

TEXTO PARA DISCUSSÃO Nº 763

**ESTIMAÇÃO DE UM MODELO
INTERTEMPORAL DE PREÇOS DE
ATIVOS E CONSUMO (CCAPM)
PARA O BRASIL — 1986/98***

Gabriela Bertol Domingues**

Rio de Janeiro, outubro de 2000

* A autora agradece a valiosa colaboração de Marco Antonio Bonomo, Elcyon C. Rocha Lima e Eustáquio J. Reis

** Da Diretoria de Estudos Macroeconômicos do IPEA.

MINISTÉRIO DO PLANEJAMENTO, ORÇAMENTO E GESTÃO

Martus Tavares - Ministro

Guilherme Dias - Secretário Executivo



Presidente

Roberto Borges Martins

DIRETORIA

Eustáquio José Reis

Gustavo Maia Gomes

Hubimaier Cantuária Santiago

Luís Fernando Tironi

Murilo Lôbo

Ricardo Paes de Barros

Fundação pública vinculada ao Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão, o IPEA fornece suporte técnico e institucional às ações governamentais e disponibiliza, para a sociedade, elementos necessários ao conhecimento e à solução dos problemas econômicos e sociais do país. Inúmeras políticas públicas e programas de desenvolvimento brasileiro são formulados a partir de estudos e pesquisas realizados pelas equipes de especialistas do IPEA.

Texto para Discussão tem o objetivo de divulgar resultados de estudos desenvolvidos direta ou indiretamente pelo IPEA, bem como trabalhos considerados de relevância para disseminação pelo Instituto, para informar profissionais especializados e colher sugestões.

Tiragem: 103 exemplares

DIVISÃO EDITORIAL

Supervisão Editorial: Nelson Cruz

Revisão: André Pinheiro, Elisabete de Carvalho Soares, Isabel Virginia de Alencar Pires, Lucia Duarte Moreira, Luiz Carlos Palhares e Miriam Nunes da Fonseca

Editoração: Carlos Henrique Santos Vianna, Juliana Ribeiro Eustáquio (estagiária), Rafael Luzente de Lima e Roberto das Chagas Campos

Divulgação: Libanete de Souza Rodrigues e Raul José Cordeiro Lemos

Reprodução Gráfica: Edson Soares e Cláudio de Souza

Rio de Janeiro - RJ

Av. Presidente Antonio Carlos, 51 — 14º andar - CEP 20020-010

Telefax: (21) 220-5533

E-mail: editrj@ipea.gov.br

Brasília - DF

SBS. Q. 1, Bl. J, Ed. BNDES — 10º andar - CEP 70076-900

Telefax: (61) 315-5314

E-mail: editsbs@ipea.gov.br

Home page: <http://www.ipea.gov.br>

© IPEA, 2000

É permitida a reprodução deste texto, desde que obrigatoriamente citada a fonte.

Reproduções para fins comerciais são rigorosamente proibidas.

SUMÁRIO

RESUMO

ABSTRACT

1 - INTRODUÇÃO	1
2 - ESTIMAÇÃO DO MODELO.....	5
2.1 - O Modelo.....	5
2.2 - Descrição da Metodologia	7
2.3 - Os Dados	8
2.4 - Estimação dos Parâmetros do Processo de Dotação.....	9
3 - RESULTADOS.....	10
3.1 - Modelo Univariado.....	11
3.2 - Modelo com Probabilidade de <i>Default</i>	15
4 - CONSIDERAÇÕES FINAIS	16
APÊNDICE 1	16
APÊNDICE 2	17
APÊNDICE 3	22
BIBLIOGRAFIA	25

RESUMO

O objetivo deste trabalho é testar o modelo CAPM intertemporal para o Brasil, buscando os parâmetros das funções de preferência utilidade esperada e Kreps-Porteus que melhor reproduzem o primeiro e o segundo momentos das séries de retorno da ação e do ativo sem risco a partir de um modelo de Markov *Switching* univariado do consumo agregado. Como a taxa de juros sem risco é muito alta para ser reproduzida por parâmetros de preferência razoáveis, um modelo que admite probabilidade de *default* na taxa de juros do ativo de renda fixa também é estimado.

ABSTRACT

This paper evaluates how an intertemporal equilibrium asset pricing model fares in reproducing the return moments for the Brazilian economy. A univariate Markov *Switching* model for aggregate consumption is estimated. We look for parameters of both expected utility and Kreps-Porteus preferences that best match first and second moments of asset returns. Although the equity premium is much higher in Brazil than in US, there is no equity premium puzzle. The risk-free rate puzzle is reversed in Brazil: the overnight rates are too high in Brazil to be matched by reasonable preference parameters. To try to solve this issue, a model that allows for a positive default probability in the fixed income asset is also estimated.

1 - INTRODUÇÃO

O Consumption Capital Asset Pricing Model (CCAPM) surgiu inicialmente a partir dos trabalhos de Merton (1973) e Breeden (1979) que buscavam generalizar o modelo CAPM de Sharpe (1964) e Lintner (1965) para um contexto intertemporal. Este modelo original implicitamente supunha que os investidores consumiam toda sua riqueza depois de um período, de forma que riqueza e consumo acabavam se confundindo. Já na nova formatação as decisões de consumo e alocação são desvinculadas, apesar de modeladas simultaneamente, e o indivíduo passa a poder negociar seus ativos livremente tendo em vista a maximização de sua função utilidade intertemporal. Como o fator de desconto do retorno entre dois períodos depende do nível de consumo, esse modelo CAPM intertemporal é chamado de *consumption* CAPM, ou CCAPM.

Outra vantagem dessa extensão do CAPM é poder explicar a formação da taxa de juros sem risco e do prêmio de risco, que no modelo original são considerados exógenos. O CCAPM tenta buscar essa explicação nas variáveis macroeconômicas. A intuição do modelo é que os indivíduos, ao investir sua riqueza, levam em consideração não a relação do retorno do ativo com o do mercado, mas sim seu impacto sobre a sua capacidade de consumo. Assim, em períodos de consumo reduzido, seria demandado um prêmio de risco maior para se reter riqueza na forma de ativos, o que explicaria, por exemplo, o caráter contracíclico que aparece nos preços das ações no mercado americano [Campbell e Cochrane (1995)]. O preço de um ativo seria, então, função dos planos de consumo dos indivíduos e não somente das decisões de alocação de portfólio como ocorre no modelo CAPM tradicional. Em outras palavras, o risco do investimento, termo fundamental na determinação do preço de um ativo, é fixado pela sua covariância com o nível de consumo e não com o retorno do mercado.

Mehra e Prescott (1985) foram os primeiros a testar esse modelo para o mercado acionário americano do período 1890/1979. Partindo do modelo de economia de trocas desenvolvido por Lucas (1978), de uma função utilidade aditiva e separável no tempo e modelando o fluxo de renda como um processo de Markov, eles concluíram que, para o modelo ser válido, seria necessário que os indivíduos tivessem um coeficiente relativo de aversão ao risco de 25, considerado alto demais. Esse número deriva da grande diferença (em torno de 6%) entre o retorno do ativo sem risco e o retorno da carteira de ações, que acabou sendo apelidada de *Equity Premium Puzzle* (EPP). A sugestão dos autores foi a de que o modelo sem fricções (mercados completos num equilíbrio Arrow-Debreu) fosse abandonado em favor de outros que levassem em conta imperfeições do mercado. Muitos autores, porém, continuaram realizando pesquisas na linha inicialmente desenvolvida por Mehra e Prescott, alterando as várias hipóteses do modelo inicial de forma a chegar a resultados mais satisfatórios. A caracterização da função utilidade recebeu maior atenção, porém alguns autores também buscaram formulações alternativas para o processo de dotação que, por significar risco numa economia de trocas, tem papel importante no cálculo de seu preço.

Epstein e Zin (1989) desenvolveram uma classe de funções utilidade recursiva motivados principalmente pelo fato de a função utilidade von Neumann-Morgenstern (vN-M), utilizada nos trabalhos anteriores, mostrar-se muito rígida e restritiva. Nela, o coeficiente de substituição intertemporal é igual ao inverso do coeficiente relativo de aversão ao risco, quando na verdade esses parâmetros representam duas dimensões distintas de um plano de consumo. Enquanto o primeiro está relacionado à disposição do indivíduo de substituir consumo entre períodos e existe num modelo determinista, o outro se refere à substituição de consumo entre estados da natureza num mesmo período, ou seja, é relevante num modelo estático.

Weil (1989) também partiu de uma generalização da função utilidade que separava esses dois parâmetros, mas não conseguiu chegar a resultados melhores. Em compensação, chamou a atenção para o que foi denominado na literatura *Risk Free Puzzle* (RTF): dado o alto coeficiente de aversão ao risco necessário para reproduzir o prêmio de risco das ações, a taxa de desconto intertemporal dos indivíduos tem que ser negativa para reproduzir o nível histórico da taxa de juros real dos Estados Unidos.

Os primeiros a dar maior atenção ao processo de dotação foram Cecchetti, Lam e Mark (1990) (doravante CLM). Em seu trabalho, eles utilizaram um modelo de Markov *Switching* homocedástico com dois estados e foram capazes de replicar alguns fatos estilizados do mercado americano. Porém, Bonomo e Garcia (1992) demonstraram que isso só foi possível devido à má especificação do modelo e que, feitas as correções, não é possível obter resultados tão bons quanto os alcançados por CLM. Uma solução apresentada por Bonomo e Garcia (1996) é modelar o processo de dotação como um Markov *Switching* bivariado em consumo e dividendo. A justificativa para esse procedimento seria tanto teórica quanto empírica. Em primeiro lugar, o modelo de economia de trocas de Lucas (1978), base teórica de todos esses artigos, não determina a melhor forma de se quantificar o fluxo de renda: se por meio da série de consumo, de dividendo ou de produção, já que na sua abordagem os três se confundiam. Além disso, unificar consumo e dividendo numa única série não faz muito sentido do ponto de vista empírico: mesmo que ambas apresentem heterocedasticidade, a série de dividendos é muito mais volátil, o que compromete qualquer tentativa de igualá-las.

São poucas as aplicações desse modelo para o Brasil, em parte devido à dificuldade de se obter dados. Como não existe uma série de consumo agregado, é necessário criar *proxies*, o que acaba sempre comprometendo a comparação de resultados. Sampaio (1999) aplica o modelo original de Mehra e Prescott (1985) utilizando uma série de consumo idêntica à deste trabalho e não encontra para o Brasil nenhum dos dois *puzzles* que apareceram nos dados americanos. Sampaio aponta, porém, para um outro *puzzle* que envolve o fato de a taxa de desconto intertemporal, β , ser muito baixa. Segundo ele, isso talvez possa ser explicado pelo fato de o modelo tratar os títulos públicos brasileiros como ativos sem risco, o que pode não ser verdade, dada a grande incerteza macroeconômica do período 1980/98.

Piqueira (1999) utiliza o modelo CCAPM para fazer inferências sobre o comportamento dos agentes ante o risco e a substituição intertemporal, estimando-o como um modelo GMM. Para isso, ela se utiliza de três classes de função utilidade — utilidade esperada, hábito externo e Kreps-Porteus —, concluindo que este terceiro modelo não acomoda bem os dados brasileiros. De forma geral, ela encontra, ao contrário de Sampaio, β alto, sempre bem próximo de 1, mas, como ele, não acha evidência de EPP.

Este trabalho partirá do modelo mais simples utilizado por Sampaio (1999). Para tentar explicar os *puzzles* que surgiram da sua análise serão estimados, além desse modelo mais simples, outros dois: um com utilidade recursiva do tipo Kreps-Porteus e outro com probabilidade de *default* nos títulos do governo. O objetivo é tentar reproduzir os retornos dos ativos financeiros verificando como os parâmetros comportamentais reagem a mudanças nas especificações do modelo, analisando até onde modelos mais complexos trazem ganhos em relação aos mais simples. Como há diferenças entre este e outros trabalhos já realizados na construção da série de consumo, no período considerado e na forma de estimação, estimou-se também o modelo mais simples (utilidade esperada, dotação univariada) mesmo que isso já tenha sido feito. O objetivo foi diferenciar os efeitos que podem ser atribuídos a um problema particular da série e período utilizados daqueles que realmente são característica do modelo.

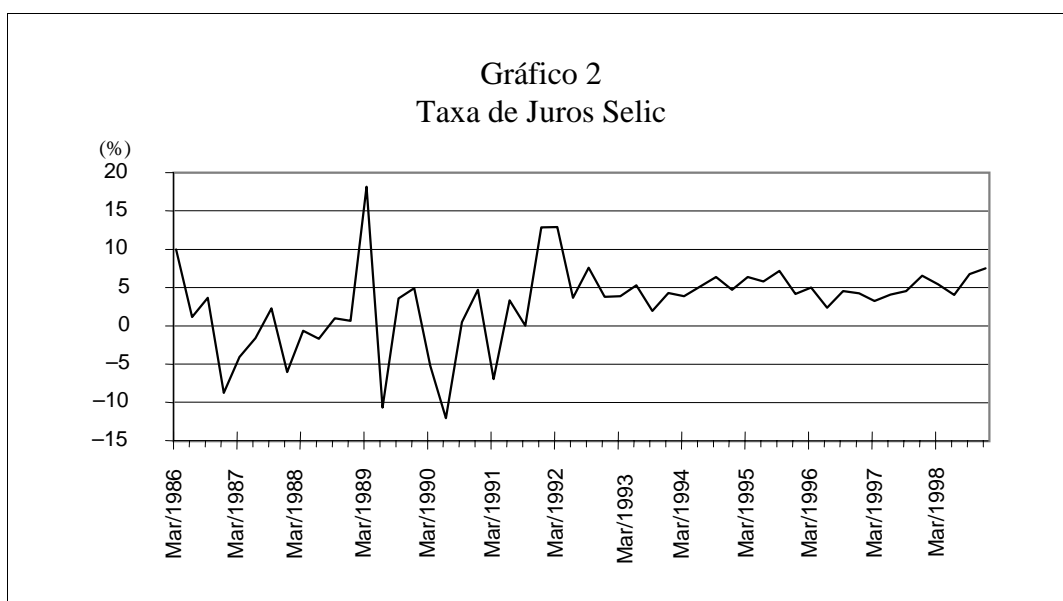
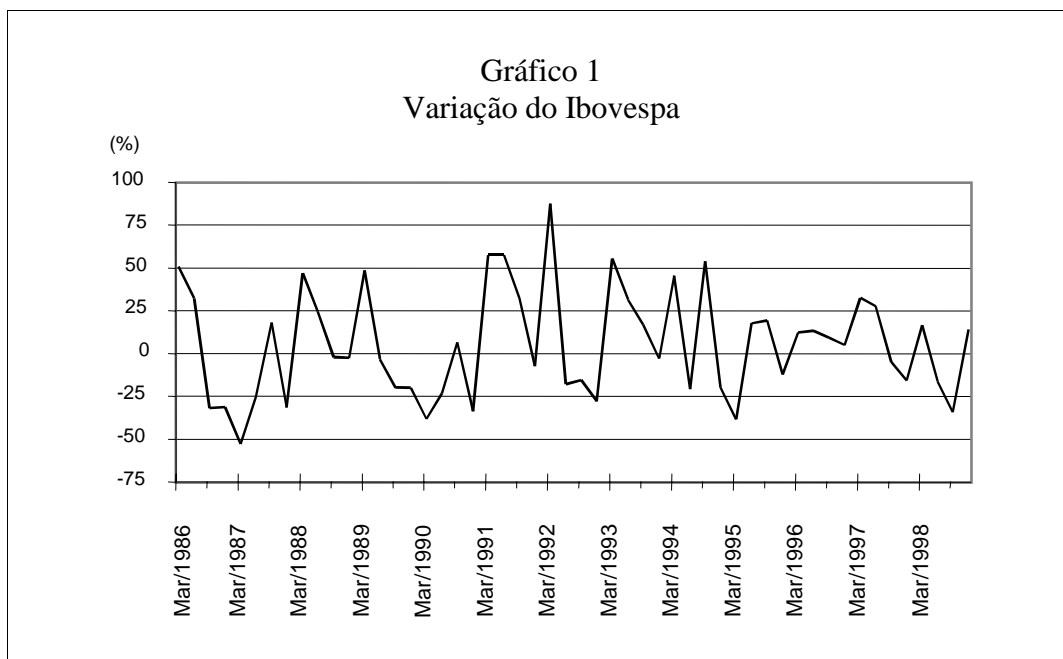
A Tabela 1 ilustra, para o período 1986/98, os fatos empíricos que os modelos aqui utilizados tentarão reproduzir. Quando necessário, os dados foram deflacionados pelo INPC. Os Gráficos 1 e 2 mostram a evolução da série de retornos do Ibovespa e da taxa de juros Selic.

Tabela 1

Dados Trimestrais Deflacionados pelo INPC

	Média Trimestral (%)	Desvio-Padrão (Pontos Percentuais)
Taxa de Juros (R^f)	3,32	6,28
Retorno (R^a)	5,57	31,12
Excesso de Retorno (R^E)	2,247	30,69
Correlação (R^f, R^a)	0,2136	
Correlação (R^f, R^E)	0,0168	

A escolha do INPC em detrimento dos outros índices e, particularmente do IGPDI, deu-se basicamente pelo fato de este ser um índice ao consumidor mais adequado que qualquer outro para esse tipo de análise. Além disso, comparando os números acima com os obtidos quando se utiliza o IGPDI (Apêndice 1), verifica-se que a diferença é muito pequena para justificar a utilização dos dois índices a título de comparação.



Este texto está organizado da seguinte forma: na Subseção 2.2 encontra-se a descrição da metodologia empregada; na Subseção 2.3, uma descrição dos dados utilizados; e na Subseção 2.4 o resultado da estimação do processo de dotação. A Seção 3 expõe os momentos teóricos implicados pelo modelo; e na Seção 4 estão as considerações finais. A descrição completa do modelo e a derivação das equações empregadas se encontram nos apêndices.

2 - ESTIMAÇÃO DO MODELO

2.1 - O Modelo

O modelo parte de um agente representativo que possui uma função utilidade recursiva como definida por Epstein e Zin (1989) e que a maximiza intertemporalmente. Há também uma dotação inicial (Y_0) que pode tanto ser consumida quanto investida em ativos negociados num mercado competitivo. Sua função utilidade é definida via:

$$U_t = W(C_t, \mu_t) \quad (1)$$

onde W é uma função agregadora que combina consumo corrente C_t com $\mu_t = \mu(U_{t+1}|I_t)$, sendo μ_t o equivalente de certeza da utilidade futura, U_{t+1} , dada a informação disponível aos agentes até o instante t . Como função agregadora, Epstein e Zin (1989) propõem a função CES:

$$U_t = (C_t^\rho + \beta \mu_t^\rho)^{1/\rho} \quad (2)$$

A utilização da função utilidade recursiva é crucial, pois permite a separação do coeficiente relativo de aversão ao risco do parâmetro de substituição intertemporal. Enquanto ρ responde por este último, com elasticidade de substituição dada por $\sigma = (1 - \rho)^{-1}$, a aversão ao risco aparece refletida no equivalente de certeza, pois são as preferências do agente representativo em relação ao risco que determinam a forma como ele é calculado. A função que determina o equivalente de certeza é da forma:

$$\frac{\mu_{KP}^\alpha}{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^\alpha}{\alpha} dF(x) \quad (3)$$

onde α é o parâmetro de aversão ao risco.

Substituindo a função do equivalente de certeza (3) na função agregadora (2), obtém-se um modelo que generaliza preferências do tipo utilidade esperada (quando $\alpha = \rho$) e outro de preferências do tipo Kreps-Porteus ($\alpha \neq \rho$). Neste último caso, o parâmetro de aversão ao risco é diferente do de substituição intertemporal, mas as preferências em relação a jogos atemporais são do tipo utilidade esperada. Abaixo estão as condições de primeira ordem para a existência de um máximo interior das decisões de consumo e alocação de recursos derivadas por Epstein e Zin (1989, 1991a e 1991b):

$$E_t \left[\beta^{\alpha/\rho} \left(\frac{\tilde{C}_{t+1}}{C_t} \right)^{\frac{\alpha(\rho-1)}{\rho}} \tilde{M}_{t+1}^{(\alpha/\rho-1)} \tilde{R}_{i,t+1} \right] = 1 \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

Onde:

β é a taxa de desconto;

\tilde{M}_{t+1} é o retorno do portfólio de mercado cujo *payoff* é C_t em t ; e

$\tilde{R}_{i,t+1}$ é o retorno bruto real de qualquer ativo i .

$\tilde{R}_{i,t+1}$ pode ser substituído pelo retorno de qualquer ativo: das ações, do ativo sem risco e também do portfólio de mercado.

A equação (4) dá a relação entre o retorno dos ativos e o consumo, sem distinguir entre variáveis endógenas e exógenas. Num modelo completo de equilíbrio geral, tudo seria endógeno. Em modelos em que a ênfase está na renda do indivíduo, o retorno dos ativos seria exógeno e o consumo endógeno. Como, neste trabalho, o objetivo é testar implicações sobre o retorno dos ativos, o processo do consumo é tomado como exógeno. Contudo que a série de consumo seja modelada estatisticamente de forma adequada, tomar o processo estocástico do consumo como exógeno simplifica substancialmente o problema sem que constitua um erro metodológico. Este tipo de abordagem é devido a Lucas (1978).

A equação (4) corresponde à equação de Euler do modelo com função utilidade Krep-Porteus. Para se chegar aos modelos com utilidade esperada basta considerar $\rho = \alpha$.

Os momentos dos retornos dos ativos são calculados a partir das equações de Euler. Antes, porém, é necessário definir o processo que segue a renda. Admite-se que a economia pode encontrar-se em K estados não-observáveis onde o comportamento das séries é diferente. A cada período t há uma probabilidade não-condicional π_i de a variável encontrar-se no estado $S_t = i$. Além disso, S_t (que identifica os estados) segue um processo de Markov e evolui conforme a matriz de transição, \wp , abaixo:

$$\wp = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0(k-1)} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{k-1} & P_{(k-1)1} & \cdots & P_{(k-1)(k-1)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Define-se, também, que a série de consumo tem distribuição log-normal cuja média e variância se modificam conforme o estado em que a economia se encontra. Este processo pode, dessa forma, ser escrito como:

$$c_t - c_{t-1} = \alpha^c_0 + \alpha^c_1 S_{1,t} + \dots + \alpha^c_{k-1} S_{k-1,t} + (\omega^c_0 + \omega^c_1 S_{1,t} + \dots + \omega^c_{k-1} S_{k-1,t}) \varepsilon^c_t \quad (6)$$

onde $S_{i,t}$ é função do estado da economia, S_t , e assume valor 1 quando $S_t = i$ e 0, caso contrário; c_t é $\ln C_t$ e ε^c_t é erro $N(0,1)$. Assim, no estado i , a média e o desvio-

padrão da taxa de crescimento do consumo serão dados, respectivamente, por $(\alpha^c_0 + \alpha^c_i, \bar{\omega}^c_0 + \bar{\omega}^c_i)$.

Assim, dados os processos definidos acima, a relação entre o preço do portfólio de mercado e o consumo agregado, $(\lambda(S_t) = P_t^f/C_t)$ e o preço do ativo sem risco, os retornos são calculados a partir do valor esperado das equações abaixo:¹

$$M_{t+1} = R_{t+1}^i \left(\frac{\lambda(S_{t+1}) + 1}{\lambda(S_t)} \right) \frac{C_{t+1}}{C_t} \quad (7)$$

$$R_{t+1}^f = \frac{1}{P_t^f} \quad (8)$$

No caso de se considerar que a probabilidade de *default* nos títulos é positiva, a equação (8) assume a forma:

$$R_{t+1}^f = \theta \frac{1}{P_t^f} \quad (9)$$

onde θ é a probabilidade de não haver *default*.

2.2 - Descrição da Metodologia

- a) Estimar os coeficientes da série de consumo;
- b) Definir forma da função utilidade: utilidade esperada ou Kreps-Porteus;
- c) Substituir valores dos parâmetros que resultaram de (1) na equação de Euler correspondente ao tipo de função utilidade escolhida;
- d) Determinar valores para os parâmetros de preferência, α , β e ρ ;
- e) Calcular os valores de $\lambda(S_t)$ e $P^f(S_t)$ que satisfazem às equações de Euler (2.4); e
- f) Com os valores obtidos em a), b) e c) calcular o valor esperado das equações (7) e (8) para encontrar a média e a variância dos retornos determinadas pelo modelo.

Como o objetivo é encontrar os valores de α , β e ρ que replicam os momentos dos retornos, é necessário agilizar o processo de busca que reúne os itens d) a f). Para tanto, foi construída uma rotina no programa MatLab congregando esses itens. Nela, os valores dos parâmetros de preferência são atualizados automaticamente até o ponto em que os momentos implicados pelo modelo são iguais aos amostrais. Como nem sempre é possível replicar simultaneamente todas as variáveis em questão, torna-se necessário priorizar algumas por vez para que a rotina encontre solução.

¹ A derivação das equações e o método para o cálculo de $\lambda(S_t)$ e $P^f(S_t)$ encontram-se nos apêndices.

Quando se assume o modelo com probabilidade de *default*, muda-se somente a equação de Euler da taxa de juros e utiliza-se (9) em vez de (8) para calcular os momentos da taxa de juros derivados do modelo.

2.3 - Os Dados

Como não há série trimestral de consumo agregado conhecida para o Brasil, será utilizada uma aproximação que agrega dados de produção de bens de consumo não-duráveis com PIB de serviços e dados de importação e exportação, seguindo os trabalhos de Alencar (1999) e de Sampaio (1999).²

Para formar a série de consumo *per capita*, dividiu-se a série de consumo agregado pela população total. Como esse dado é fornecido anualmente e só existe até 1996, foram feitos dois ajustes. Primeiro, considerou-se a taxa de crescimento da população residente em 1997 e 1998 como 1,28% e 1,24%, respectivamente. Segundo, interpolou-se geometricamente o número de habitantes para cada trimestre. A Tabela 2 resume as estatísticas da taxa de crescimento do consumo *per capita* sendo esta definida como $\ln C_t - \ln C_{t-1}$.

Tabela 2

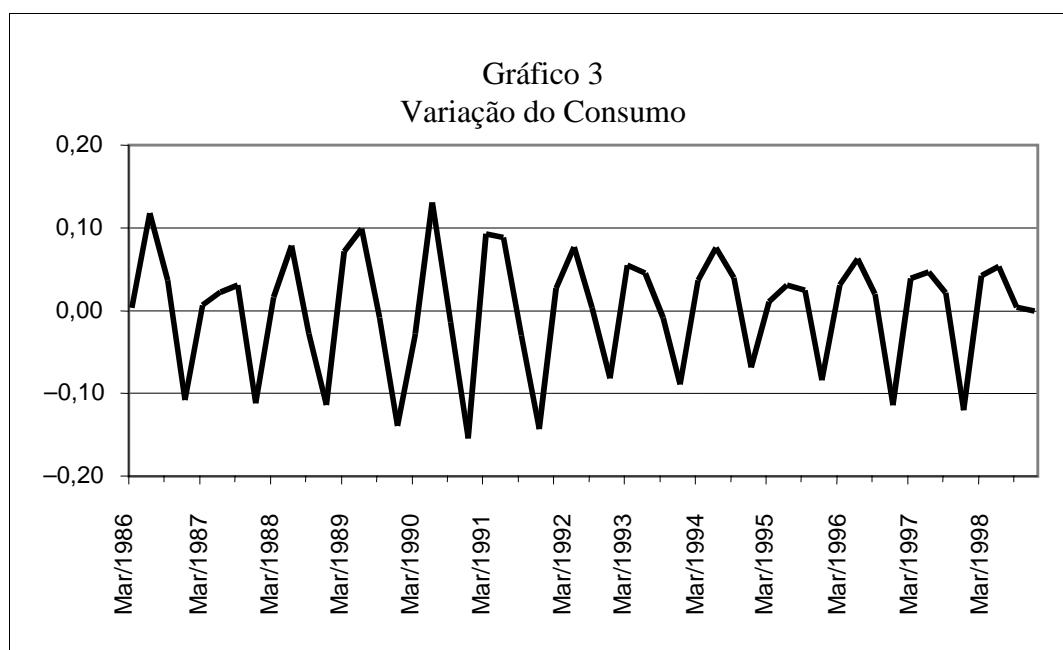
Estatísticas da Série de Crescimento do Consumo

Média	Desvio-Padrão	Autocorrelação	Assimetria	Curtose
0,002	0,068	-0,075	-0,562	2,429

Os dados tratados têm periodicidade trimestral e cobrem o período 1986.1/1998.4. Não é um intervalo tão grande quanto o desejado, mas não há série de pagamentos de proventos disponível para o período anterior a este. Aumentar a periodicidade para obter mais dados não é solução, pois somente estaria sendo adicionado mais do mesmo, o que não traria ganhos para a estimação. Para estimar a taxa de variação entre trimestres foi calculada a média trimestral dos preços (já deflacionados) para atenuar possíveis distorções acarretadas pelo uso de um ponto isolado da série.

² Os pesos para agregação basearam-se na estrutura de valor adicionado das contas nacionais consolidadas. Como se utiliza produção em vez de consumo, foi feito ajuste onde considera-se que a produção do mês t é consumida em $t+1$. A observação do padrão de produção corrobora essa tese [Sampaio (1999)]. As séries utilizadas foram: produção física mensal de bens de consumo não-duráveis e semiduráveis da indústria nacional [IBGE (1986/1996)]; índice do PIB trimestral da categoria serviços [IBGE (1986.1/1998.4)]; exportação e importação de bens de consumo não-duráveis [Funcex (1986/1998)]; população residente no Brasil [IBGE (1986/1998)]. Já para os dados financeiros foram usados: índice nominal diário do Ibovespa [Econômica (1986/1998)]; taxa Selic nominal, 30 dias efetiva [Econômica (1986/1998)]; taxa de inflação mensal: INPC [IBGE (1986/1998)].

Para o deflacionamento da série do Ibovespa, foi calculada a média mensal do índice, deflacionada pelo índice de preços do mês. Os dados foram trazidos para a moeda de dezembro de 1998 (base dos índices 12/98=100). Em relação ao deflacionamento da taxa Selic, calculou-se seu índice de preços mensal e, em seguida, este foi deflacionado pelo índice do INPC centrado. A taxa trimestral foi calculada da forma explicada antes.



2.4 - Estimação dos Parâmetros do Processo de Dotação

Os parâmetros da série de consumo foram estimados por máxima verossimilhança seguindo algoritmo desenvolvido por Hamilton (1989). A seguir encontra-se a descrição dos resultados.

Tabela 3

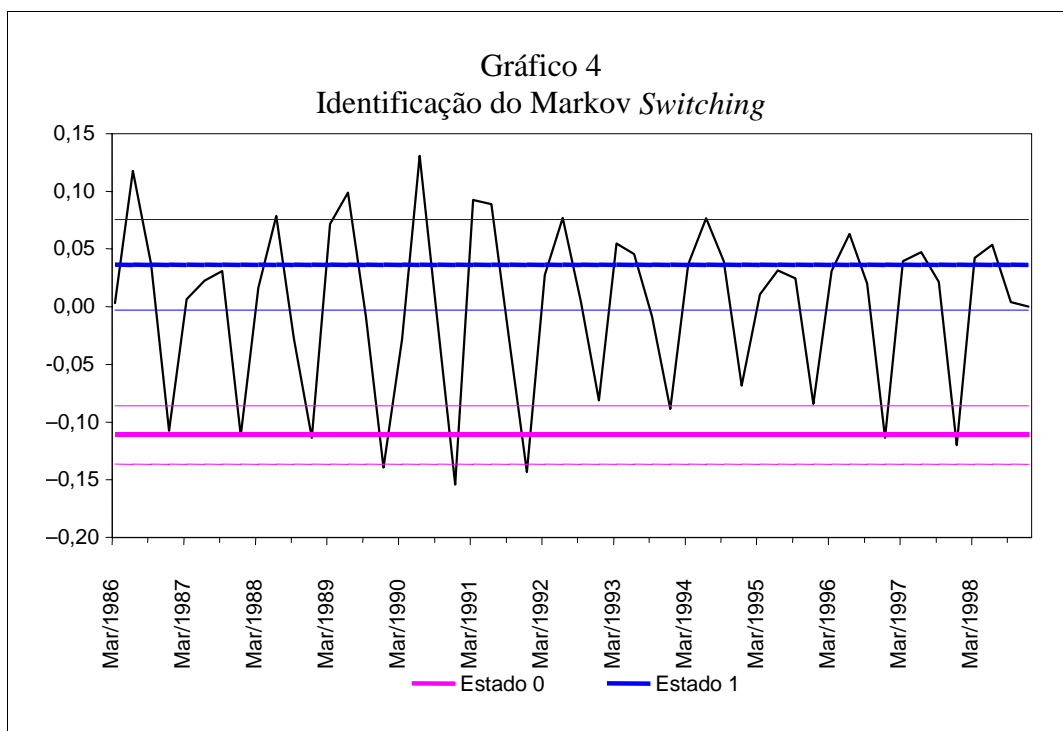
Coefficientes do Modelo de Markov Switching

	α_0^c	$\alpha_0^c + \alpha_1^c$	ϖ_0^c	$\varpi_0^c + \varpi_1^c$	p_{00}	p_{11}
Valores	-1,1111	.0362	.0252	.0393	0	.6939
Estatística <i>t</i>	-14,91	5,66 ^a	4,82	8,37 ^a	0	2,80

^a Para os casos em que há uma soma de coeficientes, a estatística se refere à parcela que está sendo somada à anterior. No caso do modelo bivariado (Tabela 5), as estatísticas *t* para cada coeficiente estão entre parênteses.

Repara-se que o estado em que há queda no consumo ($\alpha_0^c < 0$), estado 0, corresponde exatamente ao primeiro trimestre do ano, o que é natural dadas as compras de Natal efetuadas no último trimestre do ano. A impossibilidade de permanecer no mesmo trimestre por dois períodos consecutivos explica o fato de

p_{00} ser igual a zero (ver Tabela 3). O Gráfico 4 mostra a probabilidade suavizada de se estar no estado 0 para cada observação.



3 - RESULTADOS

A partir dos parâmetros estimados nas seções anteriores, as equações que respondem pelos momentos dos ativos podem ser resolvidas para os diversos tipos de função utilidade e para o caso de haver probabilidade de *default* ou não. Tentou-se replicar os retornos, os seus desvios-padrão e a correlação entre R^e e R^f . A correlação entre R^f e o prêmio e o desvio-padrão do prêmio de risco foram calculados a partir dos outros resultados.

Na Subseção 3.1, será analisado basicamente o papel dos parâmetros de preferência, enquanto na Subseção 3.2 serão apresentados os resultados do modelo com probabilidade de *default*.

Tabela 4

Momentos Teóricos

(Em %)

		Kreps-Porteus ($d=0$)			Utilidade Esperada ($a=r, d=0$)			Amostrai
Aversão ao Risco								
Relativa	$1-\alpha$	3,685	3,685	3,226	3,226	2,695	2,695	2,696
Taxa de Desconto	β	0,9494	0,9507	0,9507	0,9507	0,9507	0,9519	0,9519
Elasticidade de Substituição	$1/(1-\rho)$	0,388	0,388	0,388	0,310	0,371	0,371	0,371
Média R^e		5,57	5,43	5,55	5,57	5,71	5,57	5,57
Desvio-Padrão R^e		9,72	9,71	9,68	11,16	9,91	9,9	9,9
Média R_f		3,32	3,19	3,55	3,32	3,95	3,82	3,82
Desvio-Padrão R_f		6,28	6,27	6,15	7,71	6,28	6,27	6,28
Média Prêmio de Risco		2,25	2,24	2,00	2,25	1,76	1,75	1,75
Desvio-Padrão Prêmio de Risco		8,13	8,12	8,10	8,91	8,25	8,08	9,08
Correlação(R^e, R_f)		0,5552	0,5551	0,5535	0,6083	0,5627	0,5626	0,5627
Correlação(R_f , Prêmio de Risco)		-0,1086	-0,1083	-0,0978	-0,1035	-0,0853	-0,0867	-0,0781
								0,2136
								0,0168

3.1 - Modelo Univariado

3.1.1 - Utilidade esperada

A Tabela 5 mostra os melhores resultados obtidos para cada estrutura de preferência. Repara-se que, quando $\alpha = \rho$ e $\delta = 0$, já é possível reproduzir os retornos e, conseqüentemente, o prêmio de risco sem que surjam os *puzzles*

Tabela 5

Probabilidade de Default de 1%

		Kreps-Porteus ($d=0$)		Utilidade Esperada ($a=r$)		Amostrai
Aversão ao Risco Relativa	$1-\alpha$	3,685	4,320	3,226	3,545	3,545
Taxa de Desconto	β	0,9494	0,9479	0,9507	0,9507	0,9496
Elasticidade de Substituição	$1/(1-\rho)$	0,388	0,388	0,310	0,282	0,282
Probabilidade de Default	$1-\delta$	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
Média R^e		5,57	5,57	5,57	5,45	5,57
Desvio-Padrão R^e		9,72	9,78	11,16	11,94	11,95
Média R_f		3,65	3,32	3,63	3,2	3,32
Desvio-Padrão R_f		6,1	6,28	7,54	8,42	8,43
Média Prêmio de Risco		1,92	2,25	1,94	2,25	2,25
Desvio-Padrão Prêmio de Risco		8,11	8,16	8,91	8,25	8,08
Correlação(R^e, R_f)		0,5552	0,5576	0,6083	0,6312	0,6314
Correlação(R_f , Prêmio de Risco)		-0,0867	-0,1013	-0,0844	-0,1071	-0,1095
						0,2136
						0,0168

característicos da economia americana. Observa-se que $(1-\alpha) = 3.23$ encontra-se dentro dos limites racionalizáveis de Mehra e Prescott, apesar de $\beta = .951$ não: esta taxa de desconto trimestral acumulada no ano, $\beta_A = .818$, é mais baixa do que a esperada. Para essa combinação, porém, o desvio-padrão de R^e fica muito abaixo do amostral, enquanto o de R^f fica pouco acima e a correlação muito acima.

Tabela 6

Probabilidade de Default de 2,5%

		Kreps-Porteus ($d=0$)		Utilidade Esperada ($a=r$)			Amostral
Aversão ao Risco Relativa	$1-\alpha$	3,685	5,340	3,226	4,020	4,020	
Taxa de Desconto	β	0,9494	0,9455	0,9507	0,9507	0,9475	
Elasticidade de Substituição	$1/(1-\rho)$	0,388	0,386	0,310	0,249	0,249	
Probabilidade de <i>Default</i>	$1-\delta$	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	
Média R^e		5,57	5,57	5,57	5,22	5,57	5,57
Desvio-Padrão R^e		9,72	9,89	11,16	13,12	13,16	31,85
Média R_f		4,14	3,32	4,11	2,98	3,32	3,32
Desvio-Padrão R_f		5,83	6,28	7,27	9,49	9,53	6,28
Média Prêmio de Risco		1,43	2,25	1,46	2,24	2,25	2,25
Desvio-Padrão Prêmio de Risco		8,10	8,21	8,91	8,25	8,08	31,12
Correlação(R^e, R_f)		0,5552	0,5623	0,6083	0,6605	0,661	0,2136
Correlação(R_f , Prêmio de Risco)		-0,0535	-0,0876	-0,0541	-0,0999	-0,1029	0,0168

Tabela 7

Probabilidade de Default de 5%

		Kreps-Porteus ($d=0$)		Utilidade Esperada ($a=r$)			Amostral
Aversão ao Risco Relativa	$1-\alpha$	3,685	7,400	3,226	4,800	4,800	
Taxa de Desconto	β	0,9494	0,9406	0,9507	0,9507	0,9431	
Elasticidade de Substituição	$1/(1-\rho)$	0,388	0,384	0,310	0,208	0,208	
Probabilidade de <i>Default</i>	$1-\delta$	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	
Média R^e		5,57	5,57	5,57	4,74	5,57	5,57
Desvio-Padrão R^e		9,72	10,09	11,16	15,11	15,22	31,85
Média R_f		4,97	3,32	4,92	2,49	3,32	3,32
Desvio-Padrão R_f		5,37	6,28	6,82	11,3	11,39	6,28
Média Prêmio de Risco		0,6	2,25	0,65	2,25	2,25	2,25
Desvio-Padrão Prêmio de Risco		8,08	8,30	8,91	8,25	8,08	31,12
Correlação(R^e, R_f)		0,5552	0,5705	0,6083	0,699	0,7002	0,2136
Correlação(R_f , Prêmio de Risco)		0,0033	-0,0631	-0,0035	-0,0895	-0,0907	0,0168

Para replicar o desvio-padrão das ações é necessário aumentar a aversão ao risco relativa, que, nesse modelo, equivale a reduzir a elasticidade de substituição intertemporal, $1/(1-\rho)$. Quanto maior $1-\alpha$ (menor $1/(1-\rho)$), maior a preferência por trajetórias suaves para o consumo. Nesse caso, variações na taxa de

crescimento do consumo induzem os indivíduos a poupar ou a despoupar com o intuito de suavizar o consumo. O preço da ação deve, em cada estado, subir ou descer para compensar esse efeito, aumentando sua variabilidade.

Já para reproduzir o desvio-padrão da taxa de juros sem risco e a correlação entre ela e o retorno da ação é necessário diminuir a aversão ao risco, tornando impossível, nesse modelo, reproduzir os desvios de R^e e R^f simultaneamente.

A segunda e a terceira colunas da Tabela 4 do modelo com utilidade esperada ilustram a discussão acima. Na segunda, diminuiu-se a aversão ao risco de 3.23 para 2.7 para replicar o desvio de R^f . Pode-se reparar que, apesar de o prêmio de risco cair, os retornos crescem. Em relação ao retorno da taxa de juros sem risco, podem ser identificados três efeitos:

a) Taxas de juros altas quando o crescimento do consumo é alto. Quando a taxa de juros é alta, vale a pena para os investidores abrir mão do consumo hoje para ter um retorno maior no futuro, de modo que altas taxas de juros diminuem o nível de consumo no presente, mas aumentam o seu crescimento.

b) Quanto maior a aversão ao risco (modelo com utilidade esperada), maior o impacto do crescimento do consumo na taxa de juros. Maior curvatura da função utilidade (maior aversão ao risco) levaria a uma vontade maior do indivíduo de manter seu consumo suave ao longo do tempo, tornando-o menos sensível a variações nos juros. Neste caso, quanto maior a aversão ao risco, maior devem ser eles para induzir o indivíduo a uma determinada taxa de crescimento do consumo.

c) Quanto menor o valor de α , maior a demanda por poupança precaucional, derrubando a taxa de juros sem risco. Percebe-se que, nesse caso, o efeito da poupança precaucional supera os outros (daí a elevação do retorno de R^f), fato que ocorre quando a aversão ao risco do indivíduo não é muito alta.

Para reproduzir o desvio da ação seria necessário caminhar com α no sentido oposto ao anterior. Porém, procedendo dessa forma, a relação entre o preço da ação e o seu dividendo,³ $\varphi(\cdot)$, assume sinal negativo, tornando o modelo sem solução.

Em relação à taxa de desconto, β , repara-se que ela tem efeito principalmente sobre o nível dos retornos, tendo influência mínima sobre os desvios e o prêmio de risco. Quanto menor β , maior o desconto do futuro, maior a impaciência dos indivíduos e, portanto, maiores devem ser os retornos para convencê-los a adiar seus planos de consumo. Na Tabela 5 pode-se ver que, alterando muito pouco β , já se consegue reproduzir simultaneamente o desvio de R^f e o R^e .

³ Nesse caso, o consumo, já que aqui a dotação segue um processo univariado.

Em todos os casos descritos nesta subseção, β se encontra em torno de .95. Anualizando esse dado, chega-se a um desconto de cerca de 18% ($\beta \cong .82$) entre um ano e outro. Comparando com os resultados obtidos para os Estados Unidos, este número é muito alto, mas segue o resultado já encontrado por Sampaio (1999). No seu trabalho, que reproduz o modelo de Mehra e Prescott, foi necessário um $\beta = .91$ (trimestral) para reproduzir R^e e R^f . Este número é bem mais baixo do que o encontrado aqui, já que implica um desconto anual de 31%. Uma explicação pode advir da volatilidade do consumo, que no Brasil é bem mais alta que nos Estados Unidos (6,8% contra 3,6%). Quando a volatilidade é muito alta, a necessidade de poupança precaucional é maior, diminuindo o retorno dos ativos e tornando então necessário aumentar a taxa de desconto intertemporal (diminuir β) para que o retorno amostral seja alcançado. Outra explicação pode advir da grande instabilidade econômica do período analisado. Como há muita incerteza em relação ao futuro, não há garantia de que planos poderão ser cumpridos, o que estimula o consumo no momento presente e aumenta a taxa de desconto intertemporal.

3.1.2 - Kreps-Porteus

Quando a função utilidade é do tipo Kreps-Porteus, consegue-se reproduzir ambos os retornos e o desvio de R^e . Isto só foi possível graças à separação entre a aversão ao risco e a elasticidade de substituição. Como se pode reparar na Tabela 5, a partir do modelo com utilidade esperada foi necessário um aumento tanto na aversão ao risco relativa quanto na elasticidade de substituição. Isso antes seria impossível, já que essas duas dimensões estavam ligadas e eram o inverso uma da outra.

Separando-se as duas dimensões, os efeitos que antes eram creditados a variações de α agora se dividem, alguns se devendo unicamente a ρ . Por exemplo, neste modelo, variações de α já não servem para contrabalançar o efeito positivo que uma grande variação do nível de consumo entre estados exerce sobre R^f , como foi visto na subseção anterior. Aqui é ρ quem faz o serviço: se a elasticidade de substituição é baixa, é preciso um R^f maior para poder implementar uma determinada taxa de crescimento do consumo.

Para poder isolar o efeito de cada parâmetro, o caminho até a reprodução dos retornos e do desvio de R^f será quebrado, alterando-se um valor de cada vez:

a) A partir dos números obtidos para utilidade esperada, aumenta-se a elasticidade de substituição. Quando isso ocorre, vários efeitos podem ser percebidos:

- Caem os desvios-padrão dos retornos e a correlação entre eles. Como comentado anteriormente, quando a elasticidade de substituição cai, maior a preferência por trajetórias suaves de consumo, induzindo os indivíduos a poupar e despoupar para manter relativamente constante seu nível de consumo. Devido a esse movimento, os preços dos ativos se tornam mais voláteis. Nesse caso, aumentou-se a elasticidade de substituição, diminuindo a necessidade dos

indivíduos de alterar constantemente seu portfólio de investimentos e levando, conseqüentemente, a uma queda nos desvios-padrão dos ativos e também na correlação entre seus retornos.

- Cresce o retorno da taxa de juros sem risco. Com maior elasticidade, não é necessário um retorno tão alto para induzir determinada taxa de crescimento do consumo. Além do mais, a elasticidade de substituição tem efeito negativo sobre a poupança precaucional, influenciando R^f para cima.

Além disso, há uma queda no prêmio de risco que varia inversamente com a elasticidade de substituição (devido a seu efeito sobre R^f) e diretamente com a aversão ao risco.

b) Dada a queda no prêmio, é necessário levá-lo de volta ao patamar anterior. Como este depende diretamente de α , aumenta-se a aversão ao risco, o que traz também uma queda nos retornos e pouquíssima influência sobre os desvios e correlação.

c) Como os retornos estão abaixo do patamar desejado, mas o desvio de R^f e o prêmio estão praticamente corretos, basta apenas mexer em β , chegando-se ao resultado desejado.

Comparando esse resultado com o obtido com utilidade esperada, há ganhos na separação, porém ainda não é possível reproduzir o segundo momento das séries simultaneamente. Comparando os parâmetros utilizados para chegar ao melhor resultado, em ambos os casos, repara-se que eles não variam muito, mantendo-se praticamente no mesmo nível.

3.2 - Modelo com Probabilidade de Default

3.2.1 - Utilidade esperada

Ao se adicionar uma probabilidade de *default* positiva, o efeito imediato é o aumento da média da taxa de juros sem risco e a conseqüente queda do prêmio de risco. Para compensar, é necessário, então, aumentar a aversão ao risco. Como, no Brasil, o crescimento do consumo é pequeno se comparado à taxa de juros, o efeito da poupança precaucionária é predominante, levando à queda dos retornos. Desse modo, o fator de desconto, β , é ainda menor que o obtido antes. O modelo foi rodado para três valores pequenos de probabilidade de *default* que apresentam a mesma dinâmica.

3.2.2 - Kreps-Porteus

Com Kreps-Porteus os resultados são semelhantes em relação à aversão ao risco e ao fator de desconto. Em se tratando da substituição intertemporal, a elasticidade de substituição tem de cair um pouco para que o segundo momento da taxa de juros seja reproduzido. Repara-se que para uma probabilidade de substituição de

5% já é necessária uma aversão ao risco de 7,4 para que o prêmio de risco seja reproduzido, o que indica uma grande sensibilidade dos agentes à adição dessa variável.

4 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho é testar o CAPM intertemporal e mostrar como a separação dos parâmetros de aversão ao risco e elasticidade de substituição e a adição de uma pequena probabilidade de *default* nos títulos públicos podem alterar os resultados desse modelo nessa aplicação para os dados brasileiros.

Pode-se perceber que o modelo com utilidade Kreps-Porteus trouxe ganhos em relação ao com utilidade esperada. Apesar de este reproduzir o primeiro momento das séries, ele impede que se altere muito os desvios. A separação de α e ρ trouxe maior flexibilidade, permitindo que o desvio da taxa de juros sem risco fosse reproduzido simultaneamente ao primeiro momento das séries.

A adição da probabilidade de *default*, motivada pelo alta taxa de desconto intertemporal dos agentes, não trouxe resultados melhores. Uma explicação para essa alta taxa de desconto era o fato de os títulos públicos poderem embutir risco, o que elevaria o retorno demandado por eles. A adição da probabilidade de *default* aumentou a taxa de desconto e acabou por chamar, mais ainda, a atenção para o efeito da poupança precaucionária.

Dada a baixa taxa de crescimento do consumo no Brasil em relação ao retorno da taxa de juros sem risco, esse efeito (junto com o impacto da elasticidade de substituição sobre o desvio dos ativos) prevaleceu ao longo de todo trabalho, assim como já havia acontecido nos trabalhos de Sampaio (1999) e Piqueira (1999).

APÊNDICE 1

Dados Deflacionados pelo IGPDI

Utilizando o IGPDI chega-se a resultados não muito diferentes dos obtidos a partir do INPC. Para os retornos, pode se ver que, mesmo que haja alguma diferença, esta segue o mesmo padrão, ou seja, os retornos estão todos menores, praticamente na mesma proporção, e as correlações, maiores. Os desvios estão em geral menores, à exceção do retorno do Ibovespa, que mantém praticamente o mesmo valor (a diferença entre um e outro é de 0,15%).

Tabela A1

Retornos Trimestrais Deflacionados pelo IGPD

	Média (%)	Desvio-Padrão (Pontos Percentuais)
Taxa de Juros (R^f)	3,09	5,617
Retorno (R^a)	5,20	31,168
Excesso de Retorno (R^E)	2,11	29,569
Correlação (R^f, R^a)	0,3684	
Correlação (R^f, R^E)	0,1992	

APÊNDICE 2**A Formação de Preços no Modelo CCAPM**

Assim como no modelo original de Mehra e Prescott (1985), será utilizada a abordagem baseada na existência de um agente representativo. Este maximiza sua utilidade intertemporal e possui uma dotação inicial (Y_0) que tanto pode ser consumida quanto investida em ativos negociados num mercado competitivo. Nessa economia há N ativos disponíveis, indexados por j , cujos retornos entre t e $t+1$, $R_{j,t}$ estão agrupados no vetor R_t de dimensão N . Se $\omega_{j,t}$ é a fração da riqueza total investida no ativo j em t e $\sum \omega_{j,t}=1$, ω_t é o vetor de pesos, tal que:

$$Y_{t+1}=(Y_t-C_t)\omega_t^T R_t \quad t > 0 \quad (\text{A1})$$

O agente possui uma função utilidade recursiva, como definida em Epstein e Zin (1989), onde o consumo atual é combinado com o consumo futuro a partir de uma função agregadora $W(\cdot)$:

$$V(c_0, c_1, c_2, \dots) = W(c_0, V(c_1, c_2, \dots)) \quad (\text{A2})$$

Porém, como o consumo futuro é estocástico e não-determinista, a utilidade futura é substituída na equação (A2) pelo seu equivalente de certeza e combinada com c_0 de forma a calcular a utilidade corrente. A função utilidade do agente representativo assume então a forma:

$$U_t=W(C_t, \mu_t) \quad (\text{A3})$$

onde $\mu_t=\mu(\tilde{U}_{t+1}|I_t)$ é o equivalente de certeza da utilidade futura dada informação até o instante t . Como função agregadora, Epstein e Zin (1989) propõem a função CES:

$$U_t=(C_t^\rho + \beta \mu_t^\rho)^{1/\rho} \quad (\text{A4})$$

com $0 \neq \rho < 1$ e $0 < \beta < 1$.

O uso da função utilidade recursiva é crucial, pois permite a separação do coeficiente relativo de aversão ao risco do parâmetro de substituição intertemporal. Enquanto ρ responde por este último, com elasticidade de substituição dada por $\sigma = (1 - \rho)^{-1}$, a aversão ao risco aparece refletida no equivalente de certeza, pois são as preferências do agente representativo em relação ao risco que determinam a forma como ele é calculado.

Epstein e Zin (1989 e 1991b) mostram que, dependendo da forma como o equivalente de certeza é calculado, a especificação geral da função utilidade recursiva pode se dividir em várias subclasses, que incluem a utilidade esperada de vN-M e Kreps-Porteus. Quando a função utilidade é do tipo Kreps-Porteus, o equivalente de certeza é calculado via:

$$\frac{\mu_{KP}^\alpha}{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^\alpha}{\alpha} dF(x) \quad (\text{A5})$$

onde α é o parâmetro de aversão ao risco.

Substituindo a função do equivalente de certeza (A5) na função agregadora (A4), obtém-se um modelo que generaliza preferências do tipo utilidade esperada (quando $\alpha = \rho$) e outro, de preferências do tipo Kreps-Porteus ($\alpha \neq \rho$). Neste último caso, o parâmetro de aversão ao risco é diferente do de substituição intertemporal, mas as preferências em relação a jogos atemporais são do tipo utilidade esperada.

Nesse modelo há $N-1$ ativos com risco e um ativo sem risco. Epstein e Zin (1989, 1991a e 1991b) derivaram as restrições para a existência de um máximo interior das decisões de consumo e alocação de recursos, chegando ao seguinte conjunto de equações de Euler:

$$E_t \left[\beta^{\alpha/\rho} \left(\frac{\tilde{C}_{t+1}}{C_t} \right)^{\frac{\alpha(\rho-1)}{\rho}} \tilde{M}_{t+1}^{(\alpha/\rho-1)} \tilde{R}_{i,t+1} \right] = 1 \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{A6})$$

onde:

- β é a taxa de desconto;
- \tilde{M}_{t+1} é o retorno do portfólio de mercado cujo *payoff* é C_t em t ; e
- $\tilde{R}_{i,t+1}$ é o retorno bruto real de qualquer ativo i .

$\tilde{R}_{i,t+1}$ pode ser substituído pelo retorno de qualquer ativo: das ações, do ativo sem risco e também do portfólio de mercado.

A equação (A6) dá a relação entre o retorno dos ativos e o consumo, sem distinguir entre variáveis endógenas e exógenas. Num modelo completo de equilíbrio geral, tudo seria endógeno. Em modelos que enfatizam a renda do indivíduo, o retorno dos ativos seria exógeno e o consumo, endógeno. Como, neste trabalho, o objetivo é testar implicações sobre o retorno dos ativos, o processo do consumo é tomado como exógeno. Contanto que a série de consumo seja modelada estatisticamente de forma adequada, tomar o processo estocástico do consumo como exógeno simplifica substancialmente o problema, sem incorrer em erro metodológico. Esse tipo de abordagem é devido a Lucas (1978).

A equação (A6) corresponde à equação de Euler do modelo com função utilidade Kreps-Porteus. Para se chegar aos modelos com utilidade esperada, basta considerar $\rho = \alpha$:

$$E_t \left[\beta \left(\frac{\tilde{C}_{t+1}}{C_t} \right)^{(\alpha-1)} \tilde{R}_{t+1} \right] = 1 \quad (A7)$$

Repara-se que (A6) e (A7) podem ser escritas como:

$$E_t[\tilde{\Pi}_{t,t+1} \cdot \tilde{r}_{i,t+1}] = 1 \quad i = 1, \dots, N \quad (A8)$$

onde Π é um fator de desconto estocástico que pode ser interpretado como a taxa marginal de substituição intertemporal (TMSI) entre dois períodos sucessivos, usada pelos agentes para determinar preços correntes. No caso de a função utilidade ser Kreps-Porteus, Π tem a seguinte forma:

$$\tilde{\Pi}_{t,t+1} = \left[\beta \left(\frac{\tilde{C}_{t+1}}{C_t} \right)^{\rho-1} \right]^{\frac{\alpha}{\rho}} (\tilde{M}_{t+1})^{(\alpha/\rho)-1} \quad (A9)$$

Observa-se que, quando $\alpha/\rho = 1$ (modelos com utilidade esperada), o crescimento do consumo é suficiente para explicar a TMSI como no CCAPM. Já quando $\alpha/\rho = 0$, só o retorno do mercado é necessário, caso do CAPM tradicional. Para quaisquer outros valores de α/ρ (modelos com utilidade Kreps-Porteus — equação A9), tanto o crescimento do consumo quanto o retorno do mercado são necessários, tornando este modelo um misto do CCAPM e CAPM.

Essa mesma idéia pode ser colocada em outras palavras. Enquanto no CCAPM o risco é medido como covariância do retorno do ativo com a taxa marginal de substituição intertemporal do consumo, ou seja, é função da taxa de crescimento do consumo, no CAPM estático, a medida de risco é a covariância do retorno do ativo com o retorno do portfólio de mercado. No modelo aqui tratado ambas as medidas são relevantes para explicar o risco, reforçando a idéia que surgiu quando da comparação das taxas marginais de substituição intertemporal.

Essa economia possui também um ativo sem risco, que dá direito a uma unidade de consumo no período seguinte ao do investimento. Substituindo \tilde{R}_t em (A6) e (A7) pelo retorno apropriado, obtêm-se as restrições sobre o retorno da ação (ou grupo de ações), do mercado e do ativo sem risco.

Os momentos dos retornos dos ativos são calculados a partir das equações de Euler. Antes, porém, é necessário definir o processo que segue a renda. Admite-se que a economia pode encontrar-se em K estados não observáveis onde o comportamento das séries é diferente. A cada período t há uma probabilidade não-condicional π_i de a variável encontrar-se no estado $S_t = i$. Além disso, S_t (que identifica os estados) segue um processo de Markov e evolui conforme a matriz de transição, \wp , abaixo:

$$\wp = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0(k-1)} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{k-1} & P_{(k-1)1} & \cdots & P_{(k-1)(k-1)} \end{bmatrix} \quad (\text{A10})$$

Define-se, também, que a série de consumo tem distribuição log-normal cuja média e variância mudam conforme o estado em que a economia se encontra. Esse processo pode, dessa forma, ser escrito como:

$$c_t - c_{t-1} = \alpha_0^c + \alpha_1^c S_{1,t} + \dots + \alpha_{k-1}^c S_{k-1,t} + (\varpi_0^c + \varpi_1^c S_{1,t} + \dots + \varpi_{k-1}^c S_{k-1,t}) \varepsilon_t^c \quad (\text{A11})$$

onde $S_{i,t}$ é função do estado da economia, S_i , e assume valor 1 quando $S_t = i$ e 0, caso contrário; c_t é $\ln C_t$ e ε_t^c é erro $N(0,1)$. Assim, no estado i , a média e o desvio-padrão da taxa de crescimento do consumo serão dados, respectivamente, por $(\alpha_0^c + \alpha_i^c, \varpi_0^c + \varpi_i^c)$.

Iterando (A11) n vezes, chega-se a:

$$\frac{C_{t+n}}{C_t} = \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \left[\alpha_0^c + \alpha_1^c S_{1,t+j} + \dots + \alpha_{k-1}^c S_{k-1,t+j} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\varpi_0^c + \varpi_1^c S_{1,t+j} + \dots + \varpi_{k-1}^c S_{k-1,t+j}) \varepsilon_{t+j}^c \right] \right\} \quad (\text{A12})$$

Para encontrar os momentos dos retornos é necessário estimar os parâmetros do processo de dotação acima, o que será feito na Subseção 2.2. Esses resultados serão, por sua vez, substituídos na equação de Euler. O objetivo é reproduzir os momentos do retorno da ação e da taxa de juros sem risco sempre obedecendo às equações de Euler.

Quando se admite que não há probabilidade de *default*, os retornos do portfólio de mercado, da ação e da taxa de juros sem risco são definidos, respectivamente, como:⁴

$$M_{t+1} = \frac{P_{t+1} + C_{t+1}}{P_t} \quad (\text{A13})$$

$$R_{t+1}^i = \frac{P_{t+1}^i + C_{t+1}^i}{P_t^i} \quad (\text{A14})$$

$$R_{t+1}^f = \frac{1}{P_t^f} \quad (\text{A15a})$$

No caso da probabilidade de *default*, $1-\theta$, ser positiva, o retorno da taxa de juros sem risco é dado por:

$$R_{t+1}^f = 0 \cdot (1-\theta) + \theta \cdot \frac{1}{P_t^f} = \theta \cdot \frac{1}{P_t^f} \quad (\text{A15b})$$

Nesta formatação, o mercado e o grupo de ações se confundem, e ambos podem ser reescritos como:

$$M_{t+1} = R_{t+1}^i \left(\frac{\lambda(S_{t+1}) + 1}{\lambda(S_t)} \right) \frac{C_{t+1}}{C_t} \quad (\text{A16})$$

onde $\lambda(S_t) = P_t/C_t$ — preço do portfólio de mercado sobre seu *payoff*, o consumo agregado.

Dado o processo definido para C_{t+1}/C_t em (A12) e já tendo estimado os parâmetros do modelo de Markov *Switching*, para calcular os momentos derivados do modelo, falta encontrar valores para $\lambda(S_t)$ e $P^f(S_t)$. Esses serão calculados implicitamente, substituindo $\tilde{R}_{i,t+1}$ em (A6) e (A7) pelas equações correspondentes aos retornos — (A13), (A14) e (A15a) — e fazendo as manipulações algébricas necessárias (ver Apêndice 3).

Para função utilidade Kreps-Porteus [equação de Euler (A6)], $\lambda(S_t)$ e $P^f(S_t)$ são encontrados, respectivamente, via:

$$\sum_{j=0}^{k-1} p_{ij} \left\{ \beta^{\alpha/\rho} \exp \left(\alpha m_j^c + \frac{\alpha^2}{2} \sigma_j^2 \right) \left(\frac{\lambda(j)+1}{\lambda(i)} \right)^{\alpha/\rho} \right\} = 1 \quad (\text{A17})$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} p_{ij} \left\{ \beta^{\alpha/\rho} \exp \left((\alpha-1) m_j^c + \frac{(\alpha-1)^2}{2} \sigma_j^2 \right) \left(\frac{\lambda(j)+1}{\lambda(i)} \right)^{\frac{\alpha}{\rho}-1} \Theta(j) \cdot (P^f(i))^{-1} \right\} = 1 \quad (\text{A18})$$

⁴ Todas as passagens a seguir estão explicitadas nos Apêndices 3 e 4.

para $i = 0, \dots, K-1$

onde:

- m_j^c e σ_j^c são média e desvio-padrão, respectivamente, da taxa de crescimento do consumo no estado j ; e
- Θ é o vetor 2×1 cujo elemento i é a probabilidade de não haver *default* no estado i .

No caso de se utilizar função utilidade esperada, basta considerar $\alpha = \rho$. Todas as derivações estão explicitadas no Apêndice 3.

Tendo obtido valores para $\lambda(S_t)$ e $P^f(S_t)$, estes são substituídos nas equações (A16) e (A15a). Como foi determinada uma forma específica para o processo da série de consumo, basta explicitá-la nessas equações para calcular os momentos determinados pelo modelo.

Observando as equações e analisando a forma como os momentos são calculados, ficam claras algumas vantagens proporcionadas por essa caracterização do modelo. A principal delas está relacionada ao retorno do portfólio de mercado. Dependendo da forma que se define para o processo de dotação e, conseqüentemente, da forma das equações de Euler, o modelo pode demandar um *input* para variáveis relacionadas ao portfólio de mercado como preço e retorno. Como essas variáveis não são observáveis, é usual se utilizar como *proxy* um índice de ações. Diversos trabalhos na área fazem esse tipo de “simplificação” [ver Epstein e Zin (1989)] que na verdade constitui um erro: determinar que o preço do portfólio de mercado é dado por um índice de ações implica dizer que esse índice dá direito ao fluxo de consumo e que, por sua vez, é igual ao fluxo de dividendos. Neste trabalho, as variáveis relacionadas ao portfólio de mercado são calculadas indiretamente por meio de $\lambda(S_t)$, permitindo uma especificação correta do modelo.

APÊNDICE 3

Derivação dos Momentos dos Retornos

- Primeiro e segundo momentos do retorno das ações:

Por (A16), pela lei das expectativas iteradas e supondo $S_t = i$, obtém-se:

$$E(R^e) = E \left\{ E \left[\frac{\lambda(S_{t+1}) + 1}{\lambda(i)} \exp(\alpha_0^c + \dots + \alpha_{K-1}^c S_{K-1,t+1} (\omega_0^c + \dots + \omega_{K-1}^c S_{K-1,t+1}) \varepsilon_{t+1}^c) \middle| S_{t+1} = j \right] \right\} \quad (A19)$$

Para $S_{t+1} = j = 0$:

$$E(R^e) = E \left\{ \frac{\lambda(0)+1}{\lambda(i)} \exp \left(\alpha_0^c + \frac{\varpi_0^{c^2}}{2} \right) \right\} \quad (\text{A20})$$

Para $j \neq 0$:

$$E(R^e) = E \left\{ \frac{\lambda(j)+1}{\lambda(i)} \exp \left(\alpha_0^c + \alpha_j^c + \frac{(\varpi_0^c + \varpi_j^c)^2}{2} \right) \right\} \quad (\text{A21})$$

ou:

$$E(R^e) = E \left\{ \frac{\lambda(j)+1}{\lambda(i)} \exp \left(\alpha_0^c + \frac{\varpi_0^{c^2}}{2} \right) \cdot \exp \left(\alpha_j^c + \varpi_0^c \varpi_j^c + \frac{\varpi_j^{c^2}}{2} \right) \right\} \quad (\text{A22})$$

Tirando o valor esperado, $\forall i, \forall j$:

$$E(R^e) = \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\lambda(j)+1}{\lambda(i)} \exp \left(\alpha_0^c + \frac{\varpi_0^{c^2}}{2} \right) \pi_i p_{ij} f_{ij}^0 \quad (\text{A23})$$

onde:

- π_i é a probabilidade não-condicional de se estar no estado i ;
- p_{ij} é a probabilidade de transição do estado i para o estado j ;
- $f_{i0}^0 = 1$; e
- $f_{ij}^0 = \exp \left(\alpha_j^c + \varpi_0^c \varpi_j^c + \frac{\varpi_j^{c^2}}{2} \right)$.

A variância de R^e é calculada via $E(R^{e2}) - E^2(R^e)$. Então:

$$E((R^e)^2) = E \left\{ \left[\left(\frac{\varphi(S_{t+1})+1}{\varphi(i)} \right)^2 \exp(2(\alpha_0^c + \dots + \alpha_{K-1}^c S_{K-1,t+1} + \varpi_0^c + \dots + \varpi_{K-1}^c S_{K-1,t+1}) \varepsilon_{t+1}^c) \mid S_{t+1} = j \right] \right\} \quad (\text{A24})$$

Para $j = 0$:

$$\begin{aligned} E((R^e)^2) &= E\left\{\left(\frac{\varphi(0)+1}{\varphi(i)}\right)^2 E[\exp(2(\alpha_0^c + \varpi_0^c \varepsilon_{t+1}))]\right\} = \\ &= E\left\{\left(\frac{\varphi(0)+1}{\varphi(i)}\right)^2 \exp(2(\alpha_0^c + \varpi_0^{c^2}))\right\} \end{aligned} \quad (A25)$$

Para $j \neq 0$:

$$\begin{aligned} E((R^e)^2) &= E\left\{\left(\frac{\varphi(j)+1}{\varphi(i)}\right)^2 E[\exp(2(\alpha_0^c + \alpha_j^c + (\varpi_0^c + \varpi_j^c) \varepsilon_{t+1}))]\right\} \\ &= E\left\{\left(\frac{\varphi(j)+1}{\varphi(i)}\right)^2 \exp[2(\alpha_0^c + \alpha_j^c + (\varpi_0^c + \varpi_j^c)^2)]\right\} \end{aligned} \quad (A26)$$

Expandindo:

$$E((R^e)^2) = E\left\{\left(\frac{\lambda(j)+1}{\lambda(i)}\right)^2 \exp(2\alpha_0^c + \varpi_j^c) \exp(\alpha_i^c + \varpi_j^{c^2} + 2\varpi_0^c \varpi_j^c)\right\} \quad (A27)$$

Tirando o valor esperado:

$$E((R^e)^2) = \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} \left(\frac{\lambda(j)+1}{\lambda(i)}\right)^2 \exp(2\alpha_0^c + 2\varpi_0^c) f_{ij}^1 \quad (A28)$$

onde:

- $f_{i0}^1 = 0$; e
- $f_{ij}^1 = \exp(2\alpha_i^c + 4\varpi_0^c \varpi_j^c + 2\varpi_j^{c^2}) \quad \forall j \neq 0$.

Juntando (A23) e (A28):

$$\begin{aligned} Var(R^e) &= \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} \left(\frac{\lambda(j)+1}{\lambda(i)}\right)^2 \exp(2\alpha_0^c + 2\varpi_0^c) \pi_i p_{ij} f_{ij}^1 - \\ &\quad - \left(\sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\lambda(j)+1}{\lambda(i)} \exp\left(\alpha_0^c + \frac{\varpi_0^{c^2}}{2}\right) \pi_i p_{ij} f_{ij}^0\right)^2 \end{aligned} \quad (A29)$$

Para calcular o primeiro e o segundo momentos da taxa de juros sem risco, parte-se da equação (A15). Para o primeiro momento, obtém-se:

$$E(R^f) = E\left[\frac{1}{P^f(S_t)}\right] = \sum_{i=0}^{K-1} \pi_i \frac{1}{P^f(i)} \quad (\text{A30})$$

A variância, por sua vez, é obtida via $E[(R^f)^2] - E^2(R^f)$:

$$E(R^{f^2}) = E\left[\frac{1}{P^f(S_t)}\right]^2 = \sum_{i=0}^{K-1} \pi_i \frac{1}{(P^f(i))^2} \quad (\text{A31})$$

Ou seja:

$$\text{Var}(R^f) = \sum_{i=0}^{K-1} \pi_i \frac{1}{(P^f(i))^2} - \left(\sum_{i=0}^{K-1} \pi_i \frac{1}{P^f(i)}\right)^2 \quad (\text{A32})$$

BIBLIOGRAFIA

- ABEL, A. B. Exact solutions for expected rates of return under Markov regime Switching: implications for the equity premium puzzle. *Journal of Money, Credit and Banking*, v. 26, p. 345-361, 1994.
- ALENCAR, A. S. *Teste do CCAPM para o Brasil*. Rio de Janeiro: PUC, 1999 (Dissertação de Mestrado).
- BONOMO, M. A., GARCIA, R. *Can a well-fitted equilibrium asset pricing model produce mean reversion?* Rio de Janeiro: Departamento de Economia/PUC, 1992 (Texto para Discussão).
- . *Disappointment aversion as a solution to the equity premium and the risk-free rate puzzles*. Rio de Janeiro: Departamento de Economia/PUC, 1993 (Texto para Discussão, 308).
- . Consumption and equilibrium asset pricing: an empirical assessment. *Journal of Empirical Finance*, v. 3, p. 239-265, 1996.
- BREEDEN, D. T. An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. *Journal of Financial Economics*, v. 7, n. 3, p. 265-296, 1979.
- CAMPBELL, J. Y., ANDREW W. L., MACKINLAY, A. C. *The econometrics of financial markets*. Nova Jersey: Princeton University Press, 1997.

- CAMPBELL, J. Y., COCHRANE, J. H. *By force of habit: a consumption-based explanation of aggregate stock market behavior*. Jan. 1995 (NBER Working Paper, 4.995).
- CECCHETTI, S. G, LAM, POK-SANG, MARK, N. C. Mean reversion in equilibrium asset prices. *American Economic Review*, v. 80, n. 3, p. 398-418, 1990.
- COCHRANE, J. H. *Asset pricing*. Chicago: University of Chicago Press (no prelo).
- DANTHINE, J.-P., DONALDSON, J. B. *Labor contracts, operating leverage e asset pricing*. Université de Lausanne, 1995, mimeo.
- EPSTEIN, L. G., ZIN, S. E. Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset return: a theoretical framework. *Econometrica*, v. 57, n. 4, p. 937-969, 1989.
- . Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset return: an empirical analysis. *Journal of Political Economy*, v. 99, n. 2, p. 263-286, 1991a.
- . *The independence axiom and asset returns*. July 1991b (NBER Technical Working Paper, 109).
- HAMILTON, J. *Times Series Analysis*. Princeton University Press, 1989.
- LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stocks portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, v. 47, p. 13-37, 1995.
- LUCAS, R. E. Jr. Asset prices in an exchange economy. *Econometrica*, v. 66, p. 1.429-1.445, Nov. 1978.
- MEHRA, R., PRESCOTT, E. C. The equity premium: a puzzle. *Journal of Monetary Economics*, v. 15, p. 145-161, Mar. 1985.
- MERTON, R. C. An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica*, v. 41, n. 5, p. 867-887, 1973.
- PERRON, P. *Notas de aula*.
- PIQUEIRA, N. S. *Aversão ao risco e substituíbilidade intertemporal: estimativas com dados agregados brasileiros para três classes de função utilidade*. Rio de Janeiro: EPGE, 1999 (Dissertação de Mestrado).
- ROMER, D. *Advanced macroeconomics*. Nova York: McGraw-Hill, 1996.
- SAMPAIO, F. S. *Existe um equity premium puzzle no Brasil?*. Rio de Janeiro: PUC, 1999.
- SHARPE, W. F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, v. 19, p. 425-442, 1964.

TAUCHEN, G. The statistical properties of generalized method-of-moments estimators of structural parameters obtained from financial market data. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 4, p. 397-425, 1986.

WEIL, P. The equity premium on the risk-free rate puzzle. *Journal of Monetary Economics*, v. 24, p. 401-421, 1989.