

TEXTO PARA DISCUSSÃO Nº 430

**O CRESCIMENTO ECONÔMICO ÓTIMO  
EM ECONOMIAS COM INFLAÇÃO\***

Octávio A. F. Tourinho \*\*

Rio de Janeiro, julho de 1996

---

\* Este artigo resume resultados de pesquisa feita no âmbito de um convênio entre o IPEA e o BNDES. Agradeço os comentários de dois pareceristas anônimos.

\*\* Do BNDES cedido à DIPES/IPEA e da UFRJ.



*O IPEA é uma fundação pública vinculada ao Ministério do Planejamento e Orçamento, cujas finalidades são: auxiliar o ministro na elaboração e no acompanhamento da política econômica e prover atividades de pesquisa econômica aplicada nas áreas fiscal, financeira, externa e de desenvolvimento setorial.*

**Presidente**

*Fernando Rezende*

**Diretoria**

*Claudio Monteiro Considera*

*Luís Fernando Tironi*

*Gustavo Maia Gomes*

*Mariano de Matos Macedo*

*Luiz Antonio de Souza Cordeiro*

*Murilo Lôbo*

**TEXTO PARA DISCUSSÃO** tem o objetivo de divulgar resultados de estudos desenvolvidos direta ou indiretamente pelo IPEA, bem como trabalhos considerados de relevância para disseminação pelo Instituto, para informar profissionais especializados e colher sugestões.

**ISSN 1415-4765**

**SERVIÇO EDITORIAL**

**Rio de Janeiro – RJ**

Av. Presidente Antônio Carlos, 51 – 14º andar – CEP 20020-010

Telefax: (021) 220-5533

E-mail: [editrj@ipea.gov.br](mailto:editrj@ipea.gov.br)

**Brasília – DF**

SBS Q. 1 Bl. J, Ed. BNDES – 10º andar – CEP 70076-900

Telefax: (061) 315-5314

E-mail: [editbsb@ipea.gov.br](mailto:editbsb@ipea.gov.br)

© IPEA, 1998

*É permitida a reprodução deste texto, desde que obrigatoriamente citada a fonte. Reproduções para fins comerciais são rigorosamente proibidas.*

---

---

# SUMÁRIO

---

1 - INTRODUÇÃO .....	1
2 - O MODELO DETERMINÍSTICO COM POUPANÇA ENDÓGENA ...	3
3 - O MODELO COM INFLAÇÃO ESTOCÁSTICA E PRODUTIVIDADE DETERMINÍSTICA.....	8
4 - O MODELO COM INFLAÇÃO E PRODUTIVIDADE ESTOCÁSTICAS .....	13
5 - CONCLUSÃO .....	18
BIBLIOGRAFIA .....	19

---

---

## RESUMO

---

Discute-se, aqui, o crescimento econômico ótimo em modelos onde há inflação e a demanda por moeda é devida a custos de transação associados à utilização de outros ativos pelos agentes. Construíram-se três modelos: um com inflação determinística e dois em que ela é estocástica. Nos três casos, o aumento da inflação produz uma redução da riqueza e do estoque de capital **per capita** no estado estacionário, um efeito cujo sinal é oposto ao encontrado no modelo de Tobin. Nos modelos estocásticos, a análise concentra-se em processos de inflação elevada, o que permite que se calculem expressões analíticas para a demanda por moeda e a taxa de juros e identificam-se as condições sob as quais o aumento da incerteza da inflação reduz a taxa de crescimento econômico.

---

## 1 - INTRODUÇÃO

O modelo desenvolvido em Tourinho (1995) para derivar a função de demanda por saldos reais de moeda sob inflação elevada considerou uma economia de trocas, tomou como dado o processo estocástico dos preços e solucionou o problema de maximização de utilidade esperada do consumidor representativo. Neste artigo, resolve-se o problema de equilíbrio geral correspondente, considerando duas possibilidades para a caracterização do processo produtivo: que ele seja determinístico ou estocástico.

A principal indagação é: a economia sob inflação estocástica é **superneutra** com relação à moeda e à inflação? Diz-se que um modelo é **neutro** com relação à moeda quando uma mudança no **nível** dos saldos nominais de moeda não afeta variáveis reais. A propriedade de **superneutralidade** da moeda utilizada neste trabalho aplica o mesmo conceito a variações na **taxa de crescimento** nominal do estoque de moeda.<sup>1</sup>

Esta questão é analisada neste artigo no contexto neoclássico, com o auxílio de modelos de crescimento econômico ótimo em tempo contínuo que levam em conta a existência do imposto inflacionário sobre os saldos de moeda. Supõe-se que este imposto é utilizado para financiar os gastos do governo, absorvendo renda que poderia ter sido destinada ao consumo ou ao investimento privados. A resolução destes problemas de planejamento, que se reduzem à otimização de uma função de bem-estar social, permite obter as condições que caracterizam o equilíbrio competitivo monetário se as condições para a aplicação do segundo teorema do bem-estar forem satisfeitas.

O tipo mais simples de modelo apropriado para discutir estas questões é devido a Tobin (1965), que acrescentou a existência de moeda e inflação a um modelo de crescimento econômico do tipo proposto originalmente por Solow, onde a poupança agregada depende apenas da renda corrente, através de uma taxa de poupança fixa. Ele concluiu que uma taxa mais rápida de crescimento da oferta de moeda está associada a um estoque de capital **per capita** maior e, portanto, a uma renda **per capita maior** no estado estacionário. Moeda, portanto, não é superneutra neste caso.

A intuição com relação ao efeito que conduz a este resultado é simples: a taxa de inflação mais alta associada à taxa mais elevada de crescimento da oferta de moeda induz os agentes a reduzirem a parcela de riqueza retida como moeda, deslocando, portanto, o seu **portfólio** na direção de ativos reais (capital físico), que são a alternativa à moeda para a estocar

---

<sup>1</sup>Para uma resenha de modelos de crescimento econômico com moeda e inflação, ver Orphanides e Solow (1990).

valores naquele modelo. Este é um efeito similar àquele que se pode obter em um modelo de escolha de portfólio onde o ativo alternativo são os títulos indexados. Esta propriedade do modelo, entretanto, não deixa de ser surpreendente, pois a intensidade maior do capital indicaria uma renda **per capita** no estado estacionário mais elevada para taxas maiores de expansão monetária, o que parece chocar-se com os fatos estilizados associados aos processos de inflação elevada.

O efeito de Tobin, entretanto, não é robusto com relação a alterações aparentemente pequenas do modelo. Ajustes na definição da renda disponível podem mudar qualitativamente o resultado, mesmo sob a hipótese original de uma taxa de poupança fixa. Além disto, modificações na regra de poupança ou na função da moeda na economia também podem tornar ambíguo o efeito da inflação no crescimento.<sup>2</sup>

O modelo de Tobin foi reformulado por Sidrauski (1967), que trata a decisão de poupança como parte do problema de maximização de utilidade do consumidor representativo, ao invés de considerá-la exógena. Para isto ele inclui a moeda como mais um bem na função de utilidade do consumidor representativo. Neste caso, se o produto marginal do capital depende apenas da relação capital-trabalho, então o estoque de capital **per capita** assintótico é independente da taxa de crescimento da oferta de moeda ou da taxa de inflação. Portanto, no modelo de Sidrauski a moeda é superneutra.

Este último resultado, entretanto, não se mantém diante de algumas alterações propostas na literatura. Por exemplo, Fischer (1975) demonstrou que a política monetária tem efeitos reais no estado estacionário quando o impacto de longo prazo da inflação na intensidade do capital é considerado, isto é, quando se assume a existência do efeito de Tobin, descrito acima. Outro caso onde a superneutralidade pode falhar ocorre quando o produto marginal do capital depende de outros fatores além da intensidade do capital na produção.

Neste artigo exploram-se as relações entre intensidade do capital, renda e inflação, em processos de inflação elevada. A análise concentra-se nestes casos porque eles ajudam a destacar os principais efeitos da inflação, que neles são mais dramáticos. Analisa-se, em particular, como a existência de incerteza na taxa de inflação e na função de produção da economia pode afetar a super-neutralidade de Sidrauski, através de três modelos com graus crescentes de complexidade.

---

<sup>2</sup>Levhari e Patinkin (1968) mostram três casos em que o efeito da inflação no crescimento é ambíguo, considerando as seguintes alterações no modelo original: **a)** fazendo a taxa de poupança depender negativamente da taxa de inflação; **b)** considerando a moeda como um bem de produção; e **c)** considerando-a como um bem de consumo.

Na próxima seção, apresenta-se um modelo determinístico onde a riqueza é mantida sob a forma de moeda ou de capital físico e supõe-se que existem custos de transação associados à não manutenção de uma parte da riqueza como moeda. O tratamento dado à motivação para reter moeda é aquele proposto em Tourinho (1995) em um modelo que trata apenas da escolha de **portfolio**. Na terceira seção faz-se a generalização do modelo da seção anterior para o caso em que os preços são estocásticos. Finalmente, na quarta seção introduz-se mais uma fonte de incerteza, fazendo a produtividade da economia ser também estocástica.

## 2 - O MODELO DETERMINÍSTICO COM POUPANÇA ENDÓGENA

Nesta seção formula-se o problema em sua forma determinística, pois assim ele pode ser solucionado por controle ótimo, que permite melhor caracterização das condições marginais do que a técnica de programação dinâmica da próxima seção.

Adota-se uma formulação inspirada em Sidrauski (1967), com dois tipos de ativos: moeda e capital físico. Ao invés de se postular que os saldos de moeda aparecem na função de utilidade, como ele fez, assume-se aqui que a moeda tem um retorno de conveniência, admitindo-se que ela permite ao agente economizar no custo das transações requeridas para implementar seus planos ótimos de consumo e de acumulação de riqueza. Se este retorno não existisse, a moeda seria um ativo dominado nesta economia e não seria retida no **portfolio** do agente. Esta simetria entre as duas alternativas de modelagem -- incluir a moeda diretamente na função de utilidade, ou na restrição orçamentária -- já foi apontada por Feenstra (1986).

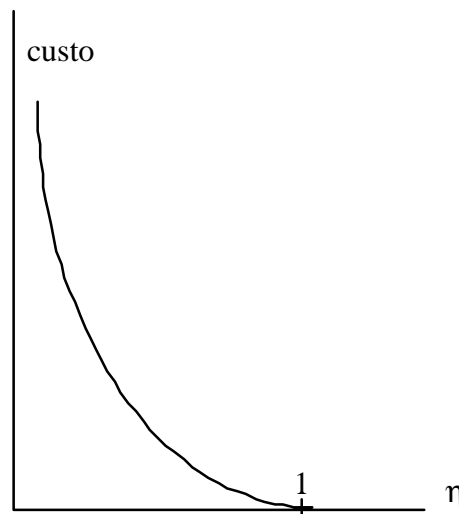
A utilidade da moeda é modelada aqui introduzindo-se na equação de equilíbrio orçamentário do agente representativo uma despesa que reflete o custo de oportunidade, em recursos reais, de se reter uma fração de sua riqueza como capital físico. Quando multiplicado pela utilidade marginal da riqueza, este custo pode ser interpretado como o retorno de conveniência da moeda ao qual o agente renunciou, ao não manter toda a sua riqueza como moeda.

Admite-se que este custo por unidade de tempo ( $\delta$ ) é uma função decrescente da proporção da riqueza do agente que é retida sob a forma de moeda ( $\eta$ ), sendo nulo quando toda sua riqueza é totalmente líquida ( $\eta = 1$ ) e infinitamente elevado quando a fração de encaixes reais no seu **portfolio** se aproxima de zero ( $\eta \rightarrow 0$ ). Assume-se que ele possa ser adequadamente aproximado por uma função logarítmica negativa no intervalo  $0 < \eta < 1$ , como mostrado na equação (1) e representado na Figura 1, onde  $\kappa > 0$  é um parâmetro cuja unidade é aquela do bem de consumo real. Valores mais elevados de  $\kappa$  são associados com a maior

utilidade da moeda em facilitar transações e, portanto, com o maior retorno de conveniência.

$$\delta = -\kappa \log(\eta) \quad \kappa > 0 \quad (1)$$

Figura 1  
Custo de transação como função da participação da moeda na carteira do agente



O retorno da aplicação de riqueza em capital físico é o fluxo de bens produzidos, que é dado pela função de produção  $f$  representada na equação (2), que se supõe satisfazer às condições de Inada, apresentando retornos decrescentes ao capital<sup>3</sup> ( $f'' < 0$ ):

$$y = f(k) = f[(1 - \eta)w] \quad (2)$$

Assume-se que o número de membros da família representativa cresce à taxa  $n$ , que a sua utilidade ( $U$ ) depende somente do fluxo de consumo ( $c$ ) e que os estoques de moeda a afetam pelo seu efeito sobre a riqueza, que ocorre através da componente de custo de transação ( $\delta$ ). O problema de controle ótimo a ser resolvido é o de maximizar a utilidade descontada (a uma taxa exponencial  $\rho$ ) do fluxo de consumo [equação (3)], sujeita a uma restrição orçamentária de fluxo [equação (4)] que contém indiretamente (via evolução de  $\eta$ ) a equação dinâmica de evolução do estoque de capital:

<sup>3</sup>Cenários de crescimento endógeno gerados por uma função de produção com retornos constantes com relação a um conceito mais amplo de capital, como proposto por Rebelo (1990), não são tratados neste artigo, apesar de serem uma extensão natural da abordagem aqui apresentada.



$$\max_{c, \eta} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(c(t)) dt \quad (3)$$

sujeito a:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\delta}{w} = f[(1-\eta)w] - \eta w\pi + \kappa \log(\eta) - c - wn + x \quad (4)$$

Alguns elementos da equação (4) devem ser descritos com mais detalhe: primeiro termo mostra que a riqueza aumenta com a produção; segundo é o imposto inflacionário, que reduz a riqueza do agente em um valor real igual ao produto da taxa de inflação ( $\pi$ ) pelos saldos de moeda ( $\eta w$ ); terceiro é o custo de transação discutido anteriormente; quinto ( $-wn$ ) indica que, **caeteris paribus**, a riqueza **per capita** se reduziria a uma taxa igual em valor absoluto à taxa de crescimento populacional.

Finalmente, faz parte também da restrição orçamentária (4) o fluxo das transferências recebidas do governo ( $x$ ). Os vários cenários com relação ao destino do imposto inflacionário podem ser acomodados com hipóteses alternativas a respeito de  $x$ . Em um extremo, se ele é consumido pela ineficiência da máquina pública ou resgatando passivos anteriores ao período inicial, então  $x=0$ . Alternativamente, se o imposto inflacionário retorna integralmente ao consumidor, sob a forma de transferências, por exemplo, então  $x = \eta w\pi$ . A situação efetiva de um dado país provavelmente se encontra entre estes dois extremos.

Para que o problema de otimização seja bem definido, especifica-se também uma condição inicial sobre a riqueza e uma condição de transversalidade, ambas mostradas em (5), onde  $V(w)$  representa a função de utilidade indireta da riqueza:

$$w(0) = w \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-\rho t} V(w(t))] = 0 \quad (5)$$

O sistema das equações (3) a (5) será solucionado com a técnica de controle ótimo,<sup>4</sup> onde a variável de estado é a riqueza ( $w$ ) e os controles são o nível de consumo e a proporção de moeda retida no **portfolio** ( $c$  e  $h$ ). Para isto, chamando de  $\lambda(t)$  a variável contemporânea de co-estado associada à equação dinâmica de transição de estado, pode-se formar o Hamiltoniano do valor presente, que é apresentado na equação (6), equantto as condições marginais necessárias ao ótimo estão nas equações (7) a (9), às quais se acrescenta também a equação (4):

<sup>4</sup>Para uma introdução à técnica de controle ótimo, ver Kamien e Schwartz (1981).

$$H = U(c) + \lambda \cdot [f((1-\eta)w) - \eta w \pi + \kappa \log \eta - c - wn + x] \quad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Rightarrow U'(c) = \lambda \quad (7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow -f' \cdot w - w\pi + \frac{\kappa}{\eta} = 0 \quad (8)$$

$$\dot{\lambda} = \rho \lambda - \frac{\partial H}{\partial w} = \rho \lambda - \lambda \cdot [(1-\eta)f' - \eta\pi - n] \quad (9)$$

Da equação (8) se deriva imediatamente a equação (10) para a demanda por saldos reais de moeda como função do estoque de capital, que, por sua vez, é definido por  $k = (1-\eta)w$ :

$$\eta w = \frac{\kappa}{\pi + f'(k)} \quad (10)$$

Utilizando (7), pode-se escrever (9) como a equação (11):

$$(1-\eta)f'(k) = \rho + n + \eta\pi - \left(\dot{U}'/U'\right) \quad (11)$$

Usando (11), pode-se eliminar a produtividade marginal do capital de (10) e definindo a taxa de juros real ( $r$ ) como na equação (12), obtém-se a equação (13), que permite calcular a proporção da riqueza que é retida como moeda. Ela mostra que essa parcela se torna muito pequena quando a taxa de inflação é muito elevada, o que ocorre porque a taxa de inflação nestes casos é pelo menos uma ordem de grandeza maior que a taxa de juros real:

$$r = \rho + n - \left(\dot{U}'/U'\right) + \kappa/w \quad (12)$$

$$\eta w = \frac{\kappa}{\pi + r} \quad (13)$$

Substituindo na equação (11) a expressão obtida para  $\eta$  em (13) e simplificando a equação resultante, obtém-se finalmente a equação (14) para a produtividade marginal do capital:

$$f'(k) = r \quad (14)$$

A interpretação econômica desta expressão pode ser feita a partir daquela usual no modelo de Ramsey-Cass, ou seja, no equilíbrio, a taxa

de retorno sobre o capital físico deve ser suficiente para compensar a soma de três parcelas: **a**) a taxa de desconto intertemporal da família representativa  $(\rho + n)$ ; **b**) a taxa de decréscimo da utilidade marginal  $(\dot{U}'/U')$ ; e **c**) o custo de transação em retê-lo  $(\kappa/w)$ . Este último termo reflete a perda relativa de capital físico que é devida aos custos de transação postulados em (1) e aparece na equação (14) de modo análogo àquele como a taxa de depreciação do capital físico apareceria, caso sua existência houvesse sido considerada.

Na ausência de progresso técnico exógeno, o penúltimo termo de (14) desaparece no estado estacionário, pois o consumo **per capita** tem que se estabilizar. Alternativamente, quando existe progresso técnico exógeno do tipo Harrod-neutro, caracterizado por uma taxa  $\psi$  de aumento da produtividade da mão-de-obra, pode-se demonstrar que, no caso em que a função de utilidade é iso-elástica  $(U'(c) = c^{-\zeta})$ , a taxa de crescimento do consumo **per capita** será igual  $\psi$  e a expressão para a taxa de decréscimo da utilidade marginal adquire uma forma simples:  $\zeta \psi$ . Em qualquer destes dois casos, o fato crítico é que  $(\dot{U}'/U')$  será independente de  $\pi$ , o que facilita a comparação dos estados estacionários correspondentes a diferentes taxas de inflação, pois isto pode ser feito levando em conta que o seu efeito sobre o penúltimo termo de (14) é nulo.

Para isolar o efeito da inflação na intensidade do capital de equilíbrio, é necessário fazer a análise de estática comparativa do sistema de equações dado por (12), (13) e (14). Restringindo a atenção aos casos descritos acima, em que a taxa de decréscimo da utilidade marginal é constante, e calculando a diferencial total de cada uma destas equações para variações nas variáveis endógenas  $r$ ,  $k$  e  $w$ , quando se considera uma variação independente, e resolvendo o sistema resultante, obtém-se o vetor (15)

$$\begin{pmatrix} dw \\ dr \\ dk \end{pmatrix} = d\pi \cdot \begin{pmatrix} -\kappa(\pi + r)^{-2} A \\ \eta^2 A \\ \eta^2 A / f''(k) \end{pmatrix} \quad (15)$$

onde  $A = \left[ 1 + \frac{\kappa}{w^2} \left( \frac{1}{f''(k)} - \frac{\kappa}{(\pi + r)^2} \right) \right]^{-1}$

Verifica-se que se  $\kappa > -w^2 f''(k)$ , então  $A > 0$ , e tem-se  $dw/d\pi < 0$ ,  $dr/d\pi > 0$  e  $dk/d\pi < 0$ , fazendo com que o efeito do acréscimo de inflação no estoque de capital e na renda de equilíbrio seja no sentido de **reduzi-lo**, produzindo o efeito **anti-Tobin** mencionado na introdução. Em outras

palavras, lembrando que  $\kappa$  é o fator de escala da equação para o custo de transação, pode-se obter aquele efeito desde que aqueles custos sejam suficientemente elevados.

### 3 - O MODELO COM INFLAÇÃO ESTOCÁSTICA E PRODUTIVIDADE DETERMINÍSTICA

Nesta seção, introduz-se incerteza com relação à inflação no modelo da seção anterior. Isto é feito do mesmo modo como o retorno estocástico dos ativos financeiros é tratado na classe de modelos que se origina com o modelo de consumo e escolha de **portfólio** de Merton (1969), que foi estendido para economias com inflação por Fischer (1975), o qual assume que os preços dos bens e os retornos dos títulos (indexados e nominais) e ações (que em última instância representam frações do capital físico) são governados por processos estocásticos de Wiener. Ele então soluciona o problema de programação dinâmica estocástica decorrente do comportamento ótimo do agente representativo para computar as demandas pelos ativos. Esta mesma estratégia é adotada a seguir, no contexto de uma economia de comando.<sup>5</sup>

Assuma que o preço do único bem de consumo segue um processo estocástico de difusão de Itô, dado pela equação (16), onde  $dz$  é o incremento do processo estocástico de Wiener<sup>6</sup>  $z$  e os parâmetros  $\pi$  e  $\sigma$  são conhecidos pelo agente e são fixos.<sup>7</sup> Isto significa que, em um intervalo de tempo  $dt$  a partir de um instante arbitrário, a taxa de inflação instantânea tem uma distribuição normal com média  $\pi dt$  e variância  $\sigma^2 dt$ :

$$\frac{dP}{P} = \pi dt + \sigma dz \quad (16)$$

O modelo é especificado em termos das variáveis reais, que são iguais à variável nominal correspondente dividida pelo nível de preços, em cada ponto do tempo. O agente decide sobre o seu fluxo real de consumo ( $c$ ) e distribui sua riqueza real ( $w$ ) entre moeda e capital físico em proporções  $h$  e  $(1-h)$ , em cada momento, a partir de uma riqueza real inicial  $w(0) = w_0$ , tal como na seção anterior. Por simplicidade, continuamos assumindo que não há renda do trabalho.

---

<sup>5</sup>O problema é formulado para a economia de comando, mas seria fácil especificar e resolver o problema equivalente para uma economia descentralizada competitiva.

<sup>6</sup>Para uma introdução ao uso dos métodos de programação dinâmica com processos de Itô em problemas de seleção de **portfólios** ver, por exemplo, Merton (1971) ou Fischer (1975).

<sup>7</sup>A constância dos parâmetros não é crítica para a derivação que se segue.

Como antes, a aplicação de capital na produção com um retorno real não estocástico dado por (2) é a única alternativa à moeda<sup>8</sup> para reter riqueza. A moeda tem um retorno nominal nulo, pois seu preço é igual à unidade. A desvalorização dos saldos reais de moeda depende da variação de preços, o que faz com que o retorno real ao reter moeda ( $q_m = 1/P$ ) seja estocástico. Ele pode ser calculado pelo lema de Itô, produzindo a equação (17):

$$\frac{dq_m}{q_m} = (-\pi + \sigma^2)dt - \sigma dz \quad (17)$$

O problema estocástico análogo ao das equações (3) a (5) é aquele especificado nas equações (18) a (20), onde o objetivo passa a ser a maximização de utilidade esperada. Na nova restrição orçamentária [equação (19)], o custo para os agentes de reter moeda em seu **portfolio** é obtido da equação (17), enquanto os outros termos são iguais aos termos respectivos da equação (4):

$$\max_{c,h} E_0 \int_0^{\infty} e^{-rt} U(c(t)) dt \quad (18)$$

sujeito a:

$$dw = f[(1-\eta)w]dt + \eta w[(-\pi + \sigma^2)dt - \sigma dz] + \kappa \log(\eta)dt - c dt - n w dt + x dt \quad (19)$$

$$w(0) = w \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sum [e^{-rt} V(w(t))] = 0 \quad (20)$$

A natureza estocástica deste problema de maximização tem uma racionalização natural, quando se considera que é imposto inflacionário, correspondente ao custo de se reter moeda, financia a parcela do déficit real do governo que não encontra cobertura no acréscimo de endividamento. Admitindo que o endividamento real seja constante no longo prazo, a restrição orçamentária do governo exigirá, então, que a taxa de inflação seja aquela que produz um fluxo de receita inflacionária suficiente para financiar o déficit. Supondo que o déficit futuro das contas do governo é exógeno e incerto, as expectativas racionais dos agentes serão de que a expansão da oferta monetária futura seja estocástica, o que daria origem a uma taxa de inflação cujo comportamento poderia ser governado pela equação (16).

<sup>8</sup>Isto não envolve nenhuma perda de generalidade, pois Fischer (1975, p. 520) mostrou, em um modelo similar que permite a existência de títulos nominais, que seu preço será precisamente aquele que garante que em equilíbrio nenhum deles exista, desde que as expectativas sejam homogêneas.

Para resolver o problema especificado nas equações (18) a (20), pode-se escrever a equação (21), derivada do princípio básico da programação dinâmica estocástica, que deve ser satisfeita pela utilidade indireta da riqueza --  $V(w)$  -- e pelas trajetórias ótimas da variável de estado ( $w$ ) e de controle ( $c$ ).

$$\rho V(w) = \max_{c, \eta} \left\{ \begin{array}{l} U(c) + \\ [f((1-\eta)w) + \eta w(-\pi + \sigma^2) + \kappa \log(\eta) - c - nw + x] V'(w) \\ + (1/2) \eta^2 w^2 \sigma^2 V''(w) \end{array} \right\} \quad (21)$$

Obtendo-se as condições de primeira ordem para o problema de maximização dentro dos colchetes em (21), pode-se derivar (22) e (23):

$$U'(c) = -V'(w) \quad (22)$$

$$\kappa + [-\pi + \sigma^2 - f'((1-\eta)w)] \eta w + \sigma^2 \frac{V''(w)}{V'(w)} \eta^2 w^2 = 0 \quad (23)$$

Este sistema admite uma solução aproximada para os casos de inflação elevada, quando então o termo quadrático de (23) pode ser desprezado. Isto ocorre se a taxa exógena de expansão monetária ( $q = d \log M/dt$ ) for elevada, pois neste caso a taxa de inflação no estado estacionário (onde  $\dot{m} = 0$ ) será igual a  $\theta - n$ , e também será elevada, situação que corresponde a processos onde o déficit real do governo é grande, em termos relativos. Neste caso, a fração da riqueza retida como moeda será diminuta, fazendo com que o último termo de (23) seja pelo menos uma ordem de grandeza menor que os outros, devido à presença do termo em  $\eta^2$ .

Esta aproximação pode ser empregada desde que os parâmetros do termo quadrático de (23) não sejam elevados o suficiente para torná-lo relevante, ou seja, que a ordem de grandeza do coeficiente de  $\eta^2 w$  seja no máximo igual à ordem de grandeza do coeficiente do termo linear ( $\eta w$ ). Escrevendo o termo quadrático como  $\sigma^2 R \eta^2 w$ , onde  $R$  é a aversão relativa ao risco, verifica-se que aquela condição tende a ser satisfeita, pois a ordem de grandeza de  $\sigma^2$  será menor que a de  $\pi$ , enquanto valores estimados de  $R$  são da ordem de 10. Assim, no caso de processos de inflação elevada, que produzem  $\eta$  próximo de zero, pode-se escrever (23) como a equação aproximada (24):

$$\eta w \cong \frac{\kappa}{\pi - \sigma^2 + f'(k)} \quad (24)$$

Para calcular a intensidade do capital de equilíbrio, pode-se tomar a derivada parcial da equação (21) com relação à variável de estado  $w$ ,

utilizando no processo o teorema da envoltória,<sup>9</sup> o que dá origem à equação (25).

$$\rho V'(w) = \left\{ \begin{array}{l} [(1-\eta)f'((1-\eta)w) + (-\pi + \sigma^2)\eta + n]V'(w) + \\ \left[ f((1-\eta)w) + \eta w(-\pi + \sigma^2) + \kappa \log(\eta) - c - nw + x \right] V''(w) \\ + \eta^2 \sigma^2 w V''(w) + (1/2)\eta^2 \sigma^2 w^2 V'''(w) \end{array} \right\} \quad (25)$$

Para simplificar (25), deve-se reconhecer que os termos em  $\eta^2$  podem ser desprezados pelas razões já expostas e notar que o termo entre colchetes na segunda linha de (25) nada mais é do que o valor esperado de  $dw$ . Pode-se então escrever a equação aproximada (26):

$$\rho \cong [(1-\eta)f'(k) + (-\pi + \sigma^2)\eta + n] + \frac{E(dw)}{dt} \cdot \frac{V''}{V'} \quad (26)$$

Finalmente, usando (24) para eliminar  $\eta$  de (26) e (22) para escrever a utilidade indireta em termos da função utilidade, tem-se a equação (27), que permite calcular o valor aproximado da intensidade do capital de equilíbrio. Como ela é (aproximadamente) igual à equação (14) da última seção, verifica-se que a introdução de incerteza com relação à taxa de inflação não alterou a **fórmula** da intensidade do capital de equilíbrio obtida no modelo determinístico e não inclui explicitamente a variância da taxa de inflação.<sup>10</sup>

$$f'(k) = r \cong r + n - \left( \dot{U}'/U' \right) + k/w \quad (27)$$

Utilizando (27), a demanda por saldos reais de moeda obtida na equação (24) pode então ser escrita em termos dos parâmetros do modelo como na equação (28):

$$\eta w \cong \frac{\kappa}{\pi - \sigma^2 + r} \quad (28)$$

A interpretação econômica das condições (27) e (28) é elementar, à vista da seção precedente: à condição usual de Ramsey-Keynes, acrescenta uma regra de **portfolio** muito simples, onde a fração da riqueza que é

<sup>9</sup>Para uma função que é definida como o resultado de um problema de maximização, pode-se desprezar o efeito sobre os valores ótimos dos maximandos, ao calcular a derivada com relação a um parâmetro da função.

<sup>10</sup>A incerteza na taxa de inflação tem, entretanto, um efeito indireto em (27), pois afeta tanto a intensidade de capital como a renda de equilíbrio.

conservada sob a forma de moeda é uma função inversa da taxa de inflação esperada, corrigida para a existência de incerteza inflacionária. A comparação de (28) e (13) mostra que a introdução da incerteza traz como consequência o aparecimento da variância, com sinal negativo, no denominador da expressão para a demanda por saldos reais de moeda.

A equação (28) é idêntica àquela obtida por Tourinho (1995) em um modelo de escolha de **portfólio** numa economia com títulos indexados. O modelo aqui apresentado é análogo àquele, caso se leve em conta que as empresas que emitem os títulos indexados devem estar em equilíbrio, sendo, portanto, necessário que a taxa de juros real dos títulos indexados seja igual à produtividade marginal do capital, com o especificado em (27). Entretanto, o modelo de equilíbrio geral aqui apresentado tem a vantagem de permitir o cálculo da intensidade do capital de equilíbrio e, portanto, a taxa de juros, a partir dos parâmetros básicos desta economia.

A resposta aproximada dos saldos reais de moeda em (28) a um aumento do risco inflacionário admite uma interpretação natural do ponto de vista econômico. À medida que a variância da taxa de inflação aumenta, há um **aumento** na demanda por encaixes reais, para assegurar o agente contra a possibilidade de ter que conduzir seus negócios com estoques insuficientes de moeda e ter que abrir mão dos elevados retornos de conveniência de moeda.

Pode também existir outro efeito, que tende a **reduzir** a demanda por moeda: a elevação na variância da taxa de inflação aumentaria o risco de variações na riqueza, devido à retenção de estoques de moeda, e induziria agentes avessos ao risco a reduzir seus estoques de moeda, para reduzir o risco de seu **portfólio** total. Este efeito não está presente na equação (28) porque ele só é importante se o grau de aversão ao risco é suficientemente elevado para produzir ajustamentos significativos no montante de moeda retido pelo agente. Ele somente será importante se os benefícios de evitar o risco adicional são grandes o suficiente para justificar incorrer em custos mais altos de conduzir os negócios com estoques significativamente menores de moeda. Este motivo para reter moeda, associado ao efeito de recomposição da carteira de ativos, é de uma ordem de magnitude menor do que o motivo transacional descrito acima, dando origem à derivada parcial positiva dos saldos reais com relação à inflação.

Como no caso determinístico, a análise de estática comparativa para obter o efeito da inflação na riqueza e na intensidade do capital de equilíbrio depende do cálculo das derivadas totais do sistema de condições de primeira ordem (27) e (28), admitindo, entretanto, variações tanto na inflação esperada como na sua variância ( $d\pi$  e  $d\sigma^2$ ):



$$\begin{pmatrix} dw \\ dr \\ dk \end{pmatrix} = (d\pi - d\sigma^2) \cdot \begin{pmatrix} -\kappa(\pi - \sigma^2 + r)^{-2} B \\ \eta^2 B \\ \eta^2 B / f''(k) \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\text{onde } B = \left[ 1 + \frac{\kappa}{w^2} \left( \frac{1}{f''(k)} - \frac{\kappa}{(\pi - \sigma^2 + r)^2} \right) \right]^{-1}$$

Verifica-se em (29) que, tal como no modelo determinístico, uma condição suficiente para que  $B > 0$  e se obtenha o efeito **anti-Tobin** ( $dw/d\pi < 0$ ,  $dr/d\pi > 0$  e  $dk/d\pi < 0$ ) é que os custos de transação sejam suficientemente elevados, isto é, que  $\kappa > -w^2 f''(k)$ .

A análise do efeito de uma elevação da incerteza da inflação deve levar em conta que um aumento do parâmetro  $\sigma^2$  altera o retorno real (negativo) de reter moeda, como se pode ver na equação (17). Este efeito paralelo está presente em (28), o que faz com que a utilização direta daqueles coeficientes não permita isolar o impacto do aumento da inflação.

Para caracterizar exclusivamente o efeito do aumento da incerteza é necessário considerar um aumento simultâneo de  $\pi$  e  $\sigma^2$  que não produza alterações no retorno de reter moeda no **portfólio**, ou seja, tal que  $d\pi - d\sigma^2 = 0$ . Ora, examinando (28), verifica-se que um aumento de incerteza que atenda a essa condição, isto é, que seja um **mean-preserving spread**, não tem efeitos reais neste modelo onde apenas a inflação é estocástica. Como os fatos estilizados de economias com inflação elevada sugerem que um aumento da incerteza inflacionária tende a reduzir a renda de equilíbrio, desenvolve-se na próxima seção um modelo onde se obtém tal efeito introduzindo incerteza também na esfera produtiva da economia.

#### 4 - O MODELO COM INFLAÇÃO E PRODUTIVIDADE ESTOCÁSTICAS

Para tentar isolar um segundo canal através do qual a inflação elevada pode afetar a intensidade do capital e a renda **per capita** no equilíbrio estacionário e para refletir mais fielmente a estrutura financeira de economias sujeitas a inflação elevada, admite-se, nesta seção, a existência simultânea de moeda, títulos indexados e capital físico. Neste caso, quando a taxa de inflação esperada se eleva há uma fuga da moeda, mas a riqueza assim liberada não se dirige ao capital físico, como no modelo de Tobin, ou parcialmente ao consumo, como no de Sidrauski, mas é utilizada também para adquirir títulos indexados, reduzindo o investimento e provocando uma queda na taxa de crescimento de

equilíbrio. A seguir se verá com mais detalhe sob que condições se pode esperar a ocorrência deste efeito de **crowding-out** do investimento.

Supõe-se nesta seção que a taxa de inflação é incerta, como na anterior, e admite-se que os títulos indexados pagam uma taxa de juros real  $r$  igual à produtividade marginal do capital. Caso não houvesse incerteza na produção e os preços dos insumos e produtos fossem perfeitamente indexados à inflação, o equilíbrio seria determinado<sup>11</sup> pelas condições (24), (25) e (13), e os agentes seriam indiferentes entre reter riqueza sob a forma de capital físico ou de títulos indexados. Neste caso, a parcela retida sob a forma de capital físico será aquela requerida pela produção e determinada pela condição de Ramsey, e o excedente de riqueza será aplicado em títulos indexados. Portanto, o caso da existência de títulos indexados em um contexto de produtividade determinística pode ser analisado com o modelo da última seção. Considera-se nesta seção o caso em que a função de produção apresenta produtividade estocástica, da forma especificada na equação (30):

$$y = f(k)[dt + v dz_1] \quad (30)$$

O componente estocástico está associado às variações aleatórias na produtividade real da economia que podem ocorrer em um ambiente de inflação elevada, e que são devidas às dificuldades de operar a economia eficientemente e de planejar adequadamente os investimentos naquela situação. Esta formulação pretende enfatizar os custos da inflação associados ao aumento da incerteza que ela produz na economia. É importante notar também que, tal como foi especificado, este risco não é diversificável, tanto em nível individual quanto agregado.

Chamando de  $h_1$  e  $h_2$  a fração da riqueza que é retida sob a forma de capital físico e de moeda, respectivamente, continuando a denotar a tendência e o desvio padrão do processo estocástico para a taxa de inflação por  $p$  e  $s$ , e fazendo a correlação entre os componentes estocásticos do produto e da inflação ( $dz_1$  e  $dz_2$ ) ser igual a  $\omega$ , o novo problema de maximização pode ser escrito como nas equações (31) a (33):

$$\max_{c, \eta_1, \eta_2} \Xi_0 \int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(c(t)) dt \quad (31)$$

sujeito a:

<sup>11</sup>A solução formal é omitida por brevidade.

$$dw = f(\eta_1 w)[dt + v dz_1] + \eta_2 w \cdot [(-\pi + \sigma^2) dt - \sigma dz_2] + (1 - \eta_1 - \eta_2)wr dt + \kappa \log(\eta) dt - c dt - n w dt + x dt \quad (32)$$

$$w(0) = w \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Xi [e^{-\rho t} V(w(t))] = 0 \quad (33)$$

A equação básica do problema de controle ótimo estocástico enunciado acima, derivada do princípio de programação dinâmica estocástica, é apresentada na equação (34):

$$\rho V(w) = \max_{c, \eta_1, \eta_2} \left\{ \begin{array}{l} U(c) + \\ [f(\eta_1 w) + \eta_2 w \cdot (-\pi + \sigma^2) + (1 - \eta_1 - \eta_2)wr + \\ + \kappa \log(\eta_2) - c - nw + x] V'(w) + \\ \left[ (f(\eta_1 w))^2 v^2 + \eta_2^2 w^2 \sigma^2 - 2f(\eta_1 w)v\eta_2 w \sigma \omega \right] \frac{V''(w)}{2} \end{array} \right\} \quad (34)$$

Obtendo-se as condições de primeira ordem para o problema de maximização dentro dos colchetes em (34), pode-se derivar as equações (35), (36) e (37), onde os argumentos das funções  $f$  e  $V$  foram omitidos:

$$U'(c) = -V'(w) \quad (35)$$

$$\frac{r}{f'} = 1 + (f v^2 - v \eta_2 w \sigma \omega) \frac{V''}{V'} \quad (36)$$

$$\kappa + \eta_2 w \cdot \left[ -\pi + \sigma^2 - r - f v \sigma \omega \frac{V''}{V'} \right] + \eta_2^2 w^2 \sigma^2 \frac{V''}{V'} = 0 \quad (37)$$

De modo análogo à estratégia empregada na seção anterior, a solução aproximada da equação (37) para situações de inflação elevada pode ser obtida desprezando o seu termo quadrático.<sup>12</sup> Substituindo a taxa de juros

<sup>12</sup>A aproximação pode ser empregada desde que a variância do processo estocástico dos preços não seja muito grande, que a moeda não seja tão indispensável que sua participação no **portfólio** do agente seja elevada e que os agentes não sejam excessivamente avessos ao risco, de modo a permitir a mesma simplificação feita para derivar a equação (24).

( $r$ ) pelo seu valor em (36) e resolvendo o sistema resultante, verifica-se que o nível de demanda por moeda será dado pela equação (38):

$$w\eta_2 \cong \frac{\kappa}{\pi - \sigma^2 + r + f(k)v\sigma\omega \cdot (U''/U')} \quad (38)$$

Note-se, inicialmente, que a equação (24) da última seção é obtida a partir de (38) quando não há incerteza na produção ( $v=0$ ). A comparação destas duas equações mostra também que os saldos monetários serão maiores no caso em que a produtividade é estocástica se  $\omega > 0$ , isto é, se houver correlação positiva entre as componentes estocásticas da taxa de inflação e da produtividade, pois  $V''$  é negativo. A interpretação econômica do último termo no denominador de (38) pode ser feita com base no Modelo de Preços dos Ativos de Capital (CAPM), pois ele apenas ajusta o custo de oportunidade de reter moeda ( $\pi+r$ ) para que seja levado em conta o seu risco não diversificável. Como usual, isto se faz acrescentando àquela taxa um termo igual ao produto entre o preço do risco e a covariância entre a taxa de retorno da moeda e a do "mercado" (no caso, apenas o capital físico), que são iguais, respectivamente, a  $V''/V'$  e  $f v \sigma \omega$ .

A equação (36), derivada da condição marginal com relação à proporção de capital físico no **portfolio**, é a regra de determinação da taxa de retorno de equilíbrio dos títulos indexados. Ela será igual à produtividade marginal do capital no equilíbrio estacionário, porém corrigida por uma expressão que se anula quando não há incerteza na produção, isto é, quando  $v=0$ . Substituindo (38) em (36) e considerando situações de inflação elevada, o segundo termo entre parênteses em (36) pode ser desprezado, produzindo a equação (39), que mostra que a taxa de juros real de equilíbrio dos títulos indexados nos processos de inflação elevada será igual à produtividade marginal do capital acrescida de um prêmio de risco:

$$r \cong f'(k) \left( 1 + v^2 f(k) \frac{U''}{U'} \right) \quad (39)$$

A caracterização completa do equilíbrio exige que se obtenha mais uma equação, para calcular a taxa de juros dos títulos indexados em função dos parâmetros do problema. Para isto pode-se utilizar a mesma estratégia empregada na última seção para derivar a equação (26): calcular a derivada parcial da equação básica do problema de programação dinâmica [equação (33)] com relação à variável de estado  $w$ , o que produz a equação (40):

$$\rho V' = \left\{ \begin{array}{l} [\eta_1 f' + \eta_2 \cdot (-\pi + \sigma^2) + (1 - \eta_1 - \eta_2)r - n] \cdot V' + \\ [f + \eta_2 w \cdot (-\pi + \sigma^2) + (1 - \eta_1 - \eta_2)wr + \kappa \log(\eta_2) - c - nw + x] \cdot V'' + \\ [f f' \eta_1 v^2 + \eta_2^2 w \sigma^2 - v \eta_2 \sigma \omega \cdot (f' \eta_1 w + f)] \cdot V''' + \\ [f^2 v^2 + \eta_2^2 w^2 \sigma^2 - 2f v \eta_2 w \sigma \omega] \frac{V''''}{2} \end{array} \right\} \quad (40)$$

Esta equação pode ser simplificada nos casos de inflação elevada desprezando os termos em  $\eta_2^2$  e os termos multiplicados por  $V'''$  coletando as parcelas em  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , e utilizando a restrição orçamentária (32), para obter a equação (41).

$$\rho = \left\{ \begin{array}{l} \eta_1 \cdot [f' + f f' v^2 (V''/V') - r] + \eta_2 \cdot [-\pi + \sigma^2 - r + f v \sigma \omega \cdot (V''/V')] + \\ r - n + \frac{E[dw]}{dt} \frac{V''}{V'} + \eta_1 f' \eta_2 w v \sigma \omega \cdot (V''/V') \end{array} \right\} \quad (41)$$

Finalmente, utilizando (38) e (39) para simplificar a primeira linha de (41), e desprezando o último termo da segunda linha, obtém-se a equação (42), que generaliza a condição de Ramsey-Cass e é análoga à equação (27) da última seção:

$$f'(k) \left[ 1 + f(k) v^2 \frac{U''}{U'} \right] \cong r = \rho + n - \frac{\dot{U}'}{U'} + \frac{\kappa}{w} \quad (42)$$

O efeito de um aumento da taxa esperada de inflação na equação (42) pode ser analisado do mesmo modo como foi feito na equação (27), indicando que ele conduz a uma **redução** da intensidade do capital e da renda de equilíbrio.

De modo similar ao modelo da seção anterior, o aumento da incerteza inflacionária, feito de modo a preservar o retorno real médio da moeda, não produz efeitos no lado real da economia. Por outro lado, analisando o efeito de um acréscimo da incerteza na eficiência produtiva ( $v^2$ ), verifica-se que ele causa uma redução na intensidade do capital e da renda de equilíbrio<sup>13</sup> e, na medida em que um aumento da incerteza da inflação

<sup>13</sup>É importante notar que este efeito, derivado da solução do modelo, é devido à estratégia ótima dos agentes econômicos avessos ao risco quando confrontados com um aumento de incerteza tecnológica.

esteja associado a um aumento da incerteza na produtividade, produz efeitos reais deletérios para o crescimento econômico.

## 5 - CONCLUSÃO

Neste artigo exploraram-se as implicações teóricas de se considerar que a taxa de inflação e a produtividade da economia sejam estocásticas, no contexto do modelo neoclássico de crescimento econômico ótimo estendido. Assume-se que a demanda por moeda é devida a custos de transação que são função da proporção de moeda no **portfolio** dos agentes e consideram-se três modelos com grau crescente de complexidade: um modelo determinístico, outro onde apenas a inflação é estocástica e um terceiro onde tanto a inflação quanto a produtividade são estocásticas.

Para cada um dos três casos o equilíbrio é caracterizado calculando-se a taxa de juros de equilíbrio, a condição marginal que permite obter a intensidade ótima para o capital e a demanda por saldos reais de moeda.

A análise de estática comparativa mostrou que em todos os casos obtém-se um efeito anti-Tobin: aumentos da taxa de inflação esperada produzem reduções na intensidade do capital e da riqueza de equilíbrio. Por outro lado, a aumentos da variabilidade da inflação que preservam o retorno real da moeda não têm efeitos reais. Entretanto, quando aumentos da variabilidade da inflação estão associados aumentos da variabilidade da produtividade da economia, eles também têm efeitos deletérios sobre a intensidade de capital.

No seu conjunto, os modelos apresentados neste artigo explicariam, pelo menos em parte, a queda do crescimento econômico, as taxas reais de juros elevadas e a elevada variância do produto real que se observam em geral no processos de alta inflação.

## BIBLIOGRAFIA

- FEENSTRA, R.C. Functional equivalence between liquidity costs and the utility of money. **Journal of Monetary Economics**, n.17, p.271-291, 1986.
- FISCHER, S. The demand for index bonds. **Journal of Political Economy**, v.83, n.3, p.509-534, 1975.
- KAMIEN, M., SCHWARTZ, N. **Dynamic optimization: The calculus of variations and optimal control in economics and management**. New York: North Holland - Elsevier, 1981.
- LEVHARI, D., PATINKIN, D. The role of money in a simple growth model. **American Economic Review**, n.58, p.713-753, 1968.
- MERTON, R. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case. **Review of Economics and Statistics**, n.51, p.247-257, 1969.
- . Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. **Journal of Economic Theory**, n.3, p.373-413, 1971.
- ORPHANIDES, A., SOLOW, R. Money inflation and growth. In: FRIEDMAN, M., HAHN, F. (eds.) **Handbook of monetary economics**, v.1. New York: Elsevier, 1990.
- REBELO, S. Long run policy analysis and long run growth. **Journal of Political Economy**, v.99, n.3, p.500-521, 1991.
- SIDRAUSKI, M. Inflation and economic growth. **Journal of Political Economy**, n.75, p.796-810, 1967.
- TOBIN, J. Money and economic growth. **Econometrica**, n.33, p.671-684, 1956.
- TOURINHO, O.A.F. A demanda por moeda em processos de inflação elevada. **Política e Planejamento Econômico**, v.25, n.1, p.7-68, abr. 1995.