste caso:

$$S(f, P^*) - S(g, P^*) = [f(c) - g(c)]\ (t_{i+1} - t_i) + \\ + [f(c) - g(c)]\ (t_i - t_{i-1})$$

Em qualquer dos três casos, no entanto, tem-se:

$$|S(f, P^*) - S(g, P^*)| \leqslant 2(|f(c)| + |g(c)|) \cdot |P|$$

Desta observação segue-se imediatamente que g é integrável e que:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx$$

O caso geral pode ser demonstrado por meio do princípio da indução.

C. Q. D.

Definição 6 — A *oscilação* de $f: [a, b] \to R$, limitada no conjunto $X \subset [a, b]$, é $w(f, X) = sup\ f(X) - inf\ f(X)$.

Pode-se também caracterizar a oscilação da função através do seguinte resultado:

Lema 3 — Seja $f: [a, b] \to R$ limitada. Para todo conjunto $X \subset [a, b]$, $X \neq \phi$, $w(f, X) = sup\ \{|f(x) - f(y)|: x \in X$ e $y \in X\}$.

Prova:

Dado $X \subset [a, b]$, qualquer que sejam $x \in X$ e $y \in X$ temos $f(x) \leqslant sup\ f(X)$ e $f(y) \geqslant inf\ f(X)$. Portanto, $f(x) - f(y) \leqslant$

$\leqslant sup\ f(X) - inf\ f(X)$. Além disto, esta relação independe de ser $f(x)$ maior, menor ou igual a $f(y)$, e assim $|f(x) - f(y)| \leqslant$ $\leqslant sup\ f(X) - inf\ f(X)$.

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existem $x \in X$ e $y \in X$ tais que:

$$f(x) > sup\ f(X) - \varepsilon/2$$

$$f(y) < inf\ f(X) + \varepsilon/2$$

Segue-se que:

$$|f(x) - f(y)| \geqslant f(X) - f(y) > sup\ f(X) - inf\ f(X) - \varepsilon \quad (3)$$

Temos, então, que $sup\ f(X) - inf\ f(X)$ é um limite inferior para o conjunto $\{|f(x) - f(y)|: x \in X \text{ e } y \in X\}$, como vimos no primeiro parágrafo desta demonstração. Além disto, a relação (3) garante que, se v é um limite superior do conjunto, $v \geqslant$ $\geqslant sup\ f(X) - inf\ f(X)$, pois caso contrário, escolhendo $\varepsilon =$ $= sup\ f(X) - inf\ f(X) - v$, existem $x \in X$ e $y \in X$ tais que $|f(x) - f(y)| > v$, o que contradiz a hipótese.

Em conclusão, $sup\ f(X) - inf\ f(X) = sup\ \{|f(x) - f(y)|: x \in X$ e $y \in X\}$.

C. Q. D.

Passaremos agora a examinar condições suficientes para a integralidade de uma função.

Teorema 6 — Toda função contínua $f: [a, b] \to R$ é integrável.

Prova:

Sendo f contínua num conjunto compacto, ela é limitada e uniformemente contínua. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in [a, b]$, $y \in [a, b]$ com $|x - y| < \delta$, tem-se:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Seja P uma partição de $[a, b]$ com $|P| < \delta$. Dado um intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ da partição (isto é, $t_{i-1} \in P$ e $t_i \in P$), segue-se que:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

para todo $x \in [t_{i-1}, t_i]$ e $y \in [t_{i-1}, t_i]$. Portanto, a oscilação de f neste intervalo, w_i, satisfaz $w_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Então:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i (t_i - t_{i-1}) = \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$$

Segue-se do Lema 2 que f é integrável.

C. Q. D.

Teorema 7 — Toda função $f: [a, b] \to R$ monótona limitada é integrável.

Prova:

Seja P uma partição de $[a, b]$. Então:

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leqslant \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \right] |P|$$

Suponha-se, para fixar idéias, que f é monótona não decrescente. Então, $M_i = f(t_i)$ e $m_i = f(t_{i-1})$ e, portanto:

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leqslant (f(b) - f(a))\, |P|$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, seja P tal que:

$$|P| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

se $f(b) \neq f(a)$. Então:

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx < \varepsilon$$

Como a relação anterior é válida qualquer que seja $\varepsilon > 0$, conclui-se que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

Se, por acaso, $f(a) = f(b)$, então f é constante e, em conseqüência, é integrável.

C. Q. D.

Para encerrar esta seção, apresentaremos uma condição necessária e suficiente para que uma função f seja integrável. Para tanto, precisaremos introduzir a noção de conjunto de medida nula.

Diz-se que $X \subset R$ tem *medida nula* ou tem *medida zero* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma coleção, no máximo enumerável, de intervalos abertos $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ tais que $X \subset I_1 \cup I_2 \cup \cup I_3 \cup \ldots \cup I_n \cup \ldots$ e $|I_1| + |I_2| + \ldots + |I_n| + \ldots < \varepsilon$, onde $I_j = (a_j, b_j)$ e $|I_j| = b_j - a_j$.

Teorema 8 — A função limitada $f: [a, b] \to R$ é integrável se, e somente se, o conjunto de seus pontos de descontinuidade tem medida nula.

Embora não apresentemos a demonstração deste teorema, convém mencionar, no entanto, que o Teorema 7 é um corolário deste resultado, pois todo conjunto enumerável tem medida nula. Apesar disto, julgamos interessante dar uma demonstração independente para ele.

VII.2 — O Teorema Fundamental do Cálculo Integral

O Teorema Fundamental do Cálculo Integral — o mais importante desta seção — é a base para avaliação de integrais, uma vez que o cálculo direto do limite que define a integral pode ser muito complexo. Graças a êste resultado, será possível relacionar os conceitos de integração e derivação e, a partir disto, obter métodos mais operacionais de cálculo.

Lema 4 — Seja f: $[a, b] \to R$ integrável. Então, $|f|$é integrável e:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Prova:

Observe-se que:

$$||f(x)| - |f(y)|| \leqslant |f(x) - f(y)|$$

e, portanto, qualquer que seja $X \subset [a, b]$, $w(|f|, X) \leqslant w(f, X)$. Sendo P uma partição de $[a, b]$ e $[t_{i-1}, t_i]$ um intervalo de P, $w(|f|, [t_{i-1}, t_i] \leqslant w(f, [t_{i-1}, t_i])$, o que significa que $|f|$ é integrável.

Para mostrar a outra parte do resultado, observe-se que:

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

e, em conseqüência do Teorema 3:

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

C. Q. D.

Teorema 9 (Teorema do Valor Médio para Integrais) — Seja f: $[a, b] \to R$ contínua. Então, existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)\ (b - a)$$

Prova:

Sejam M e m o máximo e o mínimo de f em $[a, b]$. Se $M = m$ (isto é, f constante), qualquer que seja $c \in (a, b)$ tem-se o resultado desejado.

Se f não é constante, então:

a) $m \leqslant f(x)$, $x \in [a, b]$ e, pelo Teorema 3:

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx$$

Além disto, como f não é constante:

$$m(b - a) < \int_a^b f(x)\, dx$$

b) $M \geqslant f(x)$, $x \in [a, b]$ e, pelo Teorema 3:

$$M(b - a) \geqslant \int_a^b f(x)\, dx$$

Como f não é constante:

$$M(b - a) > \int_a^b f(x)\, dx$$

Segue-se, então, que:

$$m < \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx < M$$

Como f é contínua em $[a, b]$, o Teorema do Valor Intermediário garante a existência de $c \in [a, b]$ tal que:

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx = f(c)$$

C. Q. D.

Consideremos agora uma função $f\colon [a, b] \to R$ integrável. Dado $t \in [a, b]$, definamos:

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, dx$$

A função F está bem definida, uma vez que a integrabilidade de f em $[a, b]$ garante que $f/[a, t]$ é também integrável, como vimos anteriormente. A função F é o que usualmente se chama a integral indefinida de f. O primeiro resultado interessante que provaremos é o teorema a seguir.

Teorema 10 — Seja $f: [a, b] \to R$ contínua e seja:

$$F(t) = \int_a^t f(x)\ dx$$

Então, F é diferenciável e, para cada $t \in [a, b]$, $F'(t) = f(t)$.

Prova:

Seja $t \in [a, b]$ e $h \in R$ tal que $t + h \in [a, b]$:

$$F(t + h) - F(t) = \int_a^{t+h} f(x)\ dx - \int_a^t f(x)\ dx$$

Pelo Teorema 4 e pela observação que se segue à prova:

$$F(t + h) - F(t) = \int_t^{t+h} f(x)\ dx$$

ou, ainda:

$$\frac{F(t + h) - F(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(x)\ dx$$

O Teorema do Valor Médio para Integrais garante a existência de $c \in [t, t + h]$ (ou $[t + h, t]$, se $h < 0$) tal que:

$$\frac{F(t + h) - F(t)}{h} = f(c)$$

Como f é contínua:

$$\lim_{h \to 0} f(c) = f(t)$$

isto é:

$$F'(t) = f(t)$$

C. Q. D.

A função F do teorema acima chama-se a primitiva de f. É interessante notar que, em geral, F é mais bem comportada do que f. No resultado acima, F é diferenciável, enquanto f é apenas contínua. Nos exercícios, pede-se ao leitor que mostre que, se f é integrável, F é uniformemente contínua.

Teorema 11 (Teorema Fundamental do Cálculo Integral) — Seja f: $[a, b] \to R$ contínua e seja F: $[a, b] \to R$ uma primitiva de f. Então:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Prova:

Como F é uma primitiva de f:

$$\int_a^t f(x)\ dx - F(t)$$

é uma constante C.

Tomando-se $t = a$, obtém-se que:

$$C = -F(a)$$

e, portanto:

$$\int_a^t f(x)\ dx - F(t) = -F(a)$$

Fazendo $t = b$, obtém-se o resultado desejado.

C. Q. D.

Convém mencionar que esta é uma forma particular do Teorema Fundamental do Cálculo Integral. A versão mais geral requer apenas que f seja integrável e que possua uma primitiva F. Entretanto, o caso apresentado acima é suficiente para um grande número de aplicações (pedimos ao leitor que demonstre esta versão mais geral como um exercício deste capítulo).

Como aplicação deste teorema, temos os seguintes resultados muito úteis na avaliação de integrais:

Teorema 12 (Integração por Substituição) – Sejam f: $[a, b] \to R$ contínua e v: $[c, d] \to R$ de classe C^1 com $v([c, d]) \subset [a, b]$. Então:

$$\int_{v(c)}^{v(d)} f(x) \; dx = \int_c^d f(v(t)) \; v'(t) \; dt$$

Prova:

Seja F: $[a, b] \to R$ uma primitiva de f. Então:

$$\int_{v(c)}^{v(d)} f(x) \; dx = F(v(d)) - F(v(c))$$

Note-se também que $F_0 v$ é diferenciável e, pela Regra da Cadeia:

$$(F_0 v)'(t) = F'(v(t)) \, . \, v'(t) = f(v(t)) \, . \, v'(t)$$

qualquer que seja $t \in [a, b]$. $(f_0 v)$ (t) . $v'(t)$ é contínua e tem como uma primitiva $F_0 v$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral:

$$\int_c^d f(v(t)) \cdot v'(t) \cdot dt = (F_0 v)(d) - (F_0 v)(c) = F(v(d)) - F(v(c))$$

Teorema 13 (Integração por Partes) – Sejam f: $[a, b] \to R$ e g: $[a, b] \to R$ funções de classe C^1. Então:

$$\int_a^b f(t) \; g'(t) \; dt = f(x) \, . \, g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(t) \; g(t) \; dt$$

sendo:

$$f(x) \; g(x) \Big|_a^b = f(b) \; g(b) - f(a) \; g(a)$$

Prova:

Observe-se que $f \, . \, g$ é uma primitiva de $f'g + fg'$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral:

$$\int_a^b [f'(t) \; g(t) + f(t) \; g'(t)] \; dt = f(x) \, . \, g(x) \Big|_a^b$$

Utilizando-se as propriedades operativas da integral, chega-se ao resultado desejado.

C. Q. D.

Daremos alguns exemplos ilustrativos do uso dos teoremas acima.

Exemplos:

2 — Seja $f: R \to R$ definida por $f(x) = x$. Como $F: R \to R$ dada por $F(x) = \frac{x^2}{2}$ é uma primitiva de f, temos que:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

para todo $a \in R$ e $b \in R$.

3 — Se $f: R \to R$ é dada por $f(x) = x^n$, $n \in N$:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

uma vez que $F: R \to R$ definida por $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ é uma primitiva de f.

4 — Seja $f: R \to R$ definida por $f(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$ e calcule-se $\int_0^1 f(x)\ dx$. Para encontrarmos o valor desta integral, faremos uso do teorema da substituição de variáveis. Para tanto, seja $v: R \to R$ definida por $v(t) = t^2 + 1$ e $h: R_+ \to R$ definida por $h(y) = \sqrt{y}$. Note-se, então, que:

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\ dx = \int_0^1 h(v(t)) \cdot v'(t) \cdot dt =$$

$$= \int_{v(0)}^{v(1)} h(v)\ dv = \int_1^2 \sqrt{v}\ dv = \left.\frac{v^{3/2}}{3/2}\right| = \frac{2}{3}\ (\sqrt{8} - \sqrt{1})$$

5 — Seja $f: R \to R$ definida por $f(x) = x \cdot e^x$ e calcule-se $\int_0^1 f(x) \cdot dx$. Utilizaremos o teorema de integração por partes para determinar o valor desta integral. Para tanto, sejam $V: R \to R$ dada por $v(x) = x$ e $\mu: R \to R$ dada por $\mu(x) = e^x$. Então:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x\, e^x\, dx = x\, e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx =$$

$$= e - (e - 1) = 1$$

VII.3 — A Integral de Riemann-Stieltjes

Relembremos a introdução feita na Seção VII.1, onde argumentávamos que uma soma de Riemann era uma aproximação da área de um conjunto. Esta aproximação era feita por meio de áreas de retângulos que, por sua vez, considerava como a medida da base do retângulo (ou de um intervalo da partição) a diferença entre os extremos superior e inferior. A integral de Riemann-Stieltjes generaliza esta noção admitindo que a medida de um intervalo $[x, y]$ pode ser definida de uma forma diferente, como veremos a seguir.

Definição 7 — Sejam $f: [a, b] \to R$ e $g: [a, b] \to R$ funções limitadas e $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$. Uma soma de Riemann-Stieltjes é um número real dado por:

$$S(f, g, P^*) = \sum_{i=1} f(\xi_i)\, [g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

sendo P^* uma partição pontilhada de $[a, b]$.

Como já havíamos mencionado, se a medida do intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ é a diferença entre os limites superior e inferior (isto é, g é a função identidade), a soma de Riemann-Stieltjes reduz-se a uma soma de Riemann.

Definição 8 — A função $f: [a, b] \to R$ é integrável com relação a $g: [a, b] \to R$ se existe um número real I tal que, para todo

$\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para toda partição pontilhada P^* de $[a, b]$ com $|P| < \delta$, tem-se $|S(f, g, P^*) - I| < \varepsilon$.

I é a integral de Riemann-Stieltjes da função f com relação a g. Denota-se esta integral por $\int_a^b f(x) \; dg(x)$.

A relação entre a integral de Riemann e a integral de Riemann-Stieltjes é a seguinte:

Teorema 14 — Sejam $f: [a, b] \to R$ e $g: [a, b] \to R$ limitadas e tais que f é integrável com relação a g. Se $g \in C^1$ em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x) \; dg(x) = \int_a^b f(x) \; g'(x) \; dx$$

Prova:

Como g' é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in [a, b]$, $y \in [a, b]$ com $|x - y| < \delta$, tem-se $|g'(x) - g'(y)| < \varepsilon_x \dfrac{1}{(b-a)M}$, sendo $M = sup\, f[a, b]$.

Seja P uma partição de $[a, b]$ com $|P| < \delta$ e seja P^* uma partição pontilhada de P. Então:

$$S(f, g, P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \; [g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

$$S(fg', P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \; g'(\xi_i) \; [t_i - t_{i-1}]$$

Tomando apênas o j-ésimo termo em cada uma das somas e considerando as diferenças, temos:

$$f(\xi_i) \; [g(t_i) - g(t_{i-1})] - f(\xi_i) \; g'(\xi_i) \; (t_i - t_{i-1})$$

O teorema do valor médio garante a existência de um número $c \in (t_{j-1}, t_j)$ tal que a expressão acima pode ser reescrita como:

$$f(\xi_i) \; (t_i - t_{j-1}) \; (g(\xi_i) - g(c))$$

e, portanto:

$$f(\xi_j)\ g(\xi_j) - g(c)\ (t_j - t_{j-1}) \frac{|f(\xi_j)|\ \varepsilon}{M\ (b-a)}\ (t_j - t_{j-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon \cdot M}{M\ (b-a)}\ (t_j - t_{j-1})$$

Assim:

$$|S\ (f,\ g,\ P^*)\ -\ S\ (fg',\ P^*)\ | \leqslant \varepsilon$$

Disto pode-se concluir que existe a integral de Riemann de fg' e que a igualdade se estabelece.

C. Q. D.

Uma versão mais geral deste teorema (que não provaremos aqui) requer apenas que f e g' sejam integráveis *à la* Riemann. Entretanto, o ponto que desejamos enfatizar é que realmente a integral de Riemann-Stieltjes é de aplicação mais ampla do que a de Riemann. Este fato tem interesse, por exemplo, em certas aplicações em Estatística.

Teorema 15 — Sejam $f\colon [a,\ b] \to R$ e $g\colon [a,\ b] \to R$, sendo uma delas contínua e a outra monótona. Então, a integral de f com relação a g existe.

Não demonstraremos este resultado, assim como omitiremos as demais provas desta seção. Muitas delas resumem-se a uma adaptação simples das demonstrações da Seção VII.1.

Teorema 16 — Sejam $f_i\colon [a,\ b] \to R$ e $g_j\colon [a,\ b] \to R$, $i,\ j = 1,\ 2$, tais que f_i é integrável com relação a g_j. Então, as integrais abaixo existem e valem as igualdades:

$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x)\ dg_1(x) = \int_a^b f_1(x)\ dg_1(x) + \int_a^b f_2(x)\ dg_1(x)$$

$$\int_a^b f_1(x)\ d(g_1 + g_2)(x) = \int_a^b f_1(x)\ dg_1(x) + \int_a^b f_1(x)\ dg_2(x)$$

$$\int_a^b cf_1(x)\ dg_1(x) = \int_a^b f_1(x)\ d(cg_1)(x) = c\int_a^b f_1(x)\ dg_1(x)$$

1. Seja $f\colon [a, b] \to R$ uma função contínua, não identicamente nula, tal que $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$. Mostre que:

$$\int_a^b f(x)\ dx > 0$$

2. Sejam $f\colon [a, b] \to R$ e $g\colon [a, b] \to R$ funções contínuas que satisfazem $f \neq g$ e $f(x) \geqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Mostre que:

$$\int_a^b f(x)\ dx > \int_a^b g(x)\ dx$$

3. Seja $f\colon [a, b] \to R$ integrável em $[a, b]$. Mostre que $F\colon [a, b] \to R$ definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

é uniformemente contínua. Dê um exemplo para mostrar que F pode não ser diferenciável.

4. Seja $f\colon [a, b] \to R$ uma função integrável que possui uma primitiva $F\colon [a, b] \to R$. Mostre que:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

5. Seja $f\colon R \to R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

e seja $g\colon R \to R$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Mostre que:

$$\int_0^1 f(x)\ dg(x) = 0; \int_1^2 f(x)\ dg(x) = 1$$

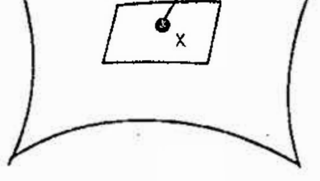
não existe a integral de Riemann-Stieltjes de f com relação a g no intervalo $[0, 2]$.

Capítulo VIII

TEOREMAS DE SEPARAÇÃO

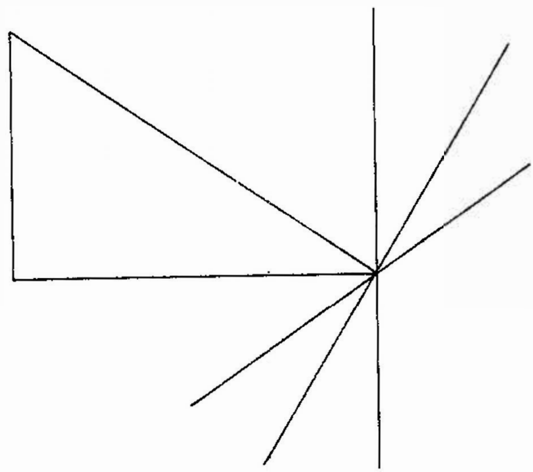
A idéia central deste capítulo é mostrar que, sob certas condições, é possível separar dois conjuntos convexos. Esta idéia (simples e bastante intuitiva) é uma peça básica no desenvolvimento da teoria de otimização quando se deseja englobar casos não considerados nos teoremas anteriores. Ela também desempenha papel importante nos teoremas sobre eficiência alocativa do mecanismo competitivo, uma vez que a existência do referido hiperplano é equivalente, no caso da Teoria da Concorrência Perfeita, à existência de um preço relativo compatível com o equilíbrio, isto é, um preço que "suporta" (ou, se quisermos, financia) aquele equilíbrio.

É interessante chamar a atenção para o fato de que, num certo sentido, a idéia de separação de conjuntos convexos já foi utilizada no Teorema do Multiplicador de Lagrange, quando caracterizamos os pontos críticos de uma função f/N_c com base na existência de um plano tangente, $ET(x)$, à superfície N_c. Isto significa que, localmente, o plano tangente divide o espaço R^p em duas regiões: uma contendo a superfície N_c (ou, mais precisamente, uma parte



da superfície N_c) e a outra que não contém N_c. Na terminologia deste capítulo, $ET(x)$ é um hiperplano suporte para a superfície N_c.

Felizmente, o essencial no argumento acima é a existência do hiperplano, e não a sua unicidade. No caso em que N_c é obtida como imagem de uma função de classe C^1, esta unicidade está garantida, embora ela não seja o ponto fundamental da questão. No caso geral dos teoremas de otimização, tem-se algo como na figura a seguir. N_c é um conjunto convexo que pode ter "bicos", porém a existência (não a unicidade) do hiperplano suporte está garantida.



A estrutura deste capítulo é a seguinte: na Seção VIII.1 estudamos algumas das propriedades topológicas dos conjuntos convexos, com o intuito de fornecer o material básico utilizado na Seção VIII.2, que discute os teoremas de separação e algumas implicações.

VIII.1 — Estrutura Topológica dos Conjuntos Convexos

Iniciaremos a seção observando que convexidade é, como já dissemos anteriormente, uma hipótese que desempenha papel relevante tanto na Teoria Econômica como na Teoria de Otimização que estudaremos. Entretanto, esta é uma propriedade muito delicada, pois podemos perdê-la facilmente. Por exemplo, R^p é um conjunto convexo, porém $R^p - \{0\}$ não é convexo. Conexidade, por outro lado, é uma hipótese um pouco mais robusta, porém com implicações, em geral, menos potentes do que as de convexidade. [1]

O primeiro resultado a ser demonstrado é que todo conjunto convexo é conexo (ver nota 1 para exemplo de um conexo que não é convexo). [2] O lema a seguir é básico no estudo da conexidade.

Lema 1 — Seja Δ um conjunto de índices e sejam $A_\delta \subset R^p$, $\delta \in \Delta$, conjuntos conexos. Se $\bigcap_{\delta \in \Delta} A_\delta \neq \phi$, então $A = \bigcup_{\delta \in \Delta} A_\delta$ é um conjunto conexo.

Prova:

Suponhamos que B e C formam uma desconexão para A. Como $\bigcap_{\delta \in \Delta} A_\delta \neq \phi$, existe $a \in \bigcap_{\delta \in \Delta} A_\delta$ e admitamos que $a \in B$. Para cada $\delta \in \Delta$, $B \cap A_\delta$ e $C \cap A_\delta$ são tais que:

$(B \cap A_\delta) \cap (C \cap A_\delta) = \phi$ (uma vez que $(B \cap A) \cap (C \cap A) = \phi$); e

$(B \cap A_\delta) \cup (C \cap A_\delta) = A_\delta$ (uma vez que $(B \cap A) \cup (C \cap A) = A$).

Além disto, $B \cap A_\delta \neq \phi$ ($a \in B \cap A_\delta$) e, portanto, devemos ter $C \cap A_\delta = \phi$ (A_δ é conexo). Então, para todo $\delta \in \Delta$, $A_\delta = B \cap A_\delta \subset B$ e, em conseqüência, $C = \phi$. Ora, mas isto contradiz a hipótese de que B e C formam uma desconexão para A.

C. Q. D.

[1] Segue-se da apresentação que faremos que R^p é um conjunto conexo. Afirmamos que $R^p - \{0\}$ é também um conjunto conexo, $p > 1$.

[2] O leitor não interessado em aprofundar seus conhecimentos sobre conexidade pode passar diretamente para o Teorema 2.

Teorema 1 — Seja $X \subset R^p$ um conjunto convexo. Então, $\bar{X}$ é conexo.

Prova:

Se $X = \phi$, então $\bar{X}$ é conexo. Suponhamos, então, $X \neq \phi$. Seja $a \in X$ e, para cada $x \in \bar{X}$, definamos:

$$[a, x] = \{\theta a + (1 - \theta)\ x,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1\}$$

onde $[a, x]$ é o segmento da reta que liga a a x. Note-se que $\bigcap_{x \in X} [a, x] \neq \phi$, pois a pertence a esta interseção. Note-se também que, por definição de conjunto convexo, $[a, x] \subset X$ para todo $x \in X$ e, portanto, $\bigcup_{x \in X} [a, x] \subset X$. Por outro lado, seja $\bar{x} \in X$. Como X é convexo, $[a, \bar{x}] \subset X$. Assim, $\bar{x} \in \bigcup_{x \in X} [a, x]$, ou seja, $X \subset \bigcup_{x \in X} [a, x]$.

$[a, x]$ é um conjunto conexo, pois é a imagem do intervalo $[0, 1]$ pela função contínua $f: [0, 1] \to R^p$ definida por $f(\lambda) = \lambda a + (1 - \lambda) x$. Pelo lema anterior, X é conexo.

C. Q. D.

Como dissemos anteriormente, segue-se do teorema que R^p é um conjunto conexo. Este fato tem uma implicação interessante.

Corolário 1 — Seja $A \subset R^p$ um conjunto que é aberto e fechado em R^p. Então, $A = R^p$ ou $A = \phi$.

Prova:

Se $A \neq R^p$ e $A \neq \phi$, então A e $\complement A$ formam uma desconexão para R^p.

C. Q. D.

Este corolário tranqüiliza-nos bastante com relação à possibilidade de existirem muitos conjuntos que, tais como ϕ e R^p, sejam abertos e fechados ao mesmo tempo. Certamente, a existência de um número muito grande deles tornaria a classificação menos atrativa do ponto de vista analítico.

Voltemo-nos agora mais especificamente para os conjuntos convexos.

Teorema 2 — Seja $X \subset R^p$ um conjunto convexo. Então:

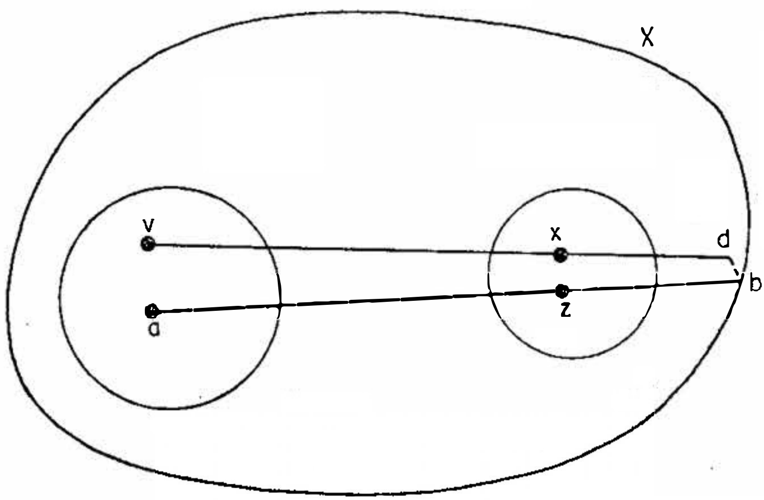
a) $\overline{X}$ é convexo; e

b) se $a \in \mathring{X}$ (interior de X) e $b \in \overline{X}$ (fecho de X), toda combinação convexa de a e b que seja diferente de b pertence a $\mathring{X}$.

Prova:

a) Sejam $x \in \overline{X}$ e $y \in \overline{X}$ e as seqüências (x_n) e (y_n) em X tais que $lim\ x_n = x$ e $lim\ y_n = y$. Como X é um conjunto convexo, $\theta x_n + (1 - \theta)\ y_n$ é uma seqüência em X e converge para $\theta x + (1 - \theta)\ y$ para todo $\theta \in [0, 1]$. Como $\overline{X}$ é fechado, o limite de $\theta x_n + (1 - \theta)\ y_n$ pertence a $\overline{X}$.

b) Sejam $a \in \mathring{X}$, $b \in \overline{X}$ e $z = (1 - \theta)\ a + \theta b$, $\theta \in (0, 1)$. Como a é um ponto interior de X, existe $B(a, \varepsilon) \subset X$. Iremos mostrar que $B(z, (1 - \theta)\ \varepsilon) \subset X$. A figura a seguir resume os pontos essenciais da demonstração.



Seja $x \in B(z, (1 - \theta)\ \varepsilon)$, isto é, $|x - z| < (1 - \theta)\ \varepsilon$. Note-se que, qualquer que seja $r > 0$, $B(b, r) \cap X$ é um conjunto não vazio e que contém pelo menos um elemento diferente de b, pois um conjunto convexo não possui pontos isolados, a não ser que tenha um único elemento. Como $\overset{\circ}{X} \neq \phi$, tal não é o caso.

Consideremos, por motivos que ficarão mais claros a seguir, a bola:

$$B\left(b, \frac{1}{\theta}[(1 - \theta)\ \varepsilon - |x - z|]\right)$$

e seja $d \in X$ um ponto pertencente a esta bola. Então:

$$\theta\ |b - d| < (1 - \theta)\ \varepsilon - |x - z|$$

Note-se agora que:

$$|x - [(1 - \theta)\ a + \theta d]| \leqslant |x - (1 - \theta)\ a - \theta b| + |\theta b - \theta d| <$$
$$< |x - z| + \theta\ |b - d| < |x - z| + (1 - \theta)\ \varepsilon - |x - z| = (1 - \theta)\ \varepsilon$$

Portanto, considerando a primeira e a última destas expressões, obtém-se:

$$\left|\frac{1}{1 - \theta}\ (x - \theta d) - a\right| < \varepsilon$$

Assim, o ponto $v = \dfrac{1}{(1 - \theta)}\ (x - \theta d) \in B(a, \varepsilon)$. Além disto, $x = (1 - \theta)\ v + \theta d \in X$, pois é uma combinação convexa de dois elementos de X. Logo, $B(z, (1 - \theta)\ \varepsilon) \in X$, o que mostra que $z \in \overset{\circ}{X}$.

C. Q. D.

As principais implicações do teorema são resumidas nos três corolários que se seguem. Entretanto, demonstraremos antes o seguinte:

Lema 2 – Seja $X \subset R^p$ um conjunto. Então:

a) $Fr\ X = \overline{X} \cap \overline{CX}$; e

b) $\overline{\overset{\circ}{X}} \subset \overline{X}$.

Prova:

Se $X = \phi$, $Fr\ X = \phi$ e $\overline{X} = \phi$. Logo, $Fr\ X = \overline{X} \cap \overline{CX}$ e, além disto, $X = \overset{\circ}{X}$ e $\overline{\overset{\circ}{X}} = \phi$.

Suponhamos, então, que $X \neq \phi$:

a) Se $X = R^p$, $Fr\ X = \phi$ e $\overline{X} = \phi$, então $Fr\ X = \overline{X} \cap \overline{CX}$. Se $X \neq R^p$, então $Fr\ X \neq \phi$ (caso contrário, X seria aberto e fechado). Seja $x \in Fr\ X$ e suponhamos que $x \in X$. Então, $x \in \overline{X}$ e também é um ponto de acumulação de $\complement X$. Se $x \notin X$, ele será um ponto de acumulação de X e também se verifica $x \in \overline{CX}$. Portanto, $Fr\ X \subset \overline{X} \cap \overline{CX}$.

Por outro lado, como $X \neq R^p$, $\overline{X} \neq \phi$ e $\overline{CX} \neq \phi$. Também não se pode ter $\overline{X} \cap \overline{CX} = \phi$, pois todo ponto de X seria ponto interior (e, portanto, X seria aberto) e todo ponto de CX seria ponto interior (e, portanto, CX seria aberto), o que é uma contradição. Seja $x \in \overline{X} \cap \overline{CX}$. Então, se $x \in X$, x é ponto de acumulação de CX e, portanto, é um ponto de fronteira de X. Se $x \notin X$, então ele é ponto de acumulação de X e pertence (obviamente) a CX, o que também quer dizer que $x \in Fr\ X$. Logo, $\overline{X} \cap \overline{CX} \subset Fr\ X$.

b) Como $\overset{\circ}{X} \subset X$, segue-se que $\overline{\overset{\circ}{X}} \subset \overline{X}$.

C. Q. D.

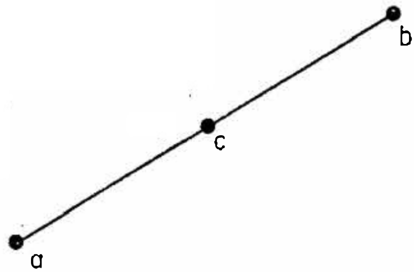
Vejamos agora os corolários do Teorema 2.

Corolário 2 — Seja $X \subset R^p$, $X \neq \phi$, um conjunto convexo e seja $a \in \overset{\circ}{X}$. Nestas condições, existe, no máximo, um ponto de fronteira de X em uma semi-reta que parte de a.

Prova:

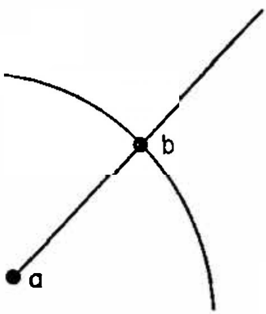
Suponha-se que b e c sejam pontos de fronteira de X e estejam sobre a semi-reta que parte de a. Pelo lema anterior, $b \in \overline{X}$ e $c \in \overline{X}$.

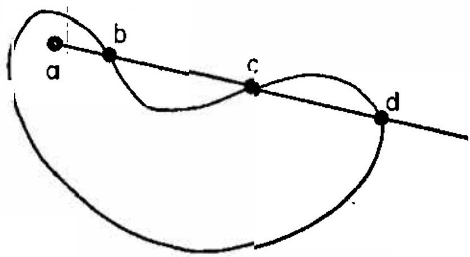
Segue-se, então, que $c = \theta a + (1 - \theta) b$ para algum $0 < \theta \leqslant 1$. Ora, mas isto contradiz o Teorema 2.



C. Q. D.

O resultado acima é bastante intuitivo do ponto de vista geométrico (as figuras a seguir ilustram o fato).





Corolário 3 — Seja $X \subset R^p$ convexo. Então, $\mathring{X}$ é convexo.

Prova:

Se $\mathring{X} = \phi$, ele é convexo. Caso contrário, sejam $x \in \mathring{X}$ e $y \in \mathring{X}$. Como, por exemplo, $x \in \overline{X}$, temos $\theta x + (1 - \theta) y \in \mathring{X}$ para todo $0 < \theta \leqslant 1$. Logo, $\mathring{X}$ é convexo.

C. Q. D.

Corolário 4 — Seja $X \subset R^p$ convexo e tal que $\mathring{X} \neq \phi$. Então, $\overline{\mathring{X}} = \overline{X}$.

Prova:

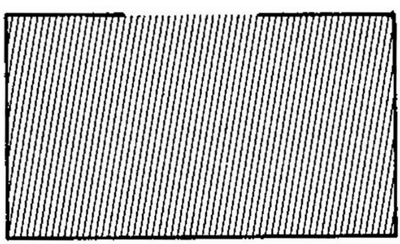
Já mostramos que $\overline{\mathring{X}} \subset \overline{X}$ (incidentalmente, note-se que esta inclusão independe da convexidade de X). Seja, então, $a \in \mathring{X}$. Para todo $b \in \overline{X}$, $\theta a + (1 - \theta) b \in \mathring{X}$, $\theta \in (0, 1]$.

Portanto, toda bola de centro em b contém pelo menos um ponto (diferente de b) pertencente ao interior de X, o que significa que b é ponto de acumulação de $\mathring{X}$ e, portanto, $b \in \overline{\mathring{X}}$.

C. Q. D.

Deve-se observar o seguinte quanto aos Corolários 3 e 4:

a) Não vale a recíproca no Corolário 3, isto é, X pode ser convexo, apesar de X não ser convexo (na figura a seguir, A não é um conjunto convexo, porém $\mathring{A}$ é convexo).



A

b) Com relação ao Corolário 4, considere-se o seguinte: seja $X = [0, 1] \cup \{2\} \subset R$. Então, $\overline{X} = X$ e $\overline{\mathring{X}} = [0, 1]$, o que mostra que, se a hipótese de convexidade de X não é satisfeita, então não é verdade que $\overline{\mathring{X}}$ contém $\overline{X}$.

Ainda com relação ao Teorema 2 e seus corolários, é interessante relacioná-los com alguns fatos mais gerais sobre conjuntos conexos, o que será feito a seguir. O leitor que não estiver interessado pode passar diretamente para a seção seguinte sem perda da continuidade do assunto.

Proposição — Se $X \subset R^p$ é conexo, então $\overline{X}$ é conexo.

Prova:

Mostraremos que, se $\overline{X}$ não é conexo, então X não é conexo.

Se $\overline{X}$ não é conexo, então existem $A \subset R^p$, $B \subset R^p$ abertos tais que:

$$A \cap \overline{X} \neq \phi, \quad B \cap \overline{X} \neq \phi \tag{1}$$

$$(A \cap \overline{X}) \quad (B \cap \overline{X}) = (A \cap B) \cap \overline{X} = \phi \tag{2}$$

$$(A \cap \overline{X}) \cup (B \cap \overline{X}) = (A \cup B) \cap \overline{X} = \overline{X} \tag{3}$$

De (2), segue-se que $(A \cap B) \cap X = (A \cap X) \cap (B \cap X) = \phi$. Além disto, se $x \in X$, $x \in \overline{X}$ e, por (3), $x \in (A \cup B)$. Logo, $x \in (A \cup B) \cap X$, isto é, $X \subset (A \cup B) \cap X$ e, como X contém este conjunto, temos:

$$(A \cup B) \cap X = (A \cap X) \cup (B \cap X) = X$$

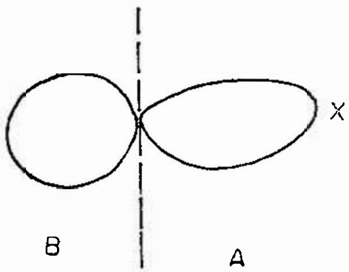
Finalmente, note-se que $A \cap \overline{X} = A \cap (X \cup X') =$
$= (A \cap X) \cup (A \cap X') \neq \phi$.

Portanto, temos $A \cap X \neq \phi$ ou $A \cap X' \neq \phi$. No primeiro caso, não há o que provar. Suponha-se, então, que $A \cap X' \neq \phi$ e seja $z \in A \cap X'$. Como A é aberto, existe uma bola $B(z, r) \subset A$, $r > 0$. Como $z \in X'$, $B(z, r) \cap X$ é um conjunto que contém pelo menos um elemento y diferente de z. Então, $y \in A \cap X$.

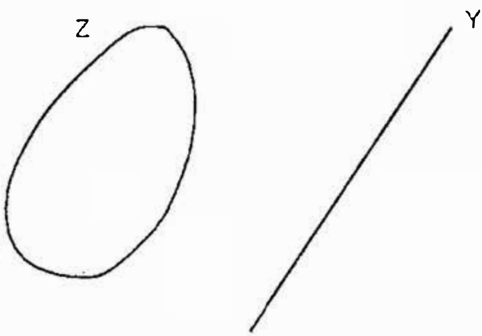
Da mesma forma, $B \cap X \neq \phi$. Portanto, A e B formam uma desconexão para X.

C. Q. D.

Não vale um resultado semelhante ao Corolário 3 para os conjuntos conexos. Por exemplo, o conjunto X a seguir é conexo, porém $\overset{\circ}{X}$ é desconexo, pois A e B formam uma desconexão para ele.



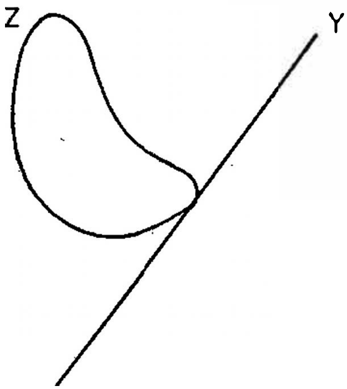
Também não vale o seguinte: $\overset{\circ}{X}$ conexo implica X conexo (ver a figura a seguir, onde o conjunto X é a reunião dos conjuntos Y e Z, sendo que o interior de Y é vazio).



X não é conexo e, no entanto, $\overset{\circ}{X} = \overset{\circ}{Z}$ é conexo.

Por fim, o Corolário 4 também não vale para os conjuntos conexos (basta examinarmos a figura a seguir). O conjunto X é a reunião de Z e Y; X é conexo, $\overset{\circ}{X} \neq \phi$ e, no entanto:

$$\overline{\overset{\circ}{X}} \neq \overline{X} \,. \quad (\overline{\overset{\circ}{X}} = Z)$$



Estes exemplos servem para ilustrar o fato de que a convexidade é, na realidade, uma hipótese que tem implicações topológicas bem mais fortes do que a conexidade. Como o Teorema 2 e seus corolários irão desempenhar um papel importante no que se segue, é interessante sabermos que não se pode deixar de lado a hipótese de convexidade muito facilmente.

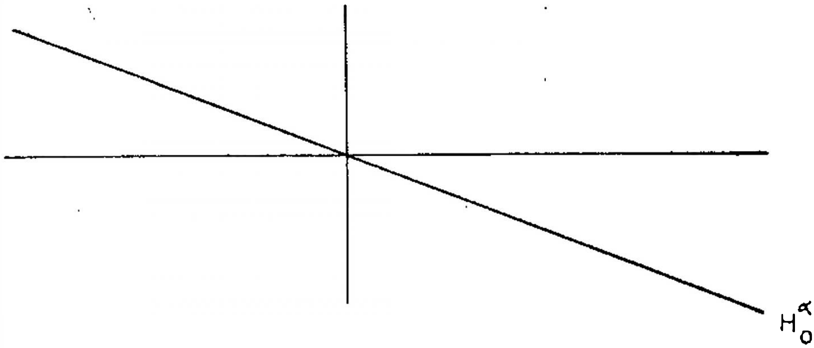
VIII.2 — Teoremas de Separação

Definição 1 — Seja $\alpha \in R^p$, $\alpha \neq 0$,[3] e seja $\lambda \in R$. O conjunto $H^{\alpha}_{\lambda} = \{x \in R^p: < \alpha, x > = \lambda\}$ é chamado um hiperplano normal a α.

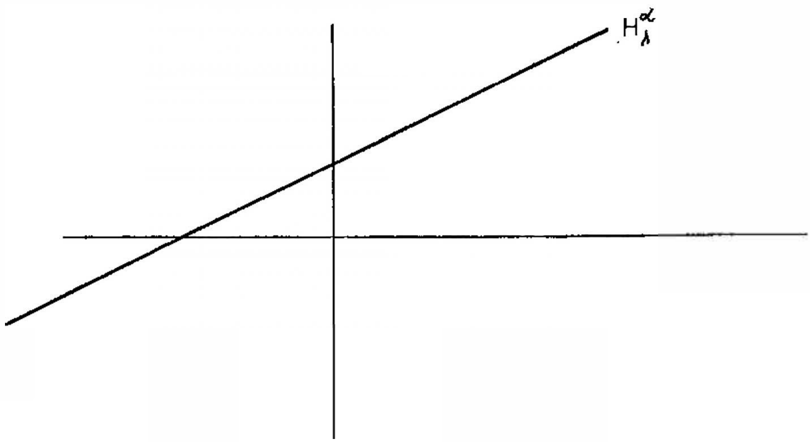
Exemplos:

I — Sejam $\alpha = (1, 1) \in R^2$ e $\lambda = 0$. O hiperplano H^{α}_{0} é uma linha reta que passa pela origem.

[3] $\alpha \neq 0$ significa que existe pelo menos um $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ para o qual $\alpha_i \neq 0$.

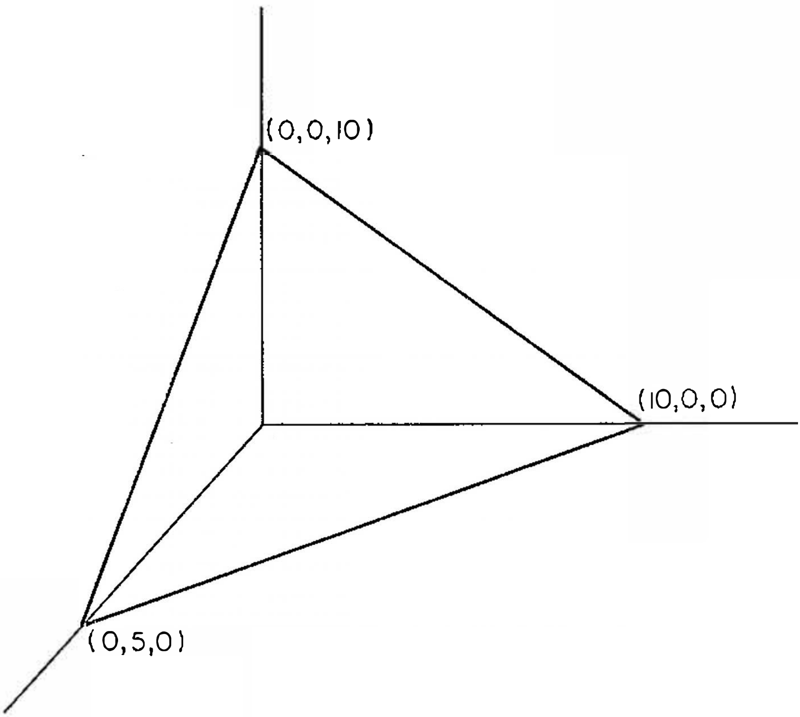


2 — Mais geralmente, dado $\alpha \in R^2 - \{0\}$ e $\lambda \in R$, o hiperplano H_λ^α é uma linha reta em R^2.



3 — Seja $\alpha = (1, 2, 1)$ e $\lambda = 10$. O hiperplano $H_{10}^\alpha = \{x \in R^3 \colon x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 10\}$ é um plano em R^3.

4 — Sejam $f \colon R^p \to R$ uma função de classe C^1 e N_c uma superfície de nível de f para o qual $grad\ f(x) \neq 0$, $x \in N_c$. Dado um ponto $x_0 \in N_c$, $ET(x_0)$ é o conjunto de vetores tangentes a N_c no ponto x_0. Sabemos que $V \in ET(x_0)$ se, e somente se, $< grad\ f(x_0), V > = 0$.

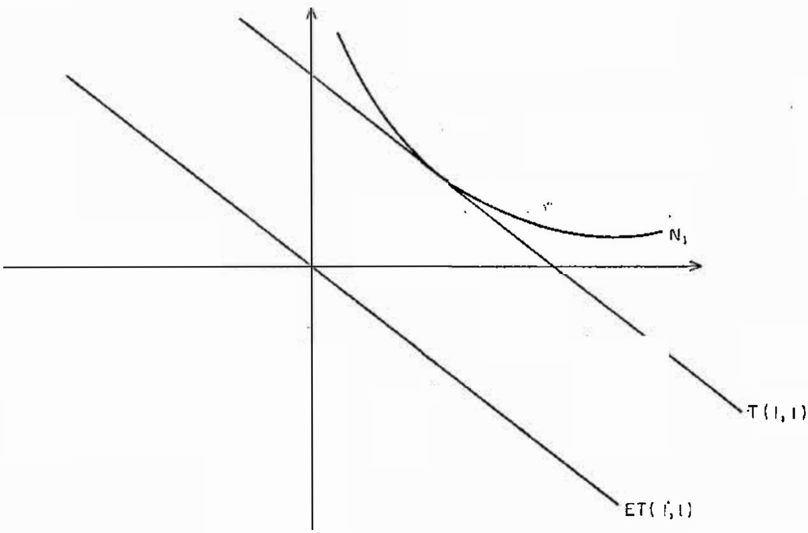


Portanto, $ET(x_0) = H_0^{grad\, f(x_0)}$. Define-se o plano tangente a N_c no ponto x_0:

$$T(x_0) = \{x \in R^p: x = x_0 + V,\ V \in ET(x_0)\}$$

Desta maneira, $T(x_0)$ é o hiperplano H_λ^α, sendo $\alpha = grad\ f(x_0)$ e $\lambda = \langle grad\ f(x_0), x_0 \rangle$, pois $x \in T(x_0)$ se, e somente se, $\langle grad\ f(x_0), x - x_0 \rangle = 0$.

Considere-se a função $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = xy$. Sejam $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e N_1 o subconjunto da superfície de nível 1 situado no primeiro quadrante. Pelo que acabamos de ver, $ET(1, 1)$ é o conjunto de vetores $V \in R^2$ tais que $\langle grad\ f(1, 1), (V_1, V_2) \rangle = 0$, isto é, $V_1 = -V_2$. Da mesma forma, $T(1, 1)$ é o conjunto dos vetores (x, y) tais que $< grad\, f(1, 1), (x, y) - (1, 1) > = 0$, isto é, $x + y = 2$.

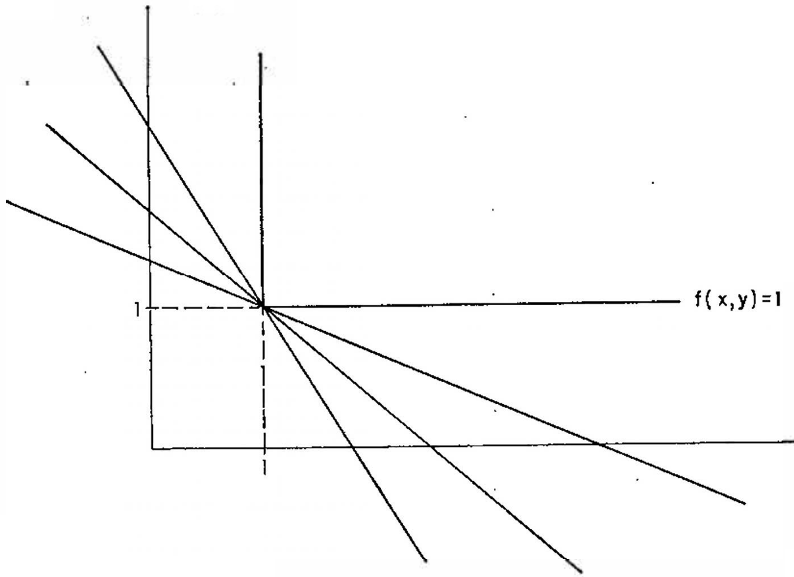


Note-se que, neste exemplo, $T(1, 1)$ é o único plano tangente a N_1 em $(1, 1)$, o que, essencialmente, se deve à hipótese de que f é uma função diferenciável neste ponto.

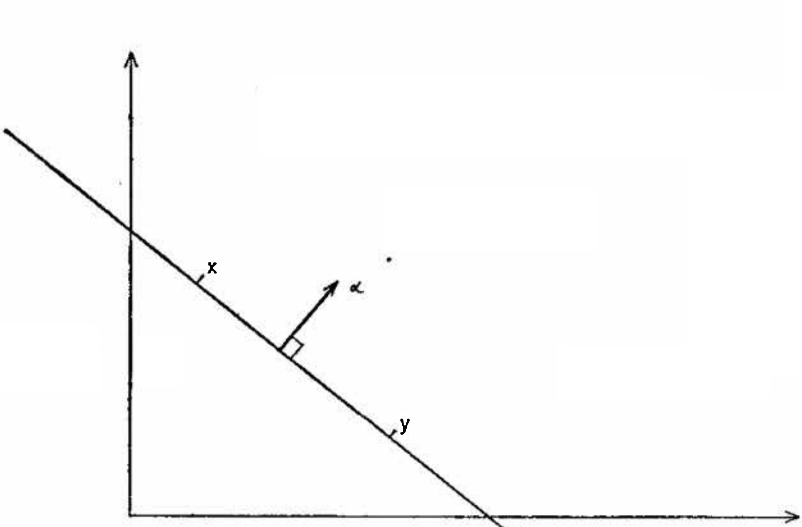
5 — Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = min\ \{x, y\}$. f não é diferenciável nos pontos $(c_1, c_2) \in R^2$ com $c_1 = c_2$. O conjunto dos pontos tais que $f(x, y) = 1$ está representado na figura a seguir. É importante notar que pelo ponto $(1, 1)$ passa uma infinidade de hiperplanos que "separam" o plano R^2 em duas partes: uma que contém a curva e outra que não a contém.

Na Definição 1 afirmamos que H^α_λ é um hiperplano normal a α. Isto significa que, dados $x \in H^\alpha_\lambda$ e $y \in H^\alpha_\lambda$, $< \alpha, x - y > = 0$, isto é, α é um vetor perpendicular a $x - y$, quaisquer que sejam x e y pertencentes a H^α_λ.

O hiperplano H^α_λ divide o espaço R^p em dois subconjuntos $H^\alpha_{\lambda+} = \{x \in R^p: < \alpha, x > \geqslant \lambda\}$ e $H^\alpha_{\lambda-} = \{x \in R^p: < \alpha, x > \leqslant \lambda\}$,

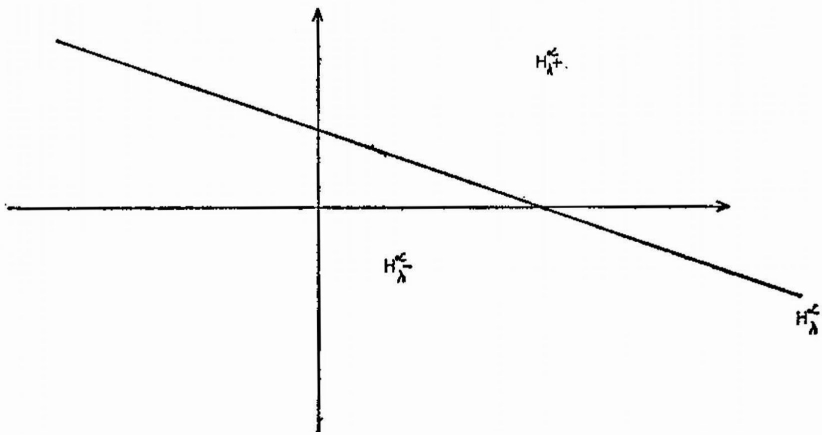


1
f(x,y)=1



x
α
y
H^{α}_{λ}

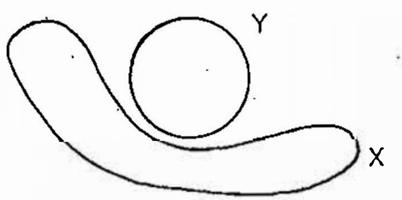
que são conjuntos convexos e fechados. Segue-se desta afirmação que H^α_λ é um conjunto convexo e fechado.

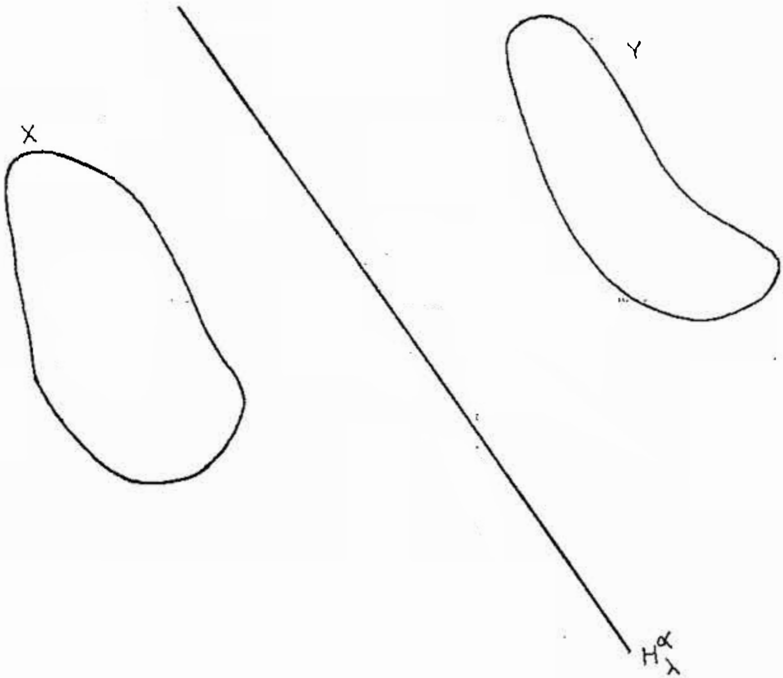


A partir de agora, sempre que nos referirmos ao hiperplano H^α_λ estaremos admitindo que $\alpha \neq 0$ e $\lambda \in R$. Casos especiais serão explicitamente mencionados.

Definição 2 — Sejam X e Y subconjuntos de R^p e H^α_λ um hiperplano. Diz-se que H^α_λ "separa" X e Y se $X \subset H^\alpha_{\lambda+}$ e $Y \subset H^\alpha_{\lambda-}$ (ou vice-versa). Isto significa que, para todo $x \in X$, $< \alpha, x > \geqslant \lambda$ e, para todo $y \in Y$, $< \alpha, y > \leqslant \lambda$. Se valem as desigualdades estritas, diz-se que X e Y estão "estritamente separados" por H^α_λ (ver figura na página seguinte).

É importante notar que nem sempre é possível separar dois conjuntos por um hiperplano. A figura abaixo mostra um caso em que isto não é possível (observe-se que o conjunto X não é convexo).





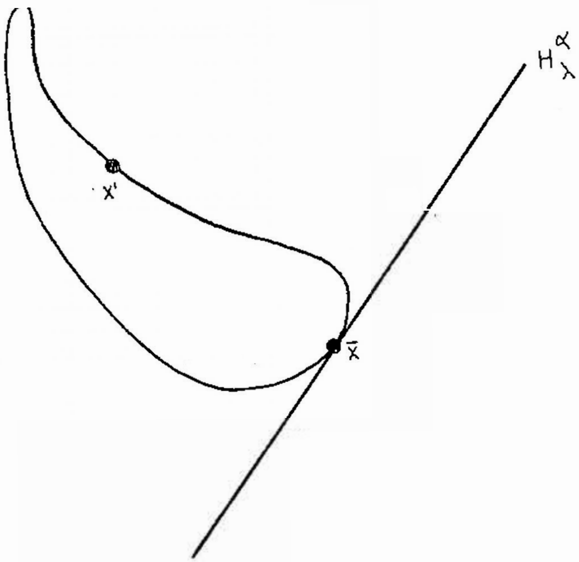
Definição 3 — Seja X um subconjunto de R^p e seja H_λ^α um hiperplano. Se $X \subset H_{\lambda+}^\alpha$ ou $X \subset H_{\lambda-}^\alpha$ e se existe $\bar{x} \in X$ tal que $< \alpha, \bar{x} > = \lambda$, diz-se que H_λ^α é um hiperplano suporte para X.

H_λ^α é um hiperplano suporte para o conjunto X na figura a seguir, sendo $< \alpha, \bar{x} > = \lambda$. Entretanto, não existe nenhum hiperplano suporte para X que passa pelo ponto x', o que, uma vez mais, é conseqüência do fato de X não ser um conjunto convexo.

Lema 3 — Seja $X \subset R^p$, $X \neq \phi$, um conjunto fechado e seja $a \in R^p$, $a \notin X$. Existe $\bar{x} \in X$ tal que f: $X \rightarrow R$ definida por $f(x) = |x - a|$ atinge um mínimo no ponto $\bar{x}$. Se X é um conjunto convexo, $\bar{x}$ é único.

Prova:

Seja $B[a, \delta]$ uma bola fechada de centro em a tal que $B[a, \delta] \cap X \neq \phi$. O conjunto $A = B[a, \delta] \cap X$ é compacto e f/A é contínua.



Pelo Teorema de Weierstrass, existe $\bar{x} \in A$ tal que $f(\bar{x}) \leqslant f(x)$ para todo $x \in A$. Na verdade, tem-se $f(x) \geqslant f(\bar{x})$ para todo $x \in X$, uma vez que, se $x \in X - A$, $f(x) > \delta$.

Suponha-se agora que X é convexo e sejam $\bar{x} \in X$ e $\bar{\bar{x}} \in X$, $\bar{x} \neq \bar{\bar{x}}$, tais que $f(\bar{x}) = f(\bar{\bar{x}}) \leqslant f(x)$ para todo $x \in X$. Como X é convexo, $\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{\bar{x}} \in X$. Além disto:

$$f\left(\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{\bar{x}}\right) = \left|\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{\bar{x}} - a\right| \leqslant |\bar{x} - a|$$

Entretanto, como f atinge mínimo em $\bar{x}$:

$$\left|\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{\bar{x}} - a\right| = \frac{1}{2}\,|(\bar{x} - a) + (\bar{\bar{x}} - a)| = |\bar{x} - a|$$

ou seja:

$$|(\bar{x} - a) + (\bar{\bar{x}} - a)| = 2\,|\bar{x} - a| \qquad (1)$$

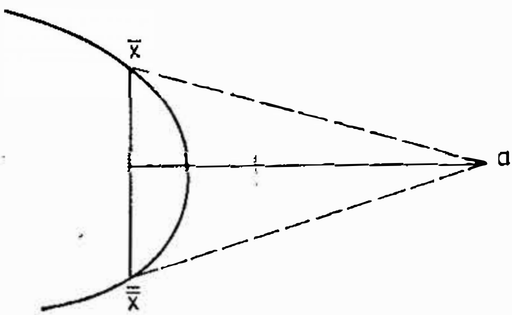
Como a Norma Euclideana satisfaz a identidade do paralelogramo,[4] podemos escrever:

$$|(\bar{x} - a) + (\bar{\bar{x}} - a)|^2 + |(\bar{x} - a) - (\bar{\bar{x}} - a)|^2 = 2 \{|\bar{x} - a|^2 + |\bar{\bar{x}} - a|^2\}$$

Como $|\bar{x} - a| = |\bar{\bar{x}} - a|$, $|(\bar{x} + a) + (\bar{\bar{x}} - a)|^2 + |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| = 4 |\bar{x} - a|^2$. Esta igualdade e (1) implicam que $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| = 0$, o que contradiz a hipótese de que $\bar{x} \neq \bar{\bar{x}}$.

C. Q. D.

A demonstração da segunda parte do lema — unicidade de $\bar{x}$ quando X é um conjunto convexo — pode ser ilustrada pela figura a seguir. Se $\bar{x}$ e $\bar{\bar{x}}$ estão à mesma distância do ponto a e se X é convexo, então o ponto médio do segmento $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ estará mais próximo de a do que ambos.



A apresentação dos teoremas de separação será feita segundo a seguinte estratégia: inicialmente, demonstra-se o teorema em um

[4] Identidade do paralelogramo: dados $z \in R^p$ e $z^1 \in R^p$:

$$|z + z^1|^2 + |z - z^1|^2 = 2 \{|z|^2 + |z^1|^2\}$$

Prova:

$$|z^1 - z|^2 = < z^1, z^1 > - 2 < z^1, z > + < z, z >$$
$$|z + z^1|^2 = < z^1, z^1 > + 2 < z^1, z > + < z, z >$$
$$|z^1 - z|^2 + |z + z^1|^2 = 2 < z^1, z^1 > + 2 < z, z > = 2 \{|z^1|^2 + |z|^2\}$$

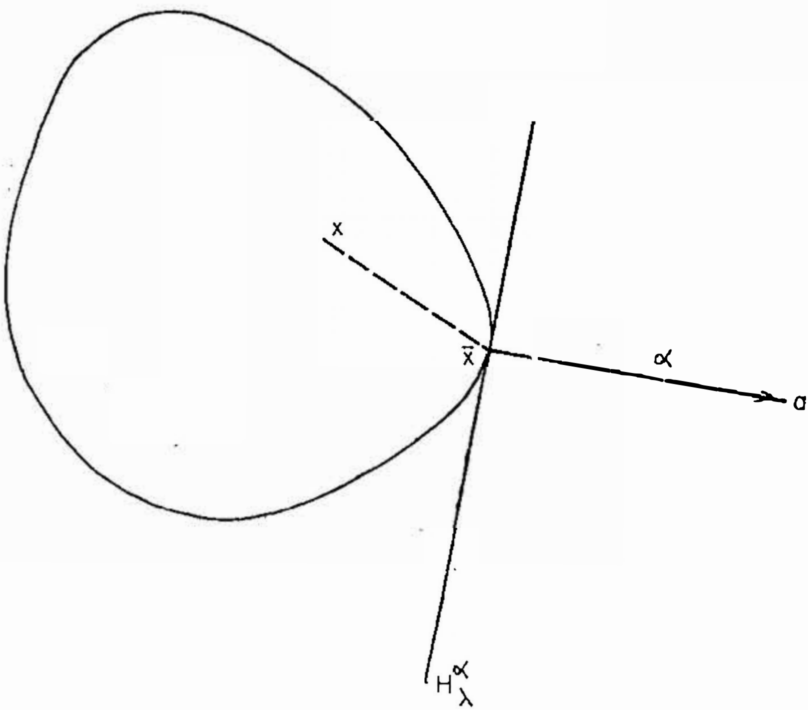
caso particular, e a partir dele as hipóteses vão sendo eliminadas, até que se chegue ao teorema mais geral.

Teorema 3 – Seja $X \subset R^p$, $X \neq \phi$, um conjunto convexo fechado e seja $a \in R^p$, $a \notin X$. Neste caso, existem $\alpha \in R^p - \{0\}$ e $\lambda \in R$ tais que $< \alpha, a > < \lambda$ e $< \alpha, x > \geqslant \lambda$ para todo $x \in X$, isto é, o hiperplano H_λ^α separa os conjuntos $\{a\}$ e X.

Prova:

Seja $\bar{x}$ o ponto (lema anterior) à distância mínima de a. Tomemos $\alpha = \bar{x} - a$ e $\lambda = < \alpha, \bar{x} >$. Então:

$$< \alpha, a > = < \alpha, a + \bar{x} - \bar{x} > = < \alpha, a - \bar{x} > +$$
$$+ < \alpha, \bar{x} > = - < \alpha, \alpha > + \lambda < \lambda$$



Para verificarmos a outra afirmativa do teorema, sejam $x \in X$ e $x_\theta = \theta x + (1 - \theta)\bar{x}$, $\theta \in (0, 1]$. Como $\bar{x}$ está a uma distância mínima de a, $< \bar{x} - a, \bar{x} - a > \leqslant < x_\theta - a, x_\theta - a >$. Além disto, sendo $x_\theta \neq \bar{x}$, a desigualdade acima é uma desigualdade estrita. Portanto:

$$< \bar{x} - a, \bar{x} - a > < < \theta x + (1 - \theta)\ \bar{x} - a,\ \theta x + (1 - \theta)\ \bar{x} - a > =$$
$$= < \theta (x - a) + (1 - \theta)\ (\bar{x} - a),\ \theta (x - a) + (1 - \theta)\ (\bar{x} - a) > =$$
$$= \theta^2 < x - a, x - a > + 2\ \theta(1 - \theta) < x - a, \bar{x} - a > +$$
$$+ (1 - \theta)^2 < \bar{x} - a, \bar{x} - a >$$

Esta desigualdade pode ainda ser reescrita da seguinte maneira:

$$0 < \theta^2\ |x - a|^2 + 2\ \theta (1 - \theta) < x - a, \bar{x} - a > + \theta\ (\theta - 2)\ |\bar{x} - a|^2$$

Como $\theta > 0$:

$$0 < \theta\ |x - a|^2 + 2\ (1 - \theta) < x - a, \bar{x} - a > + (\theta - 2)\ |\bar{x} - a|^2$$

Esta desigualdade vale para todo $\theta \in (0, 1]$. Calculando o limite quando θ tende para zero, obtém-se:

$$0 \leqslant 2 < x - a, \bar{x} - a > - 2\ |\bar{x} - a|^2 = 2 < x - \bar{x}, \bar{x} - a >$$

Utilizando a definição de α e λ, segue-se imediatamente que:

$$< \alpha, x > \geqslant < \alpha, \bar{x} > = \lambda$$

C. Q. D.

O resultado acima garantiu-nos a existência de um hiperplano H^α_λ suporte para o conjunto X. Entretanto, não se pode, no caso geral, garantir sua unicidade, como já havíamos mencionado anteriormente.

Suponha-se, no teorema anterior, que possamos tomar o ponto a como a origem. Então, existem $\alpha \in R^p - \{0\}$ e $\lambda \in R$ tais que $< \alpha, x > \geqslant \lambda$ para todo $x \in X$. O que é interessante é o fato de λ poder ser escolhido de modo a se tornar um número positivo. Para tanto, basta que α e λ sejam definidos da mesma maneira que na demonstração do teorema.

Corolário 5 — Seja $X \subset R^p$, $X \neq \phi$, um conjunto convexo e fechado tal que $0 \notin X$. Então, existem $\alpha \in R^p - \{0\}$ e $\lambda > 0$ tais que $< \alpha, x > \geqslant \lambda$ para todo $x \in X$.

A demonstração do teorema seguinte envolve o relacionamento entre a fronteira de um conjunto e a fronteira de seu fecho. Seja, por exemplo, $A = (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$ e observe-se que $Fr\ A = \{1, 2, 3\}$ e $Fr\ \overline{A} = \{1, 2\}$. Portanto, não é verdade que, em geral, $Fr\ A = Fr\ \overline{A}$. O lema a seguir mostra que uma das inclusões é sempre verdadeira.

Lema 4 — Seja $A \subset R^p$. Então, $Fr\ \overline{A} \subset Fr\ A$.

Prova:

Lembre-se de que $Fr\ A = \overline{A} \cap \overline{CA}$ e $Fr\ \overline{A} = \overline{A} \cap \overline{C\overline{A}}$. Como $A \subset \overline{A}$, segue-se que $C\overline{A} \subset CA$ e, portanto, $\overline{C\overline{A}} \subset \overline{CA}$. Conseqüentemente, $Fr\ \overline{A} \subset Fr\ A$. Como $A \subset \overline{A}$, segue-se que $C\overline{A} \subset CA$ e, portanto, $\overline{C\overline{A}} \subset \overline{CA}$. Conseqüentemente, $Fr\ \overline{A} \subset Fr\ A$.

C. Q. D.

Procuraremos agora mostrar que, se X é convexo, a fronteira de X coincide com a fronteira de $\overline{X}$. Estabeleceremos inicialmente certos fatos importantes para a argumentação. [5]

Seja $X \subset R^p$ um conjunto convexo, não vazio, que contém a origem. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(k \leqslant p)$ vetores pertencentes a X e tais que: a) eles formam um conjunto de vetores linearmente independentes; e b) se $z \in X$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, z\}$ é um conjunto de vetores linearmente dependentes. Denotaremos por $L(X)$ o espaço vetorial (de dimensão k) gerado por eles.

Admitiremos (sem demonstrar) os seguintes fatos:

a) *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vetores linearmente independentes de R^p, $k \leqslant p$. Podemos então escolher (convenientemente) $p - k$ vetores de R^p, $x_{k+1}, \ldots, x_p$, de modo que $x_1, x_2, \ldots, x_p$ seja ainda um conjunto linearmente independente.*

5 O leitor não interessado em detalhes muito técnicos pode passar diretamente para o Teorema 4.

b) *Se $E \subset R^p$ é um espaço vetorial de dimensão $k < p$, E é um conjunto fechado e o interior de E é vazio.*

Lema 5 — Se $X \subset R^p$ é um conjunto convexo, não vazio, tal que $0 \in X$, então $X \subset L(X)$ e, se $L \subset R^p$ é um espaço vetorial que contém X, $L(X) \subset L$.

Prova:

Se $z \in X$, por hipótese, $z, x_1, x_2, \ldots, x_k$ são linearmente dependentes. Logo, existem números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tais que $z = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_2 x_2$.

A segunda parte da afirmação decorre da observação "a" anterior.

C. Q. D.

Lema 6 — Seja $X \subset R^p$ um conjunto convexo, não vazio, que contém a origem e tal que $L(X) = R^p$. Então, $\mathring{X} \neq \phi$.

Prova:

Como $L(X) = R^p$, existe um conjunto de vetores linearmente independentes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ pertencentes a X. Dado $x \in R^p$, existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tais que:

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

Como estes números reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ são únicos, podemos definir uma função λ: $R^p \rightarrow R^p$ tal que a cada x associa $\lambda(x)$, sendo $\lambda_i(x)$ tais que:

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x) \cdot x_i$$

Mostremos que λ é uma função linear. Seja T: $R^p \rightarrow R^p$ definida por $T(\lambda) = \lambda . X$, onde X é a matriz cujas linhas são $x_1, x_2, \ldots, x_p$. X possui uma inversa, X^{-1}, e, portanto, $\lambda(x) = x . X^{-1}$. Logo, λ é linear e, em conseqüência, contínua.

Seja agora:

$$U = \left\{ x \in R^p : \lambda_i(x) > 0,\ i = 1, 2, \ldots, p, \text{ e } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x) < 1 \right\} =$$

$$= \{ x \in R^p : \lambda_i(x) > 0, i = 1, 2, \ldots, p \} \cap \left\{ x \in R^p : \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x) < 1 \right\}$$

U é um conjunto aberto, tendo em vista a continuidade de λ_i (ver Corolário 4 do Teorema 10 do Capítulo IV).

Para finalizar a demonstração, falta apenas verificarmos que $U \subset X$. Se $x \in U$, podemos escrevê-lo como uma combinação convexa dos $p + 1$ elementos $0, x_1, x_2, \ldots, x_p$ de X da seguinte maneira:

$$x = \left(1 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x)\right) \cdot 0 + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x) \cdot x_i$$

C. Q. D.

Lema 7 — Seja $X \subset R^p$ um conjunto convexo, não vazio, que contém a origem. Então, se $\overset{\circ}{\overline{X}} \neq \phi$, $\overset{\circ}{X} \neq \phi$.

Prova:

Observe-se que $L(X)$ é um conjunto fechado. Portanto, $\overline{X} \subset L(X)$. Como $\overset{\circ}{\overline{X}} \neq \phi$, o único subespaço de R^p que contém $\overline{X}$ é R^p. Segue-se do lema anterior que $\overset{\circ}{X} \neq \phi$.

C. Q. D.

O resultado do lema anterior não depende, de nenhuma maneira, do fato de que o conjunto convexo X contém a origem, pois, se X não contém a origem, o conjunto convexo $X - \{a\}$, onde $a \in X$, contém a origem a e, se ele tiver interior não vazio, certamente $\overset{\circ}{X} \neq \phi$.

Estamos em condições de estabelecer o resultado desejado.

Lema 8 — Seja $X \subset R^p$ um conjunto convexo, não vazio. Então, $Fr\ X = Fr\ \overline{X}$.

Prova:

Seja $x \in Fr\ X$. Se $x \notin Fr\ \overline{X}$, $x \in \overset{\circ}{\overline{X}}$, isto é, existe uma bola aberta $B(x, \delta) \subset \overline{X}$, $\delta > 0$. Como X é convexo e $\overset{\circ}{X} \neq \phi$, $x \in \overline{\overset{\circ}{X}}$ (Corolário 4 do Teorema 2 anterior). Sendo x um ponto de acumulação de $\overset{\circ}{X}$, existe $c \in \overset{\circ}{X}$, $c \neq x$, tal que $c \in B(x, \delta)$. Seja $d = 2x - c$ e note-se que $|x - d| = |x - 2x + c| = |c - x| < \delta$.

Então, $d \in B(x, \delta) \subset \overline{X}$. Assim, temos $d \in \overline{X}$, $c \in \overset{\circ}{X}$ e $x =$

$= \frac{1}{2}(c + d)$. Pelo Teorema 2, $x \in \mathring{X}$. Isto, entretanto, contradiz a hipótese inicial de que $x \in Fr\, X$.

C. Q. D.

Teorema 4 — Seja X um subconjunto convexo de R^p, não vazio, e seja $a \in R^p$, $a \notin X$. Neste caso, existe $\alpha \in R^p - \{0\}$ tal que $< \alpha, x > \geqslant < \alpha, a >$ para todo $x \in X$.

Prova:

Consideremos dois casos:

Caso a: $a \notin \overline{X}$. Como $\overline{X}$ é convexo, pelo Teorema 3, existem $\alpha \in R^p - \{0\}$ e $\lambda \in R$ tais que $< \alpha, x > \geqslant \lambda$ para todo $x \in \overline{X}$ e $< \alpha, a > < \lambda$. Como $X \subset \overline{X}$, para todo $x \in X$ $< \alpha, x > > < \alpha, a >$.

Caso b: $a \in \overline{X}$. Como $a \notin X$, a é um ponto de fronteira de X e, portanto, um ponto de fronteira de $\overline{X}$. Então, existe uma seqüência (a_n) em $\complement\, \overline{X}$ tal que $lim\ (a_n) = a$. Para cada $n \in N$ (pelo Teorema 3) existe $\alpha_n \in R^p - \{0\}$ tal que $< \alpha_n, x > \geqslant < \alpha_n, a_n >$ para todo $x \in \overline{X}$. Em particular, $< \alpha_n, x > \geqslant < \alpha_n, a_n >$ para todo $x \in X$.

Em geral, a seqüência (α_n) não é convergente. Entretanto, a seqüência $\alpha'_n = \frac{\alpha_n}{|\alpha_n|}$ é limitada, pois, para cada $n \in N$, $\alpha'_n \in S = \{y \in R^p: |y| = 1\}$. Seja (α'_{n_k}) a subseqüência convergente e seja $\alpha = lim\ (\alpha'_{n_k})$. Como S é compacto (em particular fechado), $\alpha \in S$, isto é, $\alpha \neq 0$.

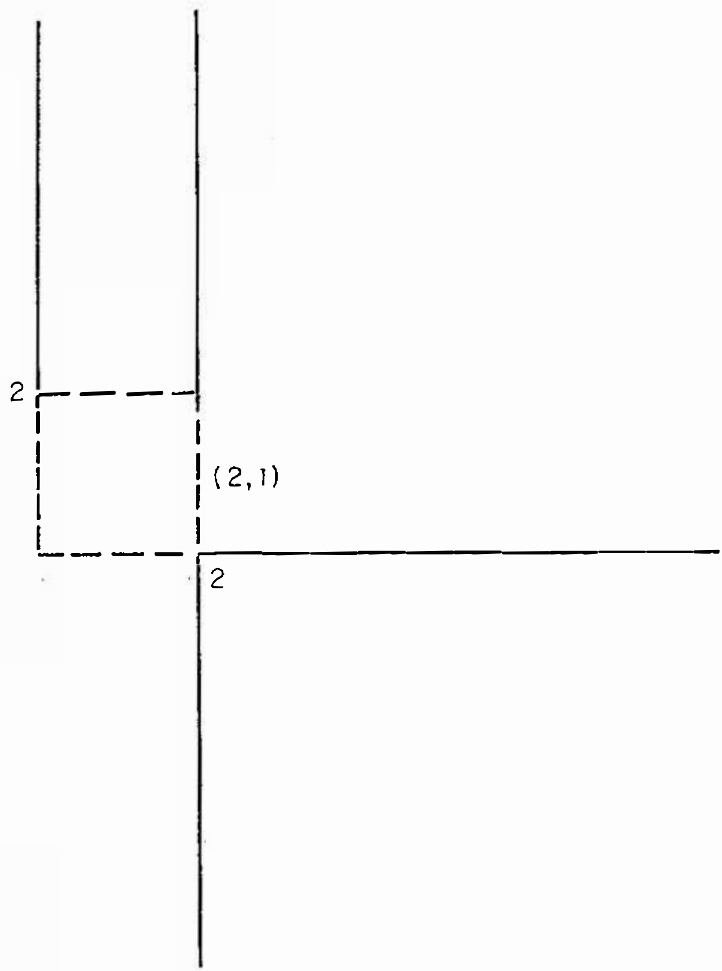
Podemos também verificar que $< \alpha_n, x > \geqslant < \alpha_n, a_n >$ se, e somente se, $< \alpha'_n, x > \geqslant < \alpha'_n, a_n >$. Considerando as subseqüências (α'_{n_k}) e (a_{n_k}), concluímos que $< \alpha, x > \geqslant < \alpha, a >$ para todo $x \in X$.

C. Q. D.

Comparando os enunciados dos Teoremas 3 e 4, verificamos que a diferença essencial entre eles é que no segundo supõe-se que X é um conjunto fechado. Em termos dos resultados, isto significa que não mais podemos garantir que X e $\{a\}$ possam ser *estritamente* separados por um hiperplano. Consideremos um exemplo bastante ilustrativo do fato. Seja:

$$X = \{ (x, y) \in R^2 : 0 < x < 2, \ 0 < y < 2\} \cup \{ (2, 2) \}$$

X é um conjunto convexo, não fechado, e o ponto $(2, 1) \notin X$ e, no entanto, é impossível separar X e $\{ (2, 1) \}$ estritamente.



Teorema 5 — Sejam $X \subset R^p$ e $Y \subset R^p$ conjuntos convexos tais que $X \cap Y = \phi$. Então, existem $\alpha \in R^p - \{0\}$ e $\lambda \in R$ tais que $< \alpha, x > \geqslant \lambda$ para todo $x \in X$ e $< \alpha, y > \leqslant \lambda$ para todo $y \in Y$, isto é, o hiperplano H_λ^α separa os conjuntos X e Y.

Prova:

O conjunto $S = 1.X + (-1).Y$ é convexo (Teorema 11 do Capítulo II) e $0 \notin S$. Pelo teorema anterior, existe $\alpha \in R^p - \{0\}$ tal que $< \alpha, s > \geqslant 0$ para todo $s \in S$. Portanto, para todo $x \in X$ e para todo $y \in Y$:

$$< \alpha, x - y > \geqslant 0$$

ou, ainda:

$$< \alpha, x > \geqslant < \alpha, y > \qquad (2)$$

Sejam $\bar{y} \in Y$ e $Z = \{z \in R: z = < \alpha, x >, x \in X\}$. Então, para todo $z \in Z$, $z \geqslant < \alpha, \bar{y} >$, isto é, Z é limitado inferiormente e, portanto, existe $\inf Z$. Seja $\lambda = \inf Z$ e note-se que $\lambda \geqslant < \alpha, y >$ para todo $y \in Y$ (caso isto não fosse verdade, λ não seria $\inf Z$). Concluímos, assim, que $< \alpha, x > \geqslant \lambda \geqslant < \alpha, y >$ para todo $x \in X$ e para todo $y \in Y$.

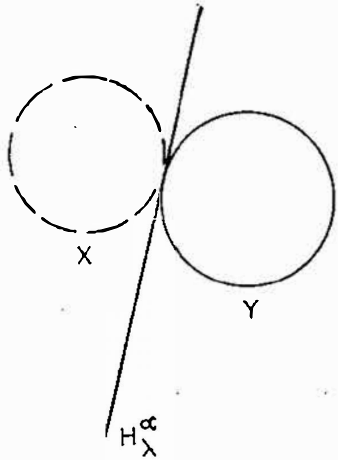
C. Q. D.

Algumas vezes, o resultado deste teorema é apresentado da seguinte maneira: dados os conjuntos X e Y tais como no Teorema 5, existe $\alpha \in R^p - \{0\}$ tal que:

$$\inf_{x \in X} < \alpha, x > \geqslant \sup_{y \in Y} < \alpha, y >$$

Este resultado pode ser obtido a partir da demonstração do teorema anterior. Basta mostrar que, se $\lambda' = \sup_{y \in Y} < \alpha, y >$, deveremos ter $\lambda' \leqslant \lambda$.

Geometricamente, o resultado do Teorema 5 pode ser ilustrado pela figura a seguir.



Sejam X e Y dois conjuntos dados. Se ocorrer que $\mathring{X} \cap Y = \phi$, então, necessariamente, $\mathring{X} \cap \mathring{Y} = \phi$, pois $\mathring{Y} \subset Y$. Entretanto, a implicação contrária, em geral, não é verdadeira. Considere-se, por exemplo, $X = [1, 3]$ e $Y = \{2\} \cup [3, 4]$. Neste caso, $\mathring{X} \cap \mathring{Y} = \phi$ e, contudo, $\mathring{X} \cap Y = \{2\}$. Mesmo se Y é um conjunto convexo, isto pode acontecer, pois basta formar X tal como acima e $Y = \{2\}$. Entretanto, se Y é convexo e $\mathring{Y} \neq \phi$, isto não poderá ocorrer.

Lema 9 — Sejam X e Y subconjuntos de R^p e suponha-se que Y é convexo e $\mathring{Y} \neq \phi$. Então, $\mathring{X} \cap \mathring{Y} = \phi$ se, e somente se, $\mathring{X} \cap Y = \phi$.

Prova:

Se $\mathring{X} = \phi$, nada há para demonstrar. Portanto, suponhamos $\mathring{X} \neq \phi$ e mostremos que, se $\mathring{X} \cap Y \neq \phi$, então $\mathring{X} \cap \mathring{Y} \neq \phi$.

Se $y \in \mathring{X} \cap Y$, existe uma bola aberta $B(y, \delta) \subset \mathring{X}$, $\delta > 0$, pois $\mathring{X}$ é aberto. Uma vez que y também pertence a Y, sendo este convexo, $y \in \overline{\mathring{Y}}$ (Corolário 4 do Teorema 2). Portanto, existe $\bar{y} \in \mathring{Y}$, $\bar{y} \neq y$, tal que $\bar{y} \in B(y, \delta)$. Para todo $\theta \in (0, 1]$, $\theta\bar{y} + (1 - \theta)\, y \in \mathring{Y}$ (pelo Teorema 2). Como $B(y, \delta)$ é um conjunto convexo, $\theta\bar{y} + (1 - \theta)\, y \in B(y, \delta)$, isto é, $\theta\bar{y} + (1 - \theta)\, y \in \mathring{X} \cap \mathring{Y}$.

A outra implicação segue-se das observações anteriores.

C. Q. D.

Teorema 6 — Sejam X e Y subconjuntos convexos de R^p tais que $\mathring{X} \neq \phi$ e $\mathring{X} \cap Y = \phi$. Então, existem $\alpha \in R^p - \{0\}$ e $\lambda \in R$ tais que $< \alpha, x > \geqslant \lambda$ para todo $x \in X$ e $< \alpha, y > \leqslant \lambda$ para todo $y \in Y$.

Prova:

Como $\mathring{X}$ e Y são convexos, então existe $\alpha \in R^p - \{0\}$ e $\lambda \in R$ tais que $< \alpha, x > \geqslant \lambda$ para todo $x \in \mathring{X}$ e $< \alpha, y > \leqslant \lambda$ para todo $y \in Y$.

Seja $\bar{x} \in X$ tal que $\bar{x} \notin \mathring{X}$. Como X é convexo, $\bar{\mathring{X}} = \bar{X}$ (Corolário 4 do Teorema 2) e, portanto, existe uma seqüência (x_n) em $\mathring{X}$ tal que $lim\ x_n = \bar{x}$. Assim, para cada $n \in N$, $< \alpha, x_n > \geqslant \lambda$. Passando ao limite, $< \alpha, \bar{x} > \geqslant \lambda$.

C. Q. D.

Em função das considerações feitas anteriormente ao Teorema 6, podemos afirmar que, se $\mathring{Y} \neq \phi$, a condição $\mathring{X} \cap Y = \phi$ é necessária e suficiente para $\mathring{X} \cap \mathring{Y} = \phi$. Temos então o seguinte:

Corolário 6 — Sejam X e Y subconjuntos convexos de R^p tais que $\mathring{X} \neq \phi$, $\mathring{Y} \neq \phi$ e $\mathring{X} \cap \mathring{Y} = \phi$. Então, existem $\alpha \in R^p - \{0\}$ e $\lambda \in R$ tais que $< \alpha, x > \geqslant \lambda$ para todo $x \in X$ e $< \alpha, y > \geqslant \lambda$ para todo $y \in Y$.

Até o presente momento, não estivemos preocupados em determinar o sinal dos componentes do vetor α, normal ao hiperplano de separação H^{α}_{λ}. Em muitas aplicações econômicas, garantir o sinal destes elementos é crucial. Por exemplo, se α é um vetor de preços, gostaríamos, pelo menos, de que $\alpha \in R^p_+ - \{0\}$, isto é, não tivesse componentes negativos.

Teorema 7 — Seja $X \subset R^p$ convexo e tal que $X \cap \mathring{R}^p_+ = \phi$. Então, existe $\alpha \in R^p_+ - \{0\}$ tal que $< \alpha, x > \leqslant 0$ para todo $x \in X$.

Prova:

Pelo teorema anterior, existem $\alpha \in R^p - \{0\}$ e $\lambda \in R$ tais que $< \alpha, y > \geqslant \lambda$ para todo $y \in R^p_+$ e $< \alpha, x > \leqslant \lambda$ para todo $x \in X$.

Como $0 \in R^p_+$, segue-se que $0 = \langle \alpha, 0 \rangle \geqslant \lambda \geqslant \langle \alpha, x \rangle$. Isto significa que $\langle \alpha, x \rangle \leqslant 0$ para todo $x \in X$ e $\langle \alpha, y \rangle \geqslant 0$ para todo $y \in R^p_+$. (Seja $z \in R^p$ tal que $z = \beta y$, $\beta > 0$. Então, $\langle \alpha, z \rangle = \beta \langle \alpha, y \rangle \geqslant \lambda \Rightarrow \langle \alpha, y \rangle \geqslant \dfrac{\lambda}{\beta}$ para todo $\beta > 0$. Se $\beta \to \infty$, segue-se que $\langle \alpha, y \rangle \geqslant 0$.)

Finalmente, α tem que pertencer a R^p_+, pois, se por acaso $\alpha_j < 0$ para algum $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, teríamos $\langle \alpha, e_j \rangle < 0$, o que contradiz $\langle \alpha, y \rangle \geqslant 0$, $y \in R^p_+$.

C. Q. D.

Corolário 7 — Seja $X \subset R^p$ convexo e tal que $X \cap \mathring{R}^p_- = \phi$.[6] Então, existe $\alpha \in R^p_+ - \{0\}$ tal que $\langle \alpha, x \rangle \geqslant 0$ para todo $x \in X$.

Prova:

$(-X) \cap \mathring{R}^p_+ = \phi$ e, portanto, existe $\alpha \in R^p_+ - \{0\}$ tal que $\langle \alpha, z \rangle \leqslant 0$ para todo $z \in (-X)$. Se $x \in X$, então $x = -z$ para algum $z \in (-X)$ e, portanto, $\langle \alpha, x \rangle \geqslant 0$.

C. Q. D.

As duas figuras a seguir ilustram o conteúdo geométrico dos dois resultados acima.

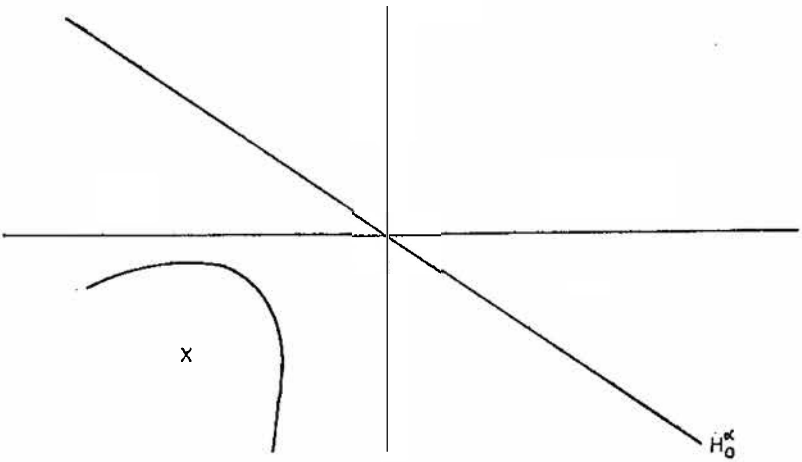
Ainda podemos tornar mais forte o resultado anterior, garantindo, sob certas condições, que $\alpha \in \mathring{R}^p_+$. Isto será obtido como corolário do desenvolvimento que faremos a seguir sobre cones convexos. Neste processo demonstraremos o Lema de Minkowski-Farkas, que desempenha um papel muito importante na Teoria da Programação Linear.

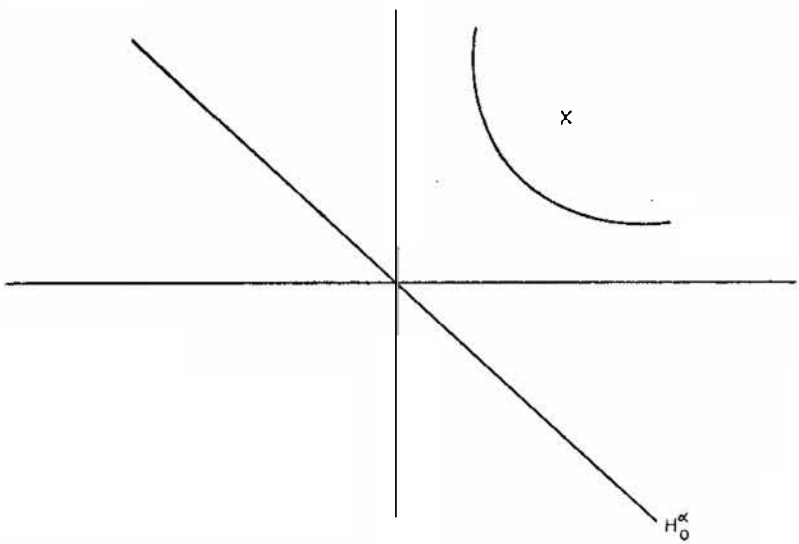
Definição 4 — Seja $K \subset R^p$ um conjunto não vazio. K é um *cone convexo* se:

a) para todo $x \in K$ e $y \in K$, $x + y \in K$; e

b) para $x \in K$ e $\lambda \in R_+$, $\lambda x \in K$.

[6] $R^p_- = \{x \in R^p : x_i \leqslant 0, i \in \{1, 2, \ldots, p\}\}$.





Exemplos:

6 — R^p é um cone convexo.

7 — R^p_+ é um cone convexo.

8 — Dado $\alpha \in R^p - \{0\}$, o hiperplano H_0^α é um *cone convexo.* Dados x e y tais que $< \alpha, x > = 0$ e $< \alpha, y > = 0$, tem-se $< \alpha, x + y > = 0$. Além disto, se $\lambda \in R_+$ e se $< \alpha, x > = 0$, $< \alpha, \lambda x > = \lambda < \alpha, x > = 0$.

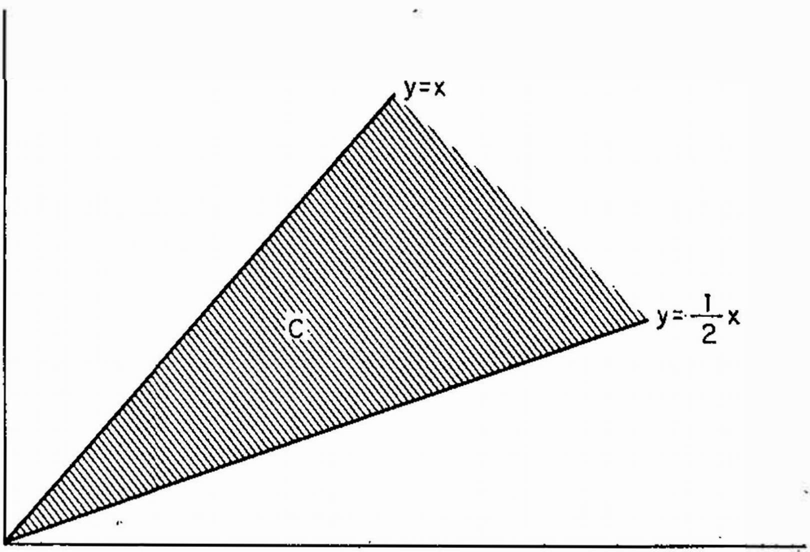
9 — O hiperplano H_λ^α, $\lambda \neq 0$, não é um *cone convexo,* pois, por exemplo, $0 \notin H_\lambda^\alpha$.

10 — O conjunto $C = \{ (x, y) \in R_+^2 : \frac{1}{2} x \leqslant y \leqslant x\}$ é um cone convexo. Para verificar isto, sejam $(x, y) \in C$, $(x', y') \in C$ e $\lambda \in R_+$:

a) $\alpha (x, y) \in C$, pois $\frac{1}{2} (\alpha x) \leqslant \alpha y \leqslant \alpha x$; e

b) $(x + x', y + y') \in C$, pois $\frac{1}{2} (x + x') \leqslant y + y' \leqslant x + x'$.

Geometricamente, C é o subconjunto de R_+^2 compreendido pelas retas $y = x$ e $y = 1/2\ x$.



11 — Seja K um *cone convexo* e sejam $x \in K$ e $y \in K$. Dado $\theta \in [0, 1]$, $\theta x \in K$, $(1 - \theta) y \in K$ e, portanto, $\theta x + (1 - \theta) y \in K$, isto é, K é um conjunto convexo não vazio.

12 — Sejam K_1 e K_2 dois cones convexos. Então, $K_1 \cap K_2$ é um *cone convexo*. Mais geralmente, qualquer interseção de *cones convexos* é um *cone convexo*.

Definição 5 — Seja $K \subset R^p$ um cone convexo. O *cone convexo dual* ou *cone polar convexo* de K é o conjunto:

$$K^* = \{y \in R^p : < x, y > \geqslant 0 \text{ para todo } x \in K\}$$

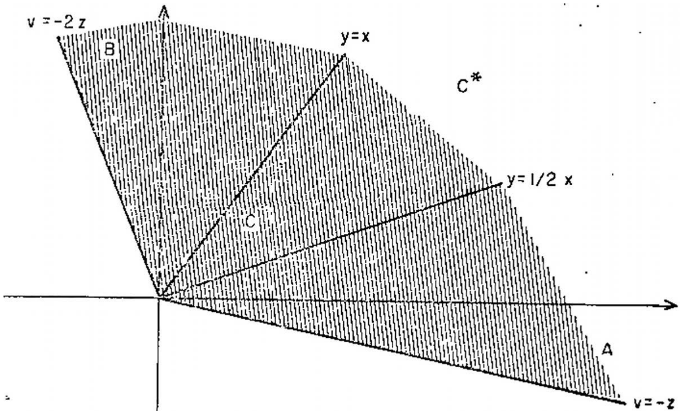
Em outras palavras, K^* é o conjunto de todos os vetores de R^p que formam ângulos agudos ou retos com todos os vetores de K.

Exemplos:

13 — Se $K = R^p_+$, então $K = K^*$. Se $y \in K^*$, então $< x, y > \geqslant 0$ para todo $x \in R^p_+$. Em particular, $< e_i, y > = y_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, p$. Por outro lado, se $y \in R^p_+$, é claro que $< x, y > \geqslant 0$ para todo $x \in R^p_+$.

14 — Seja C o cone convexo do exemplo 10. Neste caso, $C^* = R^2_+ \cup A \cup B$, onde $A = \{(z, v) \in R^2 : z \geqslant 0, v < 0 \text{ e } v \geqslant -z\}$ e $B = \{(z, v) \in R^2 : z \leqslant 0 \text{ e } v \geqslant -2z\}$. O conjunto C^* está representado na figura a seguir.

Verifiquemos mais cuidadosamente que C^* é realmente o *cone convexo dual* de C. Seja $(z, v) \in C^*$. Se $(z, v) \in R^p_+$, então $zx + vy \geqslant 0$ para todo $(x, y) \in C$. Se $(z, v) \in A$, $zx + vy \geqslant zx - zy = z(x - y) \geqslant 0$ para todo $(x, y) \in C$ (note-se que $(x, y) \in C$ implica $x \geqslant y$). Por fim, se $(z, v) \in B$, $zx + vy \geqslant zx - 2zy = z(x - 2y) = \frac{z}{2}\left(\frac{x}{2} - y\right) \geqslant 0$ para todo $(x, y) \in C$ (note-se que $(x, y) \in C$ implica $\frac{x}{2} - y \leqslant 0$). Portanto, C^* é um subconjunto do *cone convexo dual* de C.



Por outro lado, suponhamos que (z, v) pertença ao *cone convexo dual* de C. Tem-se então que, para todo $(x, y) \in C$, $zx + vy \geqslant 0$. Esta condição é satisfeita somente em um dos seguintes casos:

a) $(z, v) \in R^2_+$;

b) $z \geqslant 0$, $v < 0$ e $v \geqslant -z$ (pois, se $v < -z$, $zx + vx < < zx - zx = 0$ para $(x, x) \in C$); e

c) $z \leqslant 0$, $v > 0$ e $v \geqslant -2z$ (pois, se $v < -2z$, $2zx + vx < < 2zx - zx = zx \leqslant 0$ para $(2x, x) \in C$).

Isto completa a verificação de que C^* é o cone convexo dual de C.

Teorema 8 — Seja K um cone convexo. Então:

a) K^* é um cone convexo; e

b) K^* é um conjunto fechado.

Prova:

a) $K^* \neq \phi$, pois $0 \in K^*$. Além disto, se $y \in K^*$, $y' \in K^*$ e se $\lambda \in R_+$, temos $< x, y + y' > = < x, y > + < x, y' > \geqslant 0$ e $< x, \lambda y > = \lambda < x, y > \geqslant 0$.

b) Seja (y_n) uma sucessão convergente em K^* e seja $y = lim\ (y_n)$. Para cada $n \in N$, $< x, y_n > \geqslant 0$ para todo $x \in K$ e, portanto, $< x, y > \geqslant 0$ para todo $x \in K$. Isto mostra que $y \in K^*$ e, em conseqüência, que K^* é fechado (Teorema 10 do Capítulo III).

C. Q. D.

Teorema 9 — Seja $K \subset R^p$ um cone convexo. Então:

a) $K \subset K^{**}$ $(K^{**} = (K^*)^*)$; e

b) K é um cone convexo fechado se, e somente se, $K = K^{**}$.

Prova:

a) $K^{**} = \{z \in R^p: < z, y > \geqslant 0$ para todo $y \in K^*\}$. Se $x \in K$ e $x \notin K^{**}$, então existe $y \in K^*$ tal que $< x, y > < 0$. Isto é uma contradição, pois $y \in K^*$ se, e somente se, $< x, y > \geqslant 0$ para todo $x \in K$.

b) Suponhamos que $a \notin K$. Como K é um conjunto convexo fechado, existem $\alpha \in R^p - \{0\}$ e $\lambda \in R$ tais que $< \alpha, x > \geqslant \lambda$ para todo $x \in K$ e $< \alpha, a > < \lambda$ (Teorema 3). Como $0 \in K$ e $< \alpha, 0 > = 0$, segue-se que $\lambda \leqslant 0$ e $< \alpha, a > < 0$.

Seja $\beta \in R_+ - \{0\}$. Então, como K é um cone convexo, para todo $x \in K$, $\beta x \in K$. Logo, $< \alpha, \beta x > \geqslant \lambda$ ou, ainda, $< \alpha, x > \geqslant \dfrac{\lambda}{\beta}$.

Como β é arbitrário, $< \alpha, x > \geqslant 0$ para todo $x \in K$, isto é, $\alpha \in K^*$. Como $< \alpha, a > < 0$, $a \notin K^{**}$. Portanto, $K^{**} \subset K$.

A outra implicação é trivial, pois $(K^*)^*$ é fechado pelo teorema anterior.

C. Q. D.

É interessante observar que a hipótese de K ser fechado é crucial para o resultado acima. Se K não é fechado, não podemos, utilizando o método de demonstração acima, garantir que $< \alpha, a > < 0$, uma vez que o Teorema 4 nos daria apenas $< \alpha, a > \leqslant 0$, o que é insuficiente para garantir que a $a \notin K^{**}$.

Entretanto, independentemente do método de demonstração, se K não é fechado, não é verdade que $K^{**} \subset K$, como mostra o seguinte exemplo: seja $K = \{(x, y) \in R^2_+ : (x, y) = (0, 0)$ ou $x > 0$ e $y > 0\}$. K é um cone convexo, mas não é um conjunto fechado. É fácil ver que $K^* = R^2_+ = K^{**}$.

Definição 6 — Seja $X \subset R^p$ um conjunto finito, isto é, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_i \in R^p$. Chama-se *cone convexo poliédrico* gerado por X ao conjunto $K(X) = \{z \in R^p : z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \alpha_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Exemplos:

15 — R^2_+ é um *cone convexo poliédrico* gerado por $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

16 — Dados $x = (1, 1)$ e $y = (1, 1/2)$, $K(x, y) = \{z \in R^2_+ : (z_1, z_2) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta/2), \alpha \geqslant 0; \beta \geqslant 0\}$, isto é, $K(x, y) = C$ do exemplo 10.

17 — Seja $\mathring{C} = \left\{(x, y) \in R^2 : \frac{1}{2} x < y < x\right\}$. Se considerarmos combinações lineares de vetores de R^2 com coeficientes não negativos, $\mathring{C}$ não pode ser gerado por um número finito de elementos de R^2, isto é, existem cones convexos que não são cones convexos poliédricos.

Lema 10 — Dado $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset R^p$, $K(X)$, o cone convexo poliédrico gerado por X é um conjunto fechado.

Prova:

Seja $f: R^p \times R^n_+ \to R^p$ definida por $f(z; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = z - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. f é linear e, portanto, contínua e $f^{-1}(\{0\}) = K(X)$. Pelo Corolário 5 do Teorema 10 do Capítulo IV, $K(X)$ é um conjunto fechado.

C. Q. D.

Alguns corolários do Teorema 9 são apresentados a seguir.

Corolário 8 (Lema de Minkowski-Farkas) — Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pertencentes a R^p e $b \in R^p - \{0\}$. Para que $< b, x > \geqslant 0$ para todo $x \in R^p$ tal que $< a_i, x > \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n$, é necessário e suficiente que existam números reais não negativos, que não se anulam simultaneamente, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, tais que $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$.

Prova:

Para simplificar a notação, indicaremos por A a matriz cujas linhas são $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Neste caso, A é uma matriz n x p.

Suponha-se, inicialmente, que $b = \lambda.A$, onde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \ldots, \lambda_n) \in R^n_+ - \{0\}$. Então, $< b, x > = < \lambda.A, x > = < \lambda, A.x > \geqslant 0$, uma vez que $< a_i, x > \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, p$.

Suponha-se agora que $< b, x > \geqslant 0$ para todo $x \in R^p$ tal que $A.x \geqslant 0$. Seja K o cone convexo poliédrico gerado por $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Então, K é um conjunto fechado e $K = K^{**}$. Se $y \in K^*$, $< x, y > \geqslant 0$ para $x \in K$. Considerando os vetores $a_1, a_2, \ldots, a_n$, conclui-se que $A\ y \geqslant 0$. Em conseqüência da hipótese feita, $< b, y > \geqslant 0$. Como $y \in K^*$ é arbitrário, segue-se que $b \in K^{**}$, ou seja, b pertence ao cone convexo gerado por $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

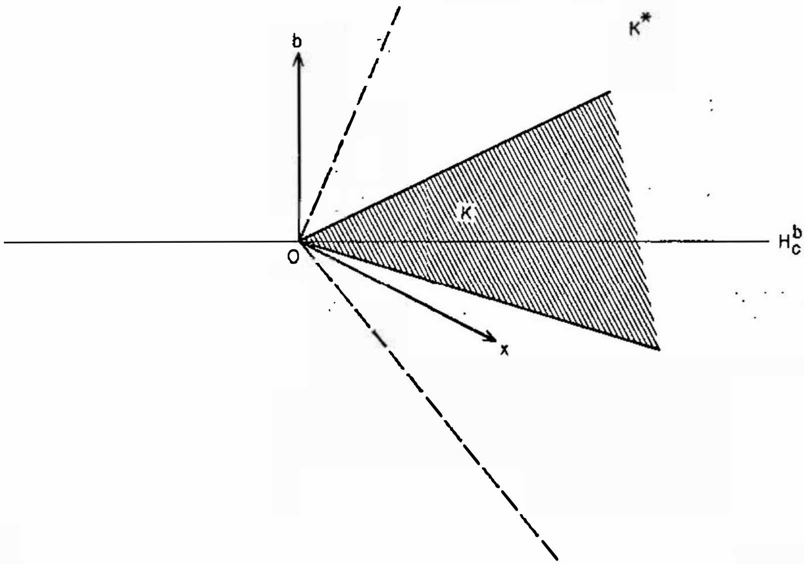
C. Q. D.

O Lema de Minkowski-Farkas pode ser enunciado de uma forma alternativa que se presta melhor a uma visualização geométrica: *dados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ em R^p (ou, equivalentemente, a matriz A, n x p) e $b \in R^p - \{0\}$, exatamente uma das alternativas a seguir se verifica:*

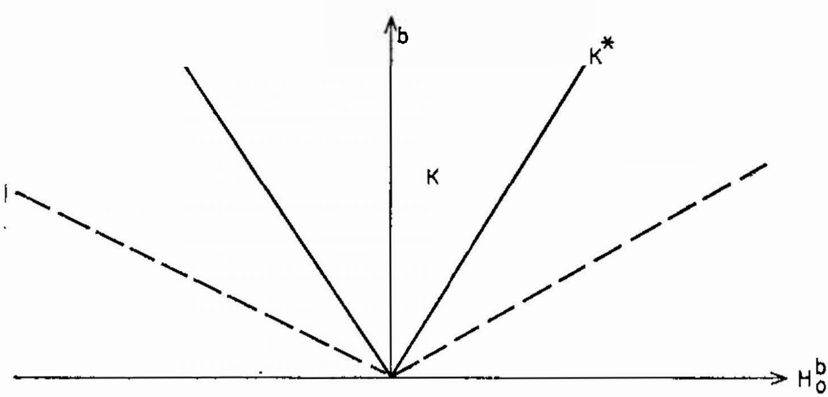
a) *existe $x \in R^p$ tal que $< b, x > < 0$ e $< a_i, x > \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (equivalentemente, $A.x \geqslant 0$); ou*

b) *existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, não negativos e que não se anulam simultaneamente, tais que $b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ (ou $b = \lambda A$).*

Geometricamente, devemos analisar duas situações. O caso "a" tem as seguintes características: x pertence ao cone convexo dual K^* do cone convexo K gerado pelos vetores $a_1, a_2, \ldots, a_n$; e b normal ao hiperplano H^b_0 não pertence a $K^{**} = K$, pois forma um ângulo obtuso com x (note-se que b pode ou não pertencer a K^*).



O segundo caso tem as seguintes características: b pertence ao cone convexo K gerado por $a_1, a_2, \ldots, a_n$; e, se "a" não se verifica, então para todo $x \in R^p$ tal que $< a_i, x > \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $< b, x > \geqslant 0$, isto é, o cone dual K^* está totalmente contido em um dos subespaços determinados pelo hiperplano H_0^b.



Corolário 9 — Se $K \subset R^p$ é um cone convexo fechado tal que $K \cap (R_+^p - \{0\}) = \phi$, existe $p \in \mathring{R}_+^p$ tal que $p \in -K^*$.

Prova:

Se $(-K^*) \cap \mathring{R}_+^p = \phi$, então existe um hiperplano H_0^α (Teorema 7), $\alpha \in R_+^p - \{0\}$, tal que $< \alpha, x > \leqslant 0$ para todo $x \in -K^*$, isto é, $< \alpha, y > \geqslant 0$ para todo $y \in K^*$. Isto significa que $\alpha \in K^{**}$ e, como K é fechado, $\alpha \in K$. Temos, então, uma contradição com a hipótese de que $K \cap (R_+^p - \{0\}) = \phi$.

C. Q. D.

Exercícios

1. Seja H^{α}_{λ} um hiperplano. Mostre que: a) H^{α}_{λ} é um conjunto fechado; e b) $H^{\alpha}_{\lambda+}$ e $H^{\alpha}_{\lambda-}$ são conjuntos convexos fechados.

2. Seja $U: R^{\ell}_{+} \to R$ uma função utilidade definida por $U(x, y) = xy$. Dado o vetor $(x, y) = (1, 1)$, existem preços $(p, q) \in R^{\ell}_{+} - \{0\}$ e uma renda $m > 0$ tais que o consumidor estaria maximizando utilidade neste ponto? Sua resposta seria diferente se a função utilidade fosse $V: R^{\ell}_{+} \to R$ definida por $V(x, y) = min\ \{x, y\}$?

3. Seja $E \subset R^{p}$ um espaço vetorial de dimensão $k < p$. Mostre que E é um conjunto fechado e que $\overset{\circ}{E} = \phi$.

Capítulo IX

OTIMIZAÇÃO

Nos capítulos anteriores nos deparamos com problemas de caracterização dos extremos de funções diferenciáveis (na maioria das vezes de classe C^2) em subconjuntos de R^p. Neste caso, o instrumental fornecido pelo Cálculo Diferencial é de extrema utilidade, pois nos permite uma caracterização razoavelmente simples destes pontos.

Neste capítulo procuraremos estender a teoria já estudada nas seguintes direções: incorporar as restrições em forma de desigualdades; abandonar as hipóteses de diferenciabilidade; e analisar problemas de caracterização de extremos (globais) para funções côncavas e, posteriormente, para uma classe mais geral de funções, quais sejam, as funções quase-côncavas.

É interessante notar que, ao contrário do que ocorreu nos capítulos anteriores, estaremos mais interessados em caracterizações globais, ao invés de locais, o que não impede, entretanto, que façamos um rápido resumo dos principais resultados locais já obtidos (ver Seção IX.2).

Como as funções côncavas e quase-côncavas têm papel fundamental nos teoremas deste capítulo, realizamos, na Seção IX.1, um estudo de suas principais propriedades. Diferentemente do que foi feito anteriormente para funções côncavas, a apresentação é geral, isto é, não se supõe a diferenciabilidade das mesmas. A Seção IX.3 contém os principais resultados do capítulo.

IX.1 — Funções Côncavas e Quase-Côncavas

No que se segue vamos nos restringir à menção das funções côncavas e quase-côncavas. Resultados análogos — em geral envolvendo mudanças óbvias nos enunciados e demonstrações — valem para as funções convexas e quase-convexas, que não serão tratadas explicitamente (deixamos a cargo do leitor interessado os enunciados e as respectivas demonstrações).

Definição 1 — Seja $X \subset R^p$ um conjunto convexo. Diz-se que $f: X \to R$ é uma função côncava (convexa) se, dados $x \in X$, $y \in X$ e $\theta \in [0, 1]$, $f(\theta x + (1 - \theta) y) \geqslant \theta f(x) + (1 - \theta) f(y)$ $(f(\theta x + (1 - \theta) y) \leqslant \theta f(x) + (1 - \theta) f(y))$. Diz-se que f é estritamente côncava (estritamente convexa) se, dados $x \in X$, $y \in X$, $x \neq y$, e $\theta \in (0, 1)$, $f(\theta x + (1 - \theta) y) > \theta f(x) + (1 - \theta) f(y)$ $(f(\theta x + (1 - \theta) y) < \theta f(x) + (1 - \theta) f(y))$.

Já exploramos alguns aspectos geométricos da noção de concavidade. Entretanto, existem ainda algumas relações geométricas bastante importantes.

Teorema 1 — Seja $X \subset R^p$ um conjunto convexo e seja $f: X \to R$:

a) se f é côncava, então para todo $\alpha \in R$ o conjunto $N_\alpha^+ = \{x \in X: f(x) \geqslant \alpha\}$ é um subconjunto convexo de R^p; e

b) para que f seja côncava é necessário e suficiente que o conjunto $E = \{(x, \alpha) \in R^p \times R: x \in X, \alpha \in R \text{ e } f(x) \geqslant \alpha\}$ seja um subconjunto convexo de R^{p+1} (nota: o conjunto E é chamado de Epígrafe de f).

Prova:

a) Sejam $\alpha \in R$, $x \in N_\alpha^+$ e $y \in N_\alpha^+$ (se $N_\alpha^+ = \phi$, não há o que demonstrar). Como f é côncava, $f(\theta x + (1 - \theta) y) \geqslant \theta f(x) + (1 - \theta) f(y) \geqslant \alpha$. Logo, $\theta x + (1 - \theta) y \in N_\alpha^+$.

b) Suponha-se que f seja côncava e sejam $(x, \alpha) \in E$, $(y, \beta) \in E$ e $\theta \in [0, 1]$ (observe-se que $E \neq \phi$, pois $G(f) \subset E$). Então, $f(\theta x + (1 - \theta) y) \geqslant \theta f(x) + (1 - \theta) f(y) \geqslant \theta\alpha + (1 - \theta) \beta$. Logo, $(\theta x + (1 - \theta) y; \theta\alpha + (1 - \theta) \beta) \in E$.

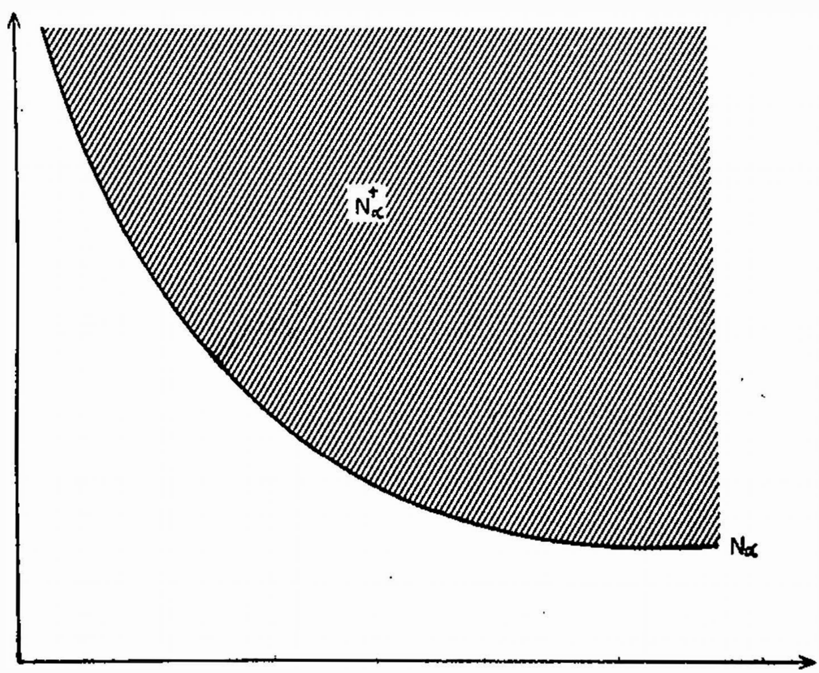
Por outro lado, suponha-se que E seja convexo. Dado $x \in X$, o ponto $(x, f(x))$ pertence a E, ou seja, o gráfico de f está contido em E. Sejam agora $x \in X$ e $y \in X$. Como E é convexo, o ponto $(\theta x + (1 - \theta) y, \theta f(x) + (1 - \theta) f(y))$ pertence a E, qualquer que seja $\theta \in [0, 1]$. Daí, concluímos que:

$$f(\theta x + (1 - \theta) y) \geqslant \theta f(x) + (1 - \theta) f(y)$$

para todo $x \in X$, $y \in X$ e $\theta \in [0, 1]$. Logo, f é côncava.

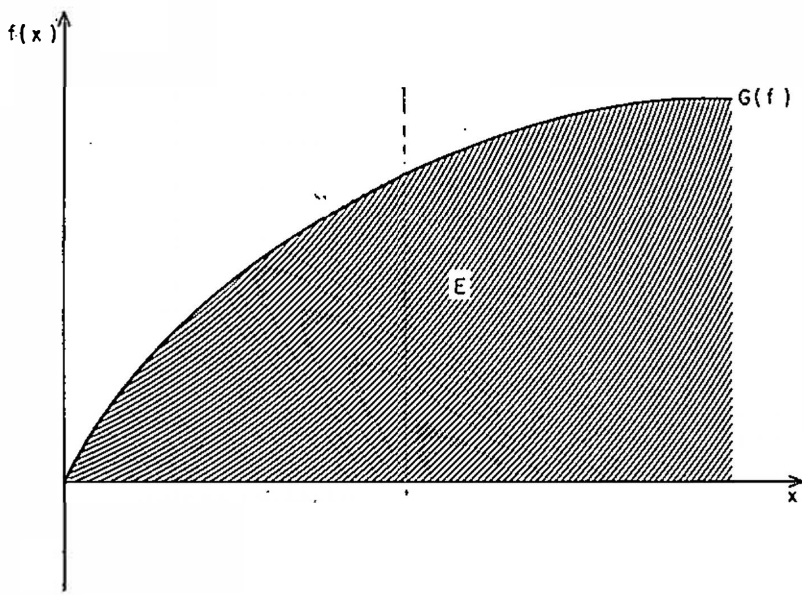
C. Q. D.

A parte "a" deste teorema significa o seguinte: dada uma superfície de nível α da função côncava f, o conjunto dos pontos para os quais o valor de f é maior ou igual a α é convexo (isto está ilustrado na figura a seguir pela região hachurada).



Com relação a este resultado, é importante lembrar que sua recíproca não é verdadeira. Por exemplo, a função $f: R \rightarrow R$ dada por $f(x) = x^3$ não é côncava e, no entanto, dado $\alpha \in R$, o conjunto N_α^+ é convexo, qualquer que seja α. Um outro exemplo ainda é dado por $f: \mathring{R}^2_+ \rightarrow R$ definida por $f(x, y) = x^2 y$, que não é côncava e, no entanto, N_α^+ é convexo para todo $\alpha \in R$.

A parte "b" do teorema diz que o conjunto de todos os pontos situados abaixo ou sobre o gráfico de f é convexo (a figura a seguir ilustra esta idéia para uma função côncava definida em R_+ com valores em R).



Teorema 2 — Sejam $X \subset R^p$, X convexo não-vazio, $m \in N$ e $f_1, f_2, \ldots, f_m$ funções côncavas definidas em X com valores em R. Dados $\alpha_1 \geqslant 0, \alpha_2 \geqslant 0, \ldots, \alpha_m \geqslant 0$, a função $f: X \rightarrow R$ definida por $f = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_m f_m)$ é côncava.

Prova:

Sejam $x \in X$, $y \in X$ e $\theta \in [0, 1]$. Então:

$$f(\theta x + (1-\theta)\,y) = \alpha_1 f_1 (\theta x + (1-\theta)\,y) + \ldots +$$
$$+ \alpha_m f_m (\theta x + (1-\theta)\,y) \geqslant \theta\,(\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_m f_m(x)) +$$
$$+ (1-\theta)\,(\alpha_1 f_1(y) + \ldots + \alpha_m f_m(y)) = \theta f(x) + (1-\theta)\,f(y)$$

C. Q. D.

Teorema 3 — Seja $X \subset R^p$ um conjunto convexo não-vazio e seja $f\colon X \to R$. A função f é côncava se, e somente se, qualquer que seja a combinação convexa de m elementos de X, $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m$, tivermos $f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_m f(x_m)$.

Prova:

Se a desigualdade acima vale para todo $m \geqslant 1$, então $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\,x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)\,f(x_2)$ para todo $\lambda \in [0, 1]$ e para todo $x_1 \in X$ e $x_2 \in X$. Portanto, f é côncava.

Suponha-se agora que f é côncava. Então, E é um conjunto convexo e, dados $x_1 \in X, \ldots, x_m \in X$, os pontos $(x_1, f(x_1)) \ldots \ldots (x_m, f(x_m))$ pertencem a E. Segue-se então que $(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m; \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_m f(x_m)) \in E$, quaisquer que sejam $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0, \ldots, \lambda_m \geqslant 0$ com $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = 1$ (Teorema 12 do Capítulo II). Segue-se daí que $f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_m f(x_m)$.

C. Q. D.

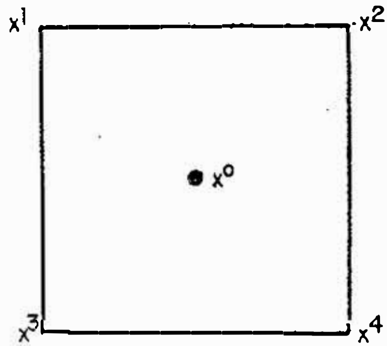
Teorema 4 — Seja $X \subset R^p$, $X \neq \phi$, um conjunto convexo aberto e seja $f\colon X \to R$ uma função côncava. Então, f é contínua.

Prova:

Seja $x^0 \in X$ e seja $B_M[x^0, \delta]$ uma bola fechada (norma do máximo) contida em X. Sejam $x^1, x^2, \ldots, x^{2^p}$ pertencentes a $B_M[x^0, \delta]$ com a seguinte propriedade:

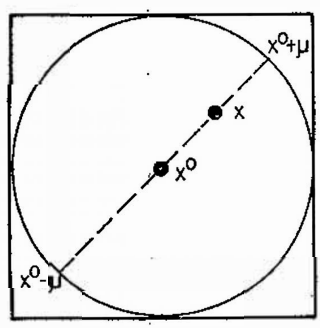
$$|x_i^j - x_i^0| = \delta$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, p$ e $j = 1, 2, \ldots, 2^p$. Chamemos de V ao conjunto destes pontos, que são os "vértices" da bola.



Seja agora $\alpha = min \{f(x^i), i = 1, 2, \ldots, 2^p\}$. Então, N_α^+ é um conjunto convexo que contém V e, em conseqüência, $B_M[x^o, \delta] \subset N_\alpha^+$, uma vez que $B_M[x^o, \delta]$ é o "fecho convexo" de V.[1]

Tomemos agora a bola $B[x^o, \delta]$ (Norma Euclideana) e um ponto $x \in B(x^o, \delta)$. Sejam $x^o + \mu$ e $x^o - \mu$ pontos sobre o segmento que



passa por x e x^o situados a uma distância (euclideana) δ de x^o, isto é, $|\mu| = \delta$.

1 Demonstração a cargo do leitor.

O ponto x pode ser escrito como uma combinação convexa de x^o e $x^o + \mu$: $x = x^o + t\mu = t\,(x^o + \mu) + (1 - t)\,x^o$, sendo $t = \dfrac{|x - x^o|}{\delta}$. Da mesma forma, $x^o = x - t\mu$, ou seja:

$$x^o(1 + t) = t\,(x^o - \mu) + x$$

ou, ainda:

$$x^o = \frac{1}{1+t}\,x + \frac{t}{1+t}\,(x^o - \mu)$$

Sendo f uma função côncava, temos:

$$f(x) \geqslant tf(x^o + \mu) + (1 - t)\,f(x^o) \geqslant t\alpha + (1 - t)\,f(x^o) \qquad (1)$$

Esta última desigualdade obtém-se lembrando que:

$$x^o + \mu \in B_M\,[x^o, \delta]$$

e que:

$$B_M\,[x^o, \delta] \subset N_\alpha^+$$

Da mesma maneira, temos:

$$f(x^o) \geqslant \frac{1}{1+t}\,f(x) + \frac{1}{1+t}\,f(x^o - \mu) \geqslant \frac{f(x) + t\alpha}{1+t} \qquad (2)$$

De (1) e (2), concluímos que:

$$t\,(\alpha - f(x^o)) \leqslant f(x) - f(x^o) \leqslant -t\,(\alpha - f(x^o))$$

ou:

$$|f(x) - f(x^o)| \leqslant \frac{|x - x^o|}{\delta}\,|\alpha - f(x^o)|$$

Dado $\varepsilon > 0$, se tomarmos $\delta' = \varepsilon\,\dfrac{\delta}{|\alpha - f(x^o)|}$, teremos $|f(x) - f(x^o)| < \delta$ para todo $x \in X$ com $|x - x^o| < \delta'$.

Corolário: Se $X \subset R^p$ é convexo e $\mathring{X} \neq \phi$ e se $f: X \to R$ é côncava, então f é contínua em $\mathring{X}$.

As funções côncavas não são necessariamente contínuas em todo o domínio, como mostra o seguinte exemplo: seja $f: R_+ \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

f é uma função côncava, porém não é contínua em $x = 0$, que é um ponto de fronteira do seu domínio.

Teorema 5 — Seja $X \subset R^p$ convexo e sejam $f_1, f_2, \ldots, f_m$ funções côncavas definidas em X com valores em R. A função $f: X \to R$ dada por $f(x) = min \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\}$ é côncava.

Prova:

Se $E = \{(x, \alpha): x \in X, \alpha \in R$ e $f(x) \geqslant \alpha\}$ e $E_i = \{(x, \alpha): x \in X, \alpha \in R$ e $f_i(x) \geqslant \alpha\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, então $E = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$. Como E_i é convexo para cada i, segue-se que E é convexo.

C. Q. D.

Os resultados anteriores, além de caracterizarem algumas das propriedades importantes das funções côncavas, também mostram que, num certo sentido, elas são bem comportadas em relação a certas operações, como as combinações convexas não-negativas e a definição da função mínimo. Existe, entretanto, uma operação (de grande interesse na Teoria do Consumidor, por exemplo) que não preserva a concavidade da função, qual seja, a composição de uma função côncava e uma função monótona crescente. Mais precisamente, seja $f: X \to R$ $(X \subset R^p$ convexo$)$ uma função côncava e seja $F: R \to R$ monótona crescente. A função $F_o f: X \to R$ não é, necessariamente, côncava. Por exemplo, $f: \mathring{R}^2_+ \to R$ dada por $f(x, y) = 2 \log x + \log y$ é côncava e, no entanto, $h: \mathring{R}^2_+ \to R$ dada por $h(x, y) = x^2 y$ não é côncava, apesar de que $h = F_o f$, sendo $F: R \to R$ definida por $F(z) = e^z$.

O principal objetivo do parágrafo anterior é alertar o leitor para um problema que aparece na Teoria do Comportamento do Consumidor. Admite-se que, se as preferências do indivíduo podem ser representadas por uma certa função utilidade U, então elas também podem ser representadas pela função $F_o U$, onde F é monótona crescente. O exemplo anterior serve para mostrar que a hipótese de concavidade é muito restrita no contexto da teoria. Uma implicação disto é que no estudo dos problemas de otimização deveremos considerar explicitamente uma classe de funções que é fechada em relação à composição com funções monótonas crescentes: a classe das funções quase-côncavas.

Apesar destas observações, vale o seguinte resultado sobre composição de funções côncavas:

Teorema 6 – Sejam $X \subset R^p$ um conjunto convexo, $f: X \to R$ uma função côncava e $F: R \to R$ monótona crescente e côncava. Então, $F_o f: X \to R$ é côncava.

Prova:

Sejam $x \in X$, $y \in X$ e $\theta \in [0, 1]$. Então:

$$F_o f(\theta x + (1 - \theta)\, y) = F(f(\theta x + (1 - \theta)\, y)) \geqslant F(\theta f(x) +$$
$$+ (1 - \theta)\, f(y)) \geqslant \theta F(f(x)) + (1 - \theta)\, F(f(y))$$

C. Q. D.

Teorema 7 – Seja $f: R^p \to R$ uma função homogênea do grau 1. Então, f é côncava se, e somente se:

$$f(x + y) \geqslant f(x) + f(y) \qquad (3)$$

para todo $x \in R^p$ e $y \in R^p$.

Prova:

Se f é côncava:

$$\frac{1}{2} f(x + y) = f\left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y\right) \geqslant \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)$$

para todo $x \in R^p$ e $y \in R^p$.

Por outro lado, suponha-se que f satisfaz (3) e sejam $(x, \alpha) \in E$ e $(y, \beta) \in E$. Então:

$$f(x + y) \geqslant f(x) + f(y) > \alpha + \beta$$

e:

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \geqslant \lambda \alpha$$

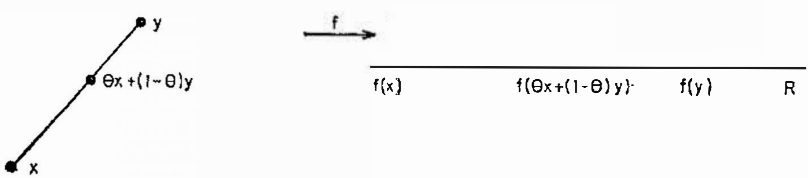
para todo $\lambda > 0$. Assim, $(x + y, \alpha + \beta) \in E$ e $(\lambda x, \lambda \alpha) \in E$, o que, por sua vez, significa que E é um conjunto convexo e, portanto, f é côncava.

C. Q. D.

Trataremos agora das funções quase-côncavas e de algumas propriedades importantes desta classe.

Definição 2 — Seja $X \subset R^p$ um conjunto convexo e $f: X \rightarrow R$. Diz-se que f é *quase-côncava* se, para todo $x \in X$, $y \in X$ e $\theta \in [0, 1]$, $f(\theta x + (1 - \theta) y) \geqslant min \{f(x), f(y)\}$. Diz-se que f é *estritamente quase-côncava* se, para todo $x \in X$, $y \in X$, $x \neq y$, e $\theta \in (0, 1)$, $f(\theta x + (1 - \theta) y) > min \{f(x), f(y)\}$.[2]

Geometricamente, esta definição significa que, dados dois pontos pertencentes ao domínio da função quase-côncava f, o seu valor ao longo do segmento que une estes pontos não é inferior ao menor dos valores de f nestes dois pontos:



[2] Pode-se definir funções quase-convexas como sendo aquelas em que $-f$ é quase-côncava. Tal como anteriormente, vamos nos restringir às funções quase-côncavas, deixando ao leitor a tarefa de enunciar e demonstrar os resultados para as quase-convexas.

Exemplos:

1 — f: $R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x$ é quase-côncava, pois a média geométrica de dois números é sempre não inferior ao menor deles.

2 — Toda função côncava é quase-côncava. Se f: $X \rightarrow R$ é côncava ($X \subset R^p$ convexo) e se $x \in X$, $y \in X$ e $\theta \in [0, 1]$:

$$f(\theta x + (1 - \theta)\, y) \geqslant \theta f(x) + (1 - \theta)\, f(y) \geqslant min\, \{f(x), f(y)\}$$

3 — A função f: $R \rightarrow R$ dada por $f(x) = x^3$ é quase-côncava, porém não é côncava, isto é, a recíproca da afirmativa feita no exemplo anterior não é verdadeira.

4 — Mais geralmente, seja f: $R \rightarrow R$ monótona. Então, f é quase-côncava. Suponha-se que f é monótona não decrescente e sejam $x \in R$, $y \in R$, $x > y$, e $\theta \in [0, 1]$. Então:

$$x \geqslant \theta x + (1 - \theta)\, y \geqslant y$$

e, portanto:

$$f(\theta x + (1 - \theta)\, y) \geqslant f(y) = min\, \{f(x), f(y)\}$$

Uma das propriedades mais importantes das funções quase-côncavas é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 8 — Seja $X \subset R^p$ convexo e f: $X \rightarrow R$. Uma condição necessária e suficiente para que f seja quase-côncava é que o conjunto $N_\alpha^+ = \{x \in X\colon f(x) \geqslant \alpha\}$ seja convexo para todo $\alpha \in R$.

Prova:

Suponha-se que f seja quase-côncava. Sejam $\alpha \in R$, $x \in N_\alpha^+$, $y \in N_\alpha^+$ (se $N_\alpha^+ = \phi$, nada há para ser demonstrado) e $\theta \in [0, 1]$. Então:

$$f(\theta x + (1 - \theta)\, y) \geqslant min\, \{f(x), f(y)\} \geqslant \alpha$$

Logo, $\theta x + (1 - \theta)\, y \in N_\alpha^+$.

Por outro lado, seja N_α^+ convexo para todo $\alpha \in R$. Se $x \in X$, $y \in X$ e $f(x) \geqslant f(y)$, temos:

a) $N_{f(y)}^+$ é convexo; e

b) $x \in N_{f(y)}^+$.

Portanto, para todo $\theta \in [0, 1]$, $f(\theta x + (1 - \theta) y) \geqslant f(y)$.

C. Q. D.

Teorema 9 — Sejam $X \subset R^p$ convexo, $f: X \to R$ quase-côncava e $F: R \to R$ monótona não decrescente. Neste caso, a função $F_o f: X \to R$ é quase-côncava.

Prova:

Sejam $x \in X$, $y \in X$ e $\theta \in [0, 1]$ e suponha-se que $f(x) \geqslant f(y)$. Então:

$$F_o f(\theta x + (1 - \theta) y) = F[f(\theta x + (1 - \theta) y)] \geqslant F[f(y)] =$$
$$= min \{F_o f(x), F_o F(y)\}$$

C. Q. D.

Para finalizar a seção, demonstraremos um teorema que estabelece condições suficientes para que uma função quase-côncava seja côncava.

Teorema 10 — Seja $K \subset R^p$ um cone convexo e $f: K \to R$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K - \{0\}$; f é homogênea do grau 1 e $f(0) \geqslant 0$. Então, f é côncava se, e somente se, f é quase-côncava.

Prova:

Devemos apenas demonstrar que, sob as hipóteses acima, f quase-côncava é suficiente para que ela seja côncava, isto é, para todo $x \in K$, $y \in K$ e $\theta \in [0, 1]$:

$$f(\theta x + (1 - \theta) y) \geqslant \theta f(x) + (1 - \theta) f(y)$$

Se $x = y$, nada há para demonstrar. Suponha-se, então, que $x \neq y$, que $x \neq 0$, que, se $y = 0$, $f(y) > 0$ e, finalmente, que $f(x) \geqslant f(y)$.

Portanto, como $f(y) > 0$, $\frac{f(x)}{f(y)} \geqslant 1$. Seja $\alpha \in (0, 1]$ tal que $\alpha f(x) = f(y)$. Como f é homogênea, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = f(y)$ e, como f é quase-côncava, para todo $\beta \in [0, 1]$:

$$f[\beta(\alpha x) + (1-\beta) y] \geqslant f(\alpha x) = f(y) = \beta f(\alpha x) + (1-\beta) f(y) =$$
$$= 2 \beta f(x) + (1-\beta) f(y) \qquad (4)$$

Seja $\theta = \frac{\beta \alpha}{1 - \beta + \beta \alpha}$. Então, temos o seguinte:

a) $\theta < 1$.

b) $\theta > 0$, pois $\beta(1 - \alpha) < 1$ e, em conseqüência, $1 - \beta + \beta \alpha > 0$.

c) θ assume todos os valores no intervalo $[0, 1]$. Para verificar isto, observe-se que α é fixo para cada $x \in K$ e $y \in K$. Consideremos, então, a função $g: [0, 1] \rightarrow R$ definida por $g(\beta) = \frac{\beta \alpha}{1 - \beta + \beta \alpha}$. g é uma função contínua definida num intervalo, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ e, portanto, $g[0, 1] = [0, 1]$ (Teorema do Valor Intermediário).

d) Como f é homogênea do grau 1:

$$f\left(\frac{1}{1-\beta+\beta\alpha}(\beta\alpha)\, x + \frac{1}{1-\beta+\beta\alpha}(1-\beta)\, y\right) =$$
$$= \frac{1}{1-\beta+\beta\alpha} f(\alpha \beta x + (1-\beta) y)$$

De (4) obtém-se, finalmente, que:

$$f(\theta x + (1-\theta) y) \geqslant \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$$

para todo $x \in K$, $y \in K$ e $\theta \in [0, 1]$.

Devemos agora considerar o caso em que $x \neq 0$, $y = 0$ e $f(y) = 0$, onde temos que, para todo $\theta \in (0, 1]$:

$$f(\theta x + (1-\theta) y) = f(\theta x) = \theta f(x) = \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$$

Se $\theta = 0$, $f(\theta x + (1-\theta) y) = f(0) = \theta f(x) + (1-\theta)\, \delta(y)$.

C. Q. D.[3]

[3] Para esta demonstração e generalizações deste resultado, ver Newman (1969).

IX.2 — Programação Clássica: Revisão

Como os resultados desta seção já foram, em sua maior parte, discutidos nos capítulos anteriores (especialmente no Capítulo VI), faremos, portanto, apenas um breve sumário dos resultados, concentrando-nos no problema sob o ponto de vista de maximização de uma função sujeita a um conjunto de restrições definidas por igualdades.

Suponhamos, então, que desejamos resolver o seguinte problema: dado $f: D \to R$, D aberto em R^p e $f \in C^k$, $k \geq 2$, e dada a função $g: D \to R^q$, $q < p$, $g \in C^k$, desejamos encontrar $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, \ldots, x_p^*) \in R^p$ tal que x^* maximiza $f(x)$, $x \in D$, sujeito a:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= c_1 \\ g_2(x) &= c_2 \\ &\vdots \\ g_q(x) &= c_q \end{aligned}$$

onde $c = (c_1, c_2, \ldots, c_q) \in R^q$ é um vetor (dado) de constantes.

Admitindo que a matriz jacobiana de g tem posto q, as condições de primeira ordem ($c\ p\ o$) devem ser satisfeitas, isto é:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x^*) \ldots \lambda_q \frac{\partial g_q}{\partial x_i}(x^*) = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, p$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x^*, \lambda) = c_j - g_j(x^*) = 0$$

$$j = 1, 2, \ldots, q$$

sendo $L: D \times R^q \to R$ definida por $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 (c_1 - g_1(x)) - \ldots - \lambda_q (c_q - g_q(x))$.

Uma condição suficiente de segunda ordem para que x^* seja realmente uma solução local para o problema é que os $p - q$ menores principais sucessivos da matriz hessiana bordada de f com a restrição $g(x) = c$ sejam de sinais alternados, sendo o sinal do primeiro $(-1)^{q+1}$.

Exemplo:

5 — Seja $f: D \to R$, $D = \{(x_1, x_2) \in R^2: x_1 > 0\}$, definida por $f(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1} + x_2$ e seja $g: D \to R$ definida por $g(x_1, x_2) = \frac{1}{3} x_1 + x_2$. Procuremos, então, resolver o seguinte problema:

maximizar $f(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1} + x_2$ com $\frac{1}{3} x_1 + x_2 = 2$.

A função lagrangeana do problema é:

$$L(x_1, x_2; \lambda) = 2\sqrt{x_1} + x_2 + \lambda\left(2 - \frac{1}{3} x_1 - x_2\right)$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{3}\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2 - \frac{1}{3} x_1 - x_2 = 0$$

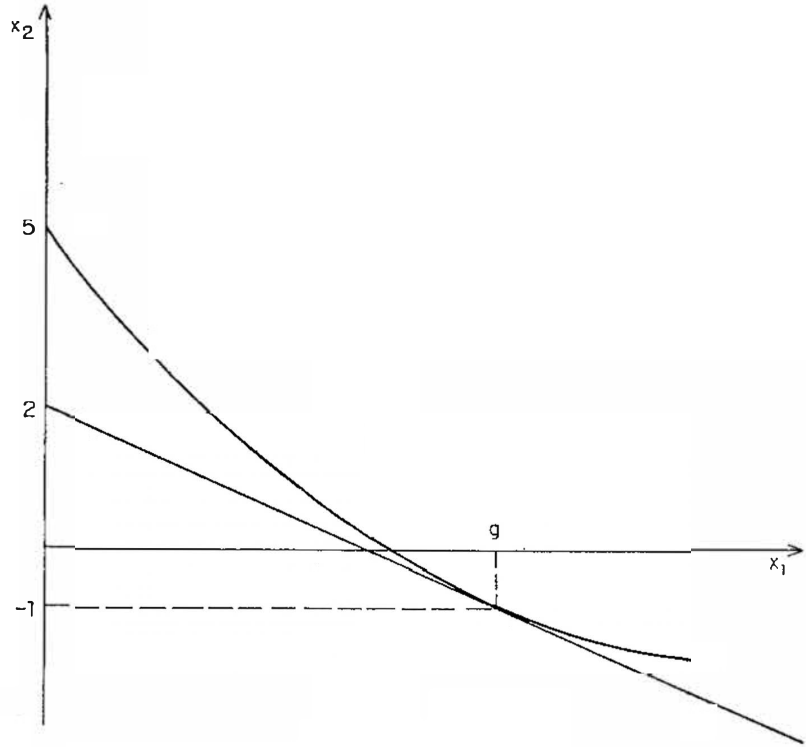
A solução deste sistema é $x_1 = 9$, $x_2 = -1$ e $\lambda = 1$. Portanto, o único ponto crítico de f com a restrição acima é $x^* = (9, -1)$, sendo o valor correspondente de $\lambda = 1$. A matriz hessiana bordada é:

$$\tilde{H}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1 \\ 1/3 & -1/2\, x_1^{-3/2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $x^* = (9, -1)$ é realmente um máximo local da função, uma vez que $\det \tilde{H}(x) = \frac{1}{2(9)^{3/2}} > 0$.

Geometricamente, a solução do problema é dada pelo ponto onde a curva de nível 5 de f é tangente à reta $1/3\ x_1 + x_2 = 2$.

Para encerrar esta pequena revisão, relembramos o significado do multiplicador λ, que pode ser interpretado como o acréscimo à função objetivo (no caso, a função f) por unidade de variação na



constante que determina a posição da restrição g. Convém enfatizar que esta interpretação tem caráter apenas local.

IX.3 — Programação Côncava[4]

Estudaremos agora um problema que generaliza o *Problema da Programação Clássica* em vários sentidos. A sua estrutura básica é a seguinte: dadas uma função côncava $f: X \to R, X \subset R^p$ convexo, e um conjunto convexo C, deseja-se encontrar o máximo de f/C, isto é, procuraremos escolher um elemento $x^* \in C$ tal que $f(x^*) \geqslant$ $\geqslant f(x)$ para todo $x \in C$.

[4] Esta seção está baseada em Takayama (1974, Cap. 1).

As seguintes observações auxiliarão o leitor a colocar numa perspectiva exata os Problemas de Programação Clássica e de Programação Côncava:

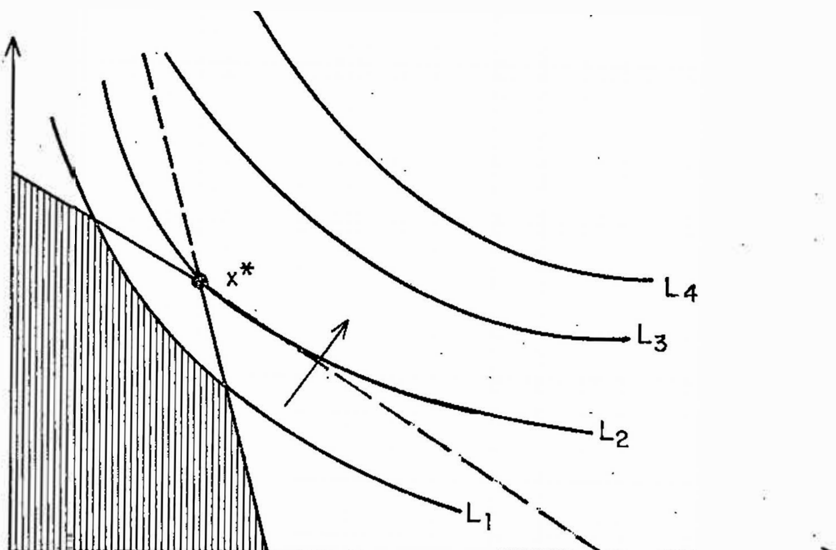
a) o fato de admitirmos que C seja um conjunto convexo nos permite incorporar restrições em forma de desigualdade, o que não foi feito quando estudamos o método do Multiplicador de Lagrange;

b) pela própria maneira que o problema foi formulado acima, percebe-se que o interesse principal encontra-se na busca de máximos globais;

c) a hipótese de diferenciabilidade não é necessária (na verdade, não se supõe sequer a existência de derivadas parciais) ; e

d) a hipótese de que o número de restrições é menor do que o de variáveis também deixa de ser importante no presente contexto.

Uma primeira visão gráfica é apresentada a seguir, onde o conjunto C é a área hachurada e L_1, L_2, L_3, L_4 são curvas de nível de f. O ponto x^* é o máximo de f/C se se supõe que as curvas de nível de f crescem na direção da seta.



Este, obviamente, é apenas um dentre os possíveis tipos de problemas que se apresentam. No que se segue procuraremos caracterizar analiticamente a solução dos mesmos.

Iniciamos com a generalização de um teorema de máximo para funções côncavas (não necessariamente diferenciáveis).

Teorema 11 — Seja $f: X \to R$, $X \subset R^p$ convexo, côncava. Se $x^* \in X$ é um máximo local de f, então x^* é um máximo global.

Prova:

Existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$ com $|x - x^*| < \delta$, temos $f(x) \leqslant f(x^*)$. Seja $z \in X$, $z \neq x^*$, e seja $\theta \in R$, $\theta \in (0, 1)$ tal que $\theta\, |z - x^*| < \delta$. Pela concavidade de f:

$$f(\theta z + (1 - \theta)\; x^*) \geqslant \theta f(z) + (1 - \theta)\; f(x^*)$$

ou seja:

$$f(\theta(z - x^*) + x^*) - f(x^*) \geqslant \theta(f(z) - f(x^*))$$

Como $|(\theta(z - x^*) + x^*) - x^*| < \delta$, segue-se que:

$$0 \geqslant f(\theta(z - x^*) + x^*) - f(x^*) \geqslant \theta(f(z) - f(x^*))$$

isto é, $f(x^*) \geqslant f(z)$.

C. Q. D.

Corolário — Nas condições do teorema, se f é estritamente côncava, x^* é único.

Prova:

Se $\bar{x} \in X$, $\bar{x} \neq x^*$, é um máximo global de f, então $f(\bar{x}) = f(x^*)$ e, para todo $\theta \in (0, 1)$, $f(\theta \bar{x} + (1 - \theta)\; x^*) > \theta f(\bar{x}) + (1 - \theta)\; f(x^*) = f(x^*)$. Isto contradiz o fato de que x^* é um máximo global de f.

C. Q. D.

Nosso principal objetivo a partir de agora é demonstrar os Teoremas de *Kuhn-Tucker, Uzawa* e *Kuhn-Tucker, Uzawa, Slater,* os quais são os resultados mais importantes desta seção. Para tanto, demonstraremos um teorema inicial que desempenha papel de destaque no que se segue.

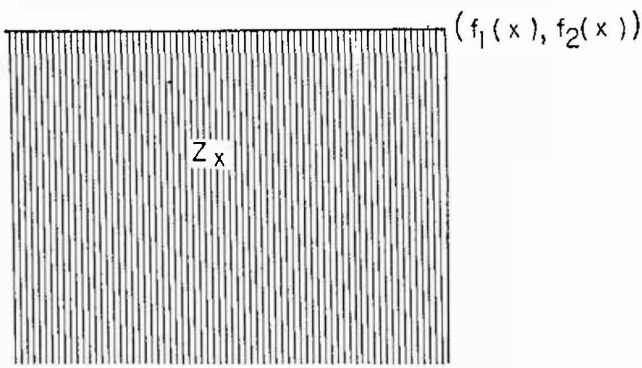
Teorema 12 — Seja $X \subset R^p$ um conjunto convexo, $X \neq \phi$, e sejam $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funções côncavas definidas em X com valores em R. Se, para todo $x \in X$, tivermos $f_i(x) \leqslant 0$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, então existem k números reais $p_1 \geqslant 0, p_2 \geqslant 0, \ldots, p_k \geqslant 0$ com $p_1 + p_2 + \ldots + p_k > 0$ tais que $p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) + \ldots + p_k f_k(x) \leqslant 0$ para todo $x \in X$.

Prova:

Para cada $x \in X$, seja:

$$Z_x = \{(z_1, z_2, \ldots, z_k) \in R^k : z_i < f_i(x), i = 1, 2, \ldots, k\}$$

O conjunto Z_x está representado na figura a seguir pela área hachurada.



Observe-se que: a) $Z_x \neq \phi$, pois, por exemplo, $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha) \in R^k$ tal que $\alpha = 2 \min \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\} < 0$ pertence a Z_x e, caso $\alpha = 0$, então $(-1, -1, -1, \ldots, -1) \in R^k$ pertence a Z_x; e b) $0 \notin Z_x$, pois $f_i(x) \leqslant 0$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Definamos agora o conjunto:

$$Z = \bigcup_{x \in X} Z_x = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_k) \in R^k : \exists\, x \in X,\ z_i < < f_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, k\}$$

Dados $z \in Z$ e $z' \in Z$, existem $x \in X$ e $x' \in X$ tais que $z_i < f_i(x)$ e $z_i' < f_i(x')$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Portanto:

$$\theta z_i + (1 - \theta)\, z_i' < \theta f_i(x) + (1 - \theta)\, f_i(x') \leqslant f_i(\theta x + (1 - \theta) x')$$

para todo $\theta \in [0, 1]$. Assim, Z é um conjunto convexo que satisfaz $Z \cap \overset{\circ}{R}{}^p_+ = \phi$. Existe, portanto (Teorema 7 do Capítulo VIII), $p \in R^k_+$, $p \neq 0$, tal que $< p, z > \leqslant 0$ para todo $z \in Z$.

Sejam agora $x \in X$ e $\varepsilon_n = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n) \in R^k$. Então, $f_i(x) - 1/n < f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, isto é:

$$f(x) - \varepsilon_n = (f_1(x) - 1/n,\ f_2(x) - 1/n,\ \ldots,\ f_k(x) - 1/n) \in Z$$

para todo $n \in N$. Logo:

$$< p, f(x) - \varepsilon_n > \leqslant 0$$

ou seja:

$$< p, f(x) > \leqslant < p, \varepsilon_n >$$

para todo $n \in N$. Portanto, $< p, f(x) > \leqslant 0$.

C. Q. D.

Para simplificarmos os enunciados e demonstrações que se seguem adotaremos as seguintes notação e terminologia:

a) Definição: seja X um conjunto convexo não-vazio e sejam $g_1, g_2, \ldots, g_k$ funções definidas em X com valores em R. Diz-se que $g: X \to R^k$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_k(x))$, é côncava (quase-côncava) se, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, g_i é côncava (quase-côncava).

b) Desigualdades vetoriais: sejam $x \in R^p$ e $y \in R^p$. Diz-se que: $x \geqslant y$ se $x_i \geqslant y_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $x > y$ se $x_i \geqslant y_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ e se existe $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $x_j > y_j$; $x > > y$ se $x_i > y_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$; e $x = y$ se $x_i = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

c) Dada a função $g\colon X \to R^k$ (em geral, g será côncava ou quase-côncava nos teoremas que se seguem), define-se o conjunto $N_0 = \{x \in X\colon g(x) \geqslant 0\}$.

Teorema 13 (Kuhn-Tucker, Uzawa) — Sejam $X \subset R^p$ convexo, $f\colon X \to R$ côncava e $g\colon X \to R^k$ côncava. Suponha-se que x^* é um máximo de f/N_0. Então, existem um número real $\alpha_0 \geqslant 0$ e um vetor $\tilde{\lambda} \in R^k_+$ com $\alpha_0 + \tilde{\lambda}_1 + \ldots + \tilde{\lambda}_k > 0$ tais que:

$$\alpha_0 f(x) + < \tilde{\lambda}, g(x) > \leqslant \alpha_0 f(x^*)$$

para todo $x \in X$. Além disto, $< \tilde{\lambda}, g(x^*) > = 0$.

Prova:

Considere-se o sistema:

$$g(x) \geqslant 0$$

$$f(x) - f(x^*) > 0$$

Como x^* é um máximo de f/N_0, ele não tem solução. Além disto:

$$g(x) > > 0$$

$$f(x) - f(x^*) > 0$$

também não possui solução em X, isto é, dado $x \in X$, ou $g_i(x) \leqslant 0$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ou $f(x) - f(x^*) \leqslant 0$. Como f e g são côncavas, existem $\alpha_0 \geqslant 0$ e $\tilde{\lambda} \in R^k_+$ com $\alpha_0 + \tilde{\lambda}_1 + \ldots + \tilde{\lambda}_k > 0$ (teorema anterior) tais que:

$$\alpha_0 \; (f(x) - f(x^*)) + < \tilde{\lambda}, g(x) > \leqslant 0 \qquad (5)$$

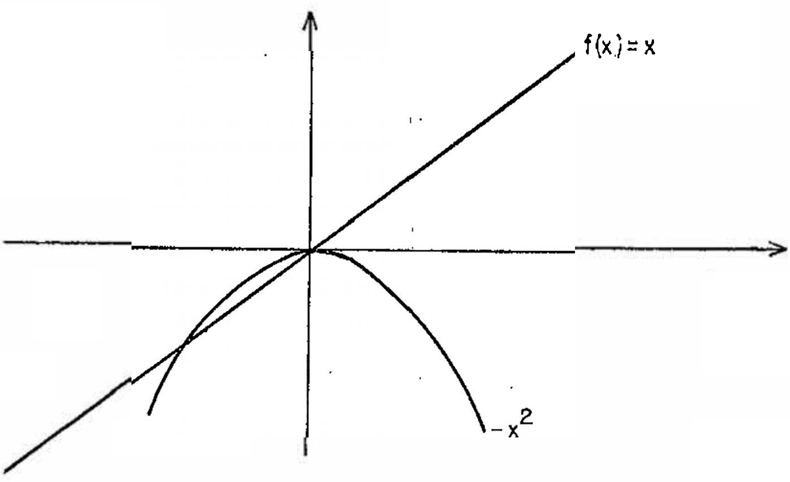
para todo $x \in X$.

Tomando $x = x^*$ em (5), vem que $< \lambda, g(x^*) > \leqslant 0$. Como $g(x^*) \geqslant 0$ e $\tilde{\lambda} \in R^k_+$, segue-se que $< \tilde{\lambda}, g(x^*) > \geqslant 0$. Portanto, $< \tilde{\lambda}, g(x^*) > = 0$.

C. Q. D.

No teorema acima, tudo que se pode garantir é que $\alpha_0 \geqslant 0$ e que pelo menos um dos números $\alpha_0, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_k$ é estritamente positivo. Se, no entanto, fosse possível garantir que $\alpha_0 > 0$, a expressão $\alpha_0 f(x) + < \tilde{\lambda}, g(x) > \leqslant \alpha_0 f(x^*)$ poderia ser reescrita da seguinte forma: $f(x) + < \lambda, g(x) > \leqslant f(x^*)$, onde $\lambda = \frac{1}{\alpha_0} \tilde{\lambda}$. O lado esquerdo da expressão já é conhecido, pois é simplesmente o valor da função lagrangeana do Capítulo VI no ponto (x, λ). Esta maneira de apresentar o teorema é, sem dúvida, mais útil nas aplicações. Entretanto, as hipóteses do Teorema de Kuhn-Tucker, Uzawa não são suficientes para garantir que $\alpha_0 > 0$. Para verificarmos isto, considere-se o seguinte exemplo — ver Takayama (1974, p. 70) —, devido a Slater:

6 — Seja $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x$ e $g: R \rightarrow R$ definida por $g(x) = -x^2$. O ponto $x^* = 0$ é o máximo de f restrita ao conjunto dos pontos $x \in R$ que satisfazem $g(x) \geqslant 0$. Além disto,

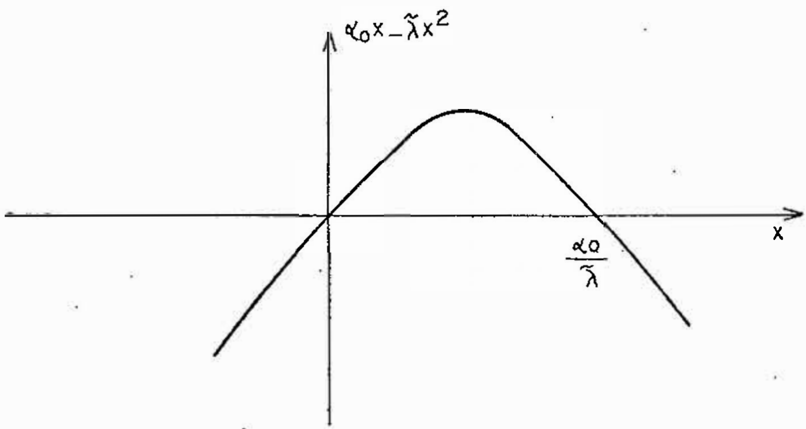


f e g são côncavas, como requer o teorema. Portanto, existem $\alpha_0 \geqslant 0$ e $\tilde{\lambda} \geqslant 0$ tais que:

$$\alpha_0 f(x) + \tilde{\lambda} g(x) \leqslant \alpha_0 f(x^*)$$

para todo $x \in R$, isto é, $\alpha_0 x - \tilde{\lambda} x^2 \leqslant 0$ para todo $x \in R$. Claramente, isto não pode ocorrer, a menos que $\alpha_0 = 0$, pois, se $\alpha_0 > 0$, necessariamente $\tilde{\lambda} > 0$ ($\tilde{\lambda} = 0$ significa $\alpha_0 x \leqslant 0$ para todo $x \in R$, o que é um absurdo) e, portanto, $x(\alpha_0 - \tilde{\lambda} x) \leqslant 0$ se $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 0$ e $x \geqslant \dfrac{\alpha_0}{\tilde{\lambda}}$ e $x(\alpha_0 - \tilde{\lambda} x) > 0$ se $0 < x < \dfrac{\alpha_0}{\tilde{\lambda}}$.

Conclui-se, portanto, que $\alpha_0 x - \tilde{\lambda} x^2 \leqslant 0$ para todo $x \in R$ se, e somente se, $\alpha_0 = 0$.



O que procuraremos fazer agora é identificar uma hipótese suficiente para garantir que $\alpha_0 > 0$, conhecida como condição de Slater e que diz que, para que $\alpha_0 > 0$, é suficiente que exista $\bar{x} \in X$ tal que $g(\bar{x}) > 0$. Note-se que isto não se verifica no exemplo anterior.

Antes, porém, introduziremos a noção de ponto de sela da função lagrangeana. O enfoque do problema de otimização sob este aspecto é de grande utilidade prática.

Definição 3 — Seja $L: X \times \Delta \rightarrow R$, $X \subset R^p$, $\Delta \subset R^k$. Diz-se que $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in X \times \Delta$ é um ponto de sela de L se $L(x, \bar{\lambda}) \leqslant L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leqslant L(\bar{x}, \lambda)$ para todo $(x, \lambda) \in X \times \Delta$.

Em outras palavras, um ponto de sela de L é um ponto onde $L(x, \bar{\lambda})$ atinge um máximo absoluto com relação a x e $L(\bar{x}, \lambda)$ um mínimo absoluto em $\bar{\lambda}$.

Exemplo:

7 — Seja $f: R^2 \rightarrow R$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$. A função $f(x, 0)$ tem mínimo absoluto no ponto $x = 0$. Da mesma forma, $f(0, y)$ tem máximo absoluto no ponto $x = 0$. Portanto:

$$f(0, y) \leqslant f(0, 0) \leqslant f(x, 0)$$

para todo $(x, y) \in R^2$. $(0, 0)$ é um ponto de sela de f.

Teorema 14 (Kuhn-Tucker, Uzawa, Slater) — Sejam $X \subset R^p$ convexo, $f: X \rightarrow R$ côncava e $g: X \rightarrow R^k$ côncava. Suponha-se que existe $\bar{x} \in X$ tal que $g(\bar{x}) >> 0$ (condição de Slater). Então, se x^* é um máximo de f/N_0, existe $\hat{\lambda} \in R^k_+$ tal que a função lagrangeana $L: X \times R^k_+ \rightarrow R$ definida por $L(x, \lambda) = f(x) + < \lambda, g(x) >$ tem um ponto de sela em $(x^*, \hat{\lambda}) \in X \times R^k_+$, isto é, para todo $x \in X$ e para todo $\lambda \in R^k_+$:

$$L(x, \hat{\lambda}) \leqslant L(x^*, \hat{\lambda}) \leqslant L(x^*, \lambda)$$

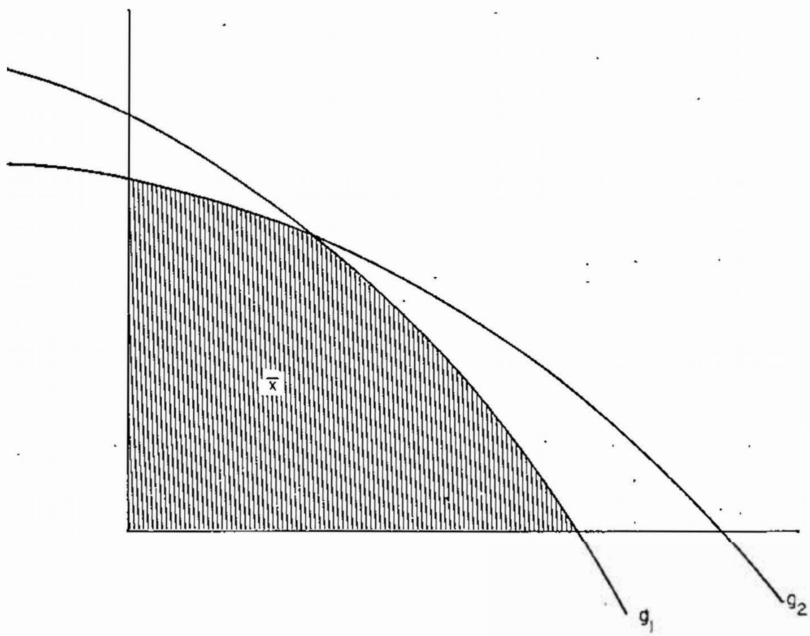
Prova:

Pelo Teorema 13, existem $\alpha_0 \geqslant 0$ e $\tilde{\lambda} \in R^k_+$ com $\alpha_0 + \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + + \dots + \tilde{\lambda}_k > 0$ tais que $\alpha_0 f(x) + < \tilde{\lambda}, g(x) > \leqslant \alpha_0 f(x^*)$ para todo $x \in X$. Se $\alpha_0 = 0$, tomando $\bar{x} \in X$, temos $< \tilde{\lambda}, g(\bar{x}) > \leqslant 0$, o que é uma contradição, pois $g(\bar{x}) >> 0$ e $\tilde{\lambda}_i > 0$ para algum $i = 1, 2, \dots, k$. Portanto, $\alpha_0 > 0$ e podemos então definir $\bar{\lambda}_i = \dfrac{\tilde{\lambda}_i}{\alpha_0}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Falta apenas mostrar que $(x^*, \hat{\lambda})$ é um ponto de sela de $L(x, \lambda)$. $L(x, \hat{\lambda}) \leqslant L(x^*, \hat{\lambda})$ para todo $x \in X$ segue-se imediatamente do teorema anterior.

Por outro lado, observe-se que, para todo $\lambda \in R^k_+$, $L(x^*, \lambda) = f(x^*) + < \lambda, g(x^*) > \geqslant f(x^*) + < \hat{\lambda}, g(x^*) > = f(x^*)$, uma vez que $g(x^*) \geqslant 0$ e $< \hat{\lambda}, g(x^*) > = 0$.

A condição chave para garantir que $\alpha_0 \neq 0$ é a condição de Slater. Geometricamente, ela significa que existe pelo menos um ponto que satisfaz todas as restrições, simultaneamente, na forma de desigualdade.



É importante observar que, se x^* é um máximo de f/N_0, então $L(x^*, \hat{\lambda})$ é um ponto de sela da função lagrangeana. Entretanto, o raciocínio usualmente feito a nível introdutório para explicar a lógica do multiplicador de Lagrange, em que se argumenta que

$L(x, \hat{\lambda})$ atinge um maximo, é perfeitamente correto, uma vez que isto é exatamente o que acontece na definição de ponto de sela.

Um outro resultado importante na teoria da programação côncava é a recíproca do Teorema 14, a qual, na verdade, vale sob hipóteses muito mais gerais do que as daquele teorema e é, em essência, um resultado mais elementar.

Teorema 15 — Sejam $X \subset R^p$, $f: X \rightarrow R$ e $g: X \rightarrow R^k$. Suponha-se que $(x^*, \hat{\lambda}) \in X \times R^k_+$ é um ponto de sela da função lagrangeana L. Então:

a) x^* é um máximo de f/N_0; e

b) $< \hat{\lambda}, g(x^*) > = 0$.

Prova:

Temos que:

$$L(x, \hat{\lambda}) \leqslant L(x^*, \hat{\lambda}) \leqslant L(x^*, \lambda)$$

para todo $(x, \lambda) \in X \times R^k_+$. Portanto:

$$< \hat{\lambda}, g(x^*) > \leqslant < \lambda, g(x^*) > \tag{6}$$

para todo $\lambda \in R^k_+$.

Se $\lambda \in R^k_+$, $\beta \lambda \in R^k_+$ para todo $\beta > 0$. Então, dado $\lambda \in R^k_+$:

$$< \hat{\lambda}, g(x^*) > \leqslant < \beta \lambda, g(x^*) > = \beta < \lambda, g(x^*) >$$

o que significa que, para todo $\beta > 0$:

$$\frac{1}{\beta} < \hat{\lambda}, g(x^*) > \leqslant < \lambda, g(x^*) >$$

ou seja, $< \lambda, g(x^*) > \geqslant 0$ para todo $\lambda \in R^k_+$.

Tomando-se sucessivamente os vetores da base canônica de R^k, obtém-se que $g_i(x^*) \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, e, portanto, $x^* \in N_0$.

Tomando-se $\lambda = 0$ em (6), obtém-se $< \hat{\lambda}, g(x^*) > \leqslant 0$ e, portanto, $< \hat{\lambda}, g(x^*) > = 0$ (pois, pelo resultado do parágrafo anterior, $< \hat{\lambda}, g(x^*) > \leqslant 0$).

Por fim, de $L(x, \hat{\lambda}) \leqslant L(x^*, \hat{\lambda})$ para todo $x \in X$ segue-se que:

$$f(x) + < \hat{\lambda}, g(x) > \leqslant f(x^*) + < \hat{\lambda}, g(x^*) > = f(x^*)$$

Portanto, $f(x^*) - f(x) \geqslant < \hat{\lambda}, g(x) >$ para todo $x \in X$. Se $x \in N_0$, então $g(x) \geqslant 0$ e $< \hat{\lambda}, g(x) > \geqslant 0$, donde se segue que $f(x^*) \geqslant f(x)$ para todo $x \in N_0$.

C. Q. D.

Uma aplicação interessante dos resultados acima é a demonstração da relação que existe entre equilíbrio competitivo e eficiência no sentido de Pareto. Os teoremas que demonstram estas implicações podem ser obtidos quase imediatamente a partir da caracterização do ponto de sela. É também possível provar a existência do equilíbrio competitivo com o instrumental do Teorema de Kuhn-Tucker, Uzawa, Slater. Não apresentaremos estes resultados aqui, uma vez que eles requerem um desenvolvimento longo para estabelecer precisamente as definições e as hipóteses, mas o leitor interessado pode consultar Takayama (1974, pp. 285-91).

Vejamos agora versões mais específicas do teorema de programação côncava. A versão que se segue, onde se supõe que f e g são diferenciáveis, é de extrema importância em aplicações econômicas, como veremos posteriormente.

Teorema 16 — Sejam $X \subset R^p$ aberto, $f: X \to R$ e $g: X \to R^k$ diferenciáveis em X. Então:

a) Se $(x^*, \hat{\lambda}) \in X \times R^k_+$ é um ponto de sela da função lagrangeana, valem as seguintes condições:

$$grad_x\, L(x^*, \hat{\lambda}) = 0 \tag{7}$$

$$g(x^*) \geqslant 0 \text{ e } < \hat{\lambda}, g(x^*) > = 0 \tag{8}$$

onde:

$$grad_x\ L(x^*,\ \lambda) \doteq \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*,\ \hat{\lambda}),\ \ldots,\ \frac{\partial L}{\partial x_p}(x^*,\ \hat{\lambda})\right)$$

b) Se X é convexo, f e g são côncavas, e se $(x^*, \hat{\lambda}) \in X \times R^k_+$ satisfazem (7) e (8), então $(x^*, \hat{\lambda})$ é um ponto de sela de L.

Prova:

a) Da definição de ponto de sela, sabemos que $L(x, \hat{\lambda}) \leqslant L(x^*, \hat{\lambda})$, isto é, x^* é um máximo de $L(x, \hat{\lambda})$. Portanto, pelo teorema do máximo interior, $grad_x\ L(x^*, \hat{\lambda}) = 0$. Do Teorema 15, obtém-se imediatamente que $< \hat{\lambda}, g(x^*) > = 0$. Por fim, de $L(x^*, \hat{\lambda}) \leqslant L(x^*, \lambda)$ segue-se que $< \lambda, g(x^*) > \geqslant 0$ para todo $\lambda \in R^k_+$. Tomando-se sucessivamente os vetores da base canônica de R^k, conclui-se que $g(x^*) \geqslant 0$.

b) Como $grad_x\ L(x^*, \hat{\lambda}) = 0$, x^* é um ponto crítico da função côncava $L(x, \hat{\lambda}) = f(x) + < \hat{\lambda}, g(x) >$. Como $L(x, \hat{\lambda})$ é côncava, x^* é um máximo, isto é, $L(x, \hat{\lambda}) \leqslant L(x^*, \hat{\lambda})$ para todo $x \in X$.

Por outro lado:

$$L(x^*, \hat{\lambda}) = f(x^*) \leqslant f(x^*) + < \lambda, g(x^*) > = L(x^*, \lambda)$$

uma vez que $g(x^*) \geqslant 0$ e $\lambda \geqslant 0$.

C. Q. D.

Teorema 17 — Sejam $X \subset R^p$ convexo e aberto, $f: X \to R$ e $g: X \to R^k$ funções côncavas e diferenciáveis. Suponha-se que existe $\bar{x} \in X$ tal que $g(\bar{x}) >> 0$ (Slater). Então, x^* é um máximo de f/N_0 se, e somente se, (7) e (8) (ver enunciado do Teorema 16) se verificam.

Prova:

Se (7) e (8) se verificam, $(x^*, \hat{\lambda})$ é um ponto de sela de L. Logo (Teorema 15), x^* é um máximo de f/N_0.

Por outro lado, se x^* é um máximo de f/N_0, pelo Teorema 14, existe $\hat{\lambda} \in R_+^k$ tal que $(x^*, \hat{\lambda}) \in X \times R_+^k$ é um ponto de sela de L. Portanto, $(x^*, \hat{\lambda})$ satisfaz (7) e (8).

C. Q. D.

Um caso particular importante nas aplicações econômicas é quando são incluídas condições de não negatividade no conjunto de restrições, o que já está incluído, formalmente, nos teoremas anteriores. Entretanto, é interessante tratá-lo explicitamente, em vista do significado econômico que pode ser atribuído ao novo conjunto de condições que caracteriza a solução do problema.

Sejam $f: R^p \to R$ e $g: R^p \to R^k$ funções côncavas e diferenciáveis e suponha-se que existe $\bar{x} \in R^p$ tal que $g(\bar{x}) >> 0$. Seja $x^* \in R^p$ uma solução para o problema: maximizar $f(x)$ com $g(x) \geqslant 0$, $x \geqslant 0$.

Neste caso, existe $(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) \in R_+^k \times R_+^p$ tal que:

$$(x^*, (\hat{\lambda}, \hat{\mu})) \in R_+^p \times (R_+^k \times R_+^p)$$

é um ponto de sela da função lagrangeana $\tilde{L}: R^p \times (R_+^k \times R_+^p) \to R$ definida por:

$$\tilde{L}(x, (\lambda, \mu)) = f(x) + < (\lambda, \mu), (g(x), x) > = f(x) + < \lambda, g(x) > + < \lambda, x>$$

Pelo Teorema 16, temos que:

$$grad_x\, \tilde{L}\,(x^*, (\hat{\lambda}, \hat{\mu})) = 0;$$

$$(g(x^*), x^*) \geqslant 0; \text{ e}$$

$$< (\hat{\lambda}, \hat{\mu}), (g(x^*), x^*) > = 0.$$

Daí, obtém-se:

$$< \mu^*, x^* > = 0 \quad \text{e} \quad x^* \geqslant 0$$

ou seja, $\hat{\mu}_i x_i^* = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Em outras palavras, se $x_i^* > 0$, $\hat{\mu}_i = 0$ e, se $x_i^* = 0$, $\hat{\mu}_i \geqslant 0$.

Além disto, note-se que:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_i}(x^*, (\hat{\lambda}, \hat{\mu})) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) + < \hat{\lambda}, \frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*) > + \mu_i = 0$$

$i = 1, 2, \ldots, p$. Se $x_i^* > 0$, a condição acima reduz-se a:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_i}(x^*) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) + < \hat{\lambda}, \frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*) > = 0$$

e, se $x_i^* = 0$, então:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_i}(x^*) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) + < \hat{\lambda}, \frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*) > + \mu_i = 0 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) + < \hat{\lambda}, \frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*) >$$

Portanto, se x^* resolve o problema proposto inicialmente, existe $\hat{\lambda} \in R_+^k$ tal que:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \hat{\lambda}) \leqslant 0, \; i = 1, 2, \ldots, k \tag{9}$$

$$x_i^* \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \hat{\lambda}) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, k \tag{10}$$

$$x^* \geqslant 0, \; g(x^*) \geqslant 0 \text{ e } < \hat{\lambda}, g(x^*) > = 0 \tag{11}$$

onde $L: R_+^p \times R_+^k \rightarrow R$ é dada por $L(x, \lambda) = f(x) + < \lambda, g(x) >$.

Por outro lado, suponha-se que $(x^*, \hat{\lambda}) \in R_+^p \times R_+^k$ satisfaz (9), (10) e (11). Defina-se $\hat{\mu} \in R_+^p$ da seguinte maneira:

$$- \hat{\mu}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) + < \hat{\lambda}, \frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*) >$$

Neste caso, $grad_x \tilde{L}(x^*, (\hat{\lambda}, \hat{\mu})) = 0$, $(g(x^*), x^*) \geqslant 0$ e $< (\hat{\lambda}, \hat{\mu}), (g(x^*), x^*) > = 0$. Portanto, $(x^*, (\hat{\lambda}, \hat{\mu}))$ é um ponto de sela da função $\tilde{L}$ (Teorema 16), o que significa (Teorema 15) que x^* resolve o problema de maximização inicial.

Resumindo, podemos afirmar que $x^* \in R^n_+$ é uma solução para o problema: maximizar $f(x)$ com $g(x) \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, onde g satisfaz a condição de Slater se, e somente se, existe $\lambda \in R^k_+$ tal que (9), (10) e (11) são satisfeitas.

Em outras palavras, isto significa que não é necessário introduzir explicitamente os multiplicadores para as restrições de não-negatividade, desde que as modificações acima sejam feitas.

Vejamos uma aplicação deste conjunto de condições para o exame de um problema econômico [cf. Brandão e Schuh (1979)]. Imaginemos que um indivíduo deseja dedicar-se a uma atividade agrícola para a qual conheça a função de produção. Seja $q: \mathring{R}^2_+ \rightarrow R$ tal que a cada par (h, t) associa o valor $q(h, t)$, onde h é a quantidade de terra utilizada e t a quantidade de trabalho. Estamos supondo, apenas para simplificar, que q está definida somente no interior de $\mathring{R}^2_+$. Maior generalidade pode ser conseguida se definirmos q na fronteira de $\mathring{R}^2_+$, o que, entretanto, não alteraria, em essência, a argumentação e as conclusões.

Admitiremos que este indivíduo não possui terra e que ela deverá ser alugada e paga como uma percentagem r da produção. Além disto, a decisão quanto ao uso de fatores é tomada conjuntamente pelo dono da terra e pelo parceiro (ou seja, o indivíduo que aluga a terra segundo o sistema acima), de forma a maximizar uma média ponderada das rendas de cada um deles, sendo os pesos uma medida do poder de barganha de cada um na negociação do contrato.

Também faremos a hipótese de que q é uma função côncava, diferenciável e homogênea do grau 1.

Matematicamente, o problema é formulado da seguinte maneira: [5] maximizar $\lambda_1 \; r \; q(h, t) + \lambda_2 [(1 - r) \; q(h, t) - wt]$ com $(1 - r) \; q(h, t) - wt \geqslant 0$, $h^* - h \geqslant 0$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, onde $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 \geqslant 0$ são os pesos a que nos referimos anteriormente, h é a quantidade de terra alugada, t é a quantidade de trabalho aplicado na terra alugada, $h^* > 0$ é a disponibilidade total de terra e $w > 0$ é o salário (suposto dado).

5 Pela definição de q, sempre teremos $h > 0$ e $t > 0$.

Como $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 \geqslant 0$, a função a ser maximizada é uma combinação linear não negativa de funções côncavas e pode-se também verificar que a condição de Släter é satisfeita.

Seja, então:

$$L(t, h; \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = \lambda_1 \, r \, q(h, t) + \lambda_2 \, [(1 - r) \, q(h, t) - wt] +$$
$$+ \lambda_3 \, [(1 - r) \, q(h, t) - wt] + \lambda_4 \, (h^* - h) + \lambda_5 \, (1 - r)$$

Portanto, para que o problema tenha solução é necessário e suficiente que existam $\bar{h} > 0, \bar{t} > 0, \hat{\lambda}_3 \geqslant 0, \hat{\lambda}_4 \geqslant 0$ e $\hat{\lambda}_5 \geqslant 0$ tais que (as derivadas são avaliadas neste ponto):

$$\frac{\partial L}{\partial h} = [\lambda_1 \, r + (\lambda_2 + \hat{\lambda}_3) \, (1 - r)] \frac{\partial q}{\partial h} - \hat{\lambda}_4 = 0 \qquad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [\lambda_1 \, r + (\lambda_2 + \hat{\lambda}_3) \, (1 - r)] \frac{\partial q}{\partial t} -$$
$$- (\lambda_2 + \hat{\lambda}_3) \, w = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = [\lambda_1 - (\lambda_2 + \lambda_3)] \, q(h, t) - \lambda_5 = 0 \qquad (14)$$

$$r - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \qquad (15)$$

$$(1 - r) \, q(h, t) - wt \geqslant 0 \qquad (16)$$

$$\hat{\lambda}_3 \, [(1 - r) \, q(h, t) - wt] = 0 \qquad (17)$$

$$h^* - h \geqslant 0 \qquad (18)$$

$$\hat{\lambda}_4 \, [h^* - h] \geqslant 0 \qquad (19)$$

$$1 - r \geqslant 0 \qquad (20)$$

$$\hat{\lambda}_5 \, (1 - r) = 0 \qquad (21)$$

$$r \geqslant 0, \hat{\lambda}_3 \geqslant 0, \hat{\lambda}_4 \geqslant 0 \text{ e } \hat{\lambda}_5 \geqslant 0 \qquad (22)$$

Observe-se, inicialmente, que $r = 1$ é impossível, pois (16) não seria satisfeita (a menos, é claro, que $w = 0$). Portanto, de (20), $r < 1$ e, de (21), $\hat{\lambda}_5 = 0$.

Por outro lado, é interessante analisar as implicações de uma solução com $r > 0$, pois este é o caso mais relevante empiricamente. De (14), obtém-se, imediatamente, que $\lambda_1 = \lambda_2 + \hat{\lambda}_3$ e, de (12), que $\frac{\partial q}{\partial h} = \frac{\lambda_4}{\hat{\lambda}_1}$. Desta última equação concluímos que, se $h^* > h$, $\frac{\partial q}{\partial h} = 0$, isto é, se a disponibilidade de terra for excessiva, seu produto marginal, em equilíbrio, será nulo. Admitindo, como é usual, que $\frac{\partial q}{\partial h} > 0$, garantimos que a solução do problema será tal que $h = h^*$, com $\hat{\lambda}_4 > 0$.

Da equação $\lambda_1 = \lambda_2 + \hat{\lambda}_3$ podemos obter que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ (pois $\hat{\lambda}_3 \geqslant 0$), o que significa simplesmente que, para poder "forçar" $r > 0$, o dono da terra deverá ter um poder de barganha não inferior ao do parceiro.

Por fim, de (13) e $\lambda_1 = \lambda_2 + \hat{\lambda}_3$, temos $\frac{\partial q}{\partial t} = w$. Em outras palavras, é interesse tanto do proprietário da terra quanto do parceiro que a mão-de-obra seja utilizada de maneira eficiente (observe-se que isto ocorre mesmo que $\lambda_1 = \lambda_2$).

É interessante ainda observar que, se $r > 0$, segue-se, da equação (16) e da hipótese de que a função de produção é homogênea do grau 1, que $0 < r \leqslant \frac{\partial q}{\partial h} \cdot \frac{h}{q}$. Isto, automaticamente, garante que $\frac{\partial q}{\partial h} > 0$. Em outras palavras, independentemente de qualquer hipótese técnica sobre o produto marginal da terra, este será positivo quando r o for, o que significa que a escassez da terra está associada com a possibilidade de cobrar um aluguel positivo da mesma.

Retornando ao argumento principal, é interessante caracterizar esquematicamente as seqüências lógicas estabelecidas nos teoremas anteriores. Para tanto, consideremos as seguintes condições:

A) x^* é um máximo de f/N_0;

B) $(x^*, \hat{\lambda})$ é um ponto de sela de $L(x, \lambda)$; e

C) $(x^*, \hat{\lambda})$ satisfaz (7) e (8) do Teorema 16.

Então, temos o seguinte:

a) $A \rightarrow B$ sob as hipóteses de concavidade e a condição de Slater;

b) $B \rightarrow A$ (não são necessárias as hipóteses de concavidade nem a condição de Slater);

c) $B \rightarrow C$ sob a hipótese de diferenciabilidade; e

d) $C \rightarrow B$ sob as hipóteses de diferenciabilidade e concavidade.

Para finalizar esta seção, procuraremos estender os resultados anteriores para as funções quase-côncavas. Os resultados a seguir — apresentados sem demonstração — são devidos a Arrow e Enthoven (1961); ver também Takayama (1974, Cap. I).

Definição 4 — Seja $C_0 = N_0 \cap R^p_+$ um conjunto de restrições. A variável $x_i \in R$ é uma *variável relevante* se existe $\bar{x} \in C_0$ tal que $\bar{x}_i > 0$.

Teorema 18 — Sejam $f: R^p \rightarrow R$ quase-côncava e diferenciável e $g: R^p \rightarrow R^k$ quase-côncava e diferenciável. Seja $C_0 = N_0 \cap R^p_+$ e suponha-se que existe $(x^*, \hat{\lambda}) \in R^p_+ \times R^k_+$ tal que:

$$grad_x\, L(x^*, \hat{\lambda}) \leqslant 0; < x^*, grad_x\, L(x^*, \hat{\lambda}) > = 0$$

$$< \hat{\lambda}, g(x^*) > = 0; g(x^*) \geqslant 0$$

Então, x^* é um máximo de f/C_0 se uma das condições a seguir se verifica:

a) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) < 0$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$;

b) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) > 0$ para alguma variável relevante;

c) $grad\, f(x^*) \neq 0$ e f é duas vezes diferenciável numa vizinhança de x^*; e

d) f é côncava.

Teorema 19 — Sejam f e g tais como no teorema anterior e suponha-se que existe $\bar{x} \in R^p_+$ tal que $g(\bar{x}) >> 0$ (Slater). Então, se x^* é um máximo de f/C_o, existe $\hat{\lambda} \in R^k_+$ tal que:

$$grad_x\, L(x^*, \hat{\lambda}) \leqslant 0; < x^*, grad_x\, L(x^*, \hat{\lambda}) > = 0$$

$$> \lambda, g(x^*) > = 0; \quad g(x^*) \geqslant 0$$

desde que uma das condições abaixo se verifique:

a) g é côncava; e

b) $grad\ g_j(x^*) \neq 0$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $g_j(x^*) = 0$.

Como aplicação destes teoremas, examinemos o problema básico da teoria do consumidor. Seja $U: R^n \to R$ uma função de utilidade diferenciável tal que U/R^n_+ é quase-côncava e considere-se o problema: maximizar $U(x)$, $x \in R^n$, com $< p, x > \leqslant m$, $x \geqslant 0$, onde $p = (P_1, P_2, \ldots, P_n) >> 0$ é o vetor de preços dos bens $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $m > 0$ é a renda do consumidor. Note-se que, neste problema, todas as variáveis são relevantes. Admita-se, além disto, que existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) > 0$ para todo $x \in R^n_+$.

Temos, então, que U é quase-côncava, a função $g(x) = m - < p, x >$ é quase-côncava (na verdade, ela é côncava) e a condição de Slater é satisfeita. Para que o problema tenha solução, é necessário e suficiente que exista $(x^*, \hat{\lambda}) \in R^p_+ \times R_+$ tal que:

$$grad_x\, L(x^*, \hat{\lambda}) \leqslant 0; < x^*, grad_x\, L(x^*, \hat{\lambda}) > = 0$$

$$\hat{\lambda}(m - < p, x^* >) = 0 \quad e \quad m - < p, x^* > \geqslant 0$$

onde $L: R^n \times R_+ \to R$ é dada por $L(x, \lambda) = U(x) + (m - < p, x >)$.

Reescrevendo as condições acima, temos:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x^*) - \hat{\lambda}P_i \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \tag{23}$$

$$x_i^* \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}(x^*) - \hat{\lambda}P_i\right) = 0 \tag{24}$$

$$m - < p, x^* > \geqslant 0 \tag{25}$$

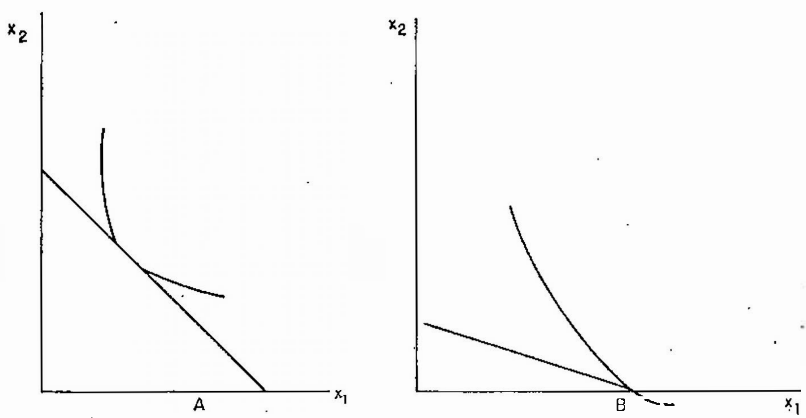
$$\hat{\lambda}(m - < p, x^* >) = 0 \tag{26}$$

$$x^* \geqslant 0; \hat{\lambda} \geqslant 0 \tag{27}$$

Observe-se agora que $\hat{\lambda} > 0$, pois $\frac{\partial U}{\partial x_i} (x^*) > 0$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ — equação (23) —, o que significa que $m - < p, x^* > = 0$ — equações (25) e (26). Além disto, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x_j^* > 0$, necessariamente $\frac{\partial U}{\partial x_j} (x^*) > 0$.

Isto significa que, em equilíbrio, o consumidor só consome bens cuja utilidade marginal seja positiva se existir pelo menos um deles para o qual sempre $\frac{\partial U}{\partial x_i} > 0$.

Note-se agora que, para todo i tal que $x_i^* > 0$, $\frac{\partial U}{\partial x_i} (x^*) = \hat{\lambda} P_i$ e, se $x_i^* = 0$, $\frac{\partial U}{\partial x_i} (x^*) \leqslant \hat{\lambda} P_i$. Geometricamente, estas duas possibilidades estão ilustradas a seguir.



Solução interior

Solução de fronteira ou de canto

No caso A, $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$. Logo:

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x^*)}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}(x^*)} = \frac{P_1}{P_2}$$

No caso B, $x_2 = 0$ e, portanto:

$$\frac{\partial U}{\partial x_2}(x^*) \leqslant \hat{\lambda} P_2$$

donde se obtém:

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_i}(x^*)}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}(x^*)} \geqslant \frac{P_1}{P_2}$$

se:

$$\frac{\partial U}{\partial x_2}(x^*) \neq 0$$

Uma hipótese que é suficiente para evitar a ocorrência do caso B é que as curvas de nível da função U sejam assintóticas aos eixos coordenados. Tratamentos elementares da teoria do consumidor formulam, em geral, o problema de maximização acima da seguinte maneira: maximizar $U(x)$ com $m - < p, x > = 0$.

Esta formulação é equivalente à anterior se se admite que $\dfrac{\partial U}{\partial x_i}(x) > 0$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e para todo $x \in R^p_+$ e que as curvas de indiferença sejam assintóticas aos eixos.

Exercícios

1. Sejam $X \subset R^p$ um conjunto convexo, Δ um conjunto de índices, $f_\lambda: X \to R$ funções côncavas para todo $\lambda \in \Delta$ e suponha que o conjunto $F(x) = \{f_\lambda(x) : \lambda \in \Delta\}$ é limitado inferiormente para todo $x \in X$. Mostre que a função $f: X \to R$ definida por $f(x) =$ $= inf\ F(x)$ é côncava (sugestão: suponha inicialmente que Δ é um conjunto finito).

Pergunta-se ainda:

a) vale um resultado semelhante para as funções quase-côncavas?; e

b) vale um resultado semelhante para as funções estritamente côncavas? (sugestão: sejam $X = (0, 1)$ e $f_n: X \to R$ definidas por $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt[n]{x}}$, $n > 2$).

2. Sejam $X \subset R^p$ um conjunto convexo e $f: X \to R$. Mostre que f é quase-côncava se, e somente se, para quaisquer $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0, \ldots,$ $\ldots, \lambda_n \geqslant 0$ com $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$ e $x_1 \in X, x_2 \in X, \ldots,$ $\ldots, x_n \in X$ — sendo $n \in N$ arbitrário — tem-se:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \geqslant min\ \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$$

3. Seja $f: R^p \to R$. Mostre que, se f é homogênea do grau 1, f não pode ser estritamente côncava.

4. Demonstre que $B_M[x^0, \delta]$ é o fecho convexo de V (Teorema 4).

5. Considere o problema: maximizar $f(x) = 1 - x^2$ com $g(x) = - x^2 - x + 2 \geqslant 0$.

Pede-se:

a) encontre a solução deste problema (sugestão: faça uma figura);

b) encontre os números α_0 e $\bar{\lambda}_1$ do Teorema de Kuhn-Tucker, Uzawa; e

c) por que é possível, neste caso, que $\bar{\lambda}_1 = 0$?

6. Considere agora o problema: maximizar $f(x) = 1 - x^2$ com $x^2 + x - 2 \geqslant 0$.

Pede-se:

a) qual a solução do problema?; e

b) se x^* é a solução encontrada acima, existem $\alpha \in R_+$ e $\lambda \in R_+$ com $\alpha + \lambda > 0$ tais que, para todo $x \in R$, $\alpha(1 - x^2) + \lambda(x^2 + x - 2) < \alpha(1 - (x^*)^2)$?

Por quê?

7. Resolva: maximizar $f(x) = x$ com $g(x) = 1 - x^2 > 0$.

Encontre os números α_0 e $\bar{\lambda}_1$ do Teorema de Kuhn-Tucker, Uzawa.

8. Seja $f: X \rightarrow R$ côncava e tal que x^* é o máximo de f em X. Seja $g: X \rightarrow R^k$ côncava tal que $x^* \in N_0$. Mostre que, neste caso, os multiplicadores $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_k$ do Teorema de Kuhn-Tucker, Uzawa podem ser nulos e $\alpha_0 > 0$.

9. Sejam $f: R \rightarrow R$ dada por $f(x) = x$ e $g: R \rightarrow R$ dada por $g(x) = - x^2 + 2x - 1$. Considere o problema: maximizar $f(x)$ com $g(x) \geqslant 0$.

Verifique que a condição de Slater não é satisfeita e que não se pode ter $\alpha_0 > 0$ no Teorema de Kuhn-Tucker, Uzawa.

10. Seja a função $U: \mathring{R}_+ \times R \rightarrow R$ definida por $U(x, y) = \log x + y$.

Resolva: maximizar $U(x, y)$ com $px + qy \leqslant m$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, sendo p, q e m constantes positivas (observação: estabeleça condições para que se tenha $y > 0$ e $y = 0$ na solução e represente graficamente as respectivas soluções).

Capítulo X

OTIMIZAÇÃO DINÂMICA

Os problemas de otimização que estudamos nos capítulos anteriores têm uma característica comum do ponto de vista matemático: o conjunto formado pelas restrições é um subconjunto do Espaço Euclideano R^p. Neste sentido, o processo de otimização constitui-se, essencialmente, na escolha de um vetor de R^p (isto é, um vetor cujos componentes são números reais) que satisfaça as referidas restrições.

Do ponto de vista da Teoria Econômica, este conjunto de métodos é útil na solução dos chamados problemas estáticos de otimização, tais como a alocação de uma dada renda no consumo de diferentes bens e serviços, a escolha de quantidades de fatores que minimizem o custo de uma firma, etc.

Entretanto, existem problemas econômicos que requerem para sua solução métodos não considerados anteriormente. Por exemplo, a questão de determinação do consumo e da poupança de um indivíduo durante seu ciclo de vida difere dos problemas anteriores, pois, ao invés de procurarmos um vetor com componentes reais para sua solução, desejamos encontrar uma função (ou, mais informalmente, uma trajetória) que a cada tempo t associa o nível de consumo dos vários bens e a poupança do indivíduo.

A diferença básica está no fato de que as soluções são agora funções, e não vetores de R^p, o que significa que o conjunto de restrições é um subconjunto do espaço de funções. Uma vez que as técnicas anteriores não são apropriadas ao tratamento de tais questões, necessitamos desenvolver métodos mais sofisticados que envolvam elementos de Análise Funcional para que se possa compreendê-los adequadamente.

Como o material desenvolvido no texto é insuficiente para propiciar uma análise mais profunda do assunto deste capítulo, adotaremos uma perspectiva diferente acerca do que vimos fazendo até aqui. Ficaremos satisfeitos em introduzir o leitor no *Problema de Controle* e na apresentação da condição necessária (de primeira ordem) para um ótimo, a chamada equação de Euler. Em seguida, desenvolveremos um problema econômico ilustrativo da técnica. [1]

Os principais ingredientes de um *Problema de Controle* são os seguintes: um conjunto de variáveis, chamadas *Variáveis de Controle*, para as quais desejamos encontrar uma trajetória ótima durante um certo intervalo de tempo; e um conjunto de *Variáveis Estado*, cujas trajetórias são dadas e descritas por *Equações de Movimento*. Além destes elementos, o problema caracteriza-se pela otimização de um certo objetivo, o qual, convém observar, não é em geral uma função, pois depende das trajetórias das variáveis do problema. Em vista disto, ele é chamado o *funcional objetivo*.

Ao invés de fazermos uma descrição abstrata do problema de controle, procuraremos ilustrar por meio de uma aplicação econômica a natureza da questão.

X.1 — O Modelo Neoclássico de Crescimento Ótimo

Suponhamos que uma economia produz um único produto Y utilizando dois fatores — capital (K) e trabalho (L) —, de acordo com a seguinte função de produção: $Y = F(K, L)$. Admite-se que F tem as seguintes propriedades:

a) F é de classe C^2 no interior de R^2_+ (como estamos interessados em examinar somente as soluções com $K > 0$ e $L > 0$, não nos preocuparemos em definir F na fronteira de R^2_+);

1 Outras referências para posterior aprofundamento são: Intriligator (1971), Takayama (1974), Arrow e Kurz (1970) e Cass e Shell (1976).

b) F é homogênea do grau 1 em K e L;

c) as produtividades marginais do capital e do trabalho são positivas, isto é, $F_K \equiv \dfrac{\partial F}{\partial K} > 0$ e $F_L \equiv \dfrac{\partial F}{\partial L} > 0$ para todo (K, L) no interior de R^2_+; e

d) para todo (K, L) no domínio de F, tem-se:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} \equiv F_{KK} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \equiv F_{LL} < 0$$

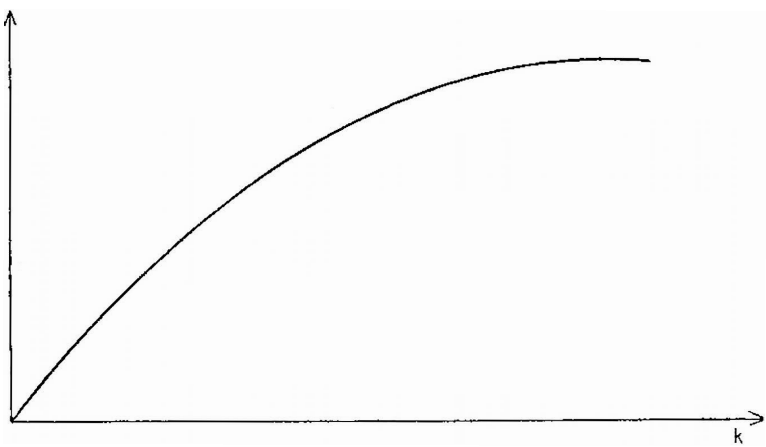
Este conjunto de hipóteses permite reescrever a função de produção da seguinte maneira: $y = f(k)$, sendo $y \equiv \dfrac{Y}{L}$ e $k \equiv \dfrac{K}{L}$. A função f tem as seguintes propriedades:

a) a produtividade marginal do capital é $f'(k)$ e a produtividade marginal do trabalho é $f(k) - kf'(k)$;

b) $f''(k) < 0$ para todo $k \in R_+ - \{0\}$;[2] e

c) $\lim\limits_{k \to 0} f(k) = 0$, $\lim\limits_{k \to 0} f'(k) = \infty$ e $\lim\limits_{k \to \infty} f'(k) = 0$.

Geometricamente, o gráfico da função f pode ser caracterizado como na figura a seguir.



[2] As propriedades "a" e "b" decorrem das propriedades de F.

Passemos agora a descrever outras relações do modelo. O equilíbrio no mercado de produto requer que:

$$Y = C + I$$

sendo C o nível de consumo e I o nível de investimento. Admitamos agora que a depreciação do estoque de capital é uma proporção constante do estoque, μ, e que a parcela da renda líquida poupada é uma constante s. Então, tem-se que:

$$I = \dot{K} + \mu K$$

$$C = (1 - s)\ (Y - \mu K)$$

sendo $\dot{K} = \dfrac{dK}{dt}$ o crescimento de estoque de capital, ou seja, o investimento líquido.

O crescimento da força de trabalho é, por hipótese, dado pela relação:

$$L(t) = L_0\ e^{\eta t}$$

o que significa que a taxa de crescimento de L é constante e igual a η.

Algum trabalho algébrico com as equações acima nos permite escrever que:

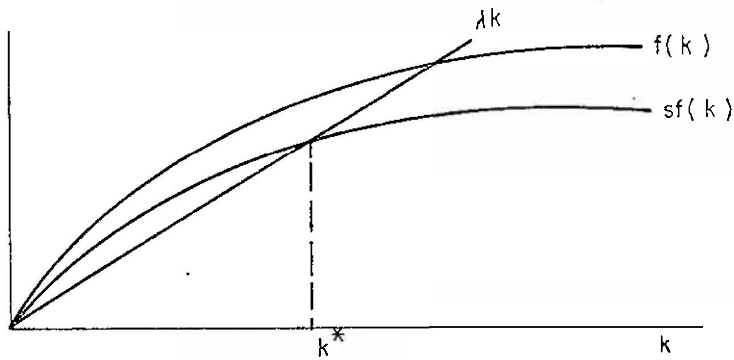
$$\dot{k} = sf(k) - \lambda k$$

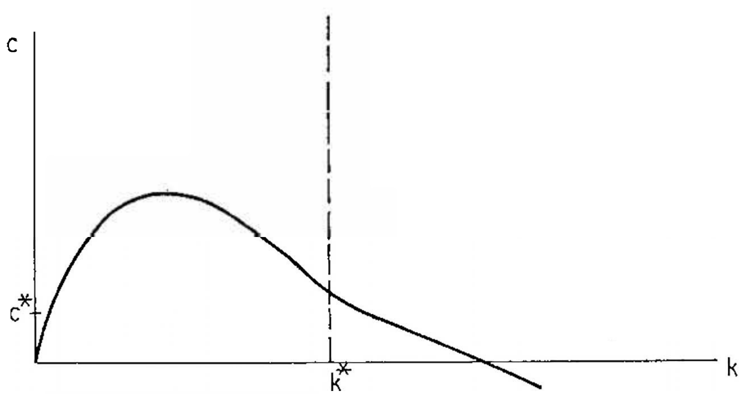
sendo $\dot{k} = \dfrac{dk}{dt}$ e $\lambda = s\mu + \eta$. Esta é a equação de movimento do modelo sob a hipótese de consumo feita acima, a qual se deve a Solow, e o modelo que estamos examinando é conhecido como o modelo de crescimento de Solow.

É fácil observar que a equação de movimento $k = sf(k) - \lambda k$ tem uma propriedade interessante. Para que o estoque de capital esteja em equilíbrio, teremos $\dot{k} = 0$, ou seja, $sf(k) = \lambda k$. Este equilíbrio pode ser interpretado economicamente como a igualdade entre poupança e investimento no modelo, pois $sf(k)$ é o volume da renda *per capita* dedicado à poupança e λk é a necessidade de "gastos" para manter o estoque de capital.

Além disto, qualquer desvio deste equilíbrio tem a característica de fazer com que o sistema volte ao equilíbrio de longo prazo. Por exemplo, se num determinado instante tivermos $sf(k) > \lambda k$, tem-se o estoque de capital crescendo a uma taxa positiva, até que as necessidades de reposição façam com que se restabeleça a igualdade. Um raciocínio semelhante aplica-se ao caso $sf(k) < \lambda k$.

A representação geométrica deste equilíbrio é feita nos diagramas a seguir. Convém lembrar ao leitor que as hipóteses anteriores garantem — como pode ser demonstrado — que o equilíbrio existe e é único.





O ponto k^* é o equilíbrio do estoque de capital. No diagrama inferior representamos o nível de equilíbrio do consumo c^*.

O modelo de Solow é interessante e possui uma série de implicações importantes. Entretanto, tendo em vista o nosso objetivo de apresentar o modelo neoclássico de crescimento ótimo, deixamos de explorar mais detalhadamente estes aspectos.

Ao invés de admitirmos que o consumo seja uma proporção constante da renda líquida, adotaremos a seguinte hipótese: existe uma função utilidade, U, que depende apenas do consumo *per capita*, c, com as seguintes propriedades: U definida em R_+ é de classe C^2; $U'(c) > 0$; e $U''(c) < 0$.

Neste contexto, a equação básica de movimento é dada por $\dot{k} = f(k) - \lambda k - c$, sendo que agora $\lambda = \mu + \eta$.

O problema de crescimento ótimo pode então ser formulado da seguinte maneira:

$$\text{Maximizar} \int_0^T e^{-\rho t}\, U(c(t))\, dt$$

com:

$$\dot{k}(t) = f[k(t)] - \lambda k(t) - c(t)$$
$$k(0) = k_0$$
$$k(T) = \bar{k}$$

sendo ρ uma taxa de desconto do futuro (em geral, $\rho < 1$) e k_0 e $\bar{k}$ níveis dados do estoque de capital no início e no fim do período. Note-se também que T, o período final, é especificado *a priori*.

Na formulação acima, $c(t)$ — o nível de consumo *per capita* — é a variável de controle, $k(t)$ é a variável estado e a equação de movimento é $\dot{k}$. O valor presente da utilidade do consumo é o funcional a ser maximizado.

Em outras palavras, na formulação acima procura-se determinar uma trajetória de consumo *per capita* que maximize a utilidade ao longo do período em consideração, sujeita à condição de factibilidade dada pela equação de movimento e pelas condições inicial e final.[3]

X.2 — A Equação de Euler

Discutiremos agora a condição necessária para resolver (maximizar ou minimizar) um problema de controle tal como o que apresentamos abaixo:

$$\text{Maximizar (ou minimizar)} \quad J = \int_a^b f\,[t,\, x(t),\, \dot{x}(t)]\; dt$$

com as restrições:

$$x(a) = \alpha$$
$$x(b) = \beta$$

Admitiremos que f é de classe C^2 e que x e $\dot{x}$ são funções contínuas.[4] Suponha-se que $\hat{x}(t)$ é uma trajetória que resolve o problema acima. A equação de Euler requer que $\hat{x}(t)$ satisfaça:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,\, \hat{x}(t),\, \dot{\hat{x}}(t)) - \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t,\, \hat{x}(t),\, \dot{\hat{x}}(t))\right\} = 0$$

onde $\dot{\hat{x}}(t) = \dfrac{d\hat{x}}{dt}$

Escrita de maneira menos compacta, a equação de Euler requer que ao longo da trajetória ótima:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}\, \partial t}(t,\, \hat{x}(t),\, \dot{\hat{x}}(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}\; \partial x}(t,\, \hat{x}(t),\, \dot{\hat{x}}(t))\, \cdot$$

$$\cdot\, \frac{d}{dt}\,\hat{x}(t) - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}(t,\, \hat{x}(t),\, \dot{\hat{x}}(t))\,\frac{d\dot{\hat{x}}}{dt} = 0$$

3 Existem várias aplicações interessantes da teoria de controle a problemas econômicos. Por exemplo, uma aplicação macroeconômica interessante quanto ao problema da dívida externa ótima pode ser encontrada em Guedes (1980).

4 Na verdade, $\dot{x}$ não necessita ser contínua, mas apenas contínua por partes. A hipótese de continuidade acima evita esta questão de continuidade por partes.

Examinemos alguns casos particulares da equação. Suponha-se, inicialmente, que f não dependa explicitamente de $\dot{x}$. Neste caso, temos a condição:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

que é a mesma do problema de otimização estática. Isto pode ser entendido se imaginarmos que a ausência de $\dot{x}$ na função objetivo equivale a retirar a ligação entre os vários "tempos distintos", transformando o problema dinâmico numa série de problemas estáticos.

Se f não depende explicitamente de x, a equação de Euler é:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \dot{\hat{x}}} (t, \dot{\hat{x}} (t)) \right\} = 0$$

Integrando esta equação diferencial, obtém-se:

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\hat{x}}} (t, \hat{x} (t)) = constante$$

Se f não depende explicitamente de t, então temos, como apresentado a seguir, a versão da equação de Euler. Observe-se inicialmente que:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\hat{x}}} \frac{d\dot{\hat{x}}}{dt}$$

Pela equação de Euler, obtém-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\hat{x}}} \right)$$

e, portanto:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\hat{x}}} \frac{d\dot{\hat{x}}}{dt} \right)$$

Integrando esta última equação, vem:

$$f(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = \frac{\partial f}{\partial \dot{\hat{x}}}\Big((\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\Big) \cdot \frac{d\dot{\hat{x}}}{dt} + \textit{constante}$$

Como ilustração, procuremos caracterizar a equação de Euler para o problema do crescimento ótimo discutido na seção anterior:

$$\text{Maximizar} \int_0^T e^{-\rho t}\, U(c(t))\, dt$$

com:

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= f[k(t)] - \lambda k(t) - c(t) \\ k(0) &= k_o \\ k(T) &= \bar{k} \end{aligned}$$

Este problema pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\text{Maximizar} \int_0^T e^{-\rho t}\, U(f(k(t)) - \lambda(k(t)) - \dot{k}(t))\, dt$$

com:

$$\begin{aligned} k(0) &= k_o \\ k(T) &= \bar{k} \end{aligned}$$

A equação de Euler impõe que a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\frac{\partial h}{\partial k} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial h}{\partial \dot{k}}\right\}$$

sendo $h(t, k, \dot{k}) = e^{-\rho t}\, U(f(k) - \lambda k - \dot{k})$.

Portanto, temos o seguinte:

$$\frac{\partial h}{\partial k} = e^{-\rho t} \,.\, U' \,.\, (f' - \lambda)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial \dot{k}} = \frac{d}{dt}\{-e^{-\rho t}U'\} = \rho e^{-\rho t}U' - e^{-\rho t}U'' \cdot (f'\dot{k} - \lambda\dot{k} - \ddot{k}) =$$

$$= \rho e^{-\rho t}U' - e^{-\rho t}U''\dot{c}$$

sendo $\ddot{k} = \dfrac{d\dot{k}}{dt}$.

Finalmente, a equação de Euler é:

$$\dot{C}(t) = -\frac{U'}{U''}[f'(k(t)) - (\lambda + \rho)]$$

Procuremos explorar o conteúdo econômico desta condição. Se chamarmos $q = U'(c)$, podemos identificar q com o "valor" da taxa de acumulação de capital para a economia. Note-se que $\dot{k} = f(k) - \lambda k - c$ e, portanto, dado k, se desejarmos aumentar a taxa de acumulação de capital num determinado instante, sacrificamos o nível de consumo por um montante equivalente. Neste sentido, q pode ser interpretado como o "valor" — ou o "preço-sombra" — da acumulação de capital.

Observe-se agora que:

$$\dot{q} = U''(c) \cdot \dot{c}$$

e, portanto:

$$\frac{q}{q} = \frac{U''(c)}{U'(c)} \cdot \dot{c}$$

Desta maneira, a equação de Euler nos dá:

$$f'(k) + \frac{\dot{q}}{q} = \lambda + \rho$$

Esta expressão é mais simples de interpretar.

O lado esquerdo é o valor, para a sociedade, de manter uma unidade de capital: o produto marginal do capital mais o ganho de capital associado. O lado direito é o custo marginal de se reter capital: λ, que é um fator de depreciação mais o crescimento da força de trabalho, e ρ, que é o custo dos juros (ou seja, do sacrifício de consumo presente com vistas ao consumo futuro).

Portanto, podemos ver que a equação de Euler, no contexto do modelo, tem um significado econômico interessante, pois dá uma versão dinâmica para uma igualdade bem conhecida nos modelos estáticos.

Com esta ilustração simples do uso da equação de Euler, encerramos nossa breve introdução aos métodos de otimização dinâmica. Infelizmente, como já havíamos mencionado, o instrumental matemático desenvolvido nos primeiros capítulos do texto não nos permite ir muito além do que fizemos acima.

BIBLIOGRAFIA

ARROW, Kenneth J., e ENTHOVEN, Alain C. Quasi-concave programming. *Econometrica, 29* (4), out. 1961.

ARROW, Kenneth J., e HAHN, F. H. *General competitive analysis.* San Francisco, Holden-Day, Inc., 1971.

ARROW, Kenneth J., e KURZ, Mordecai. *Public investment: the rate of return and optimal fiscal policy*. Baltimore and Londón, John Hopkins University Press, 1970.

BARTLE, R. G. *The elements of real analysis*. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1976.

BRANDÃO, Antonio Salazar P., e SCHUH, G. E. *Entrepreneurial talent, sharecropping, resource allocation and land ownership.* Staff Paper Series. Department of Agricultural and Applied Economics, University of Minnesota, nov. 1979.

CASS, David, e SHELL, Karl. *The Hamiltonian approach to dynamic economics.* New York, Academic Press, 1976.

DEBREU, G. Definite and semidefinite quadratic forms. *Econometrica,* abr. 1952.

———. *Theory of value: an axiomatic analysis of economic equilibrium*. Monograph, 17. Cowles Foundation, 1959.

FISHBURN, Peter C. *Mathematics of decision theory*. The Hague, Paris, Mouton, 1972.

FLEMMING, Wendell H. *Functions of several variables*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1977.

GUEDES, Paulo. Dívida externa e a estrutura do balanço de pagamentos no modelo neoclássico agregado real de crescimento ótimo. *Revista Brasileira de Economia, 34* (3), jul./set. 1980.

HADLEY, G. *Algebra linear*. Rio de Janeiro, Forense Universitária, 1967.

INTRILIGATOR, M. D. *Mathematical optimization and economic theory*. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1971.

LIMA, Elon Lages. *Análise no espaço R^n*. Brasília, Editora da Universidade de Brasília, 1970.

———. *Curso de análise*. Rio de Janeiro, CNPq/Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.

———. *Espaços métricos*. Rio de Janeiro, CNPq/Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.

———. *Curso de análise*. Vol. 2. Rio de Janeiro, CNPq/Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1981.

NEGISHI, T. *General equilibrium theory and international trade*. Amsterdam-London, North-Holland Publishing Company, 1972.

NEWMAN, Peter. Some properties of concave functions. *Journal of Economic Theory, 1*, 1969.

NIKAIDO, H. *Convex structures and economic theory*. New York, Academic Press, 1968.

———. *Introduction to sets and mappings in modern economics*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1975.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* Editora Interciência, 1977.

RUDIN, W. *Principles of mathematical analysis.* New York, McGraw-Hill, 1964.

SAMUELSON, Paul A. *Foundations of economic analysis.* New York, Atheneum, 1971.

SILBERBERG, Eugene. *The structure of economics: a mathematical analysis.* New York, McGraw-Hill Book Company, 1978.

SIMONSEN, Mario Henrique. *Análise convexa.* Mimeo. Rio de Janeiro, FGV/Escola de Pós-Graduação em Economia, 1980.

TAKAYAMA, A.. *Mathematical economics.* Hinsdale, Dryden-Press, 1974.

PROGRAMA NACIONAL DE PESQUISA ECONÔMICA (PNPE)

Criado em 1973, o PNPE tem como finalidade precípua estimular a produção científica, através da promoção da pesquisa acadêmica individual na área de Economia. As entidades promotoras do PNPE são: Instituto de Planejamento Econômico e Social — IPEA, Financiadora de Estudos e Projetos — FINEP, Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social — BNDES, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística — IBGE e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico — CNPq. A princípio, o Programa foi administrado pelo antigo BNDE e, a partir de 1975, passou a ser gerido pelo IPEA/INPES.

CONSELHO DIRETOR DO PNPE:

Presidente: *José Flávio Pécora* (Secretário-Geral da SEPLAN e Presidente do IPEA)

Gerson Edson Ferreira Filho (Presidente da FINEP)

Jessé de Souza Montello (Presidente do IBGE)

Luiz Antonio Sande de Oliveira (Presidente do BNDES)

Lynaldo Cavalcanti de Albuquerque (Presidente do CNPq)

José Augusto Arantes Savasini (Superintendente do Instituto de Planejamento — IPLAN/IPEA)

Luiz Paulo Rosenberg (Superintendente do Instituto de Pesquisas — INPES/IPEA e Secretário-Executivo do PNPE)

SÉRIE PNPE

1 – FUNDAMENTOS DA POLÍTICA PÚBLICA – Jorge Vianna Monteiro

2 – OS SALÁRIOS NA TEORIA ECONÔMICA – Roberto Macedo

3 – ANÁLISE MATEMÁTICA: UM TEXTO PARA ECONOMISTAS – Antonio Salazar Pessôa Brandão

4 – PROGRAMAÇÃO LINEAR: CONCEITOS E APLICAÇÕES – Edgar Augusto Lanzer

5 – MOEDA E SISTEMA FINANCEIRO NO BRASIL – André Franco Montoro Filho

6 – ANÁLISE MACROECONÔMICA: UM TEXTO INTERMEDIÁRIO – Edmar Lisboa Bacha

IMPRESSO NO CENTRO
DE SERVIÇO9S GRÁFICOS DO IBGE