PROGRAMA NACIONAL DE PESQUISA ECONÔMICA

Série Fac-Símile nº 37

A TEORIA DO EQUILÍBRIO GERAL E A PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA COM UM NÚMERO INFINITO DE BENS

A. Araujo

(Versão apresentada ao PNPE em fevereiro de 1990)

RIO DE JANEIRO

MARÇO - 1990

Os trabalhos reproduzidos na Série Fac-Símile são produto de pesquisas financiadas pelo PNPE. Os textos não são submetidos a nova revisão dos autores e representam a cópia fiel dos originais datilográficos entregues ao INPES/IPEA por ocasião do término dos projetos.

PROGRAMA NACIONAL DE PNPE PESQUISA ECONÔMICA

ÍNDICE

A TEORIA DO EQUILÍBRIO GERAL E A PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA COM UM NÚMERO INFINITO DE BENS

A. Araujo

IMPA

1989

Como é sabido, prosseguindo o trabalho de Walras, Wald e outros, Arrow e Debreu desenvolveram um modelo e provaram a existência de um equilíbrio para uma economia competitiva com um número finito de bens. Posteriormente muitas outras propriedades do equilíbrio geral com um número finito de bens foram desenvolvidas e generalizadas. Mais recentemente, porém, os economistas vêm trabalhando com situações que envolvem um número infinito de bens. Tal situação se dá, por exemplo, quando temos um horizonte infinito. Como já foi demonstrado por Cass e Shell um número infinito de período é imprescindível nos modelos monetários, por exemplo, pois se tivermos uma moeda como reserva de valor e um número finito de períodos ela não vale nada no último o que por sua vez acarreta que não vale nada no penúltimo e assim sucessivamente até que ela desapareça por completo da economia. Outra situação que motivou um número infinito de bens são os modelos de finanças que têm um número infinito de estados de natureza. Outros exemplos com um número infinito de bens são os problemas de crescimento ótimo.

Anteriormente já havíamos estudado a questão de existência de paretos ótimos e da existência de funções de demanda com um número infinito de bens. Nosso objetivo aqui é o de estudar a questão de existência de equilíbrios com um número infinito de bens. Anteriormente demonstramos ser necessário a condição de impaciência dos agentes economicos para a existência de ótimos de Pareto, pré-requisito para a obtenção do equilíbrio. Os resultados obtidos até recentemente para a existência de equilíbrio, além de impaciência, requeriam condições muito fortes.

No segundo trabalho a seguir demonstramos, contudo, que em certas situações a dificuldade de se obter equilíbrio se complica sobremodo. Assim, é por exemplo o caso dos modelos de finanças que recentemente vem obtendo ampla aceitação.

Tais modelos baseiam-se em modelar os preços das ações como movimento Browniano que supõe um número infinito de bens por se tratar de modelo de tempo contínuo. Neste caso mostramos que o equilíbrio não existe para a quase totalidade dos casos.

Tal resultado coloca um problema grave para a aceitação teórica destes modelos.

No terceiro trabalho apresentado abaixo estudamos a questão da programação matemática com um número infinito de variáveis. Para tal utilizamos os métodos matemáticos desenvolvidos para o estudo dos ítens anteriores.

Finalmente estudamos a questão da diferenciabilidade da função política e da função valor encontrado em Programação Dinâmica.

EQUILÍBRIO SEM CONDIÇÕES UNIFORMES

A. Araujo e P. K. Monteiro

Instituto de Matematica Pura e Aplicada
Estrada Dona Castorina, 110
22.460 - Rio de Janeiro. R.J. - Brasil

* Uma versão muito simplificada deste trabalho, Araujo-Monteiro [5], foi apresentada e distribuida em um seminario na MSRI em outubro de 1985. Os autores agradecem os comentarios dos participantes, particularmente, A. Mas-Colell, W.Zame, C.D. Aliprantis e D.Duffie. A.Araujo agradece ao P.N.P.E. pelo apoio financeiro.

Provamos neste trabalho dois teoremas sobre a existência de equilíbrio geral. No primeiro. supomos propriedade pontual da preferência nas alocações ótimas de Pareto. Por exemplo, para sustentar uma alocação ótima de Pareto necessitamos supor propriedade somente na própria alocação. Nosso segundo teorema trata o caso de utilidades separáveis. Com esta assertiva provamos a existência de equilíbrio supondo propriedade somente nas dotações iniciais. *Journal of Economics Literature*, número de Classificação: 021.

§1 Introdução

Ultimamente tem havido um crescente interesse pelo estudo de problemas econômicos com um número infinito de bens. Há várias motivações econômicas para este trabalho. como em: modêlos de finanças em que os retornos são estocásticos. Duffie-Huang [9]: modêlos de diferenciação de produtos Mas-Colell [13], Jones [11]. O estudo abstrato de equilíbrio geral com um número infinito de bens remonta pelo menos a Debreu [7] que apresenta um tratamento geral e elegante do problema mas faz a forte suposição de interioridade não vazia do conjunto de produção. Depois disso, Bewley [6] mostra um tratamento completo do caso L^∞. Mais recentemente, Mas-Colell considera o problema em espaços de Banach gerais, sem suposições de interioridade. Para demonstrar a existência de equilíbrios Mas-Colell faz uma suposição interessante mas, em alguns casos, forte qual seja a de propriedade uniforme das preferências. A principal meta deste trabalho é atenuar a suposição de Mas-Colell para uma suposição de propriedades pontuais simples. uma condição que não pode ser dispensada como mostra um exemplo. Para tornar clara a distinção entre o nosso trabalho e o de Mas-Colell gostaríamos de citar um resultado de Richard e Zame [17] que diz que qualquer preferência que satisfaz a condição de propriedade uniforme admite uma extensão para um conjunto com interior não vazio que contém o ortante positivo. Por isso, se uma preferência for dada por uma utilidade que satisfaz uma condição do tipo Inada, muito comumente usada em teoria do crescimento, i.e. uma derivada infinita em zero não pode ser infinitamente própria e por isso não é comumente tratada na literatura.

Concluindo: Em Araujo [3] provamos que se requer impaciência dos consumidores para obter-se a existência de pontos ótimos de Pareto. Neste trabalho, aperfeiçoando um resultado de Mas-Colell [14], mostramos que para obter-se os equilíbrios Walrasianos necessita-se de muito pouco além dessa impaciência, pelo menos em $L_p(1 \leq p \leq \infty)$.

A segunda meta deste trabalho é tratar explicitamente o caso de utilidade separavel. A motivação disto é o grande emprego de utilidade esperada em incerteza e utilidade descontada usada em crescimento e finanças. Para este caso, obtemos existência apenas com condições nas dotações iniciais, que são muito mais fáceis de conferir.

Este trabalho está formalmente organizado como se segue. Na seção 2 introduzimos notações e fatos básicos. A seção 3 destina-se ao principal resultado: existência sem condições uniformes. Na seções 4 estudamos o caso de utilidade separavel e obtemos um teorema que faz suposições apenas na dotações inicial, uma condição que pode ser facilmente conferida na prática.

Para terminar esta Introdução gostaríamos de mencionar alguns trabalhos recentes no campo.

Zame [20], usando métodos diferentes, amplia o trabalho de Mas-Colell para o caso de produção. Usamos algumas de suas técnicas em nosso trabalho. Aliprantis, Brown e Burkinshaw [2] estudam o caso de equilíbrios de Edgeworth. Entretanto, ambos os trabalhos usam a suposição de Mas-Colell de propriedade uniforme.

§2 Notação e fatos básicos

Supomos que o leitor conhece os fatos básicos sobre espaços de Riesz. Tudo o que necessitamos encontra-se em Peressini [16] ou em Aliprantis e Burkinshaw [1].

Dizemos que o espaço de Riesz (E, τ) é completo segundo Dedekind se qualquer subconjunto de E limitado na ordem tem um supremo em E e a topologia τ é contínua em relação à ordem se $x_1 \geq 0$, $i \in I$ é uma rede decrescente para zero então $x_i \xrightarrow{\tau} 0$.

Necessitamos da

Proposição 1. *Se (E, τ) é um reticulado localmente convexo então (i) e (ii) são equivalentes:*

i) E é completo segundo Dedekind e τ é contínua em relação à ordem *ii) todos os intervalos de E/τa são $\sigma(E, E')$ compactos.*

Para uma demonstração, veja [1] p. 159.

A proposição que se segue, introduzida em economia por Zame [20] será usada posteriormente.

Proposição 2. *Se (E, τ) é um espaço de Riesz localmente sólido com cone positivo Λ, então*

i) para todo $\omega \geq 0, \rho$, o funcional de Minkowski de $[-\omega, \omega]$, define uma norma em $K(\omega) = \bigcup_{r>0} r[-\omega, \omega]$ tal que ω é um ponto interior de $K(\omega) \cap \Lambda$ e $\{\pi : K(\omega) \to \mathrm{R} : \pi \geq 0$, linear$\}$ é $\sigma(K'(\omega, K(\omega))$ compacto.

ii) a topologia induzida por τ em $K(\omega)$ é mais fraca do que a topologia da norma definida por ρ.

Demonstração: (i) Use a proposição 4, p. 118 de Peressini e o fato de que as bolas na norma definida por ρ são os intervalos $r[-\omega, \omega]$, $r > 0$ e desse modo fica claro que ω é um ponto interior de $K(\omega) \cap \Lambda$. Fica clara também disto, a validade da última exigência de (i). (ii) Necessitamos apenas usar o fato de que os intervalos são τ limitados. Q.E.D.

Seja $\mathcal{E} = (X_i, \succeq_i, \omega_i)_{i=1}^{I}$ uma economia com espaço de bens E onde para cada consumidor i, $X_i \subset E$, i, $X_i \subset E$ é o conjunto de consumo, $\succ$ é sua relação de preferência e $\omega_i \in X_i$ é sua dotação inicial. Denotamos por ω a soma $\sum_{i=1}^{I} \omega_i$.

Suponhamos que E é ordenado. Uma alocação é $x = (x_1, \ldots, x_I)$ onde $x_i \in X_i$ para todo i. Uma alocação é factivel se $\sum_i x_i = \omega$ e x é factivel com livre disponibilidade se $\sum_i x_i \leq \omega$. Uma alocação factivel é ótima de Pareto se não existir uma alocação factivel y com $y_i \succ_i x_i$ para todo i. Se x for ótima de Pareto, então ela é individualmente racional se $x_i \succeq_i \omega_i$ para todo i.

Um quase-equilíbrio em $\mathcal{E}$ é uma alocação factivel x e um preço $p \neq 0$, um funcional linear em E, tal que $px_i \leq p\omega_i$ para todo i, e se $y \succ_i x_i$ então $py \geq p\omega_i$. Se também $y \succ_i x_i$ implica $py > p\omega_i$ $1 \leq i \leq I$, dizemos que (x, p) é um equilíbrio. Dizemos que $p \neq 0$, linear em E, sustenta a alocação x se para cada i, $y \succeq_i x_i$ implica $py \geq px_i$. As definições de quase-equilíbrio, equilíbrio e ótimo de Pareto, com livre disponibilidade, são as mesmas onde em vez de alocações factiveis, usamos alocações factiveis com livre disponibilidade.

Supomos sempre que as relações de preferência são completas e transitórias. Uma relação de preferência $\succeq$ com um conjunto de consumo $X \subset E$, E ordenado e com uma topologia τ:

a) é estritamente monótona se $x \geq y$ $x \neq y$ $x \geq y$ $x \neq y$ em X implica $x \succ$

b) é contínua se $\succeq$ é um subconjunto τ fechado de $X \times X$

b') é τ semicontínua superiormente se para todo $y \in X$, $\{x; x \succeq y\}$ é τ fechado

c) é fracamente convexa se $\{x; x \succeq y\}$ é convexa para todo y

d) é convexa se $x \succ y$ implica $rx + (1-r)y \succ y$, $0 < r < 1$

e) é não saciável em $A \subset X$ se para $a \in A$ há $x \in X$ tal que $x \succ a$

f) tem uma representação de utilidade se há $u: X \to \mathbf{R}$ tal que $x \succeq y$ se e somente se $u(x) \geq u(y)$.

§3 Quase-equilíbrio sem propriedade uniforme

Nesta seção demonstraremos um teorema sobre a existência de quase-equilíbrio, fazendo suposições de propriedade somente nos pontos ótimos de Pareto individualmente racionais. Esta é uma generalização importante posto que propriedade uniforme é uma forte restrição. Ela é útil também por ser mais fácil de conferir: o conjunto de pontos ótimos de Pareto individualmente racionais usualmente é muito pequeno.

Começamos com o Lema 1:

Lema 1. *Seja $\mathcal{E} = (X_i, \succeq_i, \omega_i)_{i=1}^I$ uma economia com E como espaço de bens. Suponhamos que E é um reticulado ordenado pelo cone Λ e tem uma topologia τ.*

Suponhamos:

a) o conjunto de alocações factiveis com livre disponibilidade é τ compacto

b) X_i é convexo, τ fechado, $X_i \subset \Lambda$, $\omega_i \in X_i$ $1 \leq i \leq I$

c) $\succeq_i$ *é* τ *contínuo superiormente e contínuo em alguma topologia linear*

d) $\succeq_i$ *é convexo*

e) $\succeq_i$ *é não saciável no conjunto* $X_i' = \{x \in X_i;$ *existe uma alocação factível* y *com* $y_i = x\}$. *É claro que* X_i' *é* τ *compacto e então existe* $a_i \succ_i X_i'$.

Então se $v \geq \omega$ e $a_i \in K(v)$ para todo i, a economia $\mathcal{E}_v = (X_i \cap K(v); \succeq_i \cap (K(v) \times K(v)), \omega_i)_{i=1}^I$ tem um quase-equilíbrio (com livre disponibilidade) $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots \overline{x}_I)$, $\pi: K(v) \to \mathbf{R}$, $\pi \geq 0$, $\pi \neq 0$, $(\pi v = 1)$ e $\pi(\omega - \sum_i \overline{x}_i) = 0$.

Observação: Poderíamos substituir (d) por convexidade fraca se fizermos a suposição de que para todo $x \in X_i'$ e $\varepsilon > 0$, $(x + [-\varepsilon v, \varepsilon v]) \cap \{z; z \succ_i x\} \neq \varphi$, $\varepsilon > 0$, $(x + [-\varepsilon v, \varepsilon v]) \cap \{z; z \succ_i x\} \neq \phi$.

Não provaremos este lema porque sua demonstração é similar a muitas outras já publicadas, como Bewley [6] ou Zame [20]. Comparando com o teorema 2 de Zame [20] não fazemos suposições de interioridade relativas aos conjuntos de consumo. A hipótese de existência pre-dual feita em Florenzano [10] não é útil aqui.

Este lema é uma ferramenta importante para a nossa demonstração do Teorema 1. Ele é também um teorema muito geral sobre existência de quase-equilíbrio nos subespaços $K(v)$ de E.

A relação de preferência $\succeq$ com espaço de bens (E, τ)

a) é M própria (MP) em $x \in X$ se há $v \in E$ e $0 \in U \in \tau$ tais que se $r > 0$ e $x - rv + rz \succeq x$ então $z \notin U$.

b) YZ própria (YZP) em $x \in X$ se há $v \in E$ e $0 \in U \in \tau$ tais que se $r > 0$ é pequeno e $x' = x + rv - rz \in X$ $z \in U$ então $x' \succeq x$.

Geometricamente MP exige a existência de um cone com interior não vazio, situado abaixo do conjunto de indiferença. YZP requer, semelhantemente, a existência de um cone com interior não vazio, apontando para dentro do conjunto de indiferença.

As versões uniformes (UMP e $UYZP$) correspondem às versões pontuais onde U e $v/125$ são independentes de x.

Seja (E, τ) um reticulado localmente convexo e $\mathcal{E} = (X_i, \succeq_i, \omega_i)_{i=1}^I$ uma economia com espaço de bens E com cone positivo Λ.

Suponhamos que:

I E é completo segundo Dedekind e τ é contínua em relação à ordem

II $X_i = \Lambda$. $\omega_i \geq 0$ $1 \leq i \leq I$

III $\succeq_i$ é convexo, τ contínuo e não saciável em $[0, \omega]$

IV $\succeq_i$ satisfaz YZP em cada um dos pontos ótimos de Pareto individualmente racionais e $v_i \in K(\omega) \cap \Lambda$.

V $\overline{K(\omega)} = E$.

Então $\mathcal{E}$ tem um quase-equilíbrio $(\overline{x}, \overline{\pi})$ e $\overline{\pi} \in E'$.

Observamos que diante de (V) a hipótese $v_i \in K(\omega)$ feita sem perda de generalidade.

Antes de demonstrarmos o teorema faremos alguns comentários sobre as hipóteses VI. V, I. A hipótese IV é nosso ponto principal e é um enfraquecedor substancial de UMP. Entretanto não trataremos de casos como $ca(k)$.

Posto que necessitamos também de V. Isto não é devido à demonstração porque os ítens I a IV não são suficientes para garantir a existência de um quase-equilíbrio em E que não seja zero em $K(\omega)$ (por exemplo $u(x_1, x_2) = v(x_1) + \sqrt{x_2}$ $\omega = (1, 0)$). Observamos também que se $\overline{K(\omega)} \neq E$ existe um quase-equilíbrio: tomemos $\varphi \in E'$ $\varphi \neq 0$ tal que $\varphi(K(\omega)) = \{0\}$. Há um $a \geq 0$ com $\varphi(a) \neq 0$ e podemos supor $\varphi(a) > 0$. Então $\pi = \varphi \vee 0$ é um quase-equilíbrio.

Quando $w \geq 0$ é tal que $\overline{K(\omega)} = E$ dizemos que w é um ponto quase interior de Λ. Em todos os reticulados de Banach separáveis o quase interior é denso em Λ. Nos espaços $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ $1 \leq p < \infty$ o quase interior é o conjunto de funções estritamente positivas. No espaço $ca(K)$ de medidas contavelmente aditivas com incontavel K, que é não separavel, o quase interior é vazio. Por isso os aperfeiçoamentos do nosso teorema são menos claros neste caso.

Nossa hipótese I garante a fraca compacticidade do conjunto de alocações factiveis. Nesta situação com conjuntos de consumo particulares não necessitamos supor que (E, τ) seja sub-reflexiva (ver Araujo [4] para o caso com conjuntos de consumo em geral).

Vamos demonstrar o Teorema 1.

Demonstração: Segue-se de I e da proposição 1, que os intervalos de E são $\sigma(E, E')$

compactos. Segue-se de III que existe $a_i \succ_i [0,\omega]$ e de V que $a_i \in K(\omega)$, sem perda de generalidade. Se n^0 é um inteiro suficientemente grande. $a_i \succ_i [0,\omega(1+\frac{I}{n})]$ para $n \geq n^0$ $1 \leq i \leq I$. Pelo Lema 1 existe um quase-equilíbrio de $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{\omega^n}$ onde$\omega_i^n = \omega_i + \frac{1}{n}\omega$. $x^n = (x_1^n, \ldots, x_I^n)$, $\pi^n: K(\omega) \to \mathbf{R}$, $\pi^n \geq 0$, $\pi^n\omega = 1$.

Como $\pi^n\omega_i^n \geq 1/n$ é verdade que x^n é um equilíbrio e por isso é ótimo de Pareto com $x_i^n \succeq_i \omega_i + \frac{1}{n}\omega$. Decorre da compacticidade de $[0,\omega(1+I)]$, pela proposição 2 que existe uma sequência $s_i^{k_n} \to \overline{x}_i\sigma(E,E')$, $\pi^{k_n} \to \pi\sigma(K'(\omega),K(\omega))$. Segue-se de $\sum_i x_i^n \leq \omega + \frac{I}{n}\omega$ que $\sum_i \overline{x}_i \leq \omega$. É fácil ver-se também que $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_I)$ e π são um equilíbrio em $K(\omega)$. Afirmamos que $\overline{x}_i \succeq_i \omega_i$ (não se pode demonstrar isto diretamente porque x_i^n apenas converge fracamente).

Demonstração da afirmação: Se $\{n; \omega_i + \frac{1}{k_n}\omega \succeq_i \omega_i\}$ é infinito então $\{n; x_i^{k_n} \succeq_i \omega_i\}$ é infinito e por isso $\overline{x}_i \succeq_i \omega_i$. Se não, temos que $k_p' = \min\{n \geq p; \omega_i + \frac{1}{k_m}\omega \succeq_i \omega_i + \frac{1}{k_n}\omega$ para todo $m \geq p\}$ é bem definido para todo p. Então $x_i^{k_n} \succeq_i \omega_i + \frac{1}{k_n}\omega \succeq_i \omega_i + \frac{1}{k_p'}\omega$ para todo $n \geq p$. Por isso $\overline{x}_i \succeq_i \omega_i + \frac{1}{k_p'}\omega$ para todo p e então $\overline{x}_i \succeq \omega_i$ o que termina a demonstração da afirmação.

Se y é uma alocação factivel com $y_i \succ_i \overline{x}_i$ $1 \leq i \leq I$, temos eventualmente que $y_i \succ_i x_i^{k_n}$ para todo i. Como $\sum_i y_i \leq \omega \leq \omega + \frac{1}{k_n}\omega$ temos uma contradição. Portanto podemos usar IV quando $\overline{x}$ é um ótimo de Pareto individualmente racional e então existe $0 \in U_i \in \tau$ sólido e $v_i \geq 0$ $v_i \in K(\omega)$ dado por YZP em $\overline{x}_i$.

Seja $U = \sum_{i \leq I} U_i$. Se $z \in U \cap K(\omega)$ há $r > 0$ tal que $|z| \leq r\omega = \sum_i r\overline{x}_i + r(\omega - \sum_i \overline{x}_i)$.

Pela propriedade de decomposição há $0 \leq a_i \leq \overline{x}_i$ $1 \leq i \leq I$, $0 \leq b \leq \omega - \sum_i \overline{x}_i$ tal que $|z| = \sum_i ra_i + rb$. Segue-se de YZP e U sólido que $ra_i \in U$ e $\overline{x}_i + \frac{1}{r}(v_i - ra_i) \succeq_i \overline{x}_i$ e portanto $\pi(\overline{x}_i) + \frac{1}{r}(\pi(v_i) - \pi(ra_i)) \geq \pi(\omega_i) = \pi(\overline{x}_i)$ e assim $\pi(v_i) \geq \pi(ra_i)$.

Agora $0 \leq \pi b \leq \pi(\omega - \sum_i \overline{x}_i) = 0$ e então temos $\pi z \leq \pi(|z|) \leq \sum_i \pi v_i$ para todo $z \in U \cap K(\omega)$. Então segue-se que π é τ contínuo em $K(\omega)$ e tem uma extensão $\overline{\pi} \geq 0$, $\overline{\pi} \in E'$. Este $\overline{\pi}$ satisfaz a definição de quase-equilíbrio. Seja $x \succeq_i \overline{x}_i$ então $ra_i + (1-r)x \succ_i \overline{x}_i$. Como $\overline{K(\omega)} = E$ há $x_\alpha \in K(\omega) x_\alpha \to x$ e consequentemente $x_\alpha^+ \in K(\omega) x_\alpha^+ \to x^+ = x$. Eventualmente $ra_i + (1-r)x_\alpha^+ \succ_i \overline{x}_i$. Portanto $r\pi(a_i) + (1-r)\pi x_\alpha^+ \geq \pi(\omega_i)$ e então

$r\overline{\pi}(a_i) + (1-r)\overline{\pi}(x) \geq \overline{\pi}(\omega_i)$ e fazendo $r \to 0$, $\overline{\pi}x \geq \overline{\pi}\omega_i$. É claro que $\overline{\pi}\overline{x}_i = \overline{\pi}\omega_i$ o que completa a demonstração. Q.E.D.

O leitor pode observar que a idéia de usar propriedade para demonstrar a continuidade do preço de sustentação é a mesma de Zame [20]. Observamos também que MP garante (numa economia com um consumidor) a existência de uma sustentação contínua enquanto YZP implica a continuidade de cada sustentação em $K(\omega)$.

O teorema que se segue mostra mais convincentemente a diferença entre nossa hipótese de propriedade pontual e a hipótese UMP.

Teorema 2. *Seja $\mathcal{E} = (\Lambda, \succeq_i, \omega_i)_{i=1}^I$ uma economia com espaço de bens E, um reticulado localmente convexo. Suponhamos que $\succeq_i$ é contínua e convexa. Seja $\overline{x}$ um ótimo de Pareto e suponhamos que YZP vale para $\succeq_i$ em $\overline{x}_i$ com $v_i \in K(\omega) \cap \Lambda$. Suponhamos também que $\overline{K(\omega)} = E$. Então $\overline{x}$ pode ser sustentado por algum $\pi \geq 0$, $\pi\omega = 1$. Assim para sustentar uma alocação ótima de Pareto necessitamos apenas de propriedade num ponto. Isto é muito mais fraco do que UMP.*

A demonstração do Teorema 2 é semelhante à do Teorema 1, usando-se o seguinte lema, que pode ser comparado ao Lema 1.

Lema 2. *Seja (E, Λ) um reticulado localmente convexo. Suponhamos que $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_I)$ é um ótimo de Pareto de $\mathcal{E} = (X_i, \succeq_i, \omega_i)_{i=1}^I$. Suponhamos também que*

a) X_i é fechado, convexo, $X_i \subset \Lambda$ e $\omega_i \in X_i$ $1 \leq i \leq I$

b) $\succeq_i$ é contínua

c) $\succeq_i$ é convexa e não saciável em $\overline{x}_i$ com $a_i \succ_i \overline{x}_i$.

Então se $v \geq \omega$, $a_i \in K(v)$ para todo i, $\overline{x}$ pode ser sustentado em $K(v)$ por algum $\pi \geq 0$ $\pi v = 1$.

Demonstração: Definamos $C = \{\sum_{i=1}^{I}(x_i - \overline{x}_i); x_i \succ_i \overline{x}_i \ 1 \leq i \leq I\} \cap K(v)$. C é convexo e não vazio. Pela Proposição 2 (i) e (ii) existe $\pi: K(v) \to \mathbf{R}$ $\pi C \geq \pi(-K(v) \cap \Lambda)$. É claro que $\pi \geq 0$ em $K(v) \cap \Lambda$ e $\pi v \neq 0$. Portanto podemos supor que $\pi v = 1$. Por um argumento usual π sustenta $\overline{x}$ em $K(v)$. Q.E.D.

As seguintes inclusões são verdadeiras UMP $=$ UYZP $\subseteq$ YZP $\subsetneq$ UMP. A última inclusão própria pode ser vista pelo seguinte exemplo.

Exemplo 1: (Richard-Zame [17]). $E = \ell^2$, $\omega = \omega_1 = \omega_2 = (2^{-2n}_{n\geq 1}$. Tomando $\alpha, \beta \in \ell^2_{++}$ linearmente independentes Richard e Zame provam que $\mathcal{E} = (\ell^2_+, (u, \omega_1), (v\omega_2))$ onde $u(x) = \min\{U(x) - U(\omega), \langle \alpha, x - \omega \rangle\}$, $v(x) = \min\{U(x) - U(\omega), \langle \beta, x - \omega \rangle\}$ é uma economia com uma única alocação ótima de Pareto individualmente racional $\bar{x} = (\omega_1, \omega_2)$ tal que não há quase-equilíbrio.

É claro pelo Teorema 1 que YZP falha. Agora MP é válido quando α sustenta ω_1 e β sustenta ω_2. Podiamos dar facilmente uma demonstração direta para mostrar que YZP não é verdadeira: necessita-se apenas observar que $U'(\omega) = (1, 1, \dots)$ sustenta ω_1 em $K(\omega)$ mas é discontinua na norma.

Sabe-se que em dimensão finita com preferências monotônicas, UMP é válida e portanto UYZP também é válida. Mas com preferências em geral, possivelmente não monotônicas, podemos demonstrar apenas MP pontual e isso não garante a validade de YZP. A seguinte proposição mostra que com condições muito gerais é válida em dimensão finita.

Proposição 3. *Seja $X \subset \mathbf{R}^n$ fechado e convexo. Seja $\succeq$ uma relação de preferência em X, contínua, fracamente convexa. Então para todo x em X, ponto não saciavel de $\succeq$, YZP é verdadeiro.*

Demonstração: Seja $M(X)$ um subespaço de $\mathbf{R}^n$ gerado por $X - x$ $x \in X$, (isto é independente de x). Então existe $a \in \dot{X} = \{b \in X;$ para todo $v \in M(X)$ há $t > 0$, $b + tv \in X\}$. Tomemos $z' \succ x$. Então $x' = rz' + (1-r)a \in \dot{X}$ se $0 < r < 1$. Assim se r for próximo de 1, $x' \succ x$. Definamos $v = x' - x$ e U uma vizinhança de 0 tal que $z \in U \cap M(X)$ implica $x' - z \in X$ e $x' - z \succ x$. Seja $1 > r > 0$ e $z \in U$ com $x + rv - rz \in X$. Temos $z \in M(X)$ e então $x + v - z \succ x$ e $x + rv - rz \succeq x$ por convexidade. Q.E.D.

Voltando à demonstração do Teorema 1 podemos ver que a existência de uma base de vizinhança sólida de zero é usada para demonstrar a continuidade da sustentação. O exemplo que se segue (Jones [11]) mostra que não podemos relaxar esta hipótese.

Exemplo 2:

$$E = L^{\infty}[0,1], \quad \tau = \sigma(E, C^1[0,1])\omega_1(t) = 1 - \omega_2(t)$$

$$= \begin{cases} 0 & t \leq 1/2 \\ 1 & t > 1/2 \end{cases} u_1(x) = \int_0^1 tx(t)dt \quad u_2(x)$$

$$= \int_0^1 (1-t)x(t)dt, \quad x \geq 0.$$

Temos UYZP (em τ) mas a única sustentação em (ω_1, ω_2), $qx = \int_0^1 tv(1-t)x(t)dt$ é tal que $q \notin E'$.

§4 O caso separavel

Nesta seção mostramos que para provar a existência de equilíbrio com utilidades separaveis necessitamos apenas de YZP nas dotações iniciais.

Suponhamos que $1 \leq p \leq \infty$, $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $\mu\sigma$. $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $\mu\sigma$-finito. Seja dado $u: L^p_+ \to \mathbf{R}$. Então dizemos que u é separavel se existe $v: \Omega \times [0, \infty) \to [0, \infty]$ mensuravel tal que

i) para cada $t \in \Omega$, $v_t(f) = v(t, f)$ é côncava e estritamente crescente;

ii) para todo $f \in L^p_+$, $u(f) = \int_\Omega v_t(f_t)d\mu(t)$.

Por exemplo se $\Omega = N$ e μ é a medida de contagem então $u(f) = \sum_{t=1}^{\infty} v_t(f_t)$ é separavel.

É fácil ver-se que u é côncava e estritamente monótona. Representemos por v_t^+ a derivada à direita de v_t e por v_t^- a derivada à esquerda de v_t. Nosso objetivo é provar o seguinte

Teorema 3. *Sejam $1 \leq p < \infty$, q tais que $1/p + 1/q = 1$ e seja $\mathcal{E} = (L^p_+, u_i, \omega_i)_{i=1}^I$ uma economia com utilidades separaveis e contínuas na norma u_i. Suponhamos que $\omega_i \in L^p_{++}$ para todo i e que $\left|v_i^-(\omega_i)\right|_q < \infty$ para todo i (*) onde $v_i^-(\omega_i) = (v_{it}^-(\omega_{it}))_{t \in \Omega}$.*

Então $\mathcal{E}$ tem um equilíbrio.

Observemos que a hipótese (*) é a mesma coisa que YZP em ω_i para todo i.

Necessitamos de algumas definições.

Suponhamos que $X \subset E$ é convexo, E um espaço vetorial e $u: X \to \mathbf{R}$ é uma função. Se $x \in X$ definimos $S(x) = \{h \in E$: há $t > 0$, $x + th \in X\}$ e $I(x) = S(x) \cap -S(x)$. Representemos por $u'(x)h$ o limite $\lim_{r\downarrow 0} \frac{u(x+rh)-u(x)}{r}$ quando existe.

Agora damos a

Demonstração do Teorema 3: Pelo Lema 1, $\mathcal{E}$ tem um quase-equilíbrio (f, π) em $K(\omega)$, $f = (f_1, \ldots, f_I)$, $\pi: K(\omega) \to \mathbf{R}$, $\pi \geq 0$, $\pi\omega = 1$.

Agora existe i com $\pi\omega_i > 0$ e como u_i é estritamente monótona, π é estritamente positiva e portanto $\pi\omega_j > 0$ para todo j. Então pelo Lema 5 abaixo existe $\lambda_j > 0$ tal que $u_j(x) - u_j(f_j) \leq \lambda_j\pi(x - f_j)$ para todo $x \in K(\omega)$, $x \geq 0$.

Portanto, dado $h \in S(f_j)$ temos que para qualquer $r > 0$ suficientemente pequeno, $\frac{u_j(f_j+rh)-u_j(f_j)}{r} \leq \lambda_j\pi h$.

Pelo Lema 3 abaixo temos que $u_j'(f_j)h \leq \lambda_j\pi h$. Portanto pelo Lema 4 abaixo concluimos que para todo $h \in I(f_j)$, $h \geq 0$, $\int_\Omega v_{jt}^-(f_{jt})h_t d\mu \geq \lambda_j\pi h$ (**).

Como $\omega_i \in L_{++}^p$ para todo i, temos que $b = \bigwedge_{i\leq I}\omega_i \in L_{++}^p$. Então $K(b) = L^p$. Disto concluimos que se π é contínua na norma em $K(b)$ podemos extendê-la para L^p e a extensão é um equilíbrio de $\mathcal{E}$. Então provemos que π é contínua em $K(b)$.

Definimos para cada $j \leq I$, $A_j = \{t \in \Omega, f_{jt} \geq \omega_{jt}\}$. Temos de $\sum_{j\leq I} f_j = \omega$ que $\bigcup_{j\in I} A_j = \Omega$. Tomemos $h \in K(b)$. Então existe $r > 0$ tal que $|h| \leq r\omega_i$ para todo i. Então como $|h|\chi_{A_j} \in I(f_j)$ temos de (**) que $\lambda_j\pi(|h|\chi_{A_j}) \leq \int_\Omega v_{jt}^-(f_{jt})h_t\chi_{A_j}d\mu(t) \leq \int_\Omega v_{jt}^-(\omega_{jt})h_t\chi_{A_j}d\mu(t) \leq |v_j^-(\omega_j)|_q\,|h|_p$.

Portanto concluimos que $|\pi h| \leq \pi|h| \leq \pi(|h|\sum_{j\leq I}\chi_{A_j}) = \sum_{j\leq I}\pi(|h|\chi_{A_j}) \leq \sum_{j\leq I}\frac{|v_j^-(\omega_j)|_q}{\lambda_j}|h|_p$, isto é $\|\pi\| \leq \sum_{j\leq I}\frac{|v_j^-(\omega_j)|_q}{\lambda_j} < \infty$, isto prova a continuidade na norma de π e encerra a demonstração do Teorema 3.

Agora damos os lemas usados na demonstração acima.

Lema 3. *Seja $F: X \to R$ uma função côncava, $X \subset E$ convexo e E um espaço vetorial. Então para todo $x \in X$, $h \in S(x)$*

i) o quociente $g(r) = \frac{F(x+rh)-F(x)}{r}$ cresce quando $r > 0$ decresce

ii) $F'(x)h = \sup\limits_{r>0} g(r)$

iii) se $h \in I(x)$ então $F'(x)h + F'(x)(-h) \leq 0$ e $F'(x)h$ é finito

iv) se $X \subset \mathbf{R}$ então as derivadas de F, $F^-(x)$ à direita e $F^+(x)$ à esquerda são funções decrescentes.

A demonstração do Lema 3 é fácil e não será feita aqui.

Lema 4. *Suponhamos que $u: L^p_+ \to \mathbf{R}$ é separavel. Então para todo $f \in L^p_+$, $h \in S(f)$ temos $\int_\Omega [v_t^+(f_t)h_t^+ - v_t^-(f_t)h_t^-]d\mu(t) = u'(f)h$. Em particular se $h \geq 0$, $h \in I(f)$, temos $u'(f)(-h) = -\int_\omega v_t^-(f_t)h_t d\mu(t)$.*

Demonstração: Temos por definição que $u'(f)h = \lim\limits_{r\downarrow 0} \frac{u(f+rh)-u(f)}{r} = \lim\limits_{r\downarrow 0} \int_\Omega \frac{v_t(f_t+rh_t)-}{r}$

Agora pelo Lema 3 (i), o integrando cresce quando r decresce, portanto pelo teorema da convergência monótona temos que $u'(f)h = \int_\Omega v_t'(f_t)h_t)d\mu(t)$ e isto termina a demonstração do lema.

Lema 5. *Suponhamos que $u: X \to \mathbf{R}$ é côncava e π é uma sustentação de $\omega \in X$ tal que $\pi\omega > \int \pi X$. Então existe $\lambda > 0$ tal que $u(x) - u(\omega) \leq \lambda\pi(x-\omega)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração: A hipótese de que $\pi\omega > \inf \pi X$ implica (pelo argumento usual sobre a existência de ponto de menor despesa) que $u(\omega) = \max_{x\in X, \pi x \leq \pi\omega}$. Este problema de programação côncava satisfaz a condição de Slater para existência de multiplicador de Lagrange e portanto existe $\lambda > 0$ tal que $u(\omega) = \max_{x\in X}(u(x) + \lambda(\pi\omega - \pi x))$ e isto conclui a demonstração.

Observação: Não poderíamos usar o Teorema 1 para demonstrar o Teorema 2 posto que nossa hipótese no Teorema 2 não garante YZP nos pontos ótimos de Pareto individualmente racionais como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 3: $E = \ell^2$ $u_1(x) = \langle \beta, x\rangle + g(x)$ $g(x) = \sum_{t=1}^{\infty} \sqrt{x_t \wedge \omega_t}$ e $u_2(x) = \langle \beta, x\rangle + \sum_{t=1}^{\infty} \sqrt{x_t \wedge a_t}$ $a_t = \omega_t/4$ e $\sum_t \sqrt{\omega_t} < \infty$. $\omega \in \ell^2_{++}$, $\beta \in \ell^2_{++}$. Temos que u_1 e u_2 são separaveis. Definamos a dotação inicial. Para isto definamos $v = (-a, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_3}{2} \dots)$ onde $a = \frac{\beta\omega - \beta_1\omega_1}{2\beta_1}$ faz $\beta v = 0$. Escolhamos $r > 0$ tal que $\omega^1 = \omega + rv \geq 0$ $(\omega_1 - ra > 0)$ e $\omega^2 = \omega - rv \geq \omega/2$. Então temos que $u_1^-(\omega_1) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\omega_1 + rv_1}}, \beta_2, \beta_3, \dots\right) \in \ell^2$ e $u_2^-(\omega_2) = \beta$. Mas (ω, ω) é um ótimo de Pareto individualmente racional com $u^-(\omega) = (\beta_t + \frac{1}{2\sqrt{\omega_t}} \notin \ell^\infty$. A verificação é fácil. E como $u^-(\omega)$ sustenta ω e é descontínua, YZP não pode ser verdadeira.

O exemplo seguinte dá uma ideia de uma função utilidade coberta pelo teorema acima.

Exemplo 4: (Utilidades separaveis). O conjunto de bens é ℓ_p^+ $u(x) = \sum_{t=1}^{\infty} u_t(x_t)$, u_t é c^2, com $u_t'(0) = \infty$, $u_t''(x) < 0$ (como $u_t(x_t) = \delta^t\sqrt{x_t}$, $0 < \delta < 1$).

Os resultados desta seção exigem somente que $\sum_{t=1}^{\infty} (\delta^t u_t(\omega_t))^q < \infty$.

Referências

[1] Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O., "Locally Solid Riesz Spaces", Academic Press, New York and London, 1978.

[2] Aliprantis, C.D., Brown, D.J. and Burkinshaw, O., "Edgeworth Equilibria", a ser publ. em Econometrica.

[3] Araujo, A.P., "Lack of Pareto Optima and Equilibria for Economics with Infinitely Many Goods: the Need for Impatience", Econometrica (1985), 455–462.

[4] Araujo, A.P., "A Note on the Existence of Pareto Optima in Topological Vector Spaces, Econ. Lett. 23 (1987), 5–7.

[5] Araujo, A.P.l and Monteiro. P. K.. "On Walrasian Equilibria in Sequence Economies". vers. prelim.. IMPA, 1985.

[6] Bewley, T., "Existence of Equilibria with Infinitely Many Commodities". J. Econ. Theory 4 (1972), 514–540.

[7] Debreu, G., "Valuation Equilibrium and Pareto Optimum", Proceedings of the National Academy of Science 40 (1954), 588–592.

[8] Debreu, G., "New Concepts and Techniques for General Equilibrium Analysis", Int. Econ. Rev. 3 (1962), 267–263.

[9] Duffie, D. and Huang, C., "Implementing Arrow-Debreu Equilibria by Continuous Tradings of a Few Long-Lived Securities", Econometrica 53 (1985). 1337–1356.

[10] Florenzano, M., "On the Existence of Equilibria in Economies with an Infinite Dimensional Commodity Space", J. Math. Econ. 12 (1983), 207–220.

[11] Jones, L., "A Competitive Model of Product Differentiation", Econometrica 52 (1984a), 507–530.

[12] Jones, L., "Special Problems Arising in the Study of Economies with Infinitely Many Commodities", MEDS Discussion Paper nº 596, Northwerstern University, 1984 b.

[13] Mas-Colell, A., "Model of Equilibrium with Differentiated Commodities". J. Math. Econ. 2 (1975), 263–295.

[14] Mas-Colell, A., "Valuation Equilibrium and Pareto Optimum Revisited". MSRI 00617-86 Berkeley, California, 1985.

[15] Mas-Colell, A., "The Price Equilibrium Existence Problem in Topological Vector Lattices", Econometrica 54 (1986), 1039–1054.

[16] Perissini, A.L., "Ordered Topological Vector Spaces", Harper and Row Publishers, New York, 1967.

[17] Richard, S., Zame, W., "Proper Preferences and Quasiconcave Utility Functions", J. Math. Econ. 15 (1986), 231–247.

[18] Schaeffer, H., "Topological Vector Spaces", Macmillan, New York, 1966.

[19] Yannelis, N. and Zame, W., "Equilibria in Banach Lattices Without Ordered Preferences", J. Math. Econ. 15 (1986), 85–110.

[20] Zame. W., "Competitive Equilibria in Production Economies with an Infinite-Dimensional Commodity Space". Econometrica 55 (1987), 1075.

NÃO-EXISTÊNCIA GENÉRICA DE EQUILÍBRIOS EM MODELOS DE FINANÇAS

A. ARAUJO
P. K. MONTEIRO
1987

RESUMO.

Os modelos de finanças usuais definem os bens como sendo processos estocásticos. Isto sugere L^2 como espaço de bens. é comum também exigir-se que a derivada da função utilidade seja infinita no ponto zero para assegurar soluções quase interiores que permitem deduzir as fórmulas usuais de preços de ativo. O trabalho mostra que sob essas suposições, não existem equilíbrios Walrasianos genericamente nas dotações iniciais.

§I Introdução

Recentemente tem havido muito interesse pelo estudo de modelos de finanças onde os títulos são descritos por um processo estocástico, sendo o movimento Browniano o mais usado. Esses modelos foram alvo de renovado interesse em razão do sucesso obtido pela fórmula de Black e Scholes. A suposição de que o processo estocástico tem variância finita, usualmente feita, conduz a um espaço de bens contido em L^2, o espaço de funções de quadrado integravel. Neste caso o estudo de questões como a existência de equilíbrios

Walrasianos deve ser tratado num contexto de dimensão infinita, o que tem acontecido em muitos trabalhos recentes, como por exemplo em Duffie (1986). Nesse trabalho ele prova a existência de equilíbrios usando as condições de propriedade uniforme nas preferências recentemente introduzidas por A. Mas-Collel.

Entretanto, como Duffie e Zame (1987) assinalaram para obter resultados usados em finanças necessita-se que os equilíbrios sejam alocações com coordenadas estritamente positivas, de modo que se tenha um máximo interior em cada coordenada. Este é o caso, por exemplo, se quer uma caracterização de equilíbrio em termos de condições de primeira ordem usadas tanto por Breeden (1979) como por Huang (1987). Para obter-se essas condições de primeira ordem entretanto necessita-se tipicamente de condições sobre a derivada de primeira ordem da função utilidade de von Neumann-Morgenstern. Contudo neste caso as preferências não satisfazem a condição de Mas-Collel de propriedade uniforme e necessita-se de um teorema mais forte válido para preferências que satisfaçam apenas a condição de propriedade pontual. Teoremas sobre a existência de equilíbrios com este tipo de condição foram obtidos primeiramente por Araujo e Monteiro (1986).

O propósito deste trabalho é entretanto, mostrar que para estes modelos o conjunto de dotações iniciais para o qual a economia não tem um equilíbrio é residual. Isto significa que genericamente os modelos mais úteis de finanças não têm equilíbrios Walrasianos.

Observamos que modelos de preços de ativos exigem soluções em L^2_{++}. Contudo nossos modelos dizem que o conjunto onde existe equilíbrio é de primeira categoria mesmo em L^2_{++}.

Concluindo esta introdução gostaríamos de contrastar o caso de finanças e a teoria do crescimento. Em crescimento, L_∞ é tipicamente usado como espaço de bens. E neste caso para cada dotação inicial estritamente positiva (portanto genericamente) existe equilíbrio.

§II Notações e propriedades básicas de utilidades separáveis

Suponhamos que Ω é um conjunto, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de Ω e μ é uma medida positiva σ-finita. Suponhamos que $1 \leq p \leq \infty$ e $E = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dizemos que uma função $u: E_+ \to \mathbf{R}$, $E_+ = L^p_+(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = L^p_+$ é separavel se existe $v: \Omega \times [0, \infty) \to [0, \infty]$ mensuravel tal que:

i) para cada $t \in \Omega$, $v_t(f) = v(t, f)$ é côncava e contínua em 0;

ii) para cada $t \in \Omega$, v_t é estritamente crescente, $v_t(0) = 0$;

iii) para todo $f \in L^p_+$, $u(f) = \int_\Omega v(t, f_t) d\mu(t)$.

É fácil ver-se que u é côncava, estritamente monótona e (usando o lema de Fatou) semicontínua inferiormente.

Quando for conveniente usaremos a notação $f \geq 0$ em lugar de $f \in L^p_+$.

Definimos para cada $f \in L^p_+$ os conjuntos $S(f) = \{h \in L^p;\text{ existe } t > 0,\ f + th \geq 0\}$ e $I(f) = S(f) \cap -S(f)$.

O seguinte lema, que não será demonstrado é fácil e importante:

Lema 1. *Para todo $f \in L^p_+$ e $F: L^p_+ \to \mathbf{R}$ côncavo, existe para todo $h \in S(f)$ o limite $F'(f)h = \lim_{r \downarrow 0} \dfrac{F(f + rh) - F(f)}{r} = \sup_{r > 0} \dfrac{F(f + rh) - F(f)}{r}$. E se $h \in I(f)$ então $F'(f)h + F'(f)(-h) \leq 0$ e $F'(f)h$ é finita. Pelo Lema 1 podemos definir para todo $t \in \Omega$ $v_t^+(f) = v_t'(f)(1)$ e $v_t^-(f) = -v_t'(f)(-1)$ se $f \in \mathbf{R}_+$ e for verdade que $v_t^+(f) \leq v_t^-(f)$.*

O seguinte lema prova que v_t^+ é semicontínua inferiormente.

Lema 2. *Suponhamos $v: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ é côncava e contínua em 0. Então $v^+: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $v^+(f) = v'(f)(1)$ é uma função decrescente contínua à direita e semicontínua inferiormente.*

Demonstração: É fácil ver que: se $0 \leq a < b < c$ então $\frac{v(b) - v(a)}{b - a} \geq \frac{v(c) - v(a)}{c - a} \geq \frac{v(c) - v(b)}{c - b}$ (*). Agora de (*) segue-se facilmente que $v^+(a) \geq \frac{v(c) - v(a)}{c - a} \geq v^-(c) \geq v^+(c)$ o que prova que v^+ é decrescente. Para demonstrar que v^+ é contínua à direita suponhamos que $b_n > a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. Para todo $c > a$ e n inteiro suficientemente grande tal que $b_n < c$, temos que $v^+(a) \geq v^+(b_n) \geq \frac{v(c)-v(b_n)}{c-b_n}$. Agora da continuidade de v (em 0 por hipótese e em $a > 0$ por causa da finitude de $v^+(a)$ e $v^-(a)$) segue-se que $v^+(a) \geq \limsup_{n\to\infty} v^+(b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} v^+(b_n) \geq \dfrac{v(c)-v(a)}{c-a}$. Agora fazendo $c \to a$ terminamos a demonstração de continuidade à direita de v^+. A semicontinuidade inferior de v^+ decorre imediatamente da continuidade à direita de v^+ e do fato de ser decrescente. Q.E.D.

Suponhamos que F é um espaço vetorial com topologia τ, $X \subset F$ é um conjunto convexo e $U: X \to \mathbf{R}$ é uma função. Um supergradiente de U em $x \in X$ é qualquer funcional linear τ contínuo p tal que $U(y) - U(x) \leq p(y-x)$ para todo $y \in X$. O conjunto de supergradientes de U em x terá a notação $(\partial U)(x)$.

Consideremos agora uma função separavel $U: L^p_+ \to \mathbf{R}$, $p < \infty$. Temos a Proposição 1: Para todo $f \in L^p_+$, $(\partial U)(f) = \{h \in L^q, h_t \in (\partial v_t)(f_t)\mu \text{ a.e.v. } t \in \Omega\}$, $1/p + 1/q = 1$ e

$$(\partial v_t)(x) = \begin{cases} [v_t^+(x), v_t^-(x)] & \text{se } x > 0 \\ [v_t^+(0), \infty) & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Não demonstraremos esta proposição.

Seja $E = (X_i, \succeq_i, w_i)_{i=1}^I$ uma economia com espaço de consumo $E = L^p$, $X_i = L^p_+$ é o conjunto de consumo, $\succeq_i$ é a relação de preferência e $w_i \in X_i$ é a dotação inicial do consumidor i.

$x = (x_1, \ldots, x_I) \in (L^p_+)^I$ é uma alocação. Uma alocação x é factivel se $\sum_i x_i = w$. Uma alocação factivel é ótima de Pareto se não existir uma alocação factivel y com $y_i \succ_i x_i$ para todo i.

Um quase-equilíbrio em E é uma alocação factivel x e um preço $p \neq 0$, $p \in L^q$ tal que $px_i = pw_i$ para todo i, e se $y \succeq_i x_i$ implica $py \geq pw_i$. Se também $y \succ_i x_i$ implica $py > pw_i$, $1 \leq i \leq I$, dizemos que (x, p) é um equilíbrio.

§III O caso de um consumidor

Nesta seção demonstraremos a densidade dos equilíbrios e a genericidade do conjunto de não-equilíbrios para o caso de apenas um consumidor.

Definimos $EQ = \{w \in L^p_+; (u, w)$ tem um equilíbrio $\}$ onde $u: L^p_+ \to \mathbf{R}$ é uma função utilidade separavel.

O seguinte lema é útil:

Lema 3. *Suponhamos que E é um espaço vetorial com cone positivo Λ e topologia τ. Seja $u: \Lambda \to \mathbf{R}$ côncava tal que para todo $w \in \Lambda - \{0\}$, existe $r > 1$ com $u(rw) > u(w)$. Então $\{w \in \Lambda - \{0\}; (u, w)$ tem um equilíbrio $\} = \{w \in \Lambda - \{0\}; (\partial u)(w) \neq \phi\}$.*

Demonstração: Suponhamos $\pi \in (\partial u)(w)$. Se $x \succ w$ (isto é $u(x) > u(w)$) temos $0 < u(x) - u(w) \leq \pi(x - w)$ e assim $\pi x > \pi w$ o que prova que π é um equilíbrio de (u, w).

Suponhamos agora que $w \in \Lambda - \{0\}$ e $\pi \in E'$ é um equilíbrio de (u, w). Tomando $r > 1$ tal que $u(rw) > u(w)$ concluimos que $\pi(rw) > \pi(w)$ e por conseguinte $\pi(w) > 0$. Então fica claro que a condição de Slater é válida no problema $\max_{x \in \Lambda,\ \pi x \leq \pi w} u(x) = u(w)$. Então existe um multiplicador de Lagrange $\lambda > 0$ tal que $\max_{x \in \Lambda} u(x) + \lambda(\pi w - \pi x) = u(w)$. Então $\lambda \pi \in (\partial u)(w)$ o que termina a demonstração do lema. Q.E.D.

Corolário 1. *Suponhamos que $u: L^p_+ \to \mathbf{R}$, $1 \leq p < \infty$ é uma função separavel. Então $EQ = \{0\} \cup \{w \in L^p_+; (v_t^+(w_t))_{t \in \Omega} \in L^q\}$.*

Demonstração: Decorre da Proposição 1 que $\partial u(w) \neq \phi$ se e somente se $(v_t^+(w_t))_{t \in \Omega} \in L^q$. Agora usemos o Lema 3 e a demonstração fica concluída porque $0 \in EQ$ quando $L^q_{++} \neq \phi$. Q.E.D.

Agora demonstremos a densidade do conjunto de equilíbrios.

Teorema 1. *Suponhamos que E é um espaço de Banach, $X \subset E$ é fechado e convexo, $u: X \to \mathbf{R}$ é côncavo e semicontínuo superiormente. Então EQ é denso em X.*

Demonstração: Pelo corolário 6.2, página 32 em Ekeland e Teman, por exemplo, o conjunto $\operatorname{dom}\partial u = \{w \in X; (\partial u)(x) \neq \phi\}$ é denso em X e é claro que $\operatorname{dom}\partial u \subset X$, o que termina a demonstração. Q.E.D.

O teorema seguinte é o nosso principal resultado nesta seção e inclui o caso usual em que $v_t^+(0) = \infty$ para todo $t \in \Omega$.

Teorema 2. *Suponhamos que $1 \leq p < \infty$, $u: L_+^p \to \mathbf{R}$ é uma utilidade separável. Suponhamos também que existe $C_n \in \mathcal{A}$ com $C_n \downarrow$ tal que $\left|\chi_{C_n}(v_t^+(0))_{t\in\Omega}\right|_q = \infty$ para todo n. (*) Então EQ é de primeira categoria em L_+^p.*

Demonstração: Definamos $A_N = \{w \in L_+^p; \left|(v_t^+(w_t))_{t\in\Omega}\right|_q > N\}$. Afirmamos que esse conjunto é aberto e denso em L_+^p. É aberto porque se $w^n \geq 0$, $w^n \to w$ em L^p com $\left|(v_t^+(w_t^n))_{t\in\Omega}\right|_q \leq N$ tomamos uma subseqüência $w \xrightarrow{k_n} w\mu$ a.s. e temos se $q \neq \infty$ pelo lema de Fatou e pelo Lema 2 que $\left|(v_t^+(w_t))_{t\in\Omega}\right|_q \leq \liminf_{n\to\infty} \left|(v_t^+(w_t^{k_n}))_{t\in\Omega}\right|_q \leq N$ e se $q = \infty$ definimos $\Omega_n = \{t \in \Omega; v_t^+(w_t^{k_n}) \leq N\}$, $\mu(\Omega_n^c) = 0$ por hipótese. Por conseguinte $\{t \in \Omega; v_t^+(w_t) \leq N\} \supset \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \Omega_n$ é verdadeiro em razão da continuidade à direita de v_t^+ e de $\mu((\bigcap_n \Omega_n)^c) = 0$ decorre que $\left|(v_t^+(w_t)_{t\in\Omega}\right|_\infty \leq N$. Em qualquer caso fizemos a prova de que $w \notin A_N$, o que termina a demonstração de que A_N é aberto. Ele é denso porque se definimos $w^n = w - w\chi_{C_n} \geq 0$, temos $w^n \to w$ em L^p e de $\left|(v_t^+(w_t^n))_{t\in\Omega}\right|_q \geq \left|\chi_{C_n} \circ (v_t^+(0))_{t\in\Omega}\right|_q = \infty$ que $w^n \in A_N$ para todo n. Assim $\bigcap_{N\in\mathbf{N}} A_N$ é de segunda categoria. Como $EQ \subset (\bigcap_{N\in\mathbf{N}} A_N)^c \cup \{0\}$ temos que EQ é de primeira categoria em L_+^p. Q.E.D.

Observação: No caso em que $v_t^+(0) = \infty$ para μ a.s. $t \in \Omega$ a condição (*) reduz-se a: existe $C_n \in \mathcal{A}$, $C_n \downarrow \phi$ com $\mu(C_n) > 0$ para todo n o que é verdadeiro em qualquer espaço L^p de dimensão infinita.

§IV O caso geral de um número finito de consumidores

Enunciamos inicialmente um teorema de existência de equilíbrio.

Teorema 3. *Seja* $\mathcal{E} = (L^p_+, u_i, w_i)_{i=1}^I$ *uma economia com utilidades separáveis contínuas* u_i, $w_i \neq 0$, $1 \leq i \leq I$ *e* $w = \sum_{i=1}^{I} w_i \in L^p_{++}$.

Suponhamos que

i) $v_i'(t, 0) = \infty$ μ *a.s.* $t \in \Omega$, $1 \leq i \leq I$.

ii) $(v_i^-(t, w_i(t)))_{t\in\Omega} \in L^q$, $1 \leq i \leq I$.

Então $\mathcal{E}$ *tem um equilíbrio.*

Para demonstração o leitor pode recorrer a Araujo e Monteiro (1986 pag. 17).

Agora apresentamos nosso principal teorema.

Teorema 4. *Suponhamos que* $1 \leq p < \infty$ *e que existe* $C_n \in \mathcal{A}$, $C_n \downarrow \phi$ *tal que* $\left|\chi_{C_n} \cdot (v_i^+(t, 0))_{t\in\Omega}\right|_q = \infty$ *para todo* n, $i \leq I$.

Então $EQ = \{w \in (L^p_+)^I; (u_i, w_i)_{i=1}^I$ tem um equilíbrio $\}$ é de primeira categoria em $(L^p_+)^I$ em cada um dos seguintes casos:

i) $1 < p < \infty$ e $v_i^+(t, \cdot)^q$ é convexo para μ a.s. $t \in \Omega$.

ii) $\Omega = \mathbf{N}$, $\mathcal{A} = P(\mathbf{N})$ $\mu\{i\} = 1$ para todo i, $1 \leq p < \infty$, isto é $L^p = \ell^p$.

Para demonstrar o Teorema 4 necessitamos de dois lemas:

Lema 4. *Suponhamos que* $1 \leq p < \infty$. *Se* $w^n \to w$ *em* L^p *e* $0 \leq f^n \leq w^n$, *então existe uma subseqüência tal que* $f^{k_n} \to f$ $\sigma(L^p, L^q)$ *para algum* $f \in [0, w]$.

Demonstração: Escrevamos $w^n = (w^n - w) + w \leq (w^n - w)^+ + w$ onde $f_t^+ = \sup\{f_t, 0\}$ para todo $f \in L^p$. Agora existe $0 \leq g^n \leq w$, $0 \leq b^n \leq (w^n - w)^+$ com $f^n = g^n + b^n$ (para demonstrar isso use a propriedade de decomposição de Riesz ou um argumento direto neste caso particular).

É claro que $b^n \to 0$ em L^p. Como $[0, w]$ é compacto $\sigma(L^p, L^q)$, existe uma subseqüência $g^{k_n} \to g\ \sigma(L^p, L^q)$. Então temos $f^{k_n} \to g\ \sigma(L^p, L^q)$ o que termina a demonstração do lema.

Lema 5. *Definamos* $A_i = \{f \in L^p_+; (v_i^+(t, f_t))_{t\in\Omega} \in L^q\}$ $1 \leq i \leq I$. *Então na hipótese do teorema 4,* $A = \sum_{i=1}^{I} A_i$ *é de primeira categoria em* L^p_+.

Demonstração: Definamos $\varphi: L^p_+ \to \mathbf{R}$ $\varphi(w) = \inf\{\sup \left|(v_i^+(t, f_i(t)))_{t\in\Omega}\right|_q;\ f_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{I} f_i = w\}$. Temos que $A = \{w \in L^p_+; \varphi(w) < \infty\}$. Então se $F_m = \{w \in L^p_+; \varphi(w) \leq m\}$, $A = \bigcup_{m\in\mathbf{N}} F_m$. Mostremos que F_m é fechado. Suponhamos que $w^n \in F_m$ $w^n \to w$ em L^p.

Então existe para cada n, $f_i^n \geq 0$, $1 \leq i \leq I$, com $\sum_{i=1}^{I} f_i^n = w^n$ e $\sup_{i\leq I} \left|(v_i^+(t, f_i^n(t)))_{t\in\Omega}\right|_q < m + 1/n$. Pelo Lema 4

existe $f_i^{k_n} \to \overline{f}_i\ \sigma(L^p, L^q)$. É verdadeira a relação $\sum_{i=1}^{I} \overline{f}_i = w$. Consideremos inicialmente o caso (i) do Teorema 4. Neste caso a convexidade de $v_i^+(t, \cdot)^q \mu$ a.s. implica que $f \mapsto \int_\Omega v_i^+(t, f_t)^q d\mu$ é semicontínua inferiormente (ver Ekeland e Temam. Cap. IX. Cor. 2.1, pag. 276). Então é verdade que $\left|(v_i^+(t, \overline{f}_{it}))_{t\in\Omega}\right|_q \leq \liminf_{n\to\infty} \left|(v_i^+(t, f_i^{k_n}(t)))_{t\in\Omega}\right|_q \leq m$ $1 \leq i \leq I$ e por isso $w \in F_m$.

Agora consideremos o caso (ii).

Neste caso $f_i^{k_n} \to \overline{f}_i \mu$ a.s. $1 \leq i \leq I$ e pelo lema de Fatou se $q < \infty$ e por um argumento direto (o mesmo da demonstração do Teorema 2) se $q = \infty$, segue-se que $\left|(v_i^+(t, \overline{f}_{it}))_{t\in\Omega}\right|_q \leq m$ de modo que $w \in F_m$. Isto demonstra o fechamento de F_m em qualquer caso.

Provemos que $\mathrm{int}_{L^p_+} F_m = \phi$. Para tanto é suficiente mostrar que $\mathrm{int}_{L^p_+} A = \phi$ e para mostrar isso basta mostrar que A^c é denso em L^p_+. Tomemos $w \geq 0$. Definamos $w^n = w - w\chi_{C_n} \geq 0$. Temos pelo teorema da convergência que $w^n \to w$ em L^p. Agora se $w^n = \sum_{i=1}^{I} f_i^n \; f_i^n \geq 0$, temos que $\left|(v_i^+(t, f_i^n(t)))_{t\in\Omega}\right|_q \geq \left|\chi_{C_n} \cdot (v_i^+(t,0))_{t\in\Omega}\right|_q = \infty$ e portanto $w^n \notin A$ para todo n. o que prova que A^c é denso.

Assim sendo, temos demonstrado que F_m é fechado com interior vazio para todo m e portanto A é de primeira categoria em L_+^p. Q.E.D.

Demonstração: do Teorema 4. É bastante provar que $EQ \cap (L_+^p - \{0\})^I$ é de primeira categoria quando $(L_+^p)^I - (L_+^p - \{0\})^I$ é de primeira categoria em $(L_+^p)^I$. Seja $w \in EQ$, $w_i \neq 0$ para todo i. Existe o equilíbrio $((\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_F), \pi) \in (L_+^p)^I \times (L^q - \{0\})$ de $(u_i, w_i)_{i=1}^I$. Quando $w_i \succ_i 0$, $\overline{x}_i \succ_i 0$, $\overline{x}_i \succ_i 0$ e então $\overline{x}_i \neq 0$. Então pelo Lema 3, $\overline{x}_i \in \text{Dom}\, \partial\mu_i = A_i$ e portanto $\sum_{i=1}^{I} w_i = \sum_{i=1}^{I} \overline{x}_i \in A = \sum_i A_i$. Então temos que demonstrar que $B = S^{-1}(A) \cap (L_+^p)^I \supset EQ \cap (L_+^p - \{0\})^I$ é de primeira categoria em $(L_+^p)^I$ onde $S(w_1, \ldots, w_I) = \sum_{i=1}^{I} w_i$.

Pelo Lema 5 A é de primeira categoria de modo que $A \subset \bigcup_{N\in\mathbf{N}} F_N$, sendo F_N fechado com interior vazio em L_+^p, então $B \subset \bigcup_{N\in\mathbf{N}} S^{-1}(F_N) \cap (L_+^p)^I$. Temos que $S^{-1}(F_N) \cap (L_+^p)^I$. é fechado porque S é contínuo. Provaremos que $S^{-1}(F_N) \cap (L_+^p)I$ tem um interior vazio para todo N e com isto terminaremos a demonstração do Teorema 4. Agora se existe $w^0 \in \text{int}_{(L_+^p)^I}[S^{-1}(F_N) \cap (L_+^p)^I]$, existe $0 \in U_i$ aberto em L^p tal que $(w^0 + \prod_{i\leq I} U_i) \cap (L_+^p)I \subset S^{-1}(F_N) \cap (L_+^p)^I$. Seja $0 \in V$ uma bola aberta em L^p tal que $\sum_{i\leq I+1} V \subset \bigcap_{i\leq I} U_i$.

Afirmamos que $S(w^0 + V^I) \cap L_+^p \subset F_N$. Para ver isso, suponhamos que $S(w^0 + v) \geq 0$, $v \in V^I$. Como $S(w^0) + \sum_{i=1}^{I} v_i \geq 0$ temos $\sum_{i=1}^{I} w_i^0 + \sum_{i=1}^{I} v_i^+ \geq \sum_{i=1}^{I} v_i^-$. Existe pela propriedade de decomposição de Riesz $0 \leq a_i \leq w_i^0$, $0 \leq b_i \leq v_i^+$ com $\sum_{i=1}^{I} a_i + \sum_{i=1}^{I} b_i = \sum_{i=1}^{I} v_i^-$. Definimos $w_i' = w_i^0 - a_i + (v_i^+ - b_i) \geq 0$, $w_i' \in w_i^0 + \sum_{i\leq I} V + V \subset w_i^0 + U_i$. É verdade pela definição de w^0 e de U_i que $S(w') \in F_N$. Assim sendo $S(w') = S(w^0) - \sum_{i=1}^{I} a_i + \sum_{i=1}^{I} v_i^+ - \sum_{i=1}^{I} b_i =$ $S(w^0) + \sum_{i=1}^{I} v_i^+ - \sum_{i=1}^{I} v_i^- = S(w^0 + v)$ o que prova que $S(w^0 + V^I) \cap L_+^p \subset F_N$. Isto é uma contradição porque $S(V^I)$ é aberto e $(S(w^0) + S(V^I)) \cap L_+^p = S(w^0 + V^I) \cap L_+^p \subset F_N$. Isto demonstra que $S^{-1}(F_N) \cap (L_+^p)^I$ tem um interior vazio. Q.E.D.

Observação: A condição (i) do Teorema 4 é verdadeira se $v_i^+(t,\cdot)$ for convexa, isto é a absoluta aversão ao risco é decrescente no caso de $v_i^+(t,\cdot) = v_i^-(t,\cdot)$.

§V Genericidade de equilíbrios em outras situações

Até aqui neste trabalho temos tratado principalmente do caso em que utilidades u com certas propriedades são fixadas e variamos dotações iniciais para ver com que freqüência obtem-se equilíbrios.

Na realidade, consideramos apenas o caso em que $V'(0) = \infty$, $u(x) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t V(x_t)$, posto que se $V'(0) < \infty$ temos propriedade uniforme e equilíbrios. Mas muitos outros casos interessantes merecem atenção. Entretanto a maioria dos outros casos a serem estudados aparentam ter uma resposta imediata. Por isso apenas faremos alguns comentários permitindo-nos ser mais informais na maioria das vezes. Começamos com o caso em que fixamos as dotações iniciais w e fazemos variar as utilidades. Neste caso, a resposta dependerá provavelmente da topologia usada no espaço de utilidades. Se se toma alguma topologia fraca então, tanto o conjunto de equilíbrios como o de não-equilíbrios serão densos. Pode-se ver que o conjunto de economias sem equilíbrios é denso, por exemplo no caso de consumidor único do seguinte

Teorema. *Definamos* $\mathcal{V} = \{v; v: L_+^p \to \mathbf{R}$ *é côncavo* $\}$, $1 < p < \infty \dim L^p = \infty$ *e* *se* $v, v' \in \mathcal{V}$, $d(v, v') = \min\{|v - v'|_\infty, 1\}$. *Então* $\{(v, w) \in \mathcal{V} \times L^p_+; (v, w)$ *não tem equilíbrio* $\}$ *é denso em* $\mathcal{V} \times L^p_+$.

Demonstração: Tomemos $\delta \in L^1_{++}$ e definamos $u^0: L^p_+ \to \mathbf{R}$, $u^0(f) = \int_\Omega \delta_t v^0(f_t) d\mu(t)$ onde $v^0(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ para todo $x \geq 0$. De $v^{0\prime}(0) = \infty$ temos pelo Teorema 2 que Dom ∂v^0 é de primeira categoria em L^p_+. Agora se $u \in \mathcal{V}$ para qualquer $\varepsilon > 0$, Dom $\partial(u + \varepsilon u^0) \subset$ Dom ∂u^0 é

de primeira categoria. Em particular, para qualquer $\varepsilon > 0$, $w \in L^p_+$ existe $w^\varepsilon \in L^p_+$ tal que $|w^\varepsilon - w| < \varepsilon$ e $(u + \varepsilon u^0, w^\varepsilon)$ não têm equilíbrio. Como $(u + \varepsilon u^0, w^\varepsilon) \to (u, w)$ a demonstração do teorema fica completa. Q.E.D.

Vejamos agora o conjunto de economias com equilíbrios. Este conjunto também é denso. Para ver isso tomemos uma dada u definida por exemplo em ℓ^2, e definamos u_n como $u_n(x) = u(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$. Então é bastante óbvio que existirão equilíbrios para as u_n, e $u_n \to u$ é qualquer topologia razoavelmente fraca como a topologia de convergência pontual.

Agora gostaríamos de fazer alguns comentários sobre a existência de útimos de Pareto, em si, posto que em todo o raciocínio desenvolvido acima supusemos implicitamente sua existência para evitar outros problemas. Aqui novamente conjecturamos que a resposta dependerá muito da escolha de topologia sobre o espaço de utilidades. Se se toma alguma forma de topologia fraca no espaço de utilidades provavelmente ambos os conjuntos de economias, aquele com e aquele sem ponto ótimo de Pareto serão densos.

Entretanto conjecturamos que com alguma topologia forte o conjunto de economias com os pontos ótimos de Pareto i.e. o conjunto de economias com agentes míopes será aberto.

Finalmente, gostaríamos de fazer uma comparação entre ℓ_p, $p < \infty$ e ℓ_∞. Em ℓ_∞, contrariamente a em ℓ_p, $p < \infty$, equilíbrios tendem a ser muito mais abundantes. Por exemplo, em ℓ_∞, mesmo com a hipótese de $\Sigma\delta^t u'(0) = \infty$ podemos ter um conjunto genérico w para o qual existem equilíbrios. Isso pode ser visto facilmente: tomemos um dado $\overline{w}$ tal que para $\Sigma\delta^t u'(\overline{w}_t) < \infty$ tal $\overline{w}$ exista. Agora, dado qualquer outro w podemos tomar w_N como sendo sua aproximação com a mesma cauda que $\overline{w}$. Então, a economia associada terá equilíbrios. E o conjunto de economias com equilíbrios é denso. Obviamente ele também é aberto.

§VI Conclusões

Resumindo, como interpretar os resultados deste trabalho? Por um lado os resultados são extremamente negativos. Para os modelos que têm todas as suposições exigidas pelos modelos de finanças, tipicamente, não existem equilíbrios e se se deseja ser rigoroso como na tradição do equilíbrio geral ter-se-á que mudar os modelos atualmente usados em finanças. Entretanto, uma saida será fazer suposições fortes sobre as utilidades da forma $u_t'(0) = \infty$ enquanto $\{u_t'(w_t)\} \in \ell^2$, que pelos resultados de Araujo e Monteiro (1986) garantirão a existência de equilíbrios e o conjunto de tais w é pelo menos denso.

REFERÊNCIAS

Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O. (1978), "Locally Solid Riesz Spaces", Academic Press, New York and London.

Araujo, A. and Monteiro, P.K. (1986), "Equilibrium without Uniform Conditions", Vers. prelim., IMPA, Série B-032.

Bewley, Tr. F. (1972), "Existence of Equilibria with Infinitely Many Commodities", Journal of Economic Theory 4, 514–540.

Breeden, D. (1979), "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities", Journal of Financial Economics. Vol. 7, pp. 265–296.

Cox, J., Ingersoll, J. and Ross, S. (1985), "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", Econometrica vol. 53, pp. 363–384.

Duffie, D. (1986), "Stochastic Equilibria: Existence, Spanning Number and the 'No Expected Financial Gain Hypothesis'", Econometrica, vol. 54, pp. 1161–1184.

Duffie, D., Zame, W. (1987), "The Consumption Based Capital Asset Pricing Model", vers. prelim., G.S.B. Stanford University.

Ekeland, I. and Temam, R. (1976), "Convex Analysis and Variational Problems", North Holland Publishing Company.

Huang, C. (1987), "An Intertemporal General Equilibrium Asset Princing Model: The Case of Diffusion Information", Econometrica, vol. 55, pp. 117–152.

Mas-Collel, A. (1986), "The Price Equilibrium Existence Problem in Topological Vector Lattices", Econometrica 54, 1039–1054.

NOTAS SOBRE PROGRAMAÇÃO QUANDO O CONE POSITIVO TEM UM INTERIOR VAZIO

A.P. de Araujo e P.~~M~~K. Monteiro

Resumo:

Nestas notas apresentamos uma condição que é equivalente à existência de multiplicador de Lagrange para o problema geral de programação convexa. Esta condição permite estudar-se uma hipótese distinta daquela de interior não vazio do cone positivo do espaço de restrições, que é comumente usada. São dados exemplos simples desta condição. Também exploramos o relacionamento desta condição com a subdiferenciabilidade da função primal.

§I Introdução

Consideremos os espaços vetoriais L e E, $X \subset L$ convexo, E localmente convexo com cone positivo Λ. Sejam $f: X \to \mathbf{R}$ e $g: X \to E$ funções convexas. O teorema geral da existência de multiplicador de Lagrange para o problema $\min f(x)$ sujeito a $g(x) \leq 0$ é obtido sob a hipótese de que $\Lambda \neq \phi$.

Nosso objetivo nesta nota é aplicar ao problema da existência de multiplicador de Lagrange algumas técnicas recentemente usadas em economia matemática para a demonstração de equilíbrio em um contexto de dimensão infinita.

Estes métodos usam o conceito de propriedade devido a Mas-Colell (1986). Ele exige a existência de um cone com um interior não vazio em cada ponto do conjunto de nivel. Se o cone é independente do ponto temos preferências uniformes.

Nesta nota, motivados pelo conceito de propriedade descrito acima, damos uma condição que é equivalente à existência de multiplicador de Lagrange que pode ser a base para o estudo de casos em que o cone positivo tem um interior vazio.

Também estudamos o relacionamento desta condição com a subdiferenciabilidade do funcional primal e damos alguns exemplos na seção V do uso desta condição. Na seção VI exploramos ideias do nosso artigo "Equilíbrio sem condições uniformes" para fazer uma relaxação de algumas condições supostas no Exemplo 1.

§II Notações e definições

Seja E um espaço vetorial e $\Lambda \subset E$ um cone convexo tal que $\Lambda \cap -\Lambda = \{0\}$. Dizemos que E é ordenado por Λ, a ordem parcial $\leq$ sendo definida por $x \leq y$ se $y - x \in \Lambda$. O espaço ordenado E é um espaço de Riesz se para todo a, b em E existe $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$. Escrevemos $a^+ = \sup\{a, 0\}$, $a^- = -\inf\{a, 0\}$, $|a| = a^+ + a^-$. Se E é um espaço de Riesz, então ele tem a propriedade de decomposição de Riesz, isto é se $0 \leq a \leq b + c$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ então existem $0 \leq a_1 \leq b$ e $0 \leq a_2 \leq c$ tais que $a = a_1 + a_2$. O conjunto $A \subset E$ é sólido se $|x| \leq |y|$ e $y \in A$ então $x \in A$. O espaço de Riesz E com a topologia localmente convexa E é um espaço de Riesz sólido no caso em que τ tem uma base de sólidas vizinhanças de 0.

Suponhamos que E é um espaço ordenado e L é um espaço vetorial. A função $g: X \to E$ é convexa se $X \subset L$ é convexa e para todo x, y em X e $0 \leq r \leq 1$, $g(rx + (1 - r)y) \leq rg(x) + (1 - r)g(y)$. Uma função $g: X \to \overline{\mathbf{R}}$, $\overline{\mathbf{R}} = \{-\infty, \infty\} \cup \mathbf{R}$ é convexa se $\{(r, x) \in \mathbf{R} \times X; r \geq g(x)\}$ (a epígrafe de g) é convexa.

Agora sejam L um espaço vetorial topológico e $g: X \to \overline{\mathbf{R}}$ convexo. O funcional linear $p \in L'$ é um subgradiente de g em $a \in X$ se para todo x em X, $g(x) - g(z) \geq p(x - a)$. Representamos o conjunto de subgradientes de g em a por $(\partial g)(a)$.

Um funcional linear $\lambda: E \to \mathbf{R}$ é positiva ($\lambda \geq 0$) se $\lambda(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$. No caso em que E é um espaço vetorial topológico, o ponto $\omega \in \Lambda$ é estritamente positivo se para todo $p \in E' - \{0\}$ contínuo e positivo temos $p(\omega) > 0$. Isto corresponde à noção mais geral de ponto de não sustentação.

Suponhamos que $X \subset E$ é convexo. O ponto $a \in X$ é um ponto de sustentação de X se há $\lambda \in E'$, $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda(x) \geq \lambda(a)$ para todo x em X. O ponto $a \in X$ que não é um ponto de sustentação de X é denominado ponto de não sustentação de X. Representemos por $N(X)$ o conjunto de pontos de não sustentação de X. É claro que $N(\Lambda)$ é o conjunto de membros estritamente positivos de Λ. Caso E seja localmente convexo e int $X \neq \phi$ então $N(X) = \text{int } X$. Mas por exemplo se $1 \leq p < \infty$, int $L^p_+(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \phi$ enquanto $N(L^p_+(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = L^p_{++}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Se $\omega \in \Lambda$ o ideal principal gerado por ω é $K(\omega) = \{x \in E$: há $r > 0$, $|x| \leq r\omega\}$. É fácil ver-se que $\overline{K(\omega)} = E$ se e somente se $\omega \in N(\Lambda)$.

§III A existência de multiplicador de Lagrange

Nesta seção temos os espaços vetoriais L e E, $X \subset L$ convexo, E ordenado pelo cone positivo Λ com uma topologia τ localmente convexa. Também $f: X \to \mathbf{R}$ e $g: X \to E$ são funções convexas.

O problema $\min f(x)$ sujeito a $g(x) \leq 0$ é denominado problema geral de programação convexa. O funcional linear $\lambda \in E'$, $\lambda \geq 0$ i um multiplicador de Lagrange para este problema se $\inf\{f(x); g(x) \leq 0\} = \inf\{f(x) + \lambda(g(x)); x \in X\}$. Demonstraremos a existencia de multiplicador de Lagrange por meio do funcional primal, posto que estamos interessados no estudo da própria função primal.

Teorema 1. *Suponhamos que*

i) $\alpha = \inf\{f(x); x \in X$ *e* $g(x) \leq 0\}$, $\infty > \alpha > -\infty$,

ii) existe $x^0 \in X$ *tal que* $g(x^0) \in N(-\Lambda)$.

Então existe $\lambda \in E'$, $\lambda \geq 0$ *tal que* $\alpha = \inf\{f(x) + \lambda(g(x)); x \in X\}$ *se e somente se a condição (iii) abaixo for verdadeira:*

iii) existem $v \in E$ e $0 \in U \in \tau$ tais que se $x \in X$ e

$$\begin{cases} f(x) < \alpha \\ g(x) \leq -tv + tz, \quad t > 0 \end{cases}$$

então $z \in U$. Neste caso se $f(\overline{x}) = \alpha$ e $g(\overline{x}) \leq 0$ então $\lambda(g(\overline{x})) = 0$.

Deixamos para mais adiante a demonstração do teorema para estudar primeiro o funcional primal.

§IV Relacionamento com a diferenciabilidade do funcional primal

Sabe-se que (ver por exemplo Luenberger (1969), pag. 216, 217) que a existência de multiplicador de Lagrange pode ser vista como a subdiferenciabilidade na origem do funcional primal. A propriedade que corresponde a (iii) no Teorema 1 é a propriedade da função primal.

Definição: Seja $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ uma função convexa, $X \subset L$, L localmente convexa. Dizemos que f é própria em $\omega \in X$ se $f(\omega) \in \mathbf{R}$ e existem $v \in E$ e $0 \in U \in \tau$ tais que se $\alpha > 0$ e $\omega - \alpha v + \alpha z \in X$ com $f(\omega - \alpha v + \alpha z) < f(\omega)$ então $z \notin U$.

(1) É fácil ver-se que propriedade em ω é equivalente à existência de sustentação do conjunto $\{x \in X; f(x) \leq f(\omega)\}$ quando $\inf f(x) < f(\omega)$, em ω.

Definamos o funcional primal.

Definição: Sejam $f: X \to \mathbf{R}$ e $g: X \to E$ como no Teorema 1. Definamos $\Gamma = \{z \in E;$ existe $x \in X$ tal que $g(x) \leq z\}$ e $V: \Gamma \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $V(z) = \inf\{f(x); g(x) \leq z\}$.

Os fatos abaixo são faceis de provar:

1) $0 \in \Gamma$ e $V(0) = \alpha$

2) V é convexo

31) V é decrescente: se $z_1 \geq z_2 \in \Gamma$ então $z_1 \in \Gamma$ e $V(z_1) \leq V(z_2)$

4) $\lambda \in (\partial V)(0)$ se e somente se $\lambda \leq 0$ e $\alpha = \inf\{f(x) - \lambda(g(x)); x \in X\}$.

Faremos agora algumas demonstrações.

Teorema 2. *A hipótese (iii) no Teorema 1 é verdadeira se e somente se V é própria em 0.*

Demonstração: Suponhamos que iii) é verdadeiro e que $V(-tv+tz) < V(0)$, $-tv+tz \in \Gamma$, $t > 0$. Então existe $x \in X$ tal que $g(x) \leq -tv+tz$ e $f(x) < V(0) = \alpha$. Então por iii), $z \notin U$ o que demonstra que /152 é própria em 0.

Suponhamos agora que V é própria em 0 e escolhamos em iii), v e U como as constantes de propriedade em 0 de V. Se $f(x) < \alpha$ e /161, temos $-tv+tz \in \Gamma$ e $V(-tv+tz) \leq f(x) < \alpha = V(0)$ e portanto $z \notin U$ o que termina a demonstração. Q.E.D.

O seguinte teorema generaliza o teorema usual de existência de subgradiente como o de Ekeland e Temam pag. 22, ver também o Teorema 5 abaixo.

Teorema 3. *Sejam $f: X \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ convexo e $\omega \in N(X)$, $f(\omega) > -\infty$. Então $(\partial f)(\omega) \neq \phi$ se e somente se f é própria em ω.*

Demonstração: a) Necessidade

Suponhamos que $\lambda \in (\partial f)(\omega)$. Temos que $f(x) - f(\omega) \geq \lambda(x-\omega)$ para todo $x \in X$. Se $\lambda = 0$, f é vagamente própria em ω. Se $\lambda \neq 0$ tomemos $v \in E$ com $\lambda(v) < 0$ e $0 \in U = \{z \in E; \lambda(z) > \lambda(v)\} \in \tau$. No caso em que $f(\omega - \alpha v + \alpha z) < f(\omega)$, $\alpha > 0$ então temos $\alpha \cdot \lambda(-v+z) < 0$ e portanto $z \notin U$.

b) Suficiência.

Agora suponhamos que f é própria em ω e v e U são as constantes da definição de propriedade. Definamos $v' = (1, v)$, $U' = (-1/2, 1/2) \times U$, $A = \{(r,x) \in \mathbf{R} \times X; r \geq f(x)\}$, $B = (f(\omega), \omega) + \Gamma$, $\Gamma = \{t(-v'+z'); t > 0, z' \in U'\}$. Temos que A e B são conjuntos convexos e $B \neq \phi$.

Se $(r,x) \in A \cap B$ temos $(r,x) = (f(\omega),\omega) - t(1,v) + t(z_1, z_2)$, $|z_1| < 1/2$, $z_2 \in U$, $t > 0$ e $r \geq f(x)$. Portanto $f(\omega - tv + tz_2) = f(x) \leq r < f(\omega)$ e então $z_2 \notin U$ é uma contradição. Então $A \cap B = \phi$ e pelo teorema da separação de hiperplano existe $(s, \lambda) = p \in \mathbf{R} \times E' - \{0\}$ tal que (1) $sr + \lambda(x) \geq sf(\omega) + \lambda(\omega) + p(y)$ para todo $(r,x) \in A$, $y \in \Gamma$

Como Γ é um cone, temos para todo $x \in X$ e $r \geq f(x)$ que $sr + \lambda(x) \geq sf(\omega) + \lambda(\omega)$ e portanto temos $s \geq 0$. E se $s = 0$, segue-se que $\lambda(x) \geq \lambda(\omega)$ para todo $x \in X$ e $\lambda \neq 0$ é uma contradição com $\omega \in N(X)$. Então $s > 0$ e definindo $\lambda' = \lambda/s$ temos $f(x) + \lambda'(x) \geq f(\omega) + \lambda'(\omega)$ para todo $x \in X$. Porrtanto $\lambda' \in (\partial f)(\omega)$. Q.E.D.

Observação 1: De (1) acima pode-se dar uma estimativa (digamos) da norma de p. É bastante lembrar que p é um cone e portanto $p(y) \leq 0$ para todo $y \in \Gamma$ e de $-v' + U' \subset \Gamma$ temos $\sup p(U') \leq p(v')$. Observemos também que esta estimativa não depende de conhecermos a continuidade de p e implica esta continuidade.

Observação 2: A demonstração de que $(\partial f)(\omega) \neq \phi$ implica a propriedade de f em ω ser verdadeira para qualquer $\omega \in X$.

As seguintes proposições mostram que em geral não se pode garantir a existência de subgradientes para pontos de sustentação. Também mostram que para pontos de sustentação propriedade é um conceito mais geral do que subgradiente.

Proposição 1. *Suponhamos que (E, τ) é um espaço localmente convexo e $X \subset E$ é um conjunto convexo não contido em um hiperplano (isto é verdadeiro por exemplo se $N(X) \neq \phi$). Então se $\omega \in X$ é um ponto de sustentação de $X/228$:*

a) *Qualquer função convexa $f: X \to \mathbf{R}$ é própria em ω.*

b) *Existe uma função convexa contínua $f: X \to \mathbf{R}$ tal que f é própria em ω e $(\partial f)(\omega) = \phi$.*

Demonstração: (a) Como ω é um ponto de sustentação de X existe $\lambda \in E' - \{0\}$ tal que $\inf \lambda(X) = \lambda(\omega)$. Mas X não está contido no hiperplano $\{x \in E; \lambda(x) = \lambda(\omega)\}$ e portanto existe $\omega' \in X$ tal que $\lambda(\omega') > \lambda(\omega)$. Definamos $v = \omega' - \omega$ e $0 \in U = \{z \in E; \lambda(z) < \lambda(v)\} \in \tau$. Se $\omega - \alpha v + \alpha z \in X$ então $\lambda(\omega) - \alpha\lambda(v) + \alpha\lambda(z) \geq \lambda(\omega)$ e então $\lambda(z) \geq \lambda(v)$ implicando $z \notin U$ o que prova que qualquer f é própria.

(b) Definamos $f: X \to \mathbf{R}$, $f(x) = -\sqrt{\lambda(x) - \lambda(\omega)}$. É claro que f é contínua e convexa. Decorre da parte (a) acima que f é própria em ω. Mas $(\partial f)(\omega = \phi$ porque se $f(x) - f(\omega) \geq p(x - \omega)$ para todo $x \in X$, temos para todo $0 < t < 1$, $f(\pm + tv) - f(\omega) \geq tp(v)$, isto é $-\sqrt{t\lambda(v)} \geq tp(v)$ o que é uma impossibilidade. Q.E.D.

Proposição 2. *Suponhamos que (E, τ) é localmente convexo com cone positivo Λ, int $\Lambda \neq \phi$.*

Então:

a) Qualquer função convexa decrescente $f: \Lambda \to \mathbf{R}$ (isto i: se $x \geq 0$, $x' - x \in \text{int } \Lambda$ então $f(x') < f(x)$) é uniformemente própria em Λ.

b) Existe $f: \Lambda \to \mathbf{R}$, convexa, contínua, decrescente e uniformemente própria tal que $\partial f(x) = \emptyset$ se $x \in \Lambda - \text{int } \Lambda$.

Demonstração: Fixemos $u \in \text{int } \Lambda$ e $0 \in U \in \tau$ simétricos tais que $u + U \subset \Lambda$.

a) Para todo $\omega \geq 0$ e $t > 0$, se $\omega' = \omega - tu + tz \geq 0$ e $z \in U$ temos de $\omega - \omega' \in \text{int } \Lambda$ que $f(\omega) < f(\omega')$ e portanto f é própria em ω com constantes u e U.

b) Definamos $\varphi: E \to \mathbf{R}$. $\varphi(x) = \sup\{r \in \mathbf{R}: x \geq ru\}$. Pode-se demonstrar que φ é côncava e $-\varphi$ é decrescente. De $\varphi[-u, u] \subset [-1, 1]$ vemos que φ é contínua (Ekeland-Temam pag. 11). Também ve-se facilmente que para todo $x \geq 0$, $\varphi(x) = 0$ se e somente se $x \in \Lambda - \text{int } \Lambda$.

Agora definamos $f: \Lambda \to \mathbf{R}$, $f(x) = -\sqrt{\varphi(x)}$, $f: \Lambda \to \mathbf{R}$, $f(x) = -\sqrt{\varphi(x)}$. É claro que f é convexa, contínua e decrescente. Decorre de (a) que f é uniformemente própria. Agora se $x \geq 0$ e $p \in \partial f(x)$ temos que $tpu \leq f(x + tu) - f(x) = -\sqrt{\varphi(x + tu)} + \sqrt{\varphi(x)} \leq -\sqrt{\varphi(x) + t} + \sqrt{\varphi(x)}$ para todo $t > 0$ e portanto $\varphi(x) > 0$ implicando que $x \in \text{int } \Lambda$. Q.E.D.

Pode-se comparar a Proposição 2(b) com o Teorema 5 da seção seguinte.

Finalmente podemos fazer a demonstração do Teorema 1. Prova da necessidade de (iii).

Seja $\lambda \in E'$, $\lambda \geq 0$ tal que $\alpha = \inf\{f(x) + \lambda(g(x)); x \in X\}$.

Caso $\lambda = 0$, $\alpha = \in f(X)$ e então iii) é vagamente verdadeiro.

Caso $\lambda \neq 0$, tomemos $v \in E$ tal que $\lambda(v) > 0$ e definamos $U = \{z \in E; \lambda(z) < \lambda(v)\} \in \tau$. Agora se $f(x) < \alpha$ e $g(x) \leq -tv + tz$, $t > 0$ temos $\alpha \leq f(x) + \lambda(g(x)) < \alpha + t(-\lambda(v) + \lambda(z))$ e então $\lambda(z) > \lambda(v)$ e portanto $z \notin U$ o que prova iii).

Demonstração da suficiência de (iii).

Pelo Teorema 2 provamos que o funcional primal V é própria em 0. Pela propriedade (4) de V necessitamos apenas provar que $(\partial V)(0) \neq \phi$ e pelo Teorema 3 necessitamos somente provar que $0 \in N(\Gamma)$. Então suponhamos que $\lambda(x) \geq 0$ para todo $x \in \Gamma$. Usando a hipótese (ii) do Teorema 1 temos que $g(x^0) + \Lambda \subset \Gamma$ e $\lambda(g(x^0)) \geq \lambda(-z)$ para todo $z \in \Lambda$317 e entco 317a porque /318. o que prova que /319 e assim termina a demonstração da parte de suficiência do Teorema 1.

Agora para a parte final do Teorema 1, suponhamos que $f(\overline{x}) = \alpha$ e $g(\overline{x}) \leq 0$. Então $\alpha \leq f(\overline{x}) + \lambda(g(\overline{x})) \leq f(\overline{x}) = \alpha$ e portanto $\lambda(g(\overline{x})) = 0$.

Observação 3: Em alguns casos o Teorema 3 é uma conseqüência do Teorema 1. Por exemplo tomemos $E = L$ e definamos $g(x) = x - \omega$. Então um multiplicador de Lagrange de $\min\{f(x); g(x) \leq 0\} = \alpha$ é tal que $f(x) + \lambda(x) \geq \alpha + \lambda(\omega)$. Portanto se $\alpha = f(\omega)$, λ é um subgradiente de f.

§V Aplicações

Nosso primeiro exemplo é o tradicional teorema de multiplicador de Lagrange e nosso segundo exemplo é a subdiferenciabilidade de uma função convexa.

Teorema 4. *Sejam* $f: X \to \mathbf{R}$ *e* $g: X \to E$ *como no Teorema 1.*

Suponhamos que:

i) $\infty > \alpha > -\infty$, $\alpha = \inf\{f(x); g(x) \leq 0\}$

ii) existe $x^0 \in X$ tal que $g(x^0) \in \text{int} - \Lambda$.

Então existe $\lambda \in E'$, $\lambda \geq 0$ tal que $\alpha = \inf\{f(x) + \lambda(g(x)); x \in X\}$.

Demonstração: Necessitamos apenas verificar o mtem (iii) do Teorema 1. Para isto tomemos $v \in \text{int}\ \Lambda$ e $0 \in U \in \tau$ tais que $v - U \subset \Lambda$. Se $g(x) \leq t(-v + z)$, $t > 0$, $z \in U$ temos de $v - z \geq 0$ que $-v + z \leq 0$ e que $g(x) \leq 0$, portanto $f(x) \geq \alpha$ o que demonstra (iii).

Nosso próximo teorema é semelhante ao de Ekeland-Temam, pag 22.

Teorema 5. *Seja $f: X \to \alpha$ uma função convexa, semicontínua superiormente em $\omega \in$ int X, $X \subset E$ e E um espaço localmente convexo. Então $(\partial f)(\omega) \neq \phi$.*

Demonstração: Pelo Teorema 3 é suficiente demonstrar que f é própria em ω. Caso $\inf f(X) = f(\omega)$ não há nada a provar. Caso $\inf f(X) < f(\omega)$, tomemos $v \in E$ tal que $f(\omega + v) < f(\omega), \omega + v \in \operatorname{int} X$ (isto existe porque $\omega \in \operatorname{int} X$ e f é convexa). Agora tomemos $U \in \tau$ simétrica tal que $\omega + v + U \subset X$ e $f(\omega + v + U) < f(\omega)$ o que é possivel porque f é semicontínua superiormente em ω. Se $f(\omega - \alpha v + \alpha z) < f(\omega)$, $z \in U$ temos

$$f(\omega) \leq \frac{1}{2}f(\omega - \alpha v + \alpha z) + \frac{1}{2}f(\omega + \alpha v - \alpha z) < \frac{f(\omega)}{2}$$

$$+ \frac{1}{2}[(1-\alpha)f(\omega) + \alpha f(\omega + v - z)] < f(\omega)$$

pela escolha de U uma contradição. Q.E.D.

Os exemplos que se seguem estão todos no contexto de espaços de Riesz.

Suponhamos que (E, Λ) é um espaço de Riesz sólido, com uma topologia sólida localmente convexa τ.

Exemplo 1: Suponhamos que $u_i: \Lambda \to \mathbf{R}$, $1 \leq i \leq I$ são funções côncavas e que $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_I)$ é uma solução de $\max \sum_i r_i u_i(x_i)$ sujeita a $\sum_i x_i \leq \omega$, onde $r_i > 0$ para todo i. Dizemos que $\overline{x}$ é um ponto ótimo de $r = (r_1, \ldots, r_I)$ Pareto. Uma sustentação de $\overline{x}$ é $p \in E' - \{0\}$ tal que para todo i, se $u_i(x) > u_i(\overline{x}_i)$ então $p(x) \geq p(\overline{x}_i)$. Suponhamos que:

a) u_i é monótona para algum i (digamos $i = 1$): isto é se $x \geq y \geq 0$ então $u_i(x) \geq u_i(\overline{x}_i)$

b) para cada i existem $v_i \geq 0$ e V_i uma vizinhança sólida 0 tal que $-u_i$ é (uniformemente) própria em x para todo $x \geq 0$

c) $\omega \in N(\Lambda)$ e $v_i \in K(\omega)$ para todo i.

Afirmamos que existe um multiplicador de Lagrange para o problema $\max \sum_i r_i u_i(x_i)$ sujeito a $\sum_i x_i \leq \omega$. Vê-se facilmente que este multiplicador de Lagrange é uma sustentação de $\overline{x}$.

Demonstração: Apliquemos o Teorema 1. Definamos $X = \Lambda^I$, $f: X \to \mathbf{R}$, $g: X \to E$, $f(x) = -\sum_i r_i u_i(x_i)$, $g(x) = \sum_i x_i - \omega$, $v = \sum_i v_i$. Verifiquemos a hipótese (iii). Suponhamos que $\sum_i r_i u_i(x_i) > \alpha = -f(\overline{x})$ e que $\sum_i x_i - \omega \leq -tv + tz$, $t > 0$, $z \in U$. Pela monotonicidade de u_1, podemos supor sem perda de generalidade que $\sum_i x_i - \omega = -tv + tz^+$. Portanto temos $\sum_i (x_i + tv_i) = \omega + tz^+ \geq tz^+$. Pela propriedade de decomposição de Riesz deduzimos que existe $0 \leq a_i \leq x_i + tv_i$ tal que $\sum_i a_i = tz^+$. Agora definamos

$x_i' = x_i + t(v_i - \frac{1}{t}a_i)$, $x' = (x_1', \ldots x_I')$. Pela solidez de U temos que $\frac{1}{t}a_i \in U \subset U_i$ e então decorre da suposição de propriedade em u_i que temos $u_i(x_i') > u_i(x_i' - tv_i + a_i) = u_i(x_i)$ para todo i. Portanto $f(x') < \alpha$ e $g(x') = \sum_i x_i - \omega + tv - tz^+ = 0$ é uma contradição. Q.E.D.

O exemplo seguinte é uma elaboração do Exemplo 1 de modo a incluir produção.

Exemplo 2: Suponhamos que $u_i : \Lambda \to \mathbf{R}$ $1 \leq i \leq I$ são funções côncavas, sendo u_1 monótona. Há J produtores com um conjunto de produção Y_j que é convexo. Uma solução $(\overline{x}, \overline{y})$ do problema (1) $\max \sum_i r_i u_i(x_i)$ sujeita a $\sum_i x_i \leq \omega + \sum_j y_j$, $x_i \geq 0$, $y_j \in Y_j$ é chamada de ponto ótimo de r Pareto. O funcional linear $p \in E' - \{0\}$ sustenta este ponto se para todo i, $u_i(x) > u_i(\overline{x}_i$ implica $p(x) \geq p(\overline{x}_i)$ e $p(\overline{y}_j) = \sup p(Y_j)$. Vê-se facilmente que um multiplicador de Lagrange do problema (1) é uma sustentação de $(\overline{x}, \overline{y})$.

Suponhamos que

a) $-u_i$ são uniformemente próprias com constantes v_i e U_i, U_i sólidas.

b) Y_j é uniformemente própria no seguinte sentido: existem $\tilde{v}_j$ e uma vizinhança sólida 0 V_j tal que se $y' = y - t\tilde{v}_j + tx \leq y^+$, $y \in Y_j$, $x \in V_j$ então $y' \in Y_j$.

c) $\omega \in N(\Lambda)$.

Então existe um multiplicador de Lagrange do problema (1).

Demonstração: Apliquemos o Teorema 1. Definamos $X = \Lambda^I \times_j Y_j$, $f(x,y) = -\sum_i r_i u_i(x_i)$ e $g(x,y) = \sum_i x_i - \omega - \sum_j y_j$, $v = \sum_i v_i + \sum_j \tilde{v}_j$, $U = \bigcap_i U_i \cap \bigcap_j V_j$.

Se temos $\sum_i r_i u_i(x_i) > \alpha = -f(\overline{x}, \overline{y})$ e $g(x,y) \leq -tv + tz$, $t > 0$, $z \in U$, podemos supor, pela monotonicidade de u_1, que $g(x,y) = -tv + tz^+$. Escrevendo $y_j = y_j^+ - y_j^-$ e decompondo v temos que $\sum_i (x_i + tv_i) + \sum_j (y_j^- + t\tilde{v}_j) = tz^+ \omega + \sum_j y_j^+ \geq tz^+$ e portanto pela propriedade de decomposição de Riesz existem $0 \leq a_i \leq x_i + tv_i$, $0 \leq b_j \leq y_j^- + t\tilde{v}_j$ tais que $tz^+ = \sum_i a_i + \sum_j b_j$. Como U é sólido temos $\frac{1}{t}b_j \in U \subset U_i$ e $\frac{1}{t}b_j \in U \subset V_j$. Agora definamos $x_i' = x_i + tv_i - a_i \geq 0$. Temos que $u_i(x_i') \geq u_i(x_i)$ pela propriedade de u_i. Definamos também $y_j' = y_j - t\tilde{v}_j + b_j \in Y_j$ quando $y_j' \leq y_j^+$. Agora vemos que $\sum_i r_i u_i(x_i) > \alpha$ e $g(x', y') = \sum_i x_i + t\sum_i v_i - \sum_i a_i - \omega - \sum_j y_j + t\sum_j \tilde{v}_j - \sum_j b_j = g(x,y) + tv - tz^+ = 0$ é uma contradição. Q.E.D.

§VI Exemplo 1 revisitado

Nesta seção provamos um teorema sobre multiplicador de Lagrange que permite uma grande atenuação da condição de propriedade uniforme (b) do Exemplo 1.

Suponhamos que E é um espaço de Riesz sólido e que $f\colon X \to \mathbf{R}$ e $g\colon X \to E$ são funçõess convexas contínuas.

Suponhamos que existe $v \in E$ tal que

i) $X_v = \{x \in X \colon g(x) \in K(x)\}$ é convexo

ii) X_v é denso em X

iii) $\alpha = \inf\{f(x); g(x) \leq 0\} = \inf\{f(x); g(x) \leq 0, x \in X_v\}, \infty > \alpha > -\infty$

iv) (Condição de Slater) existem $x^0 \in X$ e $r > 0$ tais que $g(x^0) \leq -rv$

v) existem $0 \in U$ aberto, $\overline{v} \in K(v)$ tais que para todo $z \in U \cap K(v)$ temos para algum $x \in X_v$ e

$$t > 0 \begin{cases} f(x) \leq \alpha \\ g(x) \leq t\overline{v} - tz \end{cases}$$

Então existe um multiplicador de Lagrange para $\inf\limits_{g(x)\leq 0} f(x)$.

Demonstração: Observemos inicialmente que $K(v)$ com a topologia da norma definida pelo funcional de Minkowski de $[-v, v]$, tem um cone positivo com interior não vazio. Agora as condições (i) e (iv) garantem a existência de multiplicador de Lagrange para o problema $\inf\limits_{x\in X_v; g(x)\leq 0} f(x)$. Seja $\lambda\colon K(v) \to \mathbf{R}$, linear e positiva um multiplicador de Lagrange deste problema: $\alpha = \inf\limits_{x\in X_v}$. Se provarmos que λ é contínua na topologia de E restrita a $K(v)$, podemos extender λ a E e por (ii) concluir que λ também é um multiplicador de Lagrange para $\inf\limits_{g(x)\leq 0} f(x)$.

Então provemos que λ é contínua.

Tomemos $z \in U \cap K(v)$. Decorre de (v) que existem $x \in X_v$ e $t > 0$ tais que $f(x) \leq \alpha$ e $g(x) \leq t\overline{v} - tz$. Então $\alpha \leq f(x) + \lambda(g(x)) \leq \alpha + t(\lambda\overline{v} - \lambda z)$ e portanto $\lambda z \leq \lambda\overline{v}$. Isto implica a limitação de $\lambda(U \cap K(v))$ e também a continuidade de λ. Q.E.D.

a) para todo i existem $v_i \geq 0$ e $0 \in V_i$ aberta e sólida tal que $-u_i$ é própria em $\overline{x}_i$ no seguinte sentido: $x'_i = \overline{x}_i + tv_i - tz \geq 0$ e $z \in V_i$, $z \in V_i$, $t > 0$ então $u_i(x'_i) > u_i(\overline{x}_i)$.

b) $v_i \in K(\omega)$, $\omega \in N(\Lambda)$.

Então existe um multiplicador de Lagrange para $\max\limits_{x_i \geq 0,\ \sum_i x_i \leq \omega} \sum_{i=1}^{I} r_i u_i(x_i)$.

Observação: A hipótese (b) do exemplo 1' implica (a) acima como pode ser facilmente verificado.

Verifiquemos as condições do Teorema 6

i) $X_\omega = \{x \in X; \sum_{i=1}^{I} x_i - \omega \in K(\omega)\} = X \cap K(\omega)^I$ é convexo.

ii) Como $\omega \in N(\Lambda)$, $\overline{K(\omega)} = E$ e portanto X_ω é denso em X;

iii) Se $g(x) \leq 0$, $x \in X$ temos necessariamente que $x_i \leq \omega$ e portanto $g(x) \in K(\omega)$ e então $x \in X_\omega$.

iv) Tomemos $x^0 = 0$, $g(x^0) = -\omega$.

v) Suponhamos $z \in U \cap K(\omega)$. Existe $r > 0$, $|z| \leq r\omega = r \cdot \sum_{i=1}^{I} \overline{x}_i$.

Pela propriedade de decomposição de Riesz existe $0 \leq b_i \leq r\overline{x}_i$ tal que $|z| = \sum_{i=1}^{I} b_i$.

Como U é sólido, $b_i \in U$ para todo i. Definamos $x'_i = \overline{x}_i + \frac{1}{r}(v_i - b_i) \geq 0$, $x' = (x'_1, \ldots, x'_I) \in X$. Agora $u_i(x'_i) > u_i(\overline{x}_i)$ para todo i, pela suposição de propriedade de (a). Portanto $(x') < f(\overline{x}) = \alpha$ e $g(x') = \sum_{i=1}^{I} \overline{x}_i + \frac{1}{r}(\overline{v} - |z|) - \omega \leq \frac{1}{r}(\overline{v} - z)$. Temos todas as condições do Teorema 6 satisfeitas e provamos assim a existência de multiplicador de Lagrange.

COMENTÁRIOS FINAIS

Para fins práticos seria desejavel ter uma condição mais fácil de conferir do que a condição (iii) do Teorema 1. Em particular, uma condição que seria útil é a condição de propriedade em f e uma adequada condição de propriedade em g. Não sabemos, entretanto se estas condições implicariam a condição (iii) que sabemos ser necessária para a existência de multiplicador de Lagrange. Uma questão mais concreta neste contexto é a seguinte: Suponhamos que f_1 e f_2 são próprias e reais. Isso implica que (f_1, f_2) é própria em algum sentido adequado?

REFERÊNCIAS

[1] Araujo, A. and Monteiro, P.K., (1986), "Equilibrium without uniform conditions", a ser publ. no Journal of Economic Theory.

[2] Ekeland, I. and Temam, R. (1978), "Convex Analysis and Variational problems", North-Holland Publishing Company.

[3] Luenberger, D.G. (1969), "Optimization by Vector Spaces Methods", John Wiley and Sons Inc.

[4] Richar, S.C. (1986), "Competitive Equilibria in Riesz Spaces", ver. Prelim.

[5] Mas-Collel, A. (1986), "The Price Equilibrium Existence Problem in Topological Vector Lattices", Econometrica, 54, 1039–1054.

[6] Yanner, J.N. and Zame, W., (1986), "Equilibria in Banach Lattices Without Ordered Preferences", Journal of Mathematical Economics, vol. 15, pp. 85–110.

SOBRE A DIFERENCIABILIDADE DA FUNÇÃO POLÍTICA[1]

A. Araujo

IMPA

Primeira versão, maio 88

[1] Os resultados deste artigo foram obtidos quando o autor visitava a Universidade da Califórnia em Berkeley, 1986. Ele gostaria de agradecer uma bolsa da *CAPES-Fulbright*, como também ao PNPE. Foi escrito enquanto o autor tinha uma cátedra *Tinker* na Universidade de Chicago.

§1 Introdução

O objetivo deste trabalho é estabelecer algumas condições para a função política de um problema dinâmico ser diferenciável ou o que é o mesmo, a função valor ser duas vezes diferenciável. A necessidade da função valor ser duas vezes diferenciável para deduzir-se a equação diferencial de Bellman de programação dinâmica foi anunciada há bastante tempo. Remonta pelo menos a Pontriagin *et al* (1962 pag. 73 último parágrafo) que também dá contra exemplos para o caso geral. Para motivações adicionais e também como pano de fundo para este trabalho veja Lucas, Prescot e Stokey, capítulo 2.

Estudamos o caso, comumente usado em economia, no qual a função objetivo é côncava. Nosso principal resultado diz que a função política é diferenciável em qualquer estado estacionário. Partindo disso e usando um resultado de Araujo e Scheinkman (1977), provamos que se a função política é crescente ela também é diferenciavel por toda parte.

§2 Notação

Seja $A \subset \mathbf{R}^2$ um conjunto convexo compacto com um interior não vazio. Seja $V: A \to \mathbf{R}$ fortemente côncava i.e. D^2V é uma função com matriz definida negativa que admite uma extensão C^2 para um conjunto aberto contendo A. Seja $0 \leq \delta < 1$ a taxa de desconto e consideremos o problema de maximização:

$$\max_{\{(k_t),(k_t,k_{t+1}\in A, t=0,1,\cdots\}} \sum_{t=0} \delta^t V(k_t, k_{t+1})$$

onde k_0 é dado. Suponhamos que o problema acima tem uma solução para cada $0 \leq \delta < 1$ e k_0 admissivel. Denominemos essa solução $\{\tilde{k}_t(k_0)\}$ e suponhamos $(\tilde{k}_t(k_0), k_{t+1}(k_0)) \in A$.

A função valor é definida como

$$v(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t V(\tilde{k}_t(k_0), \tilde{k}_{t+1}(k_0)),$$

sendo $\tilde{k}_1(k_0)$ denominada função política. Sabe-se que v é estritamente côncava. O princípio de Bellman diz que o problema acima é equivalente ao problema de programação dinâmica: Achar v tal que

$$v(k_0) = \max_{\{(k_0,k_1)\in A\}}\{V(k_0, k_1) + \delta v(k_1)\}$$

Antes de enunciar e provar nosso principal resultado necessitamos da seguinte

Proposição. *$\tilde{k}_1(k_0)$ é diferenciavel se e somente se v' também é diferenciavel.*

Demonstração: $v'(k_1) = V_1(k_0, \tilde{k}_1(k_0))$. Portanto, se $\tilde{k}_1$ é diferenciavel também v' o é. Reciprocamente, se v' é diferenciavel, então E_1 tambem é diferenciavel, posto que E_1 é a solução implícita da equação

$$V_2(k_0, k_1) + \delta v'(k_1) = 0$$

e $V_{22} + \delta v'' < 0$. Para isso necessitamos de um teorema sobre função implícita para funções diferenciaveis mas não necessariamente c' (ver L. Schwartz).

§3 Resultados

Podemos agora estabelecer nosso principal resultado:

Teorema 1. *$\tilde{k}_1$ é diferenciavel em qualquer estado estacionário i.e., em pontos k_0 tais que $\tilde{k}_1(k_0) = k_0$.*

Demonstração do Teorema: Primeiro observemos que v é estritamente côncava e por um resultado de Benveniste e Scheinkman v é c'. Portanto, as derivadas à direita, v''_-, e à esquerda. v''_+, de v' existem em qualquer ponto. Por conseguinte. para mostrar que a derivada de v' existe em um dado ponto devemos mostrar que $v''_- = v''_+$. Assim. devemos mostrar que v' não tem saltos. A prova do teorema depende do seguinte fato:

Fato: O seguinte enunciado é impossivel: existe uma função C'. estritamente côncava limitada, $\tilde{V}: A \to \mathbf{R}$ que é C^2 com relação a k_0 e tal que $\tilde{V}_2$ tem um salto com respeito a k_1 em algum $(\tilde{k}_0, \tilde{k}_1)$, com a seguinte propriedade: se $\tilde{v}$ é o valor de $\tilde{V}$ para $\delta = 0$ então existe $0 \leq \delta < 1$ tal que $\tilde{V}(k_0, k_1) - \delta\tilde{v}(k_1)$ é c^2 e fortemente côncava. I.e., o salto de $\tilde{V}$ não aparece em $\tilde{V} - \delta\tilde{v}$.

Mostraremos primeiro que o fato acima implica o teorema. Suponhamos que o teorema seja falso. Consideremos a função:

$$\tilde{V}(k_0, k_1) = V(k_0, k_1) + \delta v(k_1)$$

Ela tem um salto posto que v tem um salto por hipótese.

Tambem, o valor $\tilde{v}$ de $\tilde{V}$ para $\delta = 0$ é v:

$$v(k_0) = \max\{V(k_0, k_1) + \delta v(k_1) + 0v(k_1)\}.$$

Também.

$$\tilde{V}(k_0, k_1) - \delta\tilde{v}(k_1) = V(k_0, k_1)$$

é fortemente côncava, limitada e C^2, i.e., não tem saltos, o que contradiz o fato acima. Vamos demonstrar agora o fato acima. Novamente, a demonstração será feita por contradição. Suponhamos que $\tilde{V}$ e $\tilde{v}$ são como na negação do fato acima. Devemos ter

$$\tilde{V}_{22}(k_0, k_1) - \delta\tilde{v}''_-(k_1) = \tilde{V}_{22}(k_0, k_1) - \delta\tilde{v}''_+(k_1).$$

Por isso, desprezando os argumentos,

$$\delta = \frac{\tilde{V}_{22}^- - \tilde{V}_{22}^+}{\tilde{v}''_- - \tilde{v}''_+}$$

onde $\tilde{V}_{22}^- \neq \tilde{V}_{22}^+ \Rightarrow \tilde{v}''_- \neq \tilde{v}''_+$.

Posto que $\tilde{V} - \delta\tilde{v}$ é fortemente côncava a matriz

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_{11} & \tilde{V}_{12} \\ \tilde{V}_{22} & \tilde{V}_{22} - \delta\tilde{v}''_{-} \end{pmatrix}$$

deve ser definida negativa. Em particular, deve-se ter

$$\tilde{V}_{11}\tilde{V}_{22}^{-} - \delta\tilde{V}_{11}\tilde{v}''_{-} - \tilde{V}_{12}\tilde{V}_{21} > 0$$

i.e..

$$\delta < \frac{\tilde{V}_{11}\tilde{V}_{22} - \tilde{V}_{12}\tilde{V}_{21}}{\tilde{V}_{11}\tilde{v}''_{-}}$$

visto que $\tilde{V}_{11}\tilde{v}''_{-} > 0$.

Substituindo-se o valor de δ obtem-se: $\frac{\tilde{V}_{22}^{-} - \tilde{V}_{22}^{+}}{\tilde{v}''_{-} - \tilde{v}''_{+}} < \frac{\tilde{V}_{11}\tilde{V}_{22} - \tilde{V}_{12}\tilde{V}_{21}}{\tilde{V}_{11}\tilde{v}''_{-}}$.

Como $\tilde{v}_{-} = \tilde{V}_1$, e $k_1'^{-} = -(\tilde{V}_{22}^{-})^{-1}\tilde{V}_{21}$, temos

$$v''_{-} = \tilde{V}_{11} + \tilde{V}_{12}k_1'^{-} = \tilde{V}_{11} - \tilde{V}_{12}(\tilde{V}_{22}^{-})^{-1}\tilde{V}_{21}$$

Observe-se que a fórmula de $k_1'^{-}$ é devida a $\delta = 0$ e ao fato de que pela monotonicidade de O' tem-se um conjunto denso de pontos diferenciaveis de$\tilde{k}_1$.

Substituindo-se na fórmula acima obtem-se

$$\frac{\tilde{V}_{22}^{-} - \tilde{V}_{22}^{+}}{[(\tilde{V}_{22}^{+})^{-1} - (\tilde{V}_{22}^{-})^{-1}]\tilde{V}_{12}\tilde{V}_{21}} < \frac{\tilde{V}_{11}\tilde{V}_{22} - \tilde{V}_{12}\tilde{V}_{21}}{\tilde{V}_{11}[\tilde{V}_{11} - \tilde{V}_{12}(\tilde{V}_{22}^{-})^{-1}\tilde{V}_{21}}.$$

Por isso,

$$\frac{\tilde{V}_{22}^{-}\tilde{V}_{22}^{+}}{\tilde{V}_{12}\tilde{V}_{21}} < \frac{\tilde{V}_{22}^{-}}{\tilde{V}_{11}}$$

e como $\tilde{V}_{22}^{-} < 0$,

$$(*) \qquad \frac{\tilde{V}_{22}^{+}}{\tilde{V}_{12}\tilde{V}_{21}} > \tilde{1}/\tilde{V}_{11}.$$

Mas como $\tilde{V}$ deve tambem ser estritamente côncava.

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_{11} & \tilde{V}_{12} \\ \tilde{V}_{21} & \tilde{V}_{22}^{+} \end{pmatrix}$$

deve ser semidefinida negativa. Por isso,

$$\tilde{V}_{11}\tilde{V}_{22}^{+} \geq \tilde{V}_{12}\tilde{V}_{21}$$

i.e.,

$$(**) \qquad V_{22}^{+} \leq \frac{\tilde{V}_{12}\tilde{V}_{21}}{\tilde{V}_{11}}$$

posto que $\tilde{V}_{11} < 0$. É claro que (*) e (**) estão em contradição e o teorema fica demonstrado. Como conseqüencia obtem-se o seguinte resultado:

Teorema 2. *Suponhamos $V_{12} > 0$. Então a política é crescente e k_1 é diferenciavel.*

Demonstração: Sabe-se que $V_{12} > 0$ implica a função política ser crescente. Para mostrar que ela é diferenciavel observemos que neste caso temos um gráfico como o abaixo:

Por essa razão, temos apenas estados estacionários e pontos na bacia de atração de um estado estacionário localmente estavel. Neste primeiro tipo de pontos a função política é diferenciavel pelo Teorema 1. A diferenciabilidade da função política em outros tipos de pontos decorre de um resultado de Araujo e Scheinkman (1977).

REFERÊNCIAS

ARAUJO. A. and J.A. SCHEINKMAN (1977), "Smootness comparative dynamics and the turnpike property", Econometrica 45. pp. 601–620.

BENVENISTE. L. and J.A. SCHEINKMAN (1979), "On the differentiability of the value function in dynamical models of economics", Econometrica 47. pp. 727–732.

LUCAS, R.; PRESCOTT, E. and N. STOKEY. "Dynamic competitive analysis". Preprint. Univ. of Chicago.

PONTRIAGYN, L.S. et all (1962), "The mathematical theory of optimal processes". John Wiley and Sons. N. York.

SCHWARTZ, L., "Cours d'Analyse", Hermann, Paris.

SÉRIE FAC-SÍMILE

Nºs Publicados

Nº 1 - "Inflação e Balanço de Pagamentos: Uma Análise Quantitativa das Opções de Política Econômica". André L. Resende e Francisco L. Lopes. 86 pp. Janeiro 1983

Nº 2 - "Inflação e Nível de Atividade no Brasil". Francisco L. Lopes. 98 pp. Fevereiro 1983

Nº 3 - "Abertura Financeira ao Exterior: Perspectivas Latino-Americanas". Edmar Lisboa Bacha. 142 pp. Fevereiro 1983

Nº 4 - "As Causas da Difusão da Posse dos Bens de Consumo Duráveis no Brasil". João L. M. Sabóia. 148 pp. Fevereiro 1983

Nº 5 - "Organização e Política Econômica". Jorge Vianna Monteiro". 76 pp. Março 1983

Nº 6 - "Análise da Viabilidade de um Estudo sobre a Magnitude e o Perfil da Imigração Estrangeira para o Brasil no Período 1873-1932". Elisa Maria da C. Pereira Reis. 46 pp. Março 1983

Nº 7 - "Urbanização e Custos numa Economia em Desenvolvimento. O Caso de Minas Gerais". Afrânio Alves de Andrade e Roberto Luiz de Melo Monte-Mór. 112 pp. Março 1983

Nº 8 - "Energia e Economia: Um Modelo Integrado". Eduardo Marco Modiano. 226 pp. Março 1983

Nº 9 - "Salários e Emprego na Indústria de Transformação: 1970/1976". Paulo Eduardo de Andrade Baltar e Paulo Renato Costa Souza. 198 pp. Abril 1983

Nº 10 - "Desequilíbrio Externo e Reorientação do Crescimento e dos Investimentos: Uma Análise Multissetorial das Perspectivas da Economia Brasileira". Rogério L. Furquim Werneck. 130 pp. Abril 1983

Nº 11 - "Demanda de Fatores e Ofertas de Produtos na Agricultura Brasileira: Subsídios para Formulação de Políticas Agrícolas". José Carlos de Souza Santos. 112 pp. Maio 1983

Nº 12 - "Potencial das Exportações Brasileiras de Manufaturados". Maurício Barata de Paula Pinto. 46 pp. Maio 1983

Nº 13 - "Estrutura Intra-Urbanas e Segregação Social no Espaço: Elementos para uma Discussão da Cidade na Teoria Econômica". Martim Oscar Smolka. 353 pp. Novembro 1983

Nº 14 - "Salários Médios e Salários Individuais no Setor Industrial: Um Estudo de Diferenciação Entre Firmas e Entre Indivíduos". Raul José Ekerman e Uriel de Magalhães: 106 pp. Fevereiro 1984

Nº 15 - "Evolução Histórica do Salário Mínimo no Brasil: Fixação, Valor Real e Diferenciação Regional". João L. M. Saboia. 106 pp. Agosto 1984

Nº 16 - "A Economia da Escravidão nas Fazendas de Café de Vassouras e Campinas: 1850-1888". Pedro Carvalho de Mello. (2 volumes) 416 pp. Outubro 1984

Nº 17 - "Fontes Endógenas do Crescimento do Setor Público no Brasil". Jorge Vianna Monteiro. 94 pp. Dezembro 1984

Nº 18 - "A Economia Mundial e o Brasil em Crise". Paul Singer. 149 pp. Julho 1985

Nº 19 - "Aspectos do Comércio Mundial no Pós-Guerra". Gesner José de Oliveira Filho. 208 pp. Agosto 1985

Nº 20 - "A Natureza Financeira da Crise e Suas Perspectivas". Monica Baer. 169 pp. Setembro 1985.

Nº 21 - "A Economia Mundial como Ponto de Partida". Pablo Rieznik. 42 pp. Outubro 1985

Nº 22 - "O Endividamento Externo dos Países Atrasados". Pablo Rieznik. 65 pp. Novembro 1985

Nº 23 - "Crescimento Econômico e Estrutura Agrária. (A Dinâmica da Agricultura Nordestina: 1950/80)". Ricardo de Medeiros Carneiro. 99 pp. Dezembro 1985

Nº 24 - "Preços Industriais, Salário Nominal, Salário Real e Demanda Efetiva no Brasil: 1949/79". Raul José Ekerman. 78 pp. Maio 1986

Nº 25/1- "O Empresário Industrial Frente ao Mercado de Capitais e à Economia Brasileira". Volume 1 - Pedro Carvalho de Mello, José Luiz Melo e Ana Maria Ladeira Aragão. 312 pp. Setembro 1986

Nº 25/2- "O Empresário Industrial Frente ao Mercado de Capitais e à Economia Brasileira". Volume 2 - Pedro Carvalho de Mello, José Luiz Melo e Ana Maria Ladeira Aragão. 260 pp. Setembro 1986

Nº 26 - "O Risco na Seleção de Sementes Melhoradas em Milho".Lister Manuel Corvalan Latapia. 136 pp. Fevereiro 1988

Nº 27 - Regulação Econômica e Crescimento do Setor Público no Período 1979-84". Jorge Vianna Monteiro. 72 pp. Maio 1988

Nº 28 - "Estado e Pequena Produção Rural". Sônia Maria Leite Ribeiro do Vale. 82 pp. Junho 1988

Nº 29 - Mercado de Trabalho e Crise: Notas Para Uma Abordagem". Paulo Eduardo de Andrade Baltar e Leonardo Guimarães Neto. 181 pp. Julho 1988

Nº 30 - "Uma Aplicação de Análise Multivariada para o Estudo da Estrutura Industrial Brasileira - 1980". Francisco Anuatti Neto e Marco Klein Chow. 94 pp. Outubro 1988

Nº 31 - "A Economia da Conservação de um Recurso Natural: O Solo Agrícola no Sul do Brasil". Edgar Augusto Lanzer e Juvir Luiz Mattuella. 106 pp. Dezembro 1988

Nº 32 - "Participação na Força de Trabalho e Ciclo Econômico: Brasil, 1979-1986". Jorge Jatobá. 52 pp. Junho 1989.

Nº 33 - "Preços Próprios, Fronteira Salário-lucro e Taxa de Exploração: Uma Análise Empírica Aplicada ao Brasil". Jean-Luc Rosinger. 57 pp. Junho 1989.

Nº 34 - "Congelamento de Preços e Desequilíbrio". Fernando B. Saldanha. 97 pp. Setembro 1989.

Nº 35 - "A Competição Espacial da Indústria Siderúrgica: As Implicações da Localização de Indústrias Produtoras de Aço na Amazônia". Carlos Maurício de Carvalho Ferreira. 133 pp. Março 1990.

Nº 36 - "Salários Nominais, Política Salarial e Ativismo Sindical". José Márcio Camargo. 78 pp. Março 1990.