TEXTO PARA DISCUSSÃO Nº 447

A Estrutura a Termo da Taxa de Juros: Uma Síntese*

José W. Rossi**

Rio de Janeiro, dezembro de 1996

---

*Esse estudo teve apoio financeiro do CNPq (Proc. 522436/96-0).
**Da Diretoria de Pesquisa do IPEA e UERJ.

Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada

O IPEA é uma fundação pública vinculada ao Ministério do Planejamento e Orçamento, cujas finalidades são: auxiliar o ministro na elaboração e no acompanhamento da política econômica e prover atividades de pesquisa econômica aplicada nas áreas fiscal, financeira, externa e de desenvolvimento setorial.

TEXTO PARA DISCUSSÃO tem o objetivo de divulgar resultados de estudos desenvolvidos direta ou indiretamente pelo IPEA, bem como trabalhos considerados de relevância para disseminação pelo Instituto, para informar profissionais especializados e colher sugestões.

ISSN 1415-4765

SERVIÇO EDITORIAL

Rio de Janeiro – RJ
Av. Presidente Antônio Carlos, 51 – 14º andar – CEP 20020-010
Telefax: (021) 220-5533
E-mail: editrj@ipea.gov.br

Brasília – DF
SBS Q. 1 Bl. J, Ed. BNDES – 10º andar – CEP 70076-900
Telefax: (061) 315-5314
E-mail: editbsb@ipea.gov.br

SUMÁRIO

RESUMO

O artigo inicia com uma discussão sobre o uso das taxas de juros e do **spread** entre taxas de juros como variáveis úteis em estudo de previsão seja da atividade econômica ou da variação na taxa de juros de curto prazo, ou da própria taxa de inflação. Em seguida discute-se a relação entre as taxas de juros de curto e longo prazos atraves da chamada curva de retorno (**yield curve**). Mostra-se, também, como realizar o teste empírico da relação entre essas taxas. As dificuldades na realização do teste empírico é, então, apresentada à luz de duas experiências distintas: a dos Estados Unidos e a do Brasil. No primeiro caso o teste empírico é dificultado por uma particularidade da política operacional do Federal Reserve que. por ser voltada mais para a taxa de juros de médio prazo, acaba eliminando o elemento passível de previsão no meio da curva de retorno dos ativos. Já no caso do Brasil, a dificuldade com o teste está ligada ao fato de não se dispor, em vista da longa experiência vivida pelo país até recentemente com as altas taxas de inflação de aplicações financeiras de longo prazo. De qualquer maneira, mostra-se que mesmo neste caso pode-se realizar um teste envolvendo a relação entre a taxa de juros do **over** (diário) e aquela para aplicações de um mes, por exemplo. Finalmente, discute-se, com base na estrutura a termo da taxa de juros, as vantagens e desvantagens de se ter uma da dívida pública de curto prazo ao invés de uma de longo prazo.

ABSTRACT

This article starts with a discussion of the use of the interest rate and the spread between distinct interest rates as predictors of either the level of the economic activity or the change in short-run interest rate, or even the rate o inflation. Following this, the yield curve is used to explain the relationship between the short-run and long-run interest rates. Also shown is how to carry out the empirical test of such a theory. The difficulties in the realization of the empirical test are discussed in light of both the experience of the United States and the case of Brazil. In the first case the difficulty is related to a particular operational procedure of the Federal Reserve (Fed). More precisely, as the Fed is more concerned with the medium-term interest rate, this makes the prediction of the interest rates in the middle of the yield curve more difficulty. In the case of Brazil, the difficulty in the realization of the empirical test is due to a lack of long-run financial applications in view of the high rates of inflation experienced by the country until recently. In any case, we show that even in the case of Brazil one can carry out a test in which the daily interest rate of the overnight market applications is related to the monthly interest rate. Finally, we discuss, based on the interest rate term structure, the advantages and disadvantages of having a public debt denominated in the short-run interest rate as against the long-run one.

1 - INTRODUÇÃO[1]

Sabe-se que certas variáveis do mercado financeiro contêm úteis informações sobre as condições futuras da economia. Por exemplo, o preço das ações tem sido tradicionalmente usado como um importante indicador antecedente da atividade econômica. Estudos recentes mostram que também a taxa de juros e o **spread** entre as taxas de juros de ativos financeiros alternativos têm sido usados como previsores do nível da atividade econômica e/ou das variações tanto das taxas de juros de curto prazo como do nível dos preços.

O interesse no papel da taxa de juros como previsor na economia, em particular, surgiu com o trabalho de Sims (1980). A estimação do seu modelo Vetor Auto-Regressivo (VAR = Vector Autoregression System) com dados do pós-guerra para os Estados Unidos, usando variáveis tais como o nível da produção industrial, o índice de preços no atacado e o estoque de M1, mostrou que a expansão em M1 era, corroborando um resultado seu anterior [conforme Sims (1972)], importante para explicar variações na produção industrial; mais precisamente, aquela variável explicava cerca de 37% da variância da produção industrial em um horizonte de 48 meses. Todavia, quando a taxa de juros dos títulos comerciais era incluída no seu modelo, quase todo o poder preditivo do estoque de moeda transferia-se para a taxa de juros, que passava a explicar, então, 30% da variância da produção industrial no mesmo horizonte de 48 meses. Agora, o estoque de moeda explicava tão-somente 4% da variância da produção industrial. Mais importante, os resultados obtidos por Sims pareciam ser robustos ao uso de diferentes taxas de juros, conforme constataram, por exemplo, Litterman e Weiss (1985) quando substituíram no modelo de Sims a taxa de juros dos papéis comerciais pela taxa de juros das Letras do Tesouro americano.

Os resultados acima sugerem, à primeira vista, a ineficácia da política monetária sobre o nível da atividade econômica. Essa grave conclusão motivou um grande debate entre os economistas. McCallum (1983), por exemplo, foi um dos primeiros a questionar as conclusões do trabalho de Sims, argumentando que, se a taxa de juros for um melhor indicador da política monetária do que a expansão da moeda, então, a utilização desta última variável não poderia servir como evidência da ineficácia da política monetária. Esse ponto de vista foi corroborado por Bernanke e Blinder (1989) que mostraram ser a taxa dos fundos federais (variável fortemente correlacionada com a política monetária) muito informativa do curso futuro da economia.

Apesar de os estudos inspirados em Sims terem utilizado a taxa de juros como previsor do nível da atividade econômica, muitos dos trabalhos subseqüentes concluíram que também o **spread** entre as taxas de juros de distintos ativos seria útil na previsão não só do nível da atividade econômica mas ainda das variações tanto nas taxas de juros de curto prazo e da própria taxa de inflação.

[1] Esta e a próxima seções baseiam-se em Bernanke (1990). Como as referências nelas contidas provêm daquele estudo e muitas não puderam ser consultadas, as considerações feitas acerca dos vários trabalhos baseiam-se em geral no relato apresentado por Bernanke.

Na próxima seção apresenta-se um breve resumo da evidência empírica do uso do **spread** entre taxas de juros como previsor da atividade econômica nos Estados Unidos, com base em Bernanke (1990). A Seção 3 formaliza a estrutura a termo para a taxa de juros. A Seção 4 discute a implementação do modelo de valor presente que resulta da estrutura a termo. A Seção 5 apresenta algumas das dificuldades com o desempenho empírico do modelo, seja com relação tanto ao caso americano quanto ao caso brasileiro. A Seção 6 explora o uso da estrutura a termo na escolha do perfil (de curto ou longo prazo) da dívida pública. Finalmente, na Seção 7 discute-se, em apêndice, a volatilidade relativa das taxas de juros no contexto da estrutura a termo.

2 - O *SPREAD* ENTRE TAXAS DE JUROS COMO PREVISOR DA ATIVIDADE ECONÔMICA: O CASO DOS ESTADOS UNIDOS

Em Bernanke (1983) o **spread** entre a taxa de um papel comercial (**Baa-rate corporate bonds**) e a taxa das Letras do Tesouro americano mostrou-se um eficiente indicador antecedente da produção nos Estados Unidos no período entre as duas guerras mundiais. Há, de fato, vários trabalhos nessa mesma linha. Estrella e Hardouvelis (1989), por exemplo, obtiveram boas previsões na economia usando o **spread** entre as taxas dos títulos do Tesouro americano de curto e de longo prazos. Já em Bernanke e Blinder (1989), tanto a taxa dos fundos federais, conforme já foi mencionado, como o **spread** entre essa taxa e a taxa dos títulos do governo de longo prazo foram úteis na previsão da atividade econômica. Resultados semelhantes foram obtidos por Laurent (1988 e 1989). Outros dois estudos onde o **spread** entre as taxas de juros de distintos ativos permite boas previsões da economia americana são Friedman e Kuttner (1989), que usaram o **spread** entre as taxas de papéis comerciais e das Letras do Tesouro, e Stock e Watson (1989) que, para prever o ciclo dos negócios, além desse mesmo **spread**, usaram ainda aquele entre as taxas das Letras do Tesouro americano de curto e de longo prazos (isto é, a inclinação da chamada curva de retorno, **yield curve**, da estrutura a termo da taxa de juros, cujo conceito é discutido adiante).

Cabe por fim destacar que testes exaustivos realizados por Bernanke (1990) com dados mensais para os Estados Unidos no período 1961/89 mostraram ser o **spread** entre as taxas de juros dos papéis comerciais de seis meses (**commercial paper rate**) e das Letras do Tesouro de seis meses (**treasury bill rate**), por ele denominada **Short** para enfatizar tratar-se de juros de curto prazo (essa mesma denominação é mantida aqui e será usada com freqüência no texto), foi o melhor previsor para cerca de 10 variáveis da economia, com uma delas sendo a taxa de inflação e as demais todas variáveis macroeconômicas reais.

Cumpre indagar por que o **spread** entre, por exemplo, as taxas de juros dos papéis comerciais e das Letras do Tesouro seria útil nas previsões do rumo da economia. Neste particular, duas hipóteses são geralmente consideradas. A primeira (hipótese do risco de falência) é que o **spread**, por representar a percepção do mercado sobre o risco de falência na economia, indicaria, então, a possibilidade de ocorrência de recessão. Uma segunda hipótese sugere que o **spread** só seria um bom previsor por conter informação da postura da política monetária (hipótese da política monetária).

Em Bernanke (1990) enfatiza-se essa segunda hipótese, que tem, de fato, duas vertentes. A primeira diz respeito ao aperto de crédito e foi proposta por Cook (1981). A idéia é que como até 1978 havia nos Estados Unidos um teto para as taxas de juros dos depósitos bancários (Regulation Q), então qualquer aumento na taxa de juros decorrente de um aperto monetário levava, via redução nos depósitos bancários, à desintermediação financeira, com os recursos migrando sobretudo para as aplicações em Letras do Tesouro. Isso porque os papéis comerciais exigiam uma aplicação mínima que estava além das possibilidades de boa parte dos investidores. O resultante aumento no **spread** entre as taxas desses dois ativos ficou, aliás, bem caracterizado durante os episódios de aperto de crédito em 1966, 1969 e 1973/74. [2]

Sendo a demanda pelas Letras do Tesouro menos que perfeitamente elástica com relação ao **spread** entre as taxas desse ativo e aquela dos papéis comerciais — ou seja, os ativos seriam substitutos imperfeitos (ver a nota de pé de página do parágrafo anterior) —, então sempre que havia um aperto de crédito aumentava o **spread Short** e como a política monetária que causa o aperto de crédito é a mesma que provocava a recessão, resulta que o **spread** ajudaria a prever as condições econômicas.

Uma forma alternativa da hipótese monetária sugere que o **spread Short** responderia à política monetária sempre que a taxa dos fundos federais fosse usada como meta intermediária dessa política. A política monetária apertada aumentando a taxa dos fundos federais aumentava também o custo dos fundos para os bancos. As alternativas que os bancos tinham para evitar tomar empréstimos às taxas mais elevadas dos fundos federais seriam, neste caso: **a**) a emissão de CDs (equivalentes aos nossos CDBs); **b**) a venda de parte do seu estoque de Letras do Tesouro; e, finalmente, **c**) o corte nas suas linhas de crédito

[2] A questão aqui é saber por que os bancos e os investidores não-sujeitos à restrição imposta nas aplicações dos papéis comerciais não trocaram as Letras do Tesouro por papéis comerciais, aproveitando-se de um **spread** maior. Apesar de ter havido alguma troca desse tipo, o fato é que, pelo menos com relação ao comportamento dos bancos, havia interesse nas Letras do Tesouro que ia além do seu retorno. É que esses ativos serviam de lastro nos acordos de recompra nas aplicações do **overnight**, além de poderem atender às exigências de encaixe dos bancos. Essas funções não eram atendidas pelos papéis comerciais. Sobre esses pontos, ver Bernanke (1990).

ou o aumento na taxa de juros dos seus empréstimos. Essas medidas tendiam, em geral, a aumentar o **spread**.[3]

Em suma, o **spread Short** (e talvez outros mais) só seria um bom previsor da economia por conter informação tanto sobre o risco de falência como da postura da política monetária.[4]

3 - RELAÇÃO ENTRE AS TAXAS DE CURTO E LONGO PRAZOS

3.1 - O Caso do Título com Desconto Puro (Cupom Zero)

Para estabelecer a relação entre as taxas de juros de curto e longo prazos no contexto de um título com desconto puro (cupom zero), considere-se inicialmente o caso sem incerteza, sem custo de transação e com perfeita visão do futuro. O investidor compara então o retorno de duas estratégias de aplicação financeira. Na primeira, compra um título do governo com vencimento em N, mantendo-o até essa data. Na segunda, compra uma Letra do Tesouro de um período, reinvestindo o resultado (principal mais os juros) na compra e uma nova Letra do Tesouro para o período seguinte, repetindo a operação nos próximos períodos até N. Cumpre ressaltar que a Letra do Tesouro é um tipo de ativo com desconto puro, pois não há qualquer pagamento de cupom. Vale dizer, o título é vendido com um desconto, sendo amortizado pelo seu valor de face. Desta forma, a percentagem do ganho de capital sobre o preço de compra é a taxa de juros que o ativo paga.

A condição de equilíbrio num mundo com perfeita visão e sem custo de transação é que seja idêntico o retorno obtido com a aplicação $1,00 nas duas alternativas descritas. Mais precisamente, se R_t^N é a taxa de retorno por período obtida quando se mantém o título até o seu vencimento (**yield**), e r_t é a taxa de juros da Letra do Tesouro por apenas um período, ambas no tempo t, tem-se [ver Begg (1982)]:

---

[3] É evidente que as ações (a) e (c) aumentariam a taxa de juros dos papéis comerciais relativamente àquela das Letras do Tesouro. No primeiro caso porque, para colocar mais Cds no mercado, tem que se oferecer melhores taxas de juros, e, como os Cds e os papéis comerciais são substitutos próximos, também a taxa de juros destes últimos aumentaria. Se, por outro lado, os bancos aumentassem o custo dos empréstimos feitos às firmas, estas iriam preferir tomar emprestado diretamente do público através da emissão de papéis comerciais, o que, mais uma vez, aumentaria a taxa desses papéis. Se, ao invés de (a) e (c), os bancos adotassem a ação (b), a tendência ao aumento do **spread** poderia ser revertida. Todavia, conforme foi argumentado na nota anterior, os bancos relutavam em vender as Letras do Tesouro, já que a sua utilidade ia além do retorno financeiro. Assim, uma política monetária apertada tenderia a aumentar o **spread Short**, tornando-o, pois, útil na previsão da atividade econômica [ver Bernanke (1990)].

[4] Em Bernanke (1990) a evidência é que o **spread Short**, apesar de não ter apresentado correlação particularmente alta com variáveis associadas ao risco de falência, foi, entretanto, a variável mais correlacionada com as variáveis que indicavam a postura da política monetária.

$$\left(1+R_t^N\right)^N = (1+r_t)(1+r_{t+1})\ldots(1+r_{t+N-1}) \qquad (1)$$

que é aproximada por:

$$R_t^N = \left(\frac{1}{N}\right)(r_t + r_{t+1} + \ldots r_{t+N-1}) \qquad (2)$$

pois se a variável x for pequena então pode-se usar a aproximação x=log(1+x). [5] Isto é, a taxa de juros de longo prazo, corrente, é uma simples média aritmética das taxas de juros por um período, válidas para cada período até o vencimento do título. É claro que, se as taxas de curto prazo permanecerem constantes, então a taxa de longo prazo, corrente, será igual à taxa de curto prazo, corrente. Por outro lado, com taxas de curto prazo crescentes (decrescentes) ao longo dos períodos futuros, segue que a taxa de longo prazo, corrente, estaria acima (abaixo) da taxa de curto prazo, corrente.

No mercado de títulos (com ou sem cupom) há, de fato, um amplo espectro quanto à data dos seus vencimentos, indo desde os títulos que estão por vencer até o caso daqueles que na verdade nunca vencem, como ocorre, por exemplo, com uma perpetuidade que paga eternamente a taxa de juros correspondente ao valor do cupom. A estrutura a termo da taxa de juros é a relação, no tempo t, entre as taxas de retorno R_t^N para distintas datas de vencimento dos títulos, dadas por N. Vale dizer, a estrutura a termo faz a ligação entre as taxas de juros de curto e de longo prazos. Como as taxas de juros de curto prazo respondem à política monetária e essas taxas afetam, conforme se verá, as taxas de longo prazo, que são importantes nas decisões de investimento do setor privado, é importante que se conheça como essas taxas se inter-relacionam na várias situações.

De fato, a relação entre as taxas de curto e longo prazos é dada pela chamada curva de retorno (**yield curve**), a ser formalizada abaixo, que é a expressão gráfica da estrutura a termo da taxa de juros de títulos, e que indica, pois, a taxa corrente de retorno de longo prazo para distintos prazos de vencimento dos títulos. A curva

[5] Note-se que, aplicando log na equação (1), vem:
Nlog $(1+R_t^n)$ = log $(1+r_t)$ + log $(1+r_{t+1})$ + log $(1+r_{t+N-1})$, que, em vista da aproximação descrita acima, obtém-se o resultado na equação (2).

de retorno típica tem inclinação positiva.[6] Assim, se R_t^N cresce com N é porque as taxas futuras de curto prazo estariam aumentando.[7]

Caso haja incerteza com relação às taxas futuras de juros, e sendo apenas as taxas correntes (de curto e longo prazos) conhecidas, a relação entre a taxa de longo prazo e as taxas de curto prazo seria dada por:

$$R_t^N = \left(\frac{1}{N}\right)\left[r_t + E_t r_{t+1} \ldots + E_t r_{t+n-1}\right] \qquad (3)$$

onde E_t é a expectativa com base no conjunto de informações disponíveis no tempo t. Com o investidor tendo aversão ao risco, seria necessário adicionar um termo nesta relação para captar o risco **ex post** do desvio das taxas de juros observadas daquelas inicialmente esperadas. Vale dizer, deve-se adicionar na equação (3) uma variável para o prêmio de risco.[8]

---

[6] Conforme ressaltado por Campbell (1995), Hicks (1939) sugere que os títulos de longo prazo devem ter retorno maior do que os de curto prazo porque os tomadores de crédito preferem o longo prazo enquanto os fornecedores de crédito preferem o curto prazo. Campbell (1995) faz, de fato, considerações adicionais sobre esse ponto.

[7] Segmentos da curva de retorno com inclinação negativa podem, entretanto, também ocorrer, como mostra, por exemplo, Campbell (1995) com dados para os Estados Unidos; ver as suas Figuras 1 e 3. De fato, há três teorias básicas que tentam explicar a inclinação da curva de retorno. Além da teoria da preferência pela liquidez, discutida na nota anterior, que sugere ser positiva a inclinação da curva de retorno, as duas outras, que podem resultar em qualquer inclinação para a curva, são a teoria das expectativas e a dos mercados segmentados. Na teoria das expectativas, a taxa (**forward**) contratada para o futuro será dada pela expectativa do mercado com relação à taxa **spot** esperada para o futuro. Conforme se verá adiante, por tal teoria se a curva de retorno tem inclinação positiva, então a taxa **forward** será maior do que a taxa **spot** atual. Sendo a taxa **forward** um previsor da taxa **spot** futura, isso significa que o mercado espera um aumento na taxa **spot** entre o 1º e o 2º períodos. Já pela teoria dos mercados segmentados, os títulos de curto e longo prazos têm mercados separados cujos preços são então determinados pelas condições de oferta e demanda nos respectivos mercados. Um aperto monetário no mercado de longo prazo, por exemplo, resultaria numa estrutura a termo com inclinação positiva. Para considerações adicionais sobre esses pontos, ver Chance (1992).

[8] No caso com dois períodos, a equação (3) fica, após adicionar o termo para o prêmio de risco:

$$R_t^2 = \frac{1}{2}\left[r_r + E_t r_{t+1}\right] + \theta$$

onde θ é um termo constante (por pressuposto) para o prêmio de risco. Considere-se agora que as expectativas sejam racionais, de modo que:

$$r_{t+1} = E_t r_{t+1} + \varepsilon_{t+1}$$

onde ε_{t+1} é o erro de previsão, sendo ortogonal à informação disponível no tempo t. Após substituir essa equação na anterior e aplicando então esperança matemática em ambos os lados da equação, vem:

$$r_{t+1} - r_t = \alpha + \beta\left(R_t^2 - r_t\right) + v_{t+1}$$

Assim, conclui-se que o **spread** entre as taxas de curto e longo prazos prevê variações na taxa de curto prazo, com $\beta = 2$.

É, freqüentemente, mais conveniente trabalhar com capitalização contínua.[9] Assim, seja inicialmente a taxa de retorno (**yield**) para um título com desconto puro (cupom zero) dada por R_{mt}, que deve, pois, satisfazer a relação:

$$P_{mt} = \frac{1}{\left(1 + R_{mt}\right)^{m}} \tag{4}$$

onde P_{mt} é o preço do título em t cujo vencimento é em m anos e que tem valor de face de $1,00. Defina o retorno bruto como sendo $(1+R_{mt})$. Com capitalização contínua, o retorno até o vencimento pode ser aproximado pelo log natural do retorno bruto, como é demonstrado a seguir.[10] Considere-se:

$$(1 + R_{mt})^{m} = \left(1 + \frac{R_{m,n,t}}{n}\right)^{nm} \tag{5}$$

onde $R_{m,n,t}$ é a taxa por período que com capitalização em n vezes no período equivale à taxa R_{mt} capitalizada uma vez por período. Caso a capitalização seja contínua, tem-se:[11]

$$\lim_{n \Rightarrow \infty} \left(1 + \frac{R_{m,n,t}}{n}\right)^{n} = e^{R_{m,n,t}} \tag{6}$$

Considerando esse resultado na relação anterior, vem:

$$R_{m,n,t} = \ln\left(1 + R_{mt}\right) = r_{mt} \tag{7}$$

que usado na equação (4), resulta em:

$$p_{mt} = -m r_{mt} \tag{8}$$

---

[9] No restante desta seção, segue-se Campbell (1995), tendo em vista que muitas das demonstrações de pé de página foram aqui desenvolvidas.

[10] Ressalte-se que para valores usuais da taxa de retorno essa aproximação é apenas razoável. Para usar o mesmo exemplo de Campbell (1995), se R_{mt}=7%, então log (1.07) = 0.068; ou seja, 7% a. a. com capitalização uma vez por ano equivale à taxa de 6,8% a. a. com capitalização contínua.

[11] A relação entre as taxas de juros com capitalização discreta e contínua é como segue. Primeiramente, note-se que a taxa anual de juros r com capitalização semestral resulta em $(1+\frac{r}{2})^{2}$. Se r tiver capitalização trimestral, o resultado é $(1+\frac{r}{4})^{4}$, etc., assim, $(1+\frac{r}{n})^{n} = \left[(1+\frac{r}{n})^{n/r}\right]^{r}$, cujo limite, quando n/r tende para infinito, é e^{r}. Se ao invés de um ano o período for de t anos, então $(1+r)^{t}$, com r capitalizado continuamente, seria e^{rt}.

onde p_{mt} = lnP_{mt}, ou seja, o preço do título é inversamente proporcional à sua taxa de retorno de longo prazo. Mais precisamente, a data de vencimento do título, m, é a elasticidade do preço do título com relação à sua taxa de retorno de longo prazo. Desta forma, se o título vence em 10 anos, segue que o aumento de 1% na sua taxa de retorno de longo prazo resulta em queda de 10% no preço do título, enquanto que, se o vencimento for em 30 anos, a queda de preço seria de 30%.

Note-se que quando se negocia um título antes do seu vencimento obtém-se a chamada taxa de retorno por retenção. que é assim definida:[12]

$$h_{m,t+1} = P_{m-1,t+1} - P_{mt} \qquad (9)$$

Em vista do resultado em (8), tem-se:[13]

$$h_{m,t+1} = r_{mt} - (m-1)(r_{m-1,t+1} - r_{mt}) \qquad (10)$$

Isto é, o (log do) retorno pela retenção do título por um ano é igual ao retorno inicial de longo prazo do título, caso este seja mantido até o vencimento, menos a variação desse retorno (de longo prazo) durante o ano em que o título é retido, vezes o período restante até o vencimento do título por ocasião da sua venda.

Da equação anterior vem:

$$r_{mt} = \frac{1}{m}\left[h_{m,t+1} + (m-1)r_{m-1,t+1}\right] \qquad (11)$$

que pode ser escrita como:[14]

$$r_{mt} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m} h_{m-i,t+i+1} \qquad (12)$$

---

[12] Em Campbell (1995) o subíndice do lado direito dessa equação aparece como t-1, ao invés de t+1. Esse erro acaba afetando também o seu resultado correspondente à nossa equação (10), que em Campbell aparece com o subíndice igualmente incorreto.

[13] Note-se que $r_{m,t+1} = -(m-1)y_{m-1,t+1} + my_{mt} + y_{mt} - y_{mt}$.

[14] Para um período adiante, a equação (11) seria:
$r_{m-1,t+1} = 1/m-1[h_{m-1,t+2} + (m-2)r_{m-2,t+2}]$
Após substituir esta equação na equação (11), vem:$r_{mt} = 1/m[h_{m,t+1} + h_{m-1,t+2} + (m-2)r_{m-2,t+2}]$; note-se que:
$r_{mt} = 1/m[h_{m,t+1} + m-1/m-1[h_{m-1,t+2} + (m-2)r_{m-2,t+2}]]$
Substituindo $r_{m-2,t+2}$ nesta equação, produz:
$r_{mt} = 1/m[h_{m,t+1} + h_{m-1,t+2} + [h_{m-2,t+3} + m-3/m\ r_{m-3,t+3}]]$; note-se que:
$r_{mt} = 1/m[h_{m,t+1} + h_{m-1,t+2} + (m-2)/m-2\ [h_{m-2,t+3} + (m-3)\ r_{m-3,t+3}]]$
Substituições sucessivas desse tipo resultam, finalmente, na equação (12), já que o último termo da equação seria (m-m)/m $r_{m-m,t+m} = 0$.

Assim, a taxa de retorno de longo prazo é uma média simples das taxas de retorno pela retenção do título por um período durante os vários períodos até o vencimento do título.[15]

Como tanto o retorno de longo prazo quanto o retorno pela retenção por um período de um título de longo prazo são, em geral, medidos relativamente ao retorno de um título para um ano, estabelece-se aqui a relação entre essas várias taxas com base no resultado da equação (10), a saber:

$$h_{m,t+1} - r_{1t} = r_{mt} - r_{1t} - (m-1)(r_{m-1,t+1} - r_{mt}) \qquad (13)$$

Os termos $h_{m,t+1} - r_{1t}$ e $r_{mt} - r_{1t}$ são, respectivamente, o excesso de retorno e o **spread** entre os retornos de longo e curto prazos. É bom ressaltar que as taxas de retorno (**yield**) de curto prazo variam no tempo, em geral, bem mais do que aquelas de longo prazo. Isso não impede, todavia, que haja grande variabilidade no retorno por período de retenção dos títulos de longo prazo. A decomposição em (13) pode ser, neste particular, bastante esclarecedora. Por exemplo, Campbell (1995) mostra, com dados para os Estados Unidos, que o excesso de retorno cresce para títulos até um ano, decrescendo daí em diante até tornar-se negativo para títulos de 10 anos. Isso apesar de o **spread** entre os retornos de curto e longo prazos ter aumentado no período e terem aumentado também as taxas de retorno de longo prazo. Tal resultado, que é surpreendente à primeira vista, ocorre porque variações nas taxas de retorno (**yield**) provocam mudanças no preço dos títulos que são mais acentuadas para aqueles de longo prazo, conforme se viu na equação (8). A perda de capital que isso representa afeta mais, obviamente, o retorno por período de retenção dos títulos de longo prazo; ver a equação (13).

Neste ponto cabe discutir a hipótese das expectativas que estão por trás da estrutura a termo da taxa de juros. Primeiramente, ressalte-se que, sendo a taxa de retorno (**yield**) de longo prazo de um título com cupom zero conhecida com certeza, então, qualquer variação inesperada no preço do título terá que ser compensada adiante com variação nesse preço que seja em sentido contrário, de modo a obter-se, dada a sua taxa de retorno (**yield**), o valor de face do título. Vale dizer, essas variações são negativamente autocorrelacionadas e, portanto, previsíveis. O que não impede, entretanto, ser imprevisível o excesso de retorno por período de retenção dos títulos de longo prazo.[16] Isso sugere que o investidor necessita formar expectativas a respeito do retorno esperado na sua aplicação financeira.

---

[15] Note-se que este resultado é semelhante àquele da equação (2), só que as taxas de curto prazo daquele resultado são aqui substituídas pelas taxas de retorno por período de retenção dos títulos de longo prazo.

[16] Este resultado é formalizado adiante no contexto de um título com pagamento de cupom.

Para mostrar como as expectativas são formadas nesse mercado, usa-se aqui a mesma ilustração adotada por Campbell (1995). Suponha inicialmente que o retorno (**yield**) de um título de 30 anos seja de 7%, enquanto aquele para um título de um ano seja de apenas 4%. Numa primeira apreciação, o título de 30 anos parece o mais rentável. O fato, porém, é que, enquanto o retorno de 4% é certo em um ano, o retorno de 7% só o é em 30 anos. Assim, por se referirem a distintos horizontes de tempo, os dois retornos não são comparáveis.

Um raciocínio mais sofisticado levaria em conta o fato de o título de longo prazo poder ser negociado dentro de um ano. Neste caso, o retorno de 7% no período (ou seja, um excesso de retorno por período de retenção de 3% sobre o título de um ano) só seria obtido caso o retorno (**yield**) do título de longo prazo permanecesse inalterado em 7%. Uma outra possibilidade seria um excesso de retorno por período de retenção igual a zero, que ocorreria caso o preço do título aumentasse de 4% em um ano, ao invés dos 7% supostos inicialmente. Isso requer um aumento na taxa de retorno de longo prazo (**yield**) do título de 30 anos, passando de 7 para 7,1%.[17]

Suponha agora a estratégia representada pela rolagem sucessiva dos títulos de um ano durante 30 anos (período de vencimento do título de longo prazo). É claro que, dado o retorno de 4% do primeiro ano, isso só renderia o mesmo que o retorno (**yield**) do título de longo prazo, se nos 29 anos restantes o retorno médio das aplicações de curto prazo fosse de 7,1%.[18]
A hipótese das expectativas da estrutura a termo sugere um comportamento tal de modo a tornar idêntico o retorno nas estratégias de investimento de curto e longo prazos (descritas acima, por exemplo). Conforme foi discutido, se o retorno de longo prazo (**yield**) excede o de curto prazo, o primeiro deve aumentar ainda mais para que possa gerar uma perda de capital no título de longo prazo e, assim, compensar a vantagem inicial do **spread** entre o seu retorno (**yield**) e a do título de curto prazo. Mostrou-se na ilustração anterior qual deve ser esse aumento no

---

[17] Isso pode assim ser demonstrado. Da equação (9) tem-se que o retorno por um período de um título de 30 anos é $30r_{30,t} - 29r_{29,t+1}$, que só é igual a 0.04 (quando $r_{30,t} = 0.07$) se $r_{29,t+1} = 0.071$.

[18] Mais precisamente, tem-se $(1+0,07)^{30} = (1+0,04)(1+0,071)^{29}$ que, com taxas reduzidas, pode ser aproximado por $30(0,07) = 0,04 + 29(0,071)$.

retorno de longo prazo. De fato, da equação (13) vê-se que isso deve ser igual a 1/(m-1) vezes o atual **spread** dos retornos (**yield**) de curto e longo prazos.[19]

Já da segunda ilustração viu-se que a taxa média de curto prazo deve igualar (ao longo da vida do título de longo prazo) a taxa corrente de retorno (**yield**) do título de longo prazo. Assim, requer-se que a diferença entre a taxa média de curto prazo ao longo dos (m-1) períodos restantes e a taxa corrente de curto prazo seja igual a m/(m-1) vezes o **spread** corrente entre as taxas de retorno de longo (**yield**) e curto prazos.[20]

3.2 - A Taxa de Juros Futura Previamente Contratada (Forward Rate)

Em vista da incerteza com relação à taxa de juros futura o investidor pode preferir contratar esse valor previamente (**forward rate**). A taxa de juros contratada é obtida das taxas (**spot**) de juros para períodos de tempo no futuro. Suponha, por exemplo, que as taxas **spot** para investimentos de um e dois anos sejam, respectivamente, 10 e 11%. Assim, a taxa futura, contratada para vigorar entre o primeiro e segundo anos, deve ter valor tal que, uma vez considerada a taxa **spot** para o investimento de um ano (10%), renderia o mesmo que uma aplicação de dois anos contratada à taxa **spot** de 11%. Mais precisamente, usando-se capitalização contínua e considerando-se um capital de $1,00, tem-se [ver Hull (1993)]:

---

[19] O teste empírico seria, pois, obtido da regressão: $r_{m-1,t+1} - r_{mt} = \alpha+\beta(r_{mt} - r_{1t}) / (m-1)$, com $\beta = 1$. Cuidados especiais devem ser tomados para evitar erro de mensuração com relação à taxa de retorno de longo prazo, pois como essa variável tem o sinal negativo à esquerda da equação e positivo à direita tal erro tenderia a produzir sinal negativo para o coeficiente β. O uso de variáveis instrumentais seria recomendado em tais circunstâncias, onde os instrumentos devem ser correlacionados com o **spread** dos retornos (**yield**), mas não com o retorno (**yield**) que foi medido com erro; para considerações adicionais , ver Campbell (1995). Esse autor sugere que a mesma informação contida nessa regressão é também obtida da regressão do excesso de retorno por período de retenção de um título de longo prazo contra o **spread** dos retornos (**yield**) de curto e de longo prazos. O coeficiente da inclinação dessa segunda regressão seria $1-\beta$, que, sendo positivo, indicaria obviamente uma relação direta entre o **spread** dos retornos (**yield**) e o excesso de retorno por retenção de um título de longo prazo.

[20] A derivação desse resultado é, usando o exemplo no texto, como segue:
$[(1+x)^{29} (1+0,04)]^{1/30} = (1+0,07)$, ou
$[(1+x)/(1+0,04)]^{29/30} = (1+0,07)/(1+0,04)$, ou aproximadamente $(x-0,04) = (30/29)\,(0,07 - 0,04)$, onde x é a taxa de retorno desejada.
Isso pode ser testado empiricamente através da regressão (resultado idêntico é derivado na Seção 7):

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{r_{1,t+i}}{(m-1)} - r_{1t} = \alpha + \beta\left(\frac{m}{(m-1)}\right)(r_{mt} - r_{1t}), \text{ com } \beta = 1.$$

Campbell (1995) sugere que essa regressão contém a mesma informação que aquela entre (1/m) vezes o excesso do retorno por retenção, ao longo de m períodos, de um título com vencimento em m contra o **spread** entre os retornos (**yield**). O coeficiente para a inclinação dessa regressão seria $1-\beta$.

$$e^{0,10}.e^{f} = e^{0,11(2)} \qquad (14)$$

ou seja, f = 0,12, que é, pois, a taxa futura para o ano dois.[21]

Considere agora que a taxa **spot** de um investimento de cinco anos seja 12,5% a.a. A taxa futura para o período entre os anos dois e cinco seria neste caso (note-se que a taxa de um investimento de dois anos é 11% a.a.):

$$e^{0,11(2)}.e^{f(5-2)} = e^{0,125(5)} \qquad (15)$$

Isto é, f = 0.135 que é, pois, a taxa futura para o período entre dois e cinco anos. [22]

Vê-se, assim, que a relação entre a taxa contratada para o futuro e as taxas **spot** é dada por:

$$f = \frac{\left(r^{\bullet}m^{\bullet} - rm\right)}{\left(m^{\bullet} - m\right)} \qquad (16)$$

onde f, r e r são, respectivamente, a taxa futura, e as taxas **spot** para investimentos em m e m, onde m > m.   Note-se que esta equação pode ser reescrita como:[23]

$$f = r^{\bullet} + \frac{\left(r^{\bullet} - r\right)m}{\left(m^{\bullet} - m\right)} \qquad (17)$$

Observe-se que quando m aproxima-se de m e conseqüentemente r aproxima-se de r essa equação fica:[24]

---

[21] Com capitalização discreta isso seria:

$\left(1+r(0;1)\right)\left[1+r(1;2)\right] = \left[1+r(0;2)\right]^2$ ou $\left[1+r(1;2)\right] = \frac{\left[1+r(0;2)\right]^2}{[1+r(0;1)]}$, que consideradas as mesmas taxas da equação (14) daria cerca de 12%.

[22] Com capitalização discreta isso seria:

$\left[1+r(0;5)\right]^5 = \left[1+r(1;2)\right]^2\left[1+r(2;5)\right]^{5-2}$ ou $\left(1+r(2;5)\right)^5 = \left[\frac{\left[1+r(0;5)\right]^5}{[1+r(0;2)]^2}\right]^{\frac{1}{5-2}}$, que consideradas as mesmas taxas da equação (15) daria cerca de 13,51%.

[23] Para obter esse resultado basta somar e simultaneamente subtrair $r^*m/(m^*-m)$ no lado direito da equação (16).

[24] Ver, a respeito, Hull (1993) ou Campbell (1995). Para uma demonstração formal desse resultado basta usar o conceito de limite. Note-se que a derivada nada mais é que o limite de uma razão quando o seu denominador tende a zero. Assim, se definirmos $dr=r^*-r$ e $dm = m^*-m$ segue que, quando m^* tende para m, dm tende para zero e conseqüentemente o limite da razão $\delta r/\delta m$ é a própria derivada.

$$f = r + \frac{m\partial r}{\partial m} \qquad (18)$$

onde dr/dm é a inclinação da curva de retorno. Essa equação dá a taxa futura instantânea para vencimento em m. Note-se que a relação entre a taxa futura e a taxa de retorno para um título com cupom zero é análoga àquela entre os custos médio e marginal. Vale dizer, se a curva de retorno tem inclinação positiva (negativa), então a curva para a taxa futura (espécie de custo marginal resultante da extensão no período do empréstimo) situa-se acima (abaixo) da curva do retorno de longo prazo do título (custo médio do empréstimo por m períodos).[25] É claro que, se a inclinação desta última curva for nula, então, ali as duas taxas são idênticas.[26]

A relação entre as taxas **spot** (de curto e longo prazos) e as taxas futuras contratadas pode ser alternativamente apresentada como em Shiller (1990).[27] Assim, seja P(t,T) o preço de mercado de um título no tempo t que promete amortizar, no seu vencimento em T, o principal de $1,00, onde t < T. O termo do título, m, é o tempo até o seu vencimento, isto é, m=T-t. O sem preço P(t,T) aumenta gradualmente com o tempo até alcançar o valor $1,00 em T, e é este aumento de preço que dá o retorno do ativo. Mais precisamente, o retorno r(t,T) é a taxa de juros no tempo t que num regime com capitalização contínua faria P(t,T) atingir o valor unitário no tempo T; vale dizer:[28]

$$P(t,T).e^{(T-t)r(t,T)} = 1 \qquad (19)$$

de modo que a taxa de retorno até o vencimento seria:

[25] Ressalte-se ainda que, se a curva de retorno tem inclinação positiva, então, a curva para os títulos com cupom fica abaixo da curva com cupom zero, pois, havendo no primeiro caso pagamentos antes do vencimento do título, segue que a taxa de desconto para tais pagamentos deve ser menor do que aquela para o último pagamento. Assim, no caso de inclinação positiva para a curva de retorno, a ordenação para as curvas das três taxas de retorno é da mais alta para a mais baixa: taxa futura instantânea, taxa de retorno com cupom zero e taxa de retorno com pagamento de cupom. Inverte-se essa ordenação quando a curva de retorno tem inclinação negativa. Para considerações adicionais sobre esses pontos, ver Hull (1993).

[26] Esses resultados ficam claros também da equação anterior. Note-se que se a curva de retorno tem inclinação positiva, então $r^*>r$. Segue que $f>r^*>r$.

[27] De fato, o agente econômico antes de fechar o contrato em t para a taxa futura a prevalecer no período t+1 compara esta taxa com aquela esperada para t+1, caso decida tomar o empréstimo naquela ocasião. A teoria das expectativas para a estrutura a termo supõe que as forças de mercado igualem a taxa negociada para o futuro à taxa "**spot**"esperada para o futuro, acrescida de um termo para o "prêmio" de risco. Desta forma, considerando apenas o caso para um período, tem-se, após simplificar a notação: $f=E_t(r_{t+1}) + \theta$, onde θ reflete a diferença de risco nas duas estratégias (isto é, contratar hoje a taxa futura de juros ou assumir o risco de enfrentar uma taxa maior, caso se tome o empréstimo adiante à taxa de juros corrente).

[28] É claro que com base nesta equação o preço do ativo no tempo t', $t<t'<T$, seria: $P(t,T)\, e^{(t'-t)r(t,T)}$.

r(t,T) = -lnP(t,T)/(T-t) (20)

É interessante notar que a estrutura a termo em qualquer data contém implicitamente a taxa de juros futura.[29] Por exemplo, se a estrutura a termo for decrescente entre o primeiro e o segundo ano, então tem-se implicitamente que a taxa de juros de um ano será menor no próximo ano do que no corrente ano. Para garantir a taxa de juros futura, o investidor tem de comprar e vender títulos com distinto prazo de vencimento. Assim, suponha que seja emitido hoje um título com maturidade de $1,00 em T. Conforme vimos em (19), o preço desse título em t seria P(t,T). Suponha agora que essa quantia fosse aplicada em títulos para serem resgatados em t'. Assim, em t' tem-se:

$$P(t,T).e^{(t'-t)r(t,t')} \qquad (21)$$

Se o investidor negociar, ainda em t, a aplicação dessa importância a uma taxa futura para o período (T-t'), de modo que em T obtivesse $1,00, viria então:

$$P(t,T).e^{(t'-t)r(t,t')}.e^{(T-t')f(t,t',T)} = 1 \qquad (22)$$

onde $f(t,t',T)$ é a taxa (**forward**) contratada em t para vigorar de t' a T.

Note-se que assim como se procedeu com relação à equação em (19), tem-se aqui que o preço de um título, hoje, que promete pagar $1,00 no vencimento em t', deve satisfazer a equação:

$$P(t,t').e^{(t'-t)r(t,t')} = 1 \qquad (23)$$

Combinando (22) e (23), vemwazzu :

f(t,t',T) = -ln[P(t,T)/P(t,t')]/(T-t') (24)

que é, pois, a taxa futura contratada em t para vigorar de t' a T.

De (24) é fácil obter:

r(t,T) = [(t'-t)r(t,t') + (T-t')f(t,t',T)]/(T-t) (25)

[29] A estrutura a termo da taxa de juros discutida anteriormente é, agora, a função que relaciona r(t,T+m) a m, com a primeira dessas variáveis sendo a taxa de retorno de um título com vencimento em m.

Isto é, a taxa para o período completo é uma média ponderada da taxa **spot** do primeiro subperíodo e da taxa futura do segundo subperíodo.[30] Resolvendo-se a equação (25) para f(t,t',T), tem-se o mesmo resultado da equação (16).

3.3 - O Caso do Título do Governo com Cupom

Um título do governo caracteriza-se pela data de vencimento e pelo fluxo de pagamentos (valor do cupom) regulares. Assim, o preço corrente de um ativo desse tipo é simplesmente o valor presente do fluxo de pagamentos até o seu vencimento mais o valor presente da quantia que o título promete pagar no seu vencimento (valor de face). Mais precisamente, a relação entre essas variáveis é, supondo valor de face unitário, dada por:

$$P_t^N = \sum_{i=1}^{N} \frac{c}{\left(1+R_t^N\right)^i} + \frac{1{,}00}{\left(1+R_t^N\right)^N} \qquad (26)$$

Supondo que o equilíbrio no mercado depende do retorno esperado, seria idêntico então retorno de todos os títulos com vencimento em N, mesmo que tenham distintos pagamentos de cupom, c. É claro que, se o pagamento de cupom é menor, o preço de mercado do título ajusta-se de modo a compatibilizá-lo com a taxa de retorno de longo prazo dos outros títulos. Desta forma, se a data de vencimento dos títulos for idêntica e também o seu valor de face, segue que os títulos com menor pagamento de cupom teriam menor preço corrente, e assim maior ganho de capital no seu vencimento.[31]

Para estabelecer agora um resultado semelhante ao da equação (8), que relaciona o preço do título com cupom zero à data do seu vencimento, considere-se o caso do título com pagamento de cupom igual a c, que ocorre no tempo t (1 < i < n). Neste caso, o preço do título, P, e a sua taxa de retorno de longo prazo com capitalização contínua, r, estariam assim relacionados:

$$P = \sum_{t=1}^{n} c_t e^{-rt} \qquad (27)$$

---

[30] Como ilustração, considere-se a situação com apenas dois períodos, tendo-se, pois, t = 0, t'=1 e T=2. Assim, a equação (24) fica f(0,1,2) = 2r(0,2) - r(0,1) e conseqüentemente, $r(0,2) = \frac{f(0,1,2) + r(0,1)}{2}$.

Isto é, a taxa para dois anos é a média da taxa **spot** para um período (um ano) e a taxa futura também para um período. Desta forma, se a curva de retorno da estrutura a termo for decrescente entre os anos um e dois, pode-se assegurar que a taxa para um ano será menor no próximo ano do que no ano corrente.

[31] Nessas considerações supôs-se o mesmo tratamento tributário para os ganhos de capital, e os rendimentos com juros e dividendos. Todavia, se na prática o ganho de capital tiver tributação menor, então, os títulos com menor cupom, tendo uma parcela maior dos seus ganhos representada pelo ganho de capital, dariam um retorno bruto menor. Sobre esses pontos ver Begg (1982).

A duração (**duration**) do título, que desempenha aqui papel semelhante à data de vencimento do caso do título com cupom zero, é definida como [ver Hull (1993)]:[32]

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{N} t \ c_t e^{-rt}}{P} \tag{28}$$

A duração de um título é, na verdade, uma medida do tamanho e **timing** do seu fluxo de caixa, ou o quanto se deve esperar em média para receber os pagamentos que o título promete pagar. Note-se, neste particular, que um título com cupom zero tem duração igual à data do seu vencimento. Já um título com cupom tem duração menor do que a sua data de vencimento, pois há pagamentos anteriores a essa data.

Note-se que:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\sum_{t=1}^{n} t c_t e^{-rt} = -PD \tag{29}$$

Segue, pois:[33]

$$\frac{\partial P}{P} = -Ddr \tag{30}$$

que difere do resultado em (8) apenas pela substituição do conceito de vencimento pelo de duração do título. Uma vez mais, o preço do título é inversamente proporcional à sua taxa de retorno de longo prazo (**yield**).

---

[32] Com capitalização discreta isso seria $D = \frac{\sum_{t=1}^{N} t \ c_t (1+r)^{-t}}{P}$. Quando é constante o pagamento de cupom, essa fórmula pode ser alternativamente escrita como $D = \frac{c(1+r)\left[(1+r)^T - 1\right] + Tr(rF - c)}{rc\left[(1+r)^T - 1\right] + r^2 P}$, onde F é o valor de face do título [ver Chance (1992)]. Isso facilita o cálculo quando T for grande.

[33] Caso o pagamento de cupom seja anual, essa expressão fica [ver Hull (1993)]: $\frac{dP}{P} = \frac{-Ddr}{1+r}$. Com o pagamento do cupom sendo duas vezes por ano, o denominador dessa expressão seria 1 + r/2 , ao invés de 1 + r [ver Chance (1992)].

4 - O MODELO PARA A ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS

Shiller (1979) argumenta que, distintamente do caso de um título com desconto puro (cupom zero), se o título for uma perpetuidade ou tem pagamento de cupom e vencimento em n, então as taxas de juros de um futuro mais próximo deveriam ter peso maior na formação da taxa de longo prazo do que as taxas de juros para um futuro mais distante. Mais especificamente, a relação entre as taxas de curto e longo prazos proposta por Shiller é o seguinte modelo de valor presente:

$$R_t^n = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^n}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^i E_t\left(r_{t+i}\right) \qquad (31)$$

sendo obtido com base na linearização, ao redor de uma constante $\alpha = 1/(1+\rho)$, da relação exata da estrutura a termo de um título com vencimento em n e pagamento de cupom; onde ρ é uma média da taxa de juros de longo prazo.[34] Nesta versão o esquema de pesos adotado segue uma função exponencial truncada.

Vê-se que, se n tende a infinito (caso de uma perpetuidade), a equação acima reduz-se a:[35]

$$R_t^n = (1-\alpha)\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^i E_t\left(r_{t+i}\right) \qquad (32)$$

A derivação do resultado em (32) é, com base em Mankiw (1986), como segue. Se P_t é o preço de um perpetuidade que paga \$1,00 cada período, o seu retorno de longo prazo (**yield**) seria então:[36]

[34] Cushing e Ackert (1994) ressaltam que há alguns pressupostos restritivos por trás desse resultado, dentre os quais o de um valor constante para o termo do prêmio de risco. Além disso, os autores argumentam que, ao mesmo tempo em que Campbell (1986) procura defender essa equação, também reconhece que a aproximação linear usada na sua derivação só seria válida caso as taxas de juros de curto prazo não variassem muito no tempo. Ocorre que, como sugere Shea (1991), a variação dessas taxas, pelo menos nos Estados Unidos do pós-guerra, é suficientemente grande para que a aproximação linear possa ser justificada.

[35] Com taxas de juros variáveis essa equação ficaria [ver Mills(1993)]:

$R_t^n = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{j}\delta_{t+j}\right)Er_{t+i}$, onde $\delta_t = \frac{1}{(1+r_t)}$.

[36] Note-se que, se $P_0 = \frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^n}$, tem-se então $P_0 = \frac{1}{R}$.

$$R_t = \frac{1}{P_t} \qquad (33)$$

Chame agora o retorno pela retenção de uma perpetuidade por um período de H_t. Como a taxa de retorno pela retenção de uma perpetuidade entre o período t a t+1 e que paga um cupom de $ 1,00 por período deve levar em conta tanto o valor do cupom quanto o ganho de capital no período, tem-se:

$$H_t = \frac{1 + P_{t+1} - P_t}{P_t} \qquad (34)$$

Levando em conta nesta equação o retorno de longo prazo (**yield**) dado em (33), obtém-se:

$$H_t = R_t - \frac{1 + R_{t+1} - R_t}{R_{t+1}} \qquad (35)$$

Uma aproximação obtida pela linearização da equação (35) resulta em:[37]

$$H_t \cong R_t - \frac{R_{t+1} - R_i}{\rho} \qquad (36)$$

que envolve, pois, a mera substituição no denominador da equação (35), isto é, do retorno de longo prazo em t+1, por uma espécie de taxa média de retorno de longo prazo, ρ.

Pela equação (36) vê-se que, caso a taxa de retorno de longo prazo (**yield**) não se altere entre os tempos t e t+1, o retorno pela retenção de uma perpetuidade por um período seria igual à sua taxa de retorno de longo prazo. Se, por outro lado, a taxa de retorno de longo prazo aumentar (diminuir), o investidor teria uma perda (ganho) de capital quando retém a perpetuidade por um período, já que neste caso

Os resultados em nada mudam se a perpetuidade, ao invés de pagar $ 1,00, pagasse qualquer outro valor. Se tal valor fosse d, por exemplo, então $P_t = \frac{d}{R_t}$.

[37] Se ao invés de uma perpetuidade o título vencesse em n períodos, essa equação seria [ver Shiller (1979)]:

$$H_{t+1}^n = \frac{R_t^n - \alpha_n R_{t+1}^n}{1 - \alpha_n}, \quad \text{onde} \quad \alpha_n = \alpha \frac{\left(1 - \alpha^{n-1}\right)}{\left(1 - \alpha^n\right)}.$$

a sua taxa de retorno por manter o ativo de longo prazo por um período seria menor (maior) do que a sua taxa de retorno de longo prazo.

Para considerar a teoria das expectativas na estrutura a termo da taxa de juros, defina-se o termo do prêmio como sendo a diferença esperada entre o retorno obtido em reter-se uma perpetuidade por um período e o retorno de um título de curto prazo, r_t, mais precisamente:

$$\theta_t = E_t\left(H_t - r_t\right) \qquad (37)$$

Assim, o prêmio representa o retorno adicional por se reter um ativo de longo prazo ao invés de um ativo de curto prazo. É útil reescrever essa equação levando em conta a relação dada em (36), ou seja:

$$R_t - r_t = \frac{\left(E_t R_{t+1} - R_t\right)}{\rho + \theta_t} \qquad (38)$$

mostrando que o **spread** entre as taxas de curto e de longo prazo reflete as mudanças tanto nas taxas de longo prazo como no termo do prêmio de risco.

Removendo o operador da esperança matemática, o excesso de retorno pela retenção do título, H_t-r_t , pode ser escrito como:

$$R_t - r_t = \theta_t + v_{t+1} \qquad (39)$$

onde:

$$v_{t+1} \cong \frac{\left(R_{t+1} - E_t R_{t+1}\right)}{\rho} \qquad (40)$$

Supondo que o termo do prêmio de risco seja constante no tempo, vem:

$$R_t - r_t = \theta + v_{t+1} \qquad (41)$$

Quando esta equação é escrita levando em conta a equação (36), tem-se:

$$R_{t+1} - R_t = -\rho\theta + \rho\left(R_t - r_t\right) - \rho v_{t+1} \qquad (42)$$

onde o **spread** entre as taxas de juros de curto e de longo prazos (inclinação da curva de retorno) é agora um previsor da variação na taxa de juros de longo prazo. Assim, se a inclinação da curva de retorno for positiva (negativa), segue que a taxa de retorno de longo prazo deve aumentar (cair). A equação (42) pode ser alternativamente escrita como uma relação entre a taxa de longo prazo e as taxas esperadas para o curto prazo. Assim, seja inicialmente:

$$R_t = \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right) r_t + \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right) E_t R_{t+1} + \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)\theta \qquad (43)$$

que, quando resolvida recursivamente para frente, produz:[38]

$$R_t^{\infty} = \theta + (1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i E_t\, r_{t+j} \qquad (44)$$

onde, uma vez mais, $\alpha = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)$. Isto é, a taxa de retorno (**yield**) de uma perpetuidade, R_t^{∞}, é uma média geométrica, com pesos decrescentes, das taxas futuras de juros de curto prazo. A partir desta equação obtém-se:[39]

---

[38] Escreva a equação seqüencialmente em três períodos, por exemplo, como:

$$\boldsymbol{R_t} = (1-\alpha)\boldsymbol{r_t} + \alpha \boldsymbol{E_t R_{t+1}} + (1-\alpha)\theta \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{R_{t+1}} = (1-\alpha)\boldsymbol{r_{t+1}} + \alpha \boldsymbol{E_{t+1} R_{t+2}} + (1-\alpha)\theta \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{R_{t+2}} = (1-\alpha)\boldsymbol{r_{t+2}} + \alpha \boldsymbol{E_{t+2} R_{t+3}} + (1-\alpha)\theta \qquad (3)$$

Sustituindo (3) em (2),vem:

$$\boldsymbol{R_{t+1}} = (1-\alpha)\boldsymbol{r_{t+1}} + \alpha \boldsymbol{E_{t+1}}\left[(1-\alpha)\boldsymbol{r_{t+2}} + \alpha \boldsymbol{E_{t+2} R_{t+3}} + (1-\alpha)\theta\right] + (1-\alpha)\theta \qquad (4)$$

Após substituir (4) em (1), tem-se:

$$\boldsymbol{R_t} = (1-\alpha)\boldsymbol{r_t} + \alpha \boldsymbol{E_t}\left[(1-\alpha)\boldsymbol{r_{t+1}} + \alpha \boldsymbol{E_{t+1}}((1-\alpha)\boldsymbol{r_{t+2}} + \alpha \boldsymbol{E_{t+2} R_{t+3}} + (1-\alpha)\theta\right] +$$
$$+(1-\alpha)\theta\,] + (1-\alpha)\theta =$$
$$(1-\alpha)\alpha^0 \boldsymbol{r_{t+0}} + \alpha(1-\alpha)\boldsymbol{r_{t+1}} + \alpha^2 + \alpha^3(1-\alpha)\boldsymbol{R_{t+3}} + \alpha^2(1-\alpha)\theta + \alpha(1-\alpha)\theta +$$
$$+(1-\alpha)\theta\ ,$$

que, para n tendendo a infinito, seria:

$$\boldsymbol{R_t^{\infty}} = (1-\alpha)\sum_{\boldsymbol{i}=0}^{\infty} \alpha^{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{E_t\, r_{t+i}} + \theta$$

Note-se que $(1-\alpha)\left[1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\boldsymbol{n}}\right] = (1-\alpha)\left[\frac{1-\alpha^{\boldsymbol{n}}}{1-\alpha}\right] = 1$, pois

$$lim_{\boldsymbol{n}\Rightarrow\infty}\, \alpha^{\boldsymbol{n}} = lim_{\boldsymbol{n}\Rightarrow\infty}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\boldsymbol{n}} = 0$$

[39] Esse resultado pode ser assim demonstrado:

$$R_t^{\infty} - r_t = \theta + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i E_t \Delta r_{t+i} \qquad (45)$$

Desta forma, se o **spread** for elevado as futuras taxas de curto prazo devem estar em média acima da taxa corrente de curto prazo. Alternativamente, o **spread** atual entre as taxas de curto e de longo prazos é um previsor das variações futuras das taxas de curto prazo.[40]

Um aspecto útil dessa relação para o teste empírico é que se tanto a taxa de curto prazo como a taxa de longo prazo tiverem ordem de integração igual a um, I(1), isto é, a primeira diferença das respectivas variáveis é estacionária, então o **spread** deve ser estacionário, ou seja, há co-integração entre as taxas de curto e longo prazos, cujo vetor de co-integração é (1, -1). Isso permite mostrar, conforme se verá, que o modelo de valor presente do tipo aqui discutido equivale à estimação de um modelo VAR (Vector Autoregressive System) com restrições nos seus parâmetros.

$$\boldsymbol{R_t^{\infty} - r_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i E_t r_{t+i} - r_t - \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i E_t r_{t+i} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i E_t r_{t+i} - \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i E_t r_{t+i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i E_t \Delta r_{t+i}}$$

(Note-se que $\alpha^0 E_t r_t = r_t$) .

[40] Resultado semelhante pode ser obtido do caso geral dado na equação (31) que, por conveniência, é aqui reproduzida:

$$R_t^n = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^n} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i E_t (r_{t+i})$$

Subtraia-se λr_t de ambos os lados da equação, onde $\lambda = \dfrac{1}{(1-\alpha^n)}$, obtendo-se:

$$R_t^n - \lambda r_t = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i E_t r_{t+i} - \lambda\alpha \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i E_t r_{t+i} - \lambda r_t$$

$$= \lambda\alpha^0 r_t - \lambda r_t + \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i E_t r_{t+i} - \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha^i E_t r_{t+i-1}$$

$$\lambda \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i E_t r_{t+i} - \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i E_t r_{t+i-1} - \lambda\alpha^n E_t r_{t+n-1}$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i E_t \Delta r_{t+i} - \lambda \alpha^n E_t r_{t+n-1}$$

que para λ=1 e α^n=0 produz o resultado em (45) [ver Mills (1991)].

5 - TAXA DE JUROS DE LONGO PRAZO E TAXA DE INFLAÇÃO FUTURA

Um segundo modelo de valor presente pode ser ainda aqui obtido tendo a taxa de juros corrente de longo prazo como previsor das taxas de inflação futura. Mais precisamente, com base na equação de Fisher e considerando a linearização do retorno de uma perpetuidade, nos moldes da discussão no contexto das equações (31) e (32), obtém-se, conforme Shiller e Siegel (1977) [ver Engsted (1992)]:

$$R_t^{\infty} = \rho + (1-b)\sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t \pi_{t+j} \qquad (46)$$

onde ℓ é a taxa de juros real (constante) e π é a taxa de inflação e $b = \frac{1}{1+\ell}$, como i sendo a taxa de juros real (presumida constante). Assim como se precedeu no caso do **spread** entre as taxas de juros de curto e longo prazos dado na equação (45), pode-se transformar essa equação de modo a torná-la mais adequada ao teste empírico. Com esse objetivo, após subtrair bπ de ambos os lados da equação, vem:[41]

$$R_t - b\pi_t = \rho + \sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t \Delta\pi_{t+j} \qquad (47)$$

Desta forma, se tanto a taxa de inflação como a taxa de juros de longo prazo forem I(1), então a diferença entre essas variáveis deve ser I(0), já que a primeira diferença da taxa de inflação seria neste caso I(0). Vale dizer, as variáveis taxa de juros e taxa de inflação devem co-integrar, com vetor de co-integração (1, -b). Uma vez mais, recai-se, pois, num problema de estimação de um modelo VAR com restrições nos seus parâmetros.

---

[41] Este resultado é assim obtido:

$R_t - b\pi_t = \rho - b\pi_t + (1-b)\sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t \pi_{t+j} = \rho + (1-b)\sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t (\pi_{t+j} - \pi_t).$

Note-se que $(1-b)\sum_{j=1}^{\infty} b^j \pi_t = (1-b)\pi_t \sum_{j=1}^{\infty} b^j = \frac{(1-b)\pi_t}{i}.$

Além disso, $(1-b) = \frac{i}{1+i}$ ou $\frac{1}{i} = \frac{1}{(1-b)(1+i)} = \frac{b}{1-b}$.

Segue que $(1-b)\sum_{j=1}^{\infty} b^j \pi_t = b\pi_t$. Além disso $\sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t(\pi_{t+j} - \pi_t) = \sum_{j=1}^{\infty} (1-b)^{-1} b^j E_t \Delta\pi_{t+j}$.

Defina-se agora:

$B_t = \sum_{j=1}^{\infty} b^j (\pi_{lt+j} - \pi_{lt})$, onde d=1/1+r. Como $\sum_{j=1}^{\infty} b^j = \left(\frac{1}{1+r}\right)\left(1 + \frac{1}{r} + \ldots\right) = \left(\frac{1}{1+r}\right)\cdot\left(\frac{1+r}{r}\right) = r^{-1}$,

pois $\lim_{n \Rightarrow \infty} \frac{1}{(1+r)^n} = 0$, e $(\pi_{t+j} - \pi_t) = \Delta\pi_{t+1} + \Delta\pi_{t+2} + \ldots \Delta\pi_{t+j}$, pois

$(\pi_{t+1} - \pi_t) = \Delta\pi_{t+1}; (\pi_{t+2} - \pi_t) = (\pi_{t+2} - \pi_{t+1}) + (\pi_{t+1} - \pi_t) = \Delta\pi_{t+2} + \Delta\pi_{t+1}$ etc.

Tem-se:

$\sum_{j=1}^{\infty} b^j (\pi_{t+j} - \pi_t) = \left(b^1 + b^2 + \ldots + b^j\right)\Delta\pi_{t+1} + \left(b^2 + b^3 + \ldots + b^j\right)\Delta\pi_{t+2} + \ldots .$

Observe que:

$b^1(\pi_{t+1} - \pi_t) = b^1 \Delta\pi_{t+1}, b^2(\pi_{t+2} - \pi_t) = b^2(\pi_{t+2} - \pi_{t+1}), b^3(\pi_{t+3} - \pi_t) = \; = b^3(\Delta\pi_{t+3} + \Delta\pi_{t+2} + \Delta\pi_{t+1}),$

e $b^1 + b^2 + \ldots + b^j = \frac{1}{1+r}(1-b)^{-1}$; $b^2 + b^3 + \ldots + b^j = \frac{1}{(1+r)^2}(1-b)^{-1}$ etc.

Desta forma, $\sum_{j=1}^{\infty} b^j (\pi_{t+j} - \pi_t) = \sum_{j=1}^{\infty} (1-b)^{-1} b^j \Delta\pi_{t+j}$.

Como $(1-b)^{-1} = \frac{(1+r)}{r}$, o resultado em (46) fica, pois, demonstrado.

Note-se que caso o somatório em (46) inicie em zero, ao invés de um, tem-se:

$R_t - \pi_t = \rho - \pi_t + \sum_{j=0}^{\infty} b^j E_t \pi_{t+j} - b\sum_{j=0}^{\infty} b^j E_t \pi_{t+j} = \rho + \sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t \pi_{t+j} -$

$\sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t \pi_{t+j-1} = \rho + \sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t \Delta\pi_{t+j}$

6 - SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE VALOR PRESENTE

As duas versões do modelo de valor presente apresentadas nas equações (45) e (47) equivalem, conforme já mencionado, a estimar um modelo VAR com restrições nos parâmetros. Esse resultado é demonstrado a seguir com base em Campbell e Shiller (1987). Como os dois modelos têm basicamente a mesma forma, basta usar um deles na exposição . Assim, seja o modelo:[42]

$$S_t = R_t^{\infty} - r_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i E_t \Delta r_{t+i} \qquad (48)$$

que mostra, conforme já foi discutido, o **spread** entre as taxas de curto e de longo prazos, S_t, como uma função das variações futuras nas taxas de juros de curto prazo, Δr_{t+i} .

Sabe-se que se duas variáveis de um dado modelo co-integram (isto é, uma combinação linear delas seria estacionária), então — como a primeira diferença de cada uma dessas variáveis seria não-estacionária — elas combinadas teriam uma representação VAR bivariada de ordem infinita (decomposição de Wold); embora o modelo possa ser aproximado por um sistema VAR contendo apenas p defasagens. Se este for o caso das variáveis do modelo de valor presente dado, por exemplo, na equação (48) então a sua representação VAR seria:

$$\begin{bmatrix} \Delta r_t \\ S_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(L) & b(L) \\ c(L) & d(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r_{t-1} \\ S_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \qquad (49)$$

onde, $a(L) = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + \ldots + a_p L^{p-1}$, com L sendo o operador de defasagens (**lag operator**). Campbell (1987) demonstra então que modelos de valor presente, como o da equação (48), equivalem a estimar modelos VAR após impor restrições nos seus parâmetros, que no caso aqui seriam:

$$a_1 = -c_1, \ldots, a_p = -c_p,\ d_1 + b_1 = \alpha^{-1},\ b_2 = -d_2, \ldots, b_p = -d_p \qquad (50)$$

Isso pode ser assim demonstrado. Seja o modelo VAR em (49) representado alternativamente por:

$$\begin{bmatrix} \Delta r_t \\ \Delta r_{t-p+1} \\ S_t \\ S_{t-p+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \ldots a_p b_1 \ldots b_p \\ I_{p-1} 0 \\ c_1 \ldots c_p d_1 \ldots d_p \\ 0 I_{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r_{t-1} \\ \Delta r_{t-p} \\ S_{t-1} \\ S_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ 0 \\ u_{2t} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (51)$$

[42] Exceto pela exclusão do termo para o prêmio de risco, essa equação é idêntica àquela dada em (45).

que em notação matricial seria:

$$z_t = Az_{t-1} + v_t \tag{52}$$

onde:

$$z_t = \left[\Delta r_t \ldots \Delta r_{t-p+1} S_t \ldots S_{t-p+1}\right]' \tag{53}$$

e:

$$v_t = \left[u_{1t}\, 0 \ldots 0\ u_{2t}\, 0 \ldots 0\ \right] \tag{54}$$

Note-se que da equação (52) obtém-se a previsão condicionada:

$$E_t z_{t+j} = A^j z_t \tag{55}$$

Desta forma, a variável do lado direito da equação (48) pode, em vista da sua representação em (51), ser escrita como:

$$E_t \Delta r_{t+j} = h' A^i z_t \tag{56}$$

onde h' é um vetor linha tendo a unidade como primeiro elemento, com todos os demais elementos sendo zero. Do mesmo modo, para a variável do lado esquerdo da equação (48) tem-se:

$$S_t = g' z_t \tag{57}$$

onde g' é um vetor linha consistindo de p zeros, seguidos do número um, e novamente p - 1 zeros. Esses dois últimos resultados substituídos no modelo de valor presente da equação (48) produzem:

$$g' z_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i h' A^i z_t \tag{58}$$

Considere-se, em seguida, a seguinte aproximação:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i A^i = \alpha A[I - bA]^{-1} \quad (59)$$ [43]

o que permite escrever a equação (58) como:

$$g' z_t = h' \alpha A[I - \alpha A]^{-1} z_t \quad (60)$$

ou mais simplesmente:

$$g' [I - \alpha A] = h' \alpha A \quad (61)$$

onde I é a matriz identidade com a mesma dimensão da matriz A. Assim, em vista da definição da matriz A, é fácil verificar que esse resultado equivale a estimar o modelo VAR em (49) ou (51) com as restrições em (50).

Assim, a hipótese nula representando as restrições no modelo VAR seria:

$$H_0 : g' (I - \alpha A) - h' \alpha A = 0 \quad (62)$$

Chame-se:

$$S_t' = h\alpha A(I - \alpha A)^{-1} z_t \quad (63)$$

o valor que se espera obter caso os dados estejam de acordo com o modelo de valor presente. O teste das restrições no modelo VAR equivale, então, a testar:

$$H_0 : S_t = S_t' \quad (64)$$

Assim, a aceitação de H_0 significa que o modelo de valor presente não pode ser rejeitado.

Essas restrições permitem uma interpretação interessante para o problema da relação entre as taxas de juros de curto e longo prazos. Mais precisamente, somando as duas equações do modelo VAR, obtém-se:

$$\Delta r_{t+1} + S_{t+1} = \sum_{i=1}^{\rho} (a_i + c_i) \Delta r_{t+1-i} + \sum_{i=1}^{\rho} (b_i + d_i) S_{t+1-i} + u_{1t+1} + u_{2t+1} \quad (65)$$

---

[43] Este resultado pode ser assim demonstrado. Seja $y = I + \alpha A + (\alpha A)^2 + \ldots$, que multiplicado por αA dá $y\alpha A = \alpha A + (\alpha A)^2 + \ldots$ Isto é, tem-se $y(I - \alpha A) = I - (\alpha A)^n$ ou $y = \frac{I - (\alpha A)^n}{I - \alpha A} = (I - \alpha A)^{-1}$.

Note-se que, para o segundo termo do numerador tender a zero quando n tende a infinito, pressupõe-se que as séries Δr_t e S_t sejam estacionárias; isto é, a soma dos elementos de cada linha da matriz A não deve exceder a unidade, condição esta que é atendida quando as séries são estacionárias.

que, após levar em conta as restrições acima, vem:

$$\Delta r_{t+1} + S_{t+1} - \alpha^{-1} S_t = u_{1t+1} + u_{2t+1} = u_t \qquad (66)$$

de onde obtém-se:[44]

$$r_t - \frac{\alpha R_{t+1} - R_t}{1-\alpha} = u_t \qquad (67)$$

Este resultado mostra que as restrições no modelo VAR equivalem à hipótese de que o excesso de retorno $H_{t+1} - r_t$ é imprevisível dada a informação sobre os valores passados de Δr_t e S_t. Isso significa que na regressão:

$$H_{t+1} - r_t = \alpha + \beta x_t + u_t \qquad (68)$$

onde:

$$\boldsymbol{x_t} = \left(\Delta \boldsymbol{r_t}, \ldots, \Delta \boldsymbol{r_{t-p+1}}, \boldsymbol{S_t} \ldots, \boldsymbol{S_{t-p+1}} \right) \qquad (69)$$

a hipótese nula H: $\beta_0 = 0$ seria equivalente a testar as restrições no modelo VAR apresentadas acima.[45]

[44] Note-se que essa equação pode ser escrita como:

$r_{t+1} - r_t + R^{\infty}_{t+1} - r_{t+1} - \alpha^{-1}\left(R^{\infty}_t - r_t\right) = u_t$, ou $\alpha^{-1} r_t - r_t + R^{\infty}_{t+1} - \alpha^{-1} R^{\infty}_t = u_t$

permitindo obter $r_t - \alpha r_t + \alpha R^{\infty}_{t+1} - R^{\infty}_t = u_t$ ou $r_t - \dfrac{\alpha R^{\infty}_{t+1} - R^{\infty}_t}{(1-\alpha)} = u_t$

Note-se que o segundo termo à esquerda desta igualdade é H_{t+1}, ou seja, o retorno pela retenção de uma perpetuidade por um período; ver a nota 5.

[45] Um teste alternativo é como segue. Primeiramente, viu-se na nota anterior que:

$H^n_{t+1} = \dfrac{R^n_t - \alpha_n R^n_{t+1}}{1-\alpha}$, onde $\alpha_{\boldsymbol{n}} = \alpha \dfrac{\left(1-\alpha^{\boldsymbol{n}-1}\right)}{\left(1-\alpha^{\boldsymbol{n}}\right)}$

Após substituir esse resultado na equação (68), obtém-se:

$\Delta R^n_{t+1} = \sigma' + \beta' S^n_t + u'_{t+1}$, onde $\Delta R^n_{t+1} = R^n_{t+1} - R^n_t, \beta = \dfrac{(1-\alpha_n)}{\alpha_n}, \alpha' = \phi\beta'$ e $u'_{t+1} = -(1-\alpha_n) u_{t+1}$.

Assim, o teste alternativo refere-se ao parâmetro β', ao invés de β na equação (68). Sobre este ponto, ver Mills (1991).

7- DIFICULDADES COM O TESTE EMPÍRICO

7.1-O Caso dos Estados Unidos

Apesar da elegância analítica do modelo de valor presente para a estrutura a termo da taxa de juros dado pelas equações (44) e (45), o seu desempenho no teste empírico deixa a desejar, pois o modelo foi rejeitado em muitos dos trabalhos que utilizaram dados do pós-guerra para a economia americana. Vale a pena, neste particular, registrar o desapontamento de Shiller, Campbell e Schoenholtz (1983) com o uso do **spread** entre as taxas de juros das Letras do Tesouro americano de seis e três meses para prever as variações futuras nas taxas de três meses. "A teoria simples de que a inclinação da estrutura a termo pode ser usada para prever a direção de mudanças futuras na taxa de juros parece sem qualquer utilidade".[46] De fato, o desempenho desfavorável nos testes tem sido interpretado como uma rejeição da teoria das expectativas racionais para a estrutura a termo.

Embora seja longa a lista de trabalhos com rejeição do modelo de valor presente, deve ser aqui acrescentado que em alguns casos constatou-se ser útil o uso do **spread** na previsão de taxas de juros futuras, principalmente em se tratando das taxas situadas nas extremidades da curva de retorno. Isso porque a política operacional do Federal Reserve (Fed) consistia em intervenções que eram direcionadas principalmente para os juros de médio prazo, eliminando assim o elemento passível de previsão no meio da curva de retorno.[47]

Digno de nota nessa confrontação entre a rejeição e a aceitação do modelo é o trabalho de Mankiw e Miron (1986), que alimenta, na verdade, os dois lados da disputa. Enquanto com os dados até 1914, ano em que foi instituído o Fed, o **spread** entre as taxas de juros de curto e de longo prazos é útil na previsão das taxas de juros de curto prazo, os resultados com dados posteriores a 1914 são desfavoráveis ao modelo. Os autores sugerem que a rejeição do modelo neste último caso não deve ser interpretada como uma rejeição da hipótese das expectativas racionais em que se baseia o modelo. De fato, o que estaria ocorrendo é que o Fed passou a concentrar os seus esforços no sentido de estabilizar as taxas de juros de curto prazo. Assim, a série da taxa de juros de curto prazo passou a ter um comportamento tipo passeio aleatório (**random walk)**; vale dizer, a série tornou-se imprevisível. Desta forma, mesmo com as expectativas sendo racionais, a evidência empírica não poderia ser obtida da curva de retorno, já que variações futuras nas taxas de curto prazo não haveria, conseqüentemente, informação a incorporar no **spread** das taxas. Essa possibilidade motivou o trabalho de Rudebusch (1995) que é, na verdade, uma tentativa de modelar a hipótese levantada por Mankiw e Miron (1986).

[46] Essa afirmativa é ressaltada em Rudebusch (1995).

[47] Para maiores detalhes sobre esses pontos e as devidas referências, ver Rudebusch (1995). Campbell (1995) fornece evidência empírica desse caso para os Estados Unidos.

7.2- O Caso do Brasil

A longa experiência inflacionária do Brasil acabou por inviabilizar as aplicações financeiras de longo prazo. Só agora com a relativa estabilidade dos preços, obtida com o Plano Real, é que começa a vislumbrar-se um mercado financeiro com espectro mais variado quanto ao prazo das aplicações. Desta forma, torna-se difícil aplicar aqui a metodologia acima discutida e qual requer as taxas de juros de curto e longo prazos.

De qualquer maneira, pode-se ainda usar a estrutura a termo da taxa de juros com o **spread** sendo definido como a diferença entre as taxas de curto e curtíssimo prazos. Assim, suponha, como em Rudebusch (1995), que um título de curto prazo (cupom zero) tem vencimento que é duas vezes o do outro título, cujas taxas são, respectivamente, r(2) e r(1). Com base na estrutura a termo, tem-se, pois:[48]

$$r(2)_t = \frac{1}{2}\left[r(1)_t + E_t r(1)_{t+1}\right] + \theta(2)$$

onde $\theta(2)$ é o termo (constante) para o prêmio de risco. Supondo expectativas racionais, isto é:

$$r(1)_{t+1} = E_t r(1)_{t+1} + \varepsilon_{t+1}$$

tem-se, após substituir esta equação na anterior:

$$r(2)_t = \frac{1}{2}\left[r(1)_t + r(1)_{t+1} - \varepsilon_{t+1}\right] + \theta(2)$$

Ou seja:

$$\frac{1}{2} r(1)_{t+1} - r(1)_t = -\theta(2) + r(2)_t - r(1)_t + \frac{1}{2}\varepsilon_{t+1} = \alpha + \beta\left[r(2)_t - r(1)_t\right] + v_{t+1},$$

onde $\alpha = -\theta(2)$, $\beta = 1$ e $v_{t+1} = \dfrac{\varepsilon_{t+1}}{2}$

Com a unidade do tempo sendo agora um dia, caso se queira então relacionar a taxa do **overnight**, r_t, com a taxa de um título para n dias, $r(n)_t$, vem:

$$r(n)_t = \frac{1}{n}\left[r_t + E_t \sum_{i=1}^{n-1} r_{t+i}\right] + \theta(n)$$

[48] Note-se que, à parte alguma mudança de notação, esse resultado é idêntico àquele da nota 8.

Como se fez no caso para dois períodos, se as expectativas forem racionais, isto é, $r_{t+1} = E_t r_{t+i} + \varepsilon_{t+i}$, então substituindo isto na equação anterior produz:[49]

$$\frac{1}{n}\left[\sum_{i=0}^{n-1} r_{t+i}\right] - r_t = -\theta(n) + r(n)_t - r_t + v_{t+n-1}$$

onde $\alpha = -\theta(n)$ e $\beta = 1$ [50]

Aplica-se aqui tentativamente esse último modelo a dados do Brasil. Como só se dispõe de dados diários para as aplicações do **over** a partir de abril de 1995, o resultado obtido deve, dada a pequena amostra, ser visto com reserva, tendo mais o espírito de uma ilustração da aplicação do modelo.

As variáveis foram assim obtidas: primeiramente, para construir a variável dependente da regressão mostrada no modelo, calculou-se a média diária das taxas das aplicações do **overnight** para cada mês, no período de abril a novembro, conforme o Banco de Dados da Macrométrica. Já para construir a variável explicativa da regressão, calculou-se, a partir da taxa mensal do **over**, a sua taxa equivalente diária, com base nos dias úteis do mês correspondente.

A estimativa obtida para o modelo foi $\beta = 0{,}92$ com estatística de 9,2 e cuja precisão do ajustamento foi R^2=0,93. Assim, rejeita-se fortemente a hipótese nula $\beta = 0$, mas não a hipótese nula $\beta = 1$. Com a ressalva de que, dado o pequeno tamanho da amostra (oito observações), o resultado é apenas tentativo, conclui-se que a hipótese das expectativas racionais para a estrutura a termo da taxa de juros não pode ser rejeitada com esses dados do Brasil.

8 - A ESTRUTURA A TERMO E O PERFIL DA DÍVIDA PÚBLICA[51]

Um governo que se endivida tem que decidir entre o lançamento de títulos de curto e de longo prazos. É evidente que se a curva de retorno é fortemente positiva, economiza-se nos gastos com os juros quando encurtam-se os prazos de

---

[49] Note-se que $r(n)_t = \frac{1}{n}\left[r_t + E_t \sum_{i=1}^{n-1} r_{t+i} - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_{t+i} - \right] + \theta(n)$

$$r(n)_t - r_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} r_{t+i} - r_t + \frac{1}{n} r_t - v_{t+n-1} + \theta(n)$$

$$r(n)_t - r_t = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} r_{t+i} - r_t - v_{t+n-1} + \theta(n)$$

[50] Ver a derivação alternativa na nota 20.

[51] Esta seção baseia-se em Campbell (1995).

vencimento dos títulos. Já as curvas de retornos planas e, principalmente, aquelas com inclinação negativa favorecem o alongamento da dívida.

De fato, a questão da administração da dívida é, em geral, um pouco mais complexa do que as ponderações acima parecem sugerir. Primeiramente, há o problema da escolha da medida [o **spread** das taxas de retorno (**yield**) ou a diferença entre as taxas de retorno média por período de retenção] a ser usada no cálculo da economia dos juros da dívida, a ser obtida com base na estrutura a termo. Campbell (1995) sugere que, quando as taxas de juros de curto prazo não apresentam qualquer tendência de longo prazo, obtêm-se resultados idênticos com os dois conceitos de **spread**. Entretanto, se em dado período as taxas de juros de curto prazo aumentam de modo inesperado, então o excesso de retorno por retenção dos títulos de longo prazo estariam abaixo da sua média de longo prazo. Assim, o uso dessa medida subestimaria a economia com os juros obtida do encurtamento da dívida. Por outro lado, num período onde se espera aumento nas taxas de juros de curto prazo, o **spread** entre as taxas de retorno (**yield**) iria refletir esse aumento, situando-se, assim, acima da sua média de longo prazo. O uso dessa medida sobrestimaria, pois, a economia com os juros obtida do encurtamento da dívida.

Uma situação onde a estrutura a termo pode ser usada para reduzir o custo dos juros da dívida se dá quando o governo dispõe de informações mais seguras do que o setor privado com relação ao curso futuro das taxas de juros. Uma situação desse tipo ocorreu no Governo Thatcher na Inglaterra durante a década de 80. O receio de que as altas taxas inflacionárias da década anterior continuassem durante os anos 80 resultou em altas taxas de juros de longo prazo no início da década de 80. A política monetária restritiva então posta em prática pelo Governo Thatcher elevou também as taxas de juros de curto prazo. Nessa ocasião, foram então lançados títulos indexados, com ajuste automático tanto no valor do cupom como no valor de face do título nominal de longo prazo, o governo oferecia ao investidor a proteção da correção monetária. Como o governo tinha mais convicção no seu plano de combate à inflação do que o setor privado, foi possível obter grande economia nos gastos com os juros da dívida (os títulos indexados representam atualmente cerca de 10% da dívida pública inglesa). Como resultado da queda da inflação os títulos nominais de longo prazo tiveram bom retorno durante toda a década de 80, enquanto os títulos indexados, devido às crescentes taxas de juros reais, pouco renderam aos seus investidores.

Às vezes, objeções são feitas à colocação de títulos de curto prazo sob o argumento de que, tendo as taxas de curto prazo maior variabilidade do que as de longo prazo, maior seria o risco com essa forma de endividamento. Campbell (1995) ressalva, entretanto, que se deve analisar o retorno dos títulos num período uniforme de tempo. Neste particular, não se pode confundir o retorno do título até o seu vencimento (**yield**) com o retorno por período de retenção do título. Afinal, tanto as taxas de curto prazo são idênticas às taxas de retorno por período de retenção num horizonte de curto prazo, como são idênticos os retornos de longo prazo (**yield**) e por período de retenção para um título num horizonte de longo prazo. Além disso, recorde-se que a pouca variabilidade das taxas de longo prazo (**yield**) não implica taxas de retorno por período de retenção também pouco variáveis [ver, a esse respeito, a equação (10)]. Um outro ponto relacionado à variabilidade das taxas é que para o governo o conceito relevante é o das taxas reais não as nominais.[52] E as taxas reais de retorno dos títulos de longo prazo são mais variáveis do que as dos títulos de curto prazo. Portanto, o risco em função de serem as taxas de curto prazo ou longo prazo não tem sinalização muito clara.

Alguns consideram as discussões acima inócuas, sob o argumento de que, para dada política de gastos governamentais, a política de gerenciamento da dívida não tem qualquer efeito real (teorema da irrelevância). Isso supõe mercados plenos (**compete markets**) e taxação sem distorções (**nondistortionary taxes**). De acordo com esse ponto de vista, uma política que gera perdas para o governo em dado momento não afetaria, nesse momento, o consumo do setor privado. Assim, as perdas do governo, que são o ganho do setor privado, poderiam ser recuperadas através de um aumento na arrecadação sem gerar problemas. Nestas circunstâncias, os custos médios dos juros e a variabilidade das taxas de juros ao longo das diversas situações são irrelevantes.

Ressalte-se ainda que a estrutura a termo toma as taxas de juros como sendo independentes da política adotada para a administração da dívida. Alguns argumentam, todavia, que a troca entre os títulos de curto e longo prazos (ou seja, a oferta relativa desses papéis) afeta os seus respectivos retornos (**yield** e retorno por período de retenção). Desta forma, a tentativa da dívida estaria fadada ao insucesso. Por exemplo, a estratégia de aumentar a oferta de títulos de curto prazo para aproveitar-se das suas menores taxas de juros provocaria uma queda nos seus preços eliminando assim a economia inicialmente buscada.

Como observação final, há outra maneira onde a política de gerenciamento da dívida pode afetar as expectativas dos investidores quanto às taxas de juros. Por exemplo, um governo com dívida nominal de longo prazo tem um incentivo para inflacionar a economia e com isso diminuir o valor real do seu passivo. Desta forma, os investidores esperarão mais inflação e, portanto, juros nominais maiores quando a dívida é nominal e de longo prazo do que de curto prazo ou indexada. Isso supõe naturalmente que a mesma autoridade estabelece a política fiscal e a política ou então que as considerações fiscais influenciam a autoridade monetária.

[52] Note-se que, se os títulos da dívida são de longo prazo, então, com o aumento da inflação, cai o valor do passivo real do governo já que os pagamentos são fixados em termos nominais. No caso do financiamento com títulos de curto prazo, todavia, o aumento na inflação aumenta também o custo nominal dos juros, mas, como também a dívida nominal é corroída pela inflação, resulta inalterado o passivo real do governo.

APÊNDICE

A.1 - Sobre a Volatilidade das Taxas de Longo Prazo para Títulos[53]

A estrutura a termo da taxa de juros permite que a hipótese das expectativas racionais seja ainda testada através da volatilidade da taxa de retorno dos vários ativos. Neste particular, três taxas de retorno de longo prazo são comparadas. A primeira refere-se à taxa para um título com cupom, proposta por Shiller (1979), que, como já foi visto, é dada por:

$$R_t^n = \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha^n)} \sum_{h=0}^{n-1} \alpha^h E\left(r_{t+h} | \phi_t\right) \qquad (A.1)$$

Note-se que as expectativas são condicionais à informação contida no conjunto ϕ_t .

A segunda taxa refere-se ao retorno de um título com desconto puro (cupom zero). Contrariamente ao caso da fórmula anterior, essa taxa é obtida sem qualquer linearização; mais precisamente, o resultado é exato desde que se aceite a hipótese da expectativa logarítmica, sendo:

$$R_t^n = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{jj=0=0}^{n-1} E\left(r_{t+h} | \phi_t\right) \qquad (A.2)$$

Sejam ainda duas outras taxas de retorno. A primeira válida para uma situação com perfeita visão do futuro (**perfect foresight**) é dada por:

$$R_t^{*n} = \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha^n)} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^h r_{t+h} \qquad (A.3)$$

A segunda é válida para uma situação com informação limitada. No caso, o conjunto de informações do agente contém apenas as taxas de juros de curto prazo corrente e passadas, sendo a taxa de retorno de longo prazo dada por:

$$\hat{R}_t^n = \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha^n)} \sum_{h=0}^{n-1} \alpha^h E\left(r_{t+h} | r_t, r_{t-1} \ldots\right) \qquad (A.4)$$

Singleton (1980) mostra que, se as taxas de curto prazo forem estacionárias, podem-se estabelecer interessantes relações entre a volatilidade das várias taxas. Primeiramente, tem-se:

$$\text{Var}(r_t) > \text{Var}(R_t) \qquad (A.5)$$

[53] Esta seção segue de perto Cushing e Ackert (1994).

Isto é, a volatilidade das taxas de curto prazo é maior do que a das taxas de longo prazo. Em segundo lugar, vem:

$$Var\left(R_t^{*n}\right) \geq Var\left(R_t^n\right) \geq Var\left(R_t^n\right) \qquad \text{(A.6)}$$

Isto é, a variância populacional da taxa de longo prazo é menos volátil que a taxa de juros de longo prazo com visão perfeita e mais volátil do que a taxa de longo prazo com informação limitada. A lógica desse resultado é que a variância de uma média condicional é menor do que a da própria distribuição para os dados individuais.

Com base neste teste, Singleton (1980), tendo encontrado variância amostral para as taxas de longo prazo atuais maior do que aquela para as taxas de longo prazo com perfeita visão, concluiu que as primeiras eram excessivamente voláteis.

Ainda supondo que as taxas de curto prazo sejam estacionárias, Shiller (1979) propõe um teste alternativo para o excesso de volatilidade, mas com base no retorno obtido por reter o ativo por um período. Mais precisamente, com base em:

$$\tilde{H}_t^n = \frac{\left(R_t^n - \alpha_{n-1} R_{t+1}^{n-1}\right)}{\left(1-\alpha_{n-1}\right)} \qquad \text{(A.7)}$$

onde:

$$\alpha_n = \alpha \frac{\left(1-\alpha^n\right)}{\left(1-\alpha^{n+1}\right)} \qquad \text{(A.8)}$$

Shiller deriva um limite superior para a variância de H_t , mostrando que a variância amostral para o retorno por um período violou tal limite, indicando, pois, excesso de volatilidade.

O problema com os testes de Singleton e Shiller que acabamos de mostrar é que ambos dependem da estacionaridade da taxa de juros de curto prazo , e quando este não for o caso (isto é, a série é não-estacionária) o teste tende a rejeitar de maneira espúria a hipótese expectacional, favorecendo então a conclusão pelo excesso de volatilidade do retorno.

De fato, Shiller (1979) propôs também um teste de volatilidade que não exige a estacionaridade da taxa de juros de curto prazo. Mais precisamente, a variância do excesso de retorno por reter o ativo por um período é limitada pela relação:[54]

$$Var\left(\tilde{H}_t^n - r_t\right) \leq b^2 Var\left(\Delta r_t\right) \qquad \text{(A.9)}$$

[54] No estudo de Shiller a variância amostral do retorno não violou esse limite teórico.

onde:

$$b = \frac{\alpha_n}{\left[\left(1-\alpha_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\alpha_n\right)\right]} \qquad \text{(A.10)}$$

Este resultado é de interesse por ter relação com as chamadas inovações no retorno de longo prazo de um título, que é um outro conceito usado para medir a variabilidade do retorno de um ativo. A vantagem do uso dessas inovações é que elas existem mesmo quando as variâncias incondicionais, usadas acima, não existem. Assim, sejam as inovações na taxa de juros de longo prazo definidas como:

$$R_t^n - E\left(R_t^n | \phi_{t-1}\right) = \frac{(1-\alpha)}{\left(1-\alpha^n\right)} \sum_{h=0}^{n-1} \alpha^h [E\left(r_{t+h} | \phi_t\right) - E\left(r_{t+h} | \phi_{t-1}\right)] \qquad \text{(A.11)}$$

Denote as inovações acima de e_t , as quais podem ser expressas como:

$$e_t = R_t^n - \alpha_n^{-1} {}_1R_{t+1}^{n-1} + \left(1-\alpha_n\right)\alpha_n^{-1} r_{t-1} \qquad \text{(A.12)}$$

Usando-se agora a equação (A.7), obtém-se:

$$\widetilde{H}_t^{n+1} - r_t = -\alpha_n\left(1-\alpha_n\right)^{-1} e_{t+1} \qquad \text{(A.13)}$$

mostrando, pois, que o excesso de retorno proposto por Shiller é negativamente proporcional às inovações no tempo t+1 do retorno de longo prazo. De modo que qualquer restrição à volatilidade do excesso de retorno traduz-se diretamente em restrição à variância das inovações na taxa de longo prazo.

Cabe ressaltar que, caso seja não-estacionária a série da taxa de juros de curto prazo [mais precisamente, I(1)], então Cushing e Ackert (1994) demonstram que a variância nas inovações das taxas de longo prazo é uma média ponderada da variância dos componentes do conjunto de informações que explicam as variações nas taxas de juros de curto prazo. No caso das inovações para uma perpetuidade, essa ponderação seria dada pelo quadrado de uma soma geométrica (com pesos declinantes) da média móvel dos coeficientes do processo gerador das taxas de juros de curto prazo. Já no caso de um título com desconto, a ponderação envolve o quadrado de uma soma aritmética decrescente, ao invés da soma geométrica do caso de uma perpetuidade.

A implicação desses resultados é que não há garantia de que a variância nas taxas de curto prazo venham a exceder as de longo prazo. Aliás, ressalte-se que Turnovsky (1989) já havia constatado, neste particular, que, caso a taxa de juros de curto prazo tenha uma raiz unitária, então a variância das inovações das taxas de juros de longo prazo poderia exceder aquela das taxas de curto prazo. Cushing e Ackert (1994) mostram, todavia, que a condição de raiz unitária não é necessária para obter tal resultado. Basta que as inovações nas taxas de curto prazo tenham um forte efeito nas taxas esperadas para o futuro.

West (1988) derivou fórmulas exatas que relacionam a variância das inovações no valor presente do pagamento de dividendos às propriedades univariadas da série do pagamento de dividendos, metodologia essa que aplica-se igualmente para a relação entre a variância nas inovações do retorno de uma perpetuidade e o comportamento das taxas de juros de curto prazo. Assim, Cushing e Ackert (1994) adaptaram essa metodologia para um título com vencimento finito, como segue. Rearrumada a equação (A.12), obtém-se:

$$R_t^n = \alpha_n R_{t+1}^n + (1-\alpha_n) r_t - \alpha_n e_{t+1} - \left[R_t^{n+1} - R_t^n\right] \qquad \text{(A.14)}$$

Quando n é grande, o termo em colchete tem valor insignificante. Fazendo neste caso, pois, igual a zero, vem:

$$R_t^n \approx (1-\alpha_n)\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_n^j r_{t+j} - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_n^j e_{t+j} \qquad \text{(A.15)}$$

Da mesma maneira, supondo que o agente use informação ilimitada contendo apenas as taxas de juros de curto prazo corrente e passadas, vem:

$$\hat{R}_t^n \approx (1-\alpha_n)\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_n^j r_{t+j} - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_n^j f_{t+j} \qquad \text{(A.16)}$$

onde:

$$f_t = \hat{R}_t^n - \hat{E}\left(R_t^n \mid r_{t-1}, r_{t-2} \cdots\right) \qquad \text{(A.17)}$$

é a inovação contendo informação das taxas de juros de curto prazo passadas. As duas equações que antecedem esta última, subtraídas uma da outra, produzem:

$$R_t^n - \hat{R}_t^n \approx \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_n^j f_{t+j} - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_n^j e_{t+j} \qquad \text{(A.18)}$$

que, após aplicar variância, vem:

$$\sigma_e^2 \approx \sigma_f^2 - \sigma_e^2 \qquad \text{(A.19)}$$

onde:

$$\sigma_c^2 = \left[\frac{\left(1-\alpha_n^2\right)}{\alpha_n^2} \right] Var\left(R_t^n - \hat{R}_t^n\right) \qquad \text{(A.20)}$$

Assim, a variância das inovações da taxa de longo prazo é igual à variância das inovações dessa mesma taxa usando as informações das taxas de juros de curto prazo, corrente e passadas, para prever as taxas futuras, menos um fator de correção para levar em conta que os agentes têm agora mais informações.

Com base na equação (A.19), Cushing e Eckert (1994) estabelecem uma restrição de desigualdade semelhante, embora com a direção invertida, àquela derivada por Singleton [ver a equação (A.6)]; mais precisamente, tem-se:

$$Var\left[R_t^* - E\left(R_t^* | \phi_2\right)\right] \leq Var\left[R_t - E\left(R_t | \phi_{t-1}\right)\right] \leq Var\left[\hat{R}_t - E\left(\hat{R}_t | r_{t-1}, \ldots\right)\right] \qquad \text{(A.21)}$$

A conclusão é que, quando as taxas de curto prazo são modeladas como um processo estacionário, as inovações nas taxas de longo prazo parecem significativamente voláteis. Quando se impõe, porém, raiz unitária no processo que modela as taxas de juros de curto prazo, tais inovações tornam-se pouco onduladas (**smooth**). Desta forma, se as taxas de longo são ou não excessivamente voláteis, permanece uma questão em aberto.

BIBLIOGRAFIA

BEGG, D. K. H. **The rational expectations revolution in macroeconomics theories & evidence.** 1982

BERNANKE, B. S. On the predective power of interest rates and interest rate spreads. **New England Economic Review**, Federal Reserve Bank of Boston, p. 51-68, Nov./Dec. 1990.

________. Nonmonetary aspects of the financial crisis in the propagation of the great depression. **The American Economic Review**, v. 73, p. 257-276, June 1983.

BERNANKE, B. S., BLINDER, A. S. **The federal funds rate and the channels of monetary transmission**. Princeton University, Sep. 1989 (Unpublished Paper).

CAMPBELL, J. Y. Some lessons from the yield curve. **Journal of Economic Perspectives**, v. 9, n. 3, p. 129-152, Summer 1995.

——————. Does saving anticipate declining labor income? An alternative test of the permanent income hypothesis. **Econometrica**, v.55, n. 6, Nov. 1987.

——————. A defense of traditional hypotheses about the term structure of interest rates. **The Journal of Finance**, v.41, n. 1, p. 183-194, Mar. 1986.

CAMPBELL, J. Y., SHILLER, R. J. Cointegration and tests of present value models. **Journal of Political Economy**, v. 95, n. 5, p. 1.062-1.088, Oct. 1987.

CHANCE, D. M. **An introduction to options and futures**. Harcourt Brace Javanovich College Publishers, 1992

COOK, T. Q. Determinants of the spread between treasury Bill rates and private sector money market rates. **Journal of Economics and Business**, p. 177-187, Spring/Summer 1981.

COX, J. C. **et alii**. **A re-examination of traditional hypotheses about the term structure of interest rates**, v. 36, n. 4, p.769-799, Sep. 1981.

CUSHING, M. J., ACKERT, L. F. Interest rate innovations and the volatility of long-term bond yields. **Journal of Money, Credit and Banking**, v. 26, n. 2, p. 171-344, May 1994.

ENGSTED, T. Does the long-term interest rate predict future inflation? A multi-country analysis. **The Review of Economics and Statistics**, 1992.

ESTRELLA, A., HARDOUVELIS, G. A. **The term structure as a predictor of real economic activity**. Federal Reserve Bank of New York, May 1989 (Research Paper, 8.097)

FRIEDMAN, B. A., KUTTNER, K. N. **Money, income and prices after the 1980s**. Feb. 1989 (NBER Working Paper, 2.852).

HICKS, J. R. **Value and capital: an inquiry into some fundamental principles of economic theory**. Oxford: Clarendon Press, 1939.

HULL, J. C. **Options, futures, and other derivative securities**. Prentice Hall, 1993.

LAURENT, R. D. An interest-based indicator of monetary policy. **Economic Perspectives**, p. 3-14, Jan./Feb., 1988.

——————. Testing the spread. **Economic Perspectives**, p. 22-34, July/Aug. 1989.

LITTERMAN, R. B., WEISS, L. Money, real interest rates, and output: a reinterpretation of postwar U.S. data. **Econometrica**, v. 53, p. 129-156, Jan. 1985.

MANKIW, G. The term structure of interest rates revisited. **Brookings Papers on Economic Activity**, n. 1, p. 61-110, 1986.

MANKIW, G., MIRON, J. A. The changing behavior of the term structure of interest rates. **The Quarterly Journal of Economics**, v. CI, p. 211-228, Issue 2, May 1986.

MCCALLUM, B. A reconsideration of sims'evidence concerning monetarism. **Economics Letters**, v. 13, p. 161-171, 1983.

MILLS, T. C. **The econometric modelling of financial time series**. Cambridge University Press, 1993.

——————. The term structure of UK interest rates: tests of the expectations hypothesis. **Applied Economics**, v. 23, p. 599-606, 1991.

RUDEBUSCH, G. D. Federal reserve interest rate targeting, rational expectations, and the term structure. **Journal of Monetary Economics**, v. 35, n. 2, p. 245-274, April 1995.

SHEA, G. S. Qualms about the linearized expectations hypothesis and variance-bounds studies of the interest rate term structure. In: GRUBER, J. (ed.). **Econometric decision models: new modeling and modeling and applications.** Berlim: Springer-Verlag, 1991.

SHILLER, R. J. The volaty of long term interest rates and expectations models of the term structure. **Journal of Political Economy**, v. 87, n. 4, 1979.

——————. The term structure of interest rates. In: FRIEDMAN, B., HAHN, F. (eds.). Amsterdam: North Holland, **Handbook of Monetary Economics**, v. 1, p. 629-716, 1990.

SHILLER, R. J., SIEGEL, J. J. The Gibson paradox and historical movements in real interest rates. **Journal of Political Economy**, v. 85, n. 5, Oct. 1977.

SHILLER, R. J., CAMPBELL, J. Y., SCHOENHOLTZ, K. L. Forward rates and future policy: interpreting the term structure of interest rates. **Brookings Papers on Economic Activity**, n. 1, p. 173-224, 1983.

SIMS, C. A. Monetary, income, and causality. **The American Economic Review**, v. 62, p. 540-552, Sep. 1972.

______. Comparison of interwar and postwar cycles: monetarism reconsidered. **The American Economic Review**, v. 70, p. 250-257, May 1980.

SINGLETON, K. J. Expectations models of the term structure and implied variance bounds. **Journal of Political Economy**, v. 88, p. 1.159-1.176, Dec. 1980.

STOCK, J., WATSON, M. New indexes of coincident and leading economic indicators. In: BLANCHARD, O. J., FISCHER, S. **NBER Macroeconomics Annual**. Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1989.

TURNOVSKY, S. J. The term structure of interest rates and the effects of macroeconomic policy. **Journal of Money, Credit, and Banking**, v. 21, p. 321-347, Aug. 1989.

WEST, K. D. Dividend innovations and stock price volatility. **Econometrica**, v. 56, p. 37-62, Jan. 1988.