

# **TEXTO PARA DISCUSSÃO Nº 1439**

## **UM MODELO ECONOMETRICO COM PARÂMETROS VARIÁVEIS PARA A CARGA TRIBUTÁRIA BRUTA BRASILEIRA TRIMESTRAL**

**Mário Jorge Mendonça  
Cláudio Hamilton dos Santos  
Luis Alberto Medrano**



# **TEXTO PARA DISCUSSÃO Nº 1439**

## **UM MODELO ECONOMETRICO COM PARÂMETROS VARIÁVEIS PARA A CARGA TRIBUTÁRIA BRUTA BRASILEIRA TRIMESTRAL**

**Mário Jorge Mendonça\***  
**Cláudio Hamilton dos Santos\*\***  
**Luis Alberto Medrano\*\*\***

Brasília, novembro de 2009

---

\* Técnico de Planejamento e Pesquisa da Diretoria de Estudos e Políticas Macroeconômicas (Dimac) do Ipea. Correio eletrônico: [mario.mendonca@ipea.gov.br](mailto:mario.mendonca@ipea.gov.br).

\*\* Técnico de Planejamento e Pesquisa da Dimac/Ipea. Correio eletrônico: [claudio.santos@ipea.gov.br](mailto:claudio.santos@ipea.gov.br).

\*\*\* Pesquisador-bolsista do Programa de Pesquisa para o Desenvolvimento Nacional (PNPD) na Coordenação de Finanças Públicas da Dimac/Ipea. Correio eletrônico: [luis.medrano@ipea.gov.br](mailto:luis.medrano@ipea.gov.br).

## Governo Federal

### Secretaria de Assuntos Estratégicos da Presidência da República

**Ministro** Samuel Pinheiro Guimarães Neto

## **ipea** Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada

Fundação pública vinculada à Secretaria de Assuntos Estratégicos da Presidência da República, o Ipea fornece suporte técnico e institucional às ações governamentais – possibilitando a formulação de inúmeras políticas públicas e programas de desenvolvimento brasileiro – e disponibiliza, para a sociedade, pesquisas e estudos realizados por seus técnicos.

#### **Presidente**

Marcio Pochmann

#### **Diretor de Desenvolvimento Institucional**

Fernando Ferreira

#### **Diretor de Estudos, Cooperação Técnica e Políticas Internacionais**

Mário Lisboa Theodoro

#### **Diretor de Estudos e Políticas do Estado, das Instituições e da Democracia (em implantação)**

José Celso Pereira Cardoso Júnior

#### **Diretor de Estudos e Políticas Macroeconômicas**

João Sicsú

#### **Diretora de Estudos e Políticas Regionais, Urbanas e Ambientais**

Liana Maria da Frota Carleial

#### **Diretor de Estudos e Políticas Setoriais, Inovação, Produção e Infraestrutura**

Márcio Wohlers de Almeida

#### **Diretor de Estudos e Políticas Sociais**

Jorge Abrahão de Castro

#### **Chefe de Gabinete**

Persio Marco Antonio Davison

#### **Assessor-chefe de Comunicação**

Daniel Castro

URL: <http://www.ipea.gov.br>

Ouvidoria: <http://www.ipea.gov.br/ouvidoria>

ISSN 1415-4765

JEL H20, H22, C32.

## TEXTO PARA DISCUSSÃO

Publicação cujo objetivo é divulgar resultados de estudos direta ou indiretamente desenvolvidos pelo Ipea, os quais, por sua relevância, levam informações para profissionais especializados e estabelecem um espaço para sugestões.

As opiniões emitidas nesta publicação são de exclusiva e de inteira responsabilidade do(s) autor(es), não exprimindo, necessariamente, o ponto de vista do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada ou da Secretaria de Assuntos Estratégicos da Presidência da República.

É permitida a reprodução deste texto e dos dados nele contidos, desde que citada a fonte. Reproduções para fins comerciais são proibidas.

# SUMÁRIO

SINOPSE

ABSTRACT

1 INTRODUÇÃO	7
2 EM QUE CONSISTE A CARGA TRIBUTÁRIA BRUTA BRASILEIRA?	8
3 AS ESPECIFICAÇÕES ECONÔMICAS E OS DADOS UTILIZADOS	12
4 RESULTADOS	14
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	19
REFERÊNCIAS	20
ANEXOS	22



## **SINOPSE**

Este estudo tem por objetivo estimar um modelo econométrico linear com parâmetros variáveis para a análise da carga tributária bruta brasileira (CTBB) trimestral no período 1995-2008. A utilização deste tipo de modelo é justificada pelo fato de o sistema tributário nacional ter sido submetido a sucessivas mudanças durante boa parte do período em questão. Tais alterações ocorreram mormente em alíquotas e bases de incidência de tributos pré-existentes. Ocasionalmente, somaram-se a elas eliminações (temporárias ou não) de alguns tributos e a criação de outros. As principais conclusões deste estudo são: *i*) o produto interno bruto (PIB) é certamente a principal variável explicativa da dinâmica da CTBB no período em questão; *ii*) a parcela da CTBB autônoma em relação ao PIB teve crescimento relevante durante todo este último período, possivelmente indicando contínuas melhorias nos procedimentos de fiscalização adotados pelas autoridades tributárias e/ou aumentos na formalização da economia; e, finalmente, *iii*) a elasticidade-PIB da CTBB permaneceu significativamente inferior à unidade ao longo do período em questão, ao contrário do que sugerem estimativas feitas por meio de modelos com parâmetros constantes.

## **ABSTRACT**

This article presents a linear econometric model with variable coefficients for the analysis of the quarterly dynamics of the Brazilian gross tax burden in the 1995-2008 years. The choice of this particular model was motivated by the constant changes made in the Brazilian tax system during these years – most frequently in the scope, design, and size of pre-existing taxes, but once in a while also the elimination of some of these taxes and/or the creation of new ones. The main conclusions of the paper are that: (i) GDP is, quite certainly, the main explanatory variable of the dynamics of the quarterly tax burden during the period in question; (ii) the share of the quarterly Brazilian tax burden that does not depend on GDP (or on any other variable, for that matter) increased quite significantly during the latter period – possibly due to continuous improvements on the ability of the Brazilian government to raise tax revenues and/or increases in the size of the economy's formal sector; and (iii) the GDP-elasticity of the Brazilian tax burden appears to have fluctuated around values well below unity, contrarily to what estimates based on models with constant coefficients would lead us to believe.





# 1 INTRODUÇÃO

A carga tributária bruta (CTB) de uma determinada economia é, *grosso modo*, dada pela soma dos recursos que o governo recolhe compulsoriamente do setor privado. Tudo mais permanecendo constante, aumentos na CTB reduzem a renda disponível do setor privado e, portanto, os recursos disponíveis para o financiamento das despesas de consumo e investimento de famílias e firmas. No entanto, incrementos na CTB aumentam (via de regra, pelo menos<sup>1</sup>) os recursos à disposição do governo e, por conseguinte, permitem diminuições no nível de endividamento público e aumentos na oferta de bens e serviços públicos à população. Assim, a dinâmica da CTB é um determinante crucial das dinâmicas de diversas outras grandezas macroeconômicas relevantes.

Infelizmente, a modelagem econométrica da CTB brasileira e de suas componentes é muito dificultada pelas constantes mudanças em alíquotas e bases de incidência de tributos pré-existentes. Somem-se a isto, ocasionais cessamentos e suspensões de alguns tributos e a criação de outros. Tais mudanças têm caracterizado a administração tributária do país no período pós-Plano Real.<sup>2</sup> Não surpreende, pois, que a literatura brasileira com especificações econométricas explícitas para a carga tributária bruta brasileira (CTBB) e seus principais elementos seja relativamente pequena<sup>3</sup> e que os resultados relatados sejam frequentemente apenas exploratórios.

Este trabalho tem como objetivo contribuir para a literatura sobre o tema apresentando um modelo econométrico linear com coeficientes variáveis para uma série trimestral da CTBB no período 1995-2008.<sup>4</sup> A utilização de um modelo com coeficientes variáveis (discutido, entre outros, por West e Harrison, 1997) é justificada pela conjectura – que parece muito plausível *a priori* – de que as sucessivas mudanças no sistema tributário nacional estão associadas a mudanças recorrentes também nas elasticidades relevantes, de modo a tornar contraindicado o uso de especificações com parâmetros fixos.

A utilização de modelos com coeficientes variáveis para a modelagem de séries tributárias não é inédita na literatura brasileira (ver, por exemplo, Hernández, 1998, e Portugal e Portugal, 2001). Mas, até onde se sabe, estes modelos jamais foram aplicados à série trimestral da CTBB.<sup>5</sup> Outra inovação do estudo, acredita-se, é a opção por modelar o componente sazonal da série da CTBB endogenamente. Apesar de pouco usual na literatura, tal procedimento permitiu obterem-se estimativas significativamente mais ajustadas aos dados, assim como projeções mais confiáveis. Decidiu-se, ainda,

---

1. Note-se que nem todo recurso recolhido compulsoriamente da sociedade pelo governo é receita do governo. As contribuições para o FGTS, para citar um exemplo, são recolhidas compulsoriamente da sociedade – e por isso entram no cálculo da CTB –, mas não são receitas públicas, visto que são de propriedade dos trabalhadores. Por sua vez, nem toda receita do governo é recolhida compulsoriamente da sociedade. Quando o cidadão paga entrada em um museu público, está aumentando a receita do governo, mas não a CTB. Daí que aumentos na CTB não necessariamente implicam aumentos nas receitas públicas e aumentos nestas últimas não necessariamente implicam aumentos na CTB. Sem embargo, a maior parte das receitas públicas brasileiras é de natureza tributária e a maior parte da CTB brasileira consiste em receitas públicas.

2. E mesmo antes disso, como bem apontam Rezende *et al.* (2007).

3. Santos *et al.* (2008) apresentam uma resenha da literatura relevante.

4. A metodologia de construção da referida série está disponível em Santos e Costa (2008).

5. A série trimestral da carga tributária bruta brasileira até então não disponível em fontes oficiais foi estimada por um dos autores (SANTOS e COSTA, 2008) seguindo a metodologia das contas nacionais do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

estimar o modelo a partir de procedimentos bayesianos (GAMMERMAN e LOPES, 1997; KIM e NELSON, 1999; WEST e HARRISON, 1997), que, dentre outras vantagens, permitem a obtenção de estimativas mais confiáveis em pequenas amostras do que métodos frequentistas (GELMAN *et al.*, 2003, p.696).

Antecipando-se as conclusões, observa-se que, ao longo do período estudado, o comportamento do PIB parece ter sido o principal determinante da dinâmica da CTBB, ainda que a parcela da CTBB autônoma em relação ao PIB tenha crescido significativamente durante o período.<sup>6</sup> Este crescimento é provavelmente o motivo pelo qual a estimativa para a elasticidade-PIB da CTBB foi significativamente menor que 1, contrariando a sabedoria convencional vigente, baseada nos resultados de modelos lineares com parâmetros fixos ou, na melhor das hipóteses, com poucas mudanças de regime. Com efeito, a imensa parte dos modelos que consideram o termo constante da equação de regressão um parâmetro fixo termina por concluir que o valor da elasticidade-PIB da CTBB é significativamente *maior* que 1 (SANTOS, RIBEIRO e GOBETTI., 2008). Interpreta-se que este resultado se deve ao fato de que modelos com coeficientes fixos “forçam todo o peso” do crescimento recente da CTBB no PIB, subestimando (ou mesmo ignorando) melhorias na fiscalização tributária e incrementos no grau de formalização da economia.

Além desta introdução, o texto é constituído de outras quatro partes. A seção 2 apresenta alguns fatos estilizados acerca da evolução do tamanho e da composição da CTBB no período 1995-2008. Na terceira seção, apresenta-se uma especificação econométrica para esta última variável e as motivações teóricas desta especificação, bem como a descrição dos dados utilizados. Detalhes sobre a metodologia econométrica utilizada foram acrescentados em anexo. Os resultados obtidos por meio desta especificação – como várias outras especificações alternativas – são apresentados e analisados na quarta seção. Por fim, a seção 5 traz breves notas à guisa de conclusão.

## 2 EM QUE CONSISTE A CARGA TRIBUTÁRIA BRUTA BRASILEIRA?

A literatura brasileira é rica em metodologias alternativas de cálculo da CTBB.<sup>7</sup> Neste estudo, será utilizada a metodologia das contas nacionais do IBGE, que tem as vantagens de: *i*) ser compatível com as diretrizes das Nações Unidas; *ii*) ser relativamente bem documentada;<sup>8</sup> *iii*) ter se mantido razoavelmente constante nos últimos 15 anos;<sup>9</sup> e, portanto, *iv*) ser comparável internacionalmente.<sup>10</sup> De acordo com o IBGE – mais precisamente, de acordo com a tabela sinótica 20 do Sistema de Contas Nacionais, Brasil, 2002-2006 (IBGE, 2008a, doravante SCN 2006) –, os

---

6. Trata-se de uma indicação de contínuas melhorias nos procedimentos de fiscalização adotados pelas autoridades tributárias e/ou do crescimento exógeno verificado no grau de formalização da economia.

7. Números diferentes foram divulgados, por exemplo, por Brasil, Secretaria da Receita Federal (*e.g.*, 2009), pelo IBGE (*e.g.*, 2008a) e por Afonso *et al.* (2007). SANTOS *et al.*, (2008) discute as diferentes metodologias de estimação utilizadas nestes estudos.

8. Ver, em particular, IBGE (2004, anexo 8) e IBGE (2008b, anexo 10).

9. Ao contrário do que ocorreu com a metodologia utilizada pela Secretaria da Receita Federal, que sofreu mudanças radicais em 2008.

10. Por exemplo, com os dados divulgados pela publicação *General Government Accounts* da Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE).

tributos brasileiros podem ser divididos em cinco categorias: *i*) impostos sobre produtos; *ii*) outros impostos ligados à produção; *iii*) impostos sobre renda e patrimônio; *iv*) contribuições sociais efetivas; e *v*) impostos sobre o capital (tabela 1). A chamada carga tributária bruta é simplesmente a soma dos itens *i* a *v*, dividida pelo PIB em um dado período contábil (tabela 1). Em 2006, a CTBB de R\$ 808,6 bilhões representou 34,1% do PIB daquele ano, que atingiu R\$ 2.369,8 bilhões.

TABELA 1  
**Componentes da CTBB em 2006**  
(Em R\$ bilhões)

	Total	Federal	Estadual	Municipal
<b>Total</b>	<b>808,6</b>	<b>541,6</b>	<b>219,1</b>	<b>47,8</b>
Impostos sobre produtos	336,6	146,6	171,9	18,0
Outros impostos ligados à produção	30,5	16,3	7,9	6,3
Impostos sobre a renda e a propriedade	220,9	181,8	22,5	16,6
Contribuições previdenciárias ( INSS <sup>1</sup> + RPPS <sup>2</sup> + FGTS <sup>3</sup> + PIS/PASEP <sup>4</sup> )	216,8	196,9	15,7	4,2
Impostos sobre o capital	3,8	0,0	1,1	2,7

Fonte: IBGE (2008a, tabela sinótica 20).

Notas: <sup>1</sup> Instituto Nacional do Seguro Social.

<sup>2</sup> Regime Próprio de Previdência Social.

<sup>3</sup> Fundo de Garantia por Tempo de Serviço.

<sup>4</sup> Programa de Integração Social/Programa de Formação do Patrimônio do Servidor Público.

O restante desta seção discute a evolução do tamanho e da composição destes grandes grupos de tributos no período 1995-2008. São dois os propósitos deste esforço de recuperação histórica. Em primeiro lugar, sublinhar o fato de a CTBB ser um agregado complexo, formado por dezenas de tributos com lógicas e histórias diferentes. Em segundo lugar, enfatizar que as sucessivas mudanças na legislação tributária implicaram mudanças muito significativas na composição da CTBB. Consequentemente, influenciaram na resposta relativa desta última variável a, por exemplo, mudanças no PIB ao longo do período em análise. Ambos os pontos são insumos cruciais para a correta interpretação dos resultados apresentados nas seções seguintes.<sup>11</sup>

## 2.1 IMPOSTOS SOBRE PRODUTOS

São sete os principais impostos sobre produto: *i*) ICMS (estadual); *ii*) Cofins; *iii*) IPI; *iv*) ISS (municipal); *v*) Imposto sobre Importações; *vi*) IOF; e *vii*) Cide.<sup>12</sup> Apenas o ICMS e a Cofins, somados, responderam por mais de três quartos de todos os impostos sobre produtos e por pouco menos de um terço da CTBB total em 2006. Ademais, os fatos geradores e a incidência destes dois tributos, e mesmo do ISS,

11. E, mais geralmente, para a interpretação dos resultados de quaisquer estudos econométricos feitos sobre variáveis tributárias brasileiras nas últimas duas décadas.

12. As siglas significam: Imposto sobre Operações Relativas à Circulação de Mercadorias e sobre Prestações de Serviços de Transporte Interestadual e Intermunicipal e de Comunicação (ICMS), Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social (Cofins), Imposto sobre Produtos Industrializados (IPI), Imposto sobre Serviços (ISS), Imposto sobre Operações Financeiras (IOF), e Contribuição de Intervenção no Domínio Econômico (Cide), incidente sobre a importação e a comercialização de gasolina e suas correntes, *diesel* e suas correntes, querosene de aviação e outros querosenes, óleos combustíveis (*fuel-oil*), gás liquefeito de petróleo (GLP), inclusive o derivado de gás natural e de nafta, e álcool etílico combustível.

podem ser tratados, em uma primeira aproximação, como iguais. Com efeito, ambos os tributos incidem (majoritariamente, pelo menos) sobre o valor agregado das empresas em geral. Logo, parece razoável supor que a arrecadação destes tributos segue mais ou menos de perto a dinâmica do PIB.<sup>13</sup> Note-se, entretanto, que, ao contrário do que ocorreu com o ICMS (estadual), a legislação da Cofins mudou consideravelmente no período 1995-2008. Houve aumento de alíquotas em 1999 e novamente em 2003-2004, desta feita em conjunto com uma radical mudança na sistemática de recolhimento da Cofins, com a redução da tributação sobre o faturamento e a criação de um regime de incidência não cumulativa.

Voltando-se a atenção para os demais impostos sobre produtos, verifica-se inicialmente que é natural supor que os impostos sobre importações respondam ao valor total destas últimas (que, por sua vez, é positivamente correlacionado ao PIB). Os demais impostos sobre produtos são mais idiossincráticos. A título de ilustração: a arrecadação do IPI não depende apenas do PIB industrial (que é positivamente correlacionado com o PIB total, diga-se), mas também de considerações relativas à política industrial, setorial e de emprego. As recentes isenções concedidas ao setor automobilístico atestam esta afirmação. Situações parecidas ocorrem com o IOF e a Cide-combustíveis. A arrecadação do IOF não depende exclusivamente do volume de operações financeiras registradas na economia (que, uma vez mais, é positivamente correlacionado com o PIB total), mas também de considerações relacionadas à política monetária. Ademais, as alíquotas do IOF são majoradas em períodos nos quais a cobrança da CPMF é cancelada, tal como ocorreu no início de 1999 e no início de 2008. Igualmente, a arrecadação da Cide-combustíveis – criada apenas em 2002, em mais um esforço de ajuste fiscal – não depende somente do consumo de combustíveis e lubrificantes, também positivamente correlacionado com o PIB total. Ela se subordina, outrossim, à política do governo para os preços destes itens e da própria administração tributária das empresas produtoras, notadamente a Petrobras.

Em suma, a análise tributo a tributo dos impostos sobre produtos sugere fortemente que a arrecadação destes impostos é positivamente correlacionada com o PIB. Indica, ademais, que dificilmente a elasticidade-PIB da arrecadação dos impostos sobre produtos permaneceu constante durante o período 1995-2008, tendo em vista a criação da Cide-combustíveis (e as constantes mudanças em suas alíquotas e bases de incidência), do IOF, do IPI e da Cofins. No caso desta última, houve mudança inclusive no regime de tributação.

## 2.2 CONTRIBUIÇÕES PREVIDENCIÁRIAS E OILPS

A maior parte das contribuições previdenciárias, tanto na iniciativa privada quanto no setor público, incide sobre os rendimentos do fator trabalho, quer dizer, sobre a folha de pagamentos das firmas e dos governos. Isto é verdade, ainda, para as contribuições para o Fundo de Garantia por Tempo de Serviço (FGTS), que tecnicamente não são receitas públicas, e sim uma poupança compulsória dos trabalhadores e, em virtude

---

13. Ou, alternativamente, o valor adicionado total medido a preços básicos (isto é, o PIB menos a arrecadação dos impostos sobre produtos).

disto, propriedade deles.<sup>14</sup> A inclusão do PIB como variável explicativa da arrecadação destes tributos somente pode ser justificada pela hipótese de tal variável estar positivamente correlacionada com a massa de salários.

Entretanto, nem todas as contribuições previdenciárias incidem sobre a folha de pagamentos. Exceções importantes são o Sistema Integrado de Imposto e Contribuições das Microempresas e das Empresas de Pequeno Porte (Simples) e as contribuições para o PIS-PASEP, que somados atingiram R\$ 31,4 bilhões, ou pouco menos de 15% do total das contribuições previdenciárias em 2006. A rigor, o Simples, instituído em 1999 e modificado sucessivas vezes desde então, é um regime tributário diferenciado, simplificado e favorecido, que permite a micro e pequenas empresas pagarem um único tributo – sobre o faturamento – em substituição a vários outros (Imposto sobre Renda de Pessoa Jurídica – IRPJ, Cofins, contribuições previdenciárias patronais etc.). Ou seja, o Simples é classificado como contribuição previdenciária apenas por convenção. As contribuições para o Programa de Integração Social/Programa de Formação do Patrimônio do Servidor Público (PIS-PASEP), por sua vez, são em grande parte cobradas sobre o valor adicionado das firmas, mas apenas desde 2003, quando foi alterado seu regime tributário, tal como ocorreu com a Cofins. São classificadas como previdenciárias unicamente porque servem para capitalizar fundos com algumas características (nominais, pelo menos) previdenciárias. A inclusão do PIB como variável explicativa destes tributos se deve, portanto, às hipóteses de que ele é positivamente correlacionado tanto com o faturamento das micro e pequenas empresas quanto com o valor adicionado das médias e grandes empresas.

Os relativamente pequenos *outros impostos ligados à produção* (ou OILPs) se dividem em dois grandes grupos. O primeiro deles é formado por tributos que, tal como ocorre com grande parte das contribuições previdenciárias, incidem sobre a folha de pagamentos, notadamente as contribuições para o salário-educação e para o Sistema S. Destarte, o que foi dito sobre as contribuições previdenciárias (com exceção do Simples e do PIS-PASEP) é válido para estes tributos, cuja arrecadação somada atingiu R\$ 13 bilhões em 2006. Os demais OILPs (cuja arrecadação somou R\$ 17,4 bilhões em 2006) são formados por taxas setoriais diversas (*e.g.*, fiscalização de telecomunicações, vigilância sanitária, poder de polícia etc.) com pouca ou nenhuma relação com o PIB.

Em síntese, pode-se dizer que: *i*) a maior parte da arrecadação das contribuições previdenciárias responde positivamente ao PIB; *ii*) uma pequena parte delas é autônoma com relação ao PIB; e *iii*) as quebras estruturais ocorridas na legislação incidente sobre as contribuições previdenciárias foram relativamente menos importantes do que as ocorridas com os impostos sobre produtos.

### 2.3 TRIBUTOS SOBRE A RENDA, O PATRIMÔNIO E O CAPITAL

São quatro os principais tributos brasileiros sobre a renda, o patrimônio e o capital (IRPCs): o imposto de renda (IR), a Contribuição Social sobre o Lucro Líquido das pessoas jurídicas (CSLL), o Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA – estadual) e o Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU – municipal).

---

14. Assim sendo, o único motivo para a inclusão das contribuições para o FGTS na carga tributária é o fato de elas serem compulsórias.

Quanto à arrecadação do IR, ela é usualmente dividida em seis componentes, quais sejam, o IR da pessoa física; o IR da pessoa jurídica; o IR retido na fonte sobre os rendimentos do trabalho; o IR retido na fonte sobre ganhos de capital; o IR retido na fonte sobre remessas de divisas ao exterior; e os outros tipos de IR retido na fonte. Com efeito, a arrecadação do IR atingiu R\$ 136 bilhões em 2006, ou pouco menos de 60,5% da arrecadação total dos IRPCs naquele ano. Para efeito de comparação, cumpre registrar que a CSLL – um tributo em quase tudo similar ao IR da pessoa jurídica (com a importante diferença de ser destinado primordialmente ao financiamento da seguridade social) – arrecadou R\$ 26,7 bilhões (ou 11,9% do total dos IRPCs), o IPVA arrecadou R\$12,3 bilhões (ou 5,5% dos IRPCs) e o IPTU arrecadou R\$ 13,3 bilhões (ou cerca de 5,9% dos IRPCs) naquele mesmo ano.

Além desses tributos, vale destacar a agora extinta CPMF (Contribuição Provisória sobre Movimentação ou Transmissão de Valores e de Créditos e Direitos de Natureza Financeira). Cobrada entre 1997 e 2007, com uma significativa mudança de alíquota em meados de 1999, a CPMF arrecadava pouco mais de 1% do PIB em média e representava perto de 15% de toda a arrecadação dos IRPCs. Tanto a criação quanto a extinção da CPMF representaram importantes *quebras estruturais* na série da CTBB. Finalmente, devem-se citar os impostos sobre transmissões *causa mortis* ou *inter vivos* (estaduais), cuja arrecadação atingiu R\$ 3,7 bilhões em 2006, ou 1,6% dos IRPCs.

Conclui-se, assim, ser natural conceber que as arrecadações do IR e CSLL dependem positivamente do PIB, dada a correlação positiva entre o PIB e os lucros das firmas e a massa salarial da economia. O mesmo é verdadeiro no caso da CPMF, enquanto foi cobrada. Sem embargo, parece lícito supor que as arrecadações (menores) do IPTU, IPVA e dos impostos sobre transmissões *causa mortis* e *inter vivos* sejam relativamente autônomas em relação ao PIB.

### 3 AS ESPECIFICAÇÕES ECONÔMÉTRICAS E OS DADOS UTILIZADOS

Claro está que a arrecadação de um determinado tributo depende positivamente tanto da alíquota quanto do montante do fato gerador. Dito de outro modo, é natural supor, à guisa de exemplo, que, tudo mais permanecendo constante, a arrecadação do imposto sobre importações crescerá com o volume das importações, ou que a arrecadação do IOF crescerá com o volume das operações de crédito. Note-se, todavia, que o elevado número de tributos existentes no Brasil faz com que a estimação da CTBB tributo a tributo<sup>15</sup> seja por demais trabalhosa, tornando comum a utilização do PIB como *proxy* para os fatos geradores de todos os tributos brasileiros (*e.g.*, PORTUGAL e PORTUGAL, 2001; HERNÁNDEZ, 1998; SANTOS *et al.*, 2008). Naturalmente, espera-se que elevações e quedas no PIB real estejam associadas às elevações e quedas na arrecadação tributária real.

A inflação é outro fator usualmente listado como uma variável explicativa importante da dinâmica da CTB medida em termos reais. Seu sinal é incerto,

---

15. Uma tentativa de modelar a arrecadação de impostos conjuntamente está sendo levada a cabo pela Coordenação de Finanças Públicas do Ipea com o emprego do modelo fatorial dinâmico (Mendonça, Dos Santos e Guerrero, 2009).

contudo. Se, por um lado, elevações da inflação podem diminuir a arrecadação (real) caso os pagamentos (nominais) de tributos sejam recolhidos com atraso pelo governo (TANZI, 1977), por outro lado, tais elevações reduzem o valor real das faixas de isenção (admitindo-se que elas fiquem fixas em níveis nominais), por exemplo, do imposto de renda. Com isso, alarga-se a base de arrecadação do imposto e, desta forma, a própria arrecadação tributária. Em resumo, não surpreende que a inflação afete as receitas públicas de modos diferentes em contextos diferentes.

Vários estudos (*e.g.*, HAKKIO e RUSH, 1991; BOHN, 1991 e 1998) buscam explicar a dinâmica dos fluxos das receitas e dos gastos correntes do governo a partir de considerações sobre as implicações dinâmicas destes fluxos sobre o endividamento público. A hipótese básica dos estudos é que os governos fixam suas receitas e gastos de modo a manter o endividamento público sob controle, por assim dizer. Parece válido, pois, acrescentar o comportamento da dívida líquida do setor público (DLSP) aos determinantes (potenciais, ao menos) da dinâmica da CTBB.

Tendo em vista as considerações apresentadas, optou-se por iniciar a investigação econométrica com a especificação do modelo linear dinâmico que aparece na equação (1). A introdução da “constante” nesta especificação não é ingênua, já que, como visto na seção 2, pode-se supor que uma parcela da arrecadação tributária – aquela devida à tributação sobre o patrimônio, por exemplo –, não está relacionada a nenhum dos fatores descritos acima.<sup>16</sup>

$$\begin{aligned} CTBB_t &= b_0(t) + b_1(t)PIB_t + b_2(t)DLSP_t + b_3(t)INFLA_t + S_t + v_t \\ b_i(t) &= \varphi_i b_i(t-1) + w_i(t), \\ i &= 0, \dots, 3 \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $v(t) \sim N(0, V)$ ,  $w_i(t) \sim N(0, W_i)$ , para  $i = 0, \dots, 3$ , enquanto  $\varphi_i$  é o componente autorregressivo da equação de estado para cada  $b_i$ .  $S_t$  é o componente sazonal, que é modelado de acordo com a representação de Fourier (WEST e HARRISON, 1997), de modo que:

$$S_t = \sum_{j=1}^2 \left[ a_j \text{sen} \left( \frac{2\pi j t}{4} \right) + b_j \cos \left( \frac{2\pi j t}{4} \right) \right] = Z_t \gamma$$

Onde:

$$Z_t = \left( \text{sen} \left( \frac{2\pi t}{4} \right) \quad \text{sen} \left( \frac{2\pi 2t}{4} \right) \quad \cos \left( \frac{2\pi t}{4} \right) \quad \cos \left( \frac{2\pi 2t}{4} \right) \right)^T \text{ e } \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4).$$

De modo a fazer com que as estimativas obtidas expressem os valores das elasticidades, empregou-se aqui a transformação logarítmica, excetuando-se a variável inflação. Os dados trimestrais se referem ao período de janeiro de 1995 a dezembro de 2008 e são mostrados graficamente no anexo 1. Conforme pode ser visto, a CTBB apresenta um destacado padrão sazonal tanto em valores reais quanto em relação ao

16. É interessante notar, entretanto, que o modelo supõe que o termo “constante” varia com o passar do tempo, por isso as aspas.

PIB. Daí a necessidade de incluir o componente sazonal supracitado no modelo. As variáveis usadas neste estudo são as seguintes:

1. *CTBB*: Carga tributária bruta brasileira nominal deflacionada pelo Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) medido pelo IBGE.<sup>17</sup>
2. *DLSP*: Razão entre o valor mensal da dívida líquida do setor público consolidado e o PIB (acumulado nos últimos 12 meses e valorizado pelo Índice Geral de Preços – Disponibilidade Interna, IGP-DI), calculada pelo Banco Central do Brasil.
3. *Inflação*: Taxa de inflação calculada pelo IBGE a partir da variação da média do IPCA no trimestre.
4. *PIB*: produto interno bruto, dessazonalizado, medido a preços de mercado e deflacionado pelo IPCA, conforme fornecido pelo IBGE.

## 4 RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados da estimação do modelo inicial definido pela equação (1), assim como os resultados oriundos de especificações alternativas. A metodologia econométrica precisa utilizada nas estimações é relativamente complexa. Uma descrição sucinta acerca da implementação do modelo está descrita no anexo 2.

De sorte a obter a melhor especificação, foi testado um conjunto de cinco modelos. A seleção do melhor modelo foi feita com base sobretudo nos critérios EQM e DAM,<sup>18</sup> que avaliam a projeção fora da amostra (neste caso, implementada quatro passos à frente).<sup>19</sup> Em todos os modelos, a sazonalidade foi tratada a partir da aplicação da representação de Fourier conforme definida na seção 3. O modelo inicial (modelo 1) inclui todas as variáveis explicativas mencionadas na literatura, isto é, o PIB, a taxa de inflação e a DLSP (equação 1, seção 3). O modelo 2 incorpora apenas a inflação e o PIB. O modelo 3 inclui apenas o PIB e a DLSP. O modelo 4 apresenta somente o PIB como variável explicativa. Por fim, o modelo 5 é uma versão do modelo 1 com parâmetros fixos. As tabelas 2 e 3 mostram, respectivamente, os valores obtidos para os critérios EQM e DAM com relação ao grau de ajustamento do modelo implementado dentro da amostra, bem como aquele gerado a partir da previsão feita quatro passos à frente fora dela.

---

17. A série utilizada foi uma versão revista e estendida da série original apresentada em SANTOS e COSTA (2008). As principais revisões se deveram ao IBGE ter divulgado a CTB anual de 2006 em outubro de 2008 (este valor não estava disponível quando dos cálculos iniciais de Santos e Costa) e ter revisto consideravelmente os dados da arrecadação trimestral dos impostos sobre produtos em 2007 apresentados nas contas nacionais trimestrais. Ademais, os dados originais de Santos e Costa (2008) vão apenas até 2007, de modo que foi necessário estender a série até 2008. A série revista e estendida está à disposição dos leitores, mediante contato com os autores.

18. Erro quadrado médio (EQM) =  $N^{-1} \sum_{i=1}^N \hat{e}_i^2$ ; desvio absoluto médio (DAM) =  $N^{-1} \sum_{i=1}^N |\hat{e}_i|$ .

19. Deve-se ter em mente que a previsão é feita tendo em vista o conhecimento prévio das variáveis exógenas no horizonte de previsão.



TABELA 2

**Ajustamento do modelo**

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
EQM	0,000162	0,000272	0,0001617	0,000576	0,029299
DAM	0,036311	0,049863	0,0360563	0,071696	0,475630

Elaboração dos autores.

TABELA 3

**Previsão quatro passos à frente fora da amostra**

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
EQM	0,000762	0,000157	0,001166	0,000307	0,004561
DAM	0,027200	0,011594	0,027086	0,017437	0,064972

Elaboração dos autores.

Tomando por base o grau de ajustamento do modelo, verifica-se pela tabela 2 que não existe uma diferença muito marcante entre os quatro modelos com parâmetros variáveis. Os ajustamentos dos modelos 1 e 3 mostraram-se apenas ligeiramente maiores que os dos demais. Perceba-se, porém, que o modelo com parâmetros constantes (modelo 5) apresentou um ajuste sensivelmente pior que os dos modelos com parâmetros variáveis.

Considerando-se o critério de previsão fora da amostra, os modelos 2 e 4 apresentam resultados claramente superiores aos demais. Uma vez que o modelo 2 mostrou uma ligeira vantagem tanto em relação à capacidade de previsão quanto em relação ao ajustamento (em relação ao modelo 4), optou-se por tomar este último como modelo referencial.

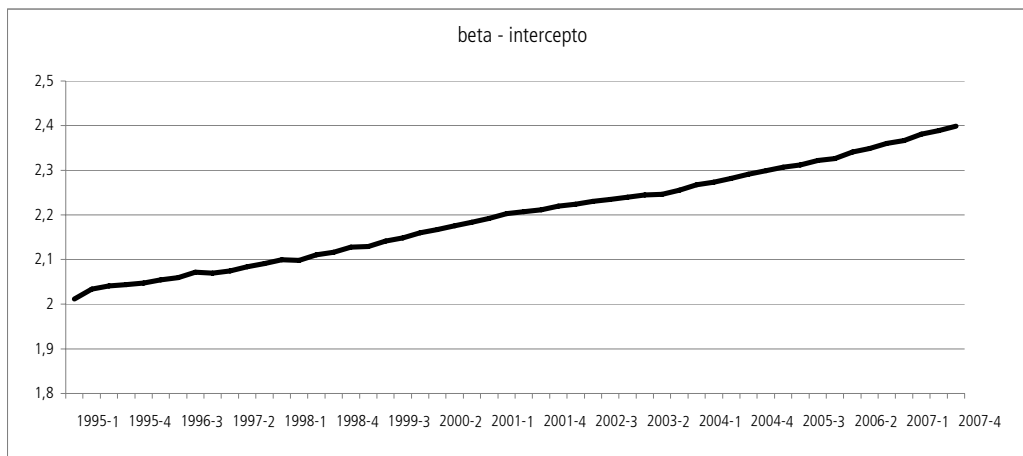
As figuras 1 a 3 mostram a evolução dos coeficientes de cada uma das variáveis, além do intercepto, para o modelo 2. Inicialmente, pode-se verificar que o coeficiente relativo à inflação parece não ser significativo em alguns períodos. Em termos práticos, o critério para não significância de um parâmetro na abordagem bayesiana é que o zero esteja incluído na banda de erro ou banda bayesiana.<sup>20</sup> Embora a banda de erro não seja mostrada na figura 2, adianta-se que o valor zero muitas vezes aparece dentro do intervalo de confiança.<sup>21</sup> Pode-se ainda notar que em alguns momentos a média *a posteriori* obtida para este coeficiente é zero. Isto quer dizer que não é sempre que a CTBB reage a mudanças na inflação. O mesmo comportamento se verificou em todos os outros modelos.

20. Equivalente ao intervalo de confiança no enfoque clássico ou frequentista.

21. Vale lembrar que, tendo em vista que, no modelo deste estudo, o parâmetro varia no tempo e a banda de erro para o coeficiente é obtida a cada período de acordo com o procedimento de amostragem de Gibbs (*Gibbs sampling*).

FIGURA 1

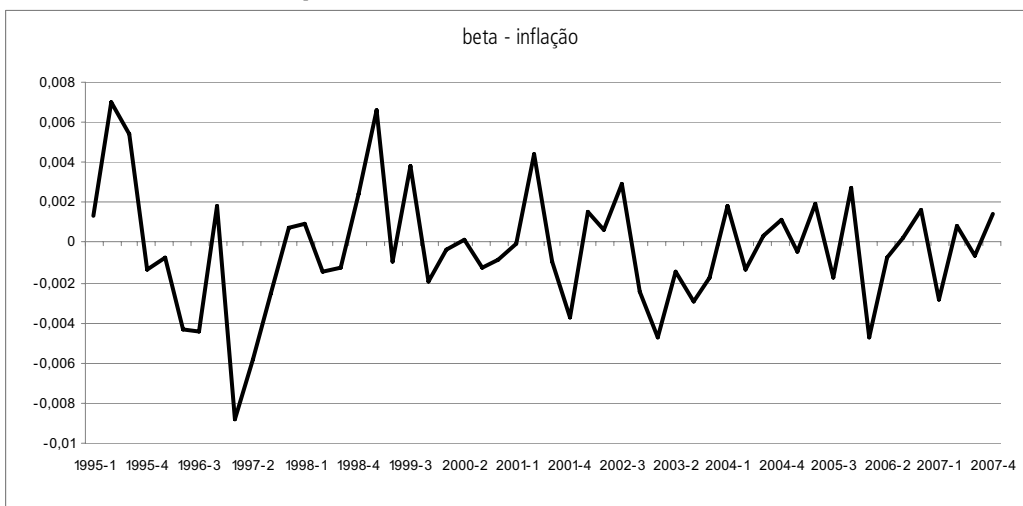
**Média a posteriori de  $\beta_0$  (intercepto)**



Elaboração dos autores.

FIGURA 2

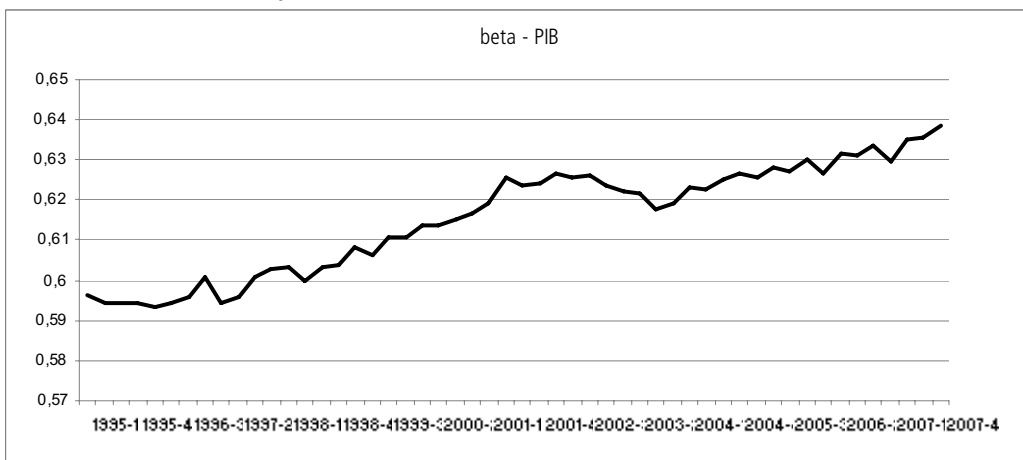
**Média a posteriori de  $\beta_1$  (inflação)**



Elaboração dos autores.

FIGURA 3

**Média a posteriori de  $\beta_2$  (PIB)**



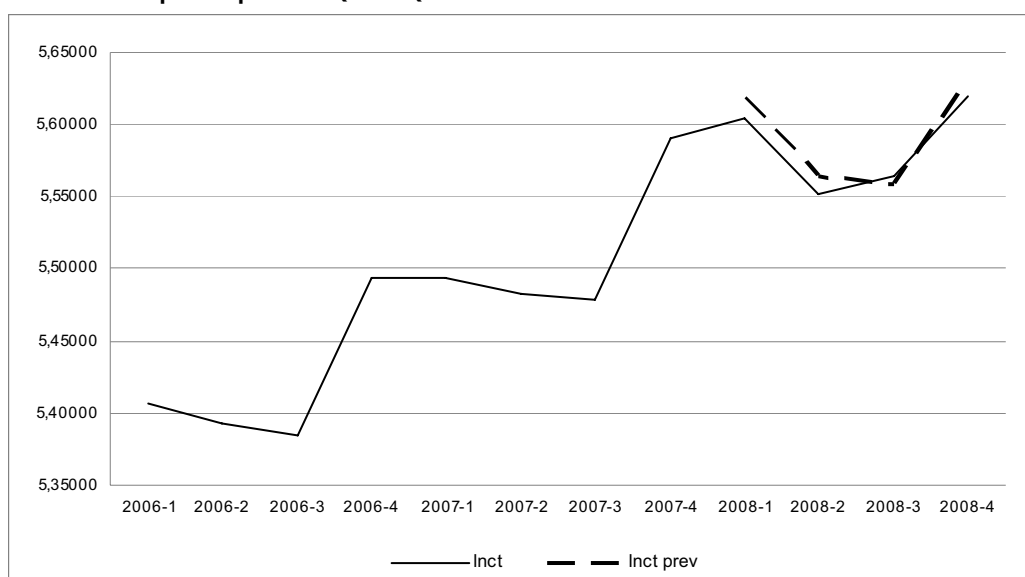
Elaboração dos autores.

Na figura 3 pode ser visto que, embora o coeficiente da variável PIB pareça indicar uma trajetória de crescimento contínuo desde 1995, isto se deve mais à escala do gráfico do que está acontecendo de fato. Vale dizer que os valores médios, inicial e final para este coeficiente são respectivamente 0,596 e 0,638. Isto mostra que a elasticidade do PIB tem se mantido praticamente constante ao longo de todo o período.

Em relação ao intercepto, contudo, se observa um crescimento mais firme. Neste caso, o valor médio inicial ficou próximo a 2,00, enquanto o valor médio final se situou em 2,40, conforme se observa na figura 1. Uma interpretação econômica para isto pode se dar a partir do reconhecimento de que fatores não explicitamente incluídos no modelo estariam agindo para fomentar o crescimento da carga tributária. Um deles talvez seja a diminuição do grau de informalidade da economia, o crescimento do emprego formal ou, ainda, maior eficiência na arrecadação.

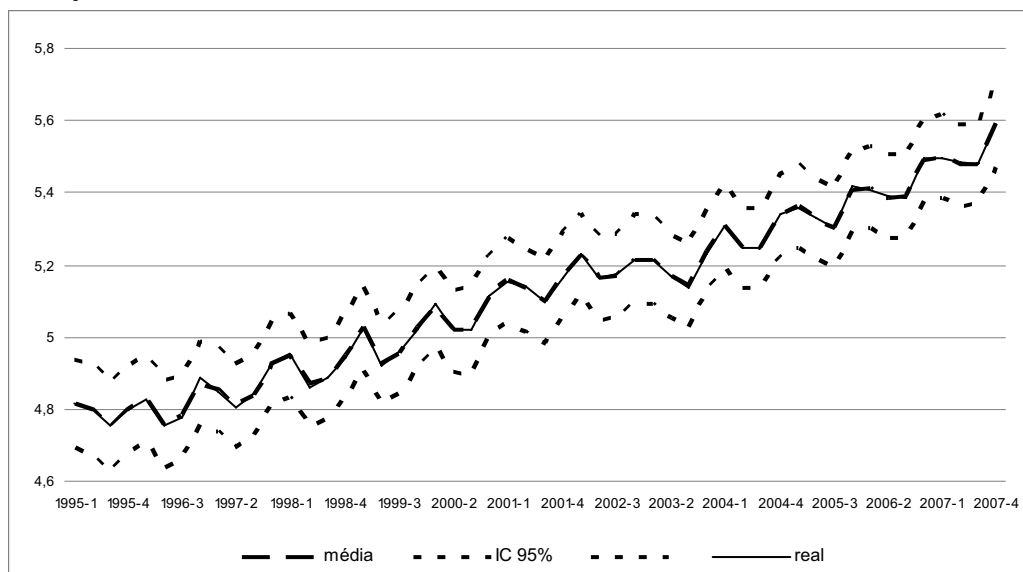
A figura 4 ilustra a previsão quatro passos à frente fora da amostra, enquanto o ajustamento do modelo é demonstrado na figura 5. Pode-se observar o alto grau de ajustamento, bem como a qualidade da previsão obtida. O erro de previsão anual total foi de R\$ 7,8 bilhões negativos, ou -0,7% do total de R\$ 1.066 bilhões da CTBB anual valorizada pelo IPCA verificada no período.

FIGURA 4  
Previsão para o período Q1/08-Q4/08



Elaboração dos autores.

FIGURA 5

**Ajustamento do modelo**

Elaboração dos autores.

A tabela 4 mostra a média e o intervalo de confiança de 95% para a variância  $V$  da equação do modelo 2, os coeficientes da sazonalidade  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  e  $\gamma_4$ , assim como as variâncias  $W_1, W_2$  e  $W_3$  e os coeficientes autorregressivos  $\varphi_1, \varphi_2$  e  $\varphi_3$  das equações que descrevem a variação dos parâmetros do modelo ao longo do tempo (seção 3). Por fim, a tabela 3 apresenta o resultado da estatística Gelman-Rubin  $R$  para se conferir a convergência dos parâmetros gerados por meio do processo de estimação do modelo (o chamado algoritmo MCMC – ou Monte Carlo Markov *chains* – ver anexo 2). A estatística  $R$  é obtida a partir de múltiplas cadeias markovianas obtidas com o referido processo de estimação. A convergência é alcançada quando o valor de  $R$  se situa próximo a 1, abaixo do nível crítico. Cadeias independentes foram geradas para 15.000 simulações. Em todos os casos as cadeias convergiram.

TABELA 4

**Estimativas pontuais e intervalos de 95% de para  $V, W, \Gamma$  e  $\varphi$** 

$\theta$	$E(\theta)$	IC 95%		$R$
$V$	0,00609	0,00304	0,01077	1,00118
$W_1$	0,00482	0,00199	0,00951	1,00154
$W_2$	0,00243	0,00122	0,00442	1,01031
$W_3$	0,00100	0,00062	0,00153	1,00084
$\gamma_1$	0,04436	-0,01108	0,10107	1,01031
$\gamma_2$	0,00760	-1,61458	1,60052	0,99973
$\gamma_3$	0,02538	-0,03157	0,08214	1,01253
$\gamma_4$	-0,00056	-0,03633	0,03443	1,01639
$\varphi_1$	0,73974	0,03306	1,00951	1,06159
$\varphi_2$	0,31607	-0,19265	0,82166	1,01035
$\varphi_3$	0,81662	0,10041	1,01218	1,08164

Elaboração dos autores.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nas seções anteriores foi apresentado e contextualizado um modelo econométrico linear com parâmetros variáveis para a dinâmica da carga tributária bruta brasileira trimestral. Tanto no que toca ao ajustamento dentro da amostra, quanto no que toca à qualidade das previsões do modelo fora da amostra, os resultados obtidos com o modelo foram satisfatórios. Em particular, o erro de previsão do modelo fora da amostra foi inferior a 1% do valor total da CTBB em 2008.

Alguns estudos apresentam valores para a elasticidade da CTBB em relação ao PIB iguais ou superiores a 1,0 (ver, entre outros, SANTOS *et al.* 2008). De modo a tratar esta questão, estimou-se um modelo com intercepto constante, não apresentado aqui, mas permitindo que o coeficiente do PIB variasse no tempo. Neste caso, observa-se que o valor da elasticidade do PIB aumenta fortemente, situando-se num patamar bastante próximo ao indicado pelos resultados de Santos *et al.* (2008). O diagnóstico é que métodos econométricos que não permitem variação contínua em todos os parâmetros do modelo não são indicados para estimação de um modelo da CTBB porque, como mencionado na introdução, a evolução da CTBB é um fenômeno que está sujeito a contínuas mudanças oriundas de vários fatores.

## REFERÊNCIAS

AFONSO, J. R.; MEIRELLES, B. B.; CASTRO, K. P. Carga tributária: a escalada continua. **Boletim de desenvolvimento fiscal**. Brasília: Ipea, n. 4, p. 25-32, março, 2007.

BOHN, H. The sustainability of budget deficits with Lump-Sum and with income-based taxation. **Journal of Money, Credit and Banking**, n. 23 (3), p. 581-604. 1991.

\_\_\_\_\_. The behavior of U.S. public debt and deficits. **The Quarterly Journal of Economics**, n. 113, p. 949-963, 1998.

BRASIL. Ministério da Fazenda. Secretaria da Receita Federal. **Carga Tributária no Brasil 2008**. Brasília, 2009.

CARTER, C. K.; KOHN, R. **On gibbs sampling for state space models**. *Biometrika* n. 81 (3), p. 541-553, 1994.

FRÜHWIRTH-SCHNATTER, S. **Data augmentation and dynamic linear models**. *Journal of Time Series Analysis* n. 15: p. 183-202, 1994.

GAMERMAN, D.; LOPES, H. **Markov chain Monte Carlo**. Chapman & Hall, 1997.

GELMAN, A.; RUBIN, D.R. Inference from iterative simulation using multiple sequences (with discussion), **Statist. Sci.** n. 7: p. 457-511, 1992.

HAKKIO, C.; RUCH, M. Is the budget deficit too large? **Economic Inquiry**, n. 29 (7): p. 429-445, 1991.

HÉRNANDEZ, B. **Um modelo econométrico da conta corrente do governo no Brasil**. Ipea, Texto de Discussão n. 1951/95, p. 543, 1998.

IBGE. **Sistema de Contas Nacionais: Brasil**. Rio de Janeiro: Série Relatórios Metodológicos, v.24, 2004.

\_\_\_\_\_. **Sistema de Contas Nacionais Brasil 2002-2006**. Rio de Janeiro: Coordenação de Contas Nacionais, 2008.

\_\_\_\_\_. **Sistema de Contas Nacionais: Brasil**. Rio de Janeiro: Série Relatórios Metodológicos, v.24. Segunda Edição, 2008b.

KIM, C. J.; NELSON, C. R. **State-Space models with regime switching**. Massachusetts: The MIT Press, 1999.

PORTUGAL, C.; PORTUGAL, M. **Os efeitos da inflação sobre o orçamento do governo: uma análise empírica.** Estudos Econômicos, 31(2), p. 239-283, 2001.

REZENDE, F. R.; OLIVEIRA, F.; ARAÚJO, E. **O Dilema Fiscal: Remendar ou Reformar?** Rio de Janeiro: Confederação Nacional da Indústria e Fundação Getúlio Vargas, 2007.

SANTOS, C. H. M.; COSTA, F. R. Uma metodologia de estimação da carga tributária bruta brasileira em níveis trimestrais. **Economia Aplicada.** v.12, n.4, p. 581-606, 2008.

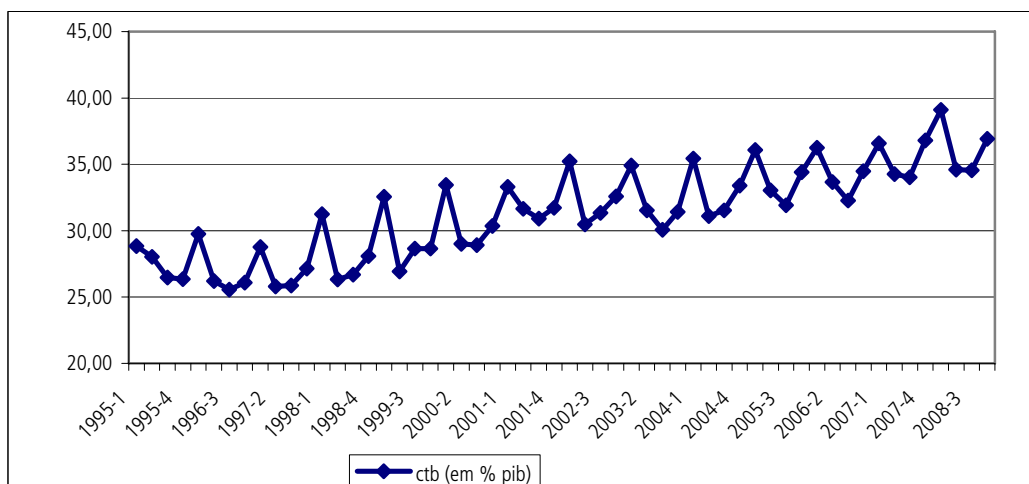
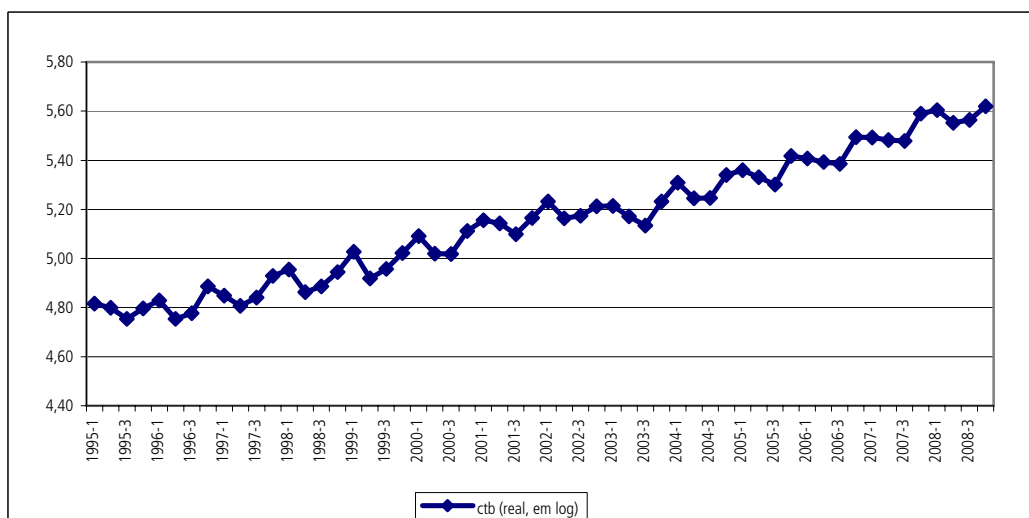
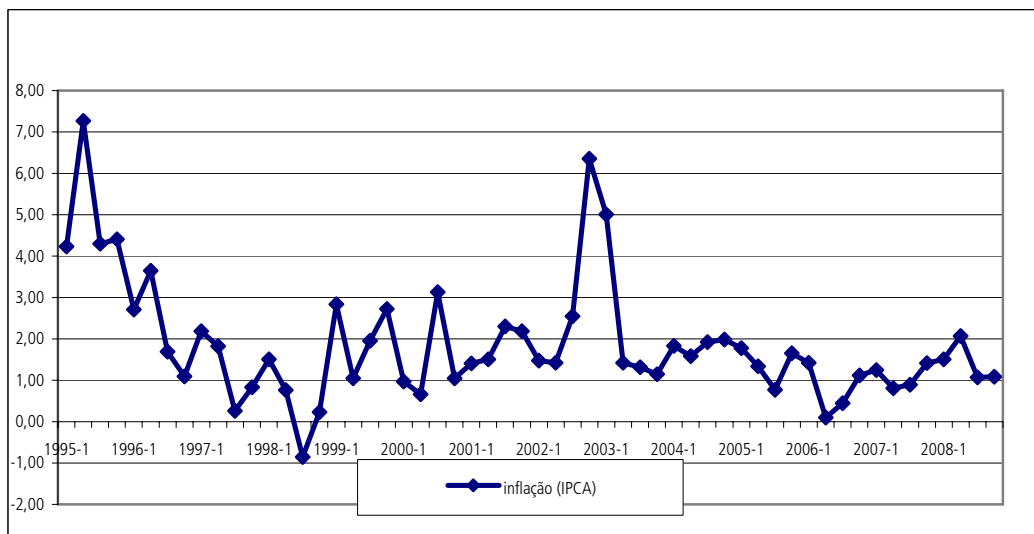
SANTOS, C. H. M.; RIBEIRO, M. B.; GOBETTI, S. W. **A Evolução da Carga Tributária Bruta Brasileira no Período 1995-2007: Tamanho, Composição e Especificações Econométricas Agregadas.** Ipea, Texto de Discussão, 1350, 1998.

TANZI, V. **Inflation, lags in collection, and the real value of tax revenue.** International Monetary Fund Staff Papers. Washington, v.24, n.1, 1977.

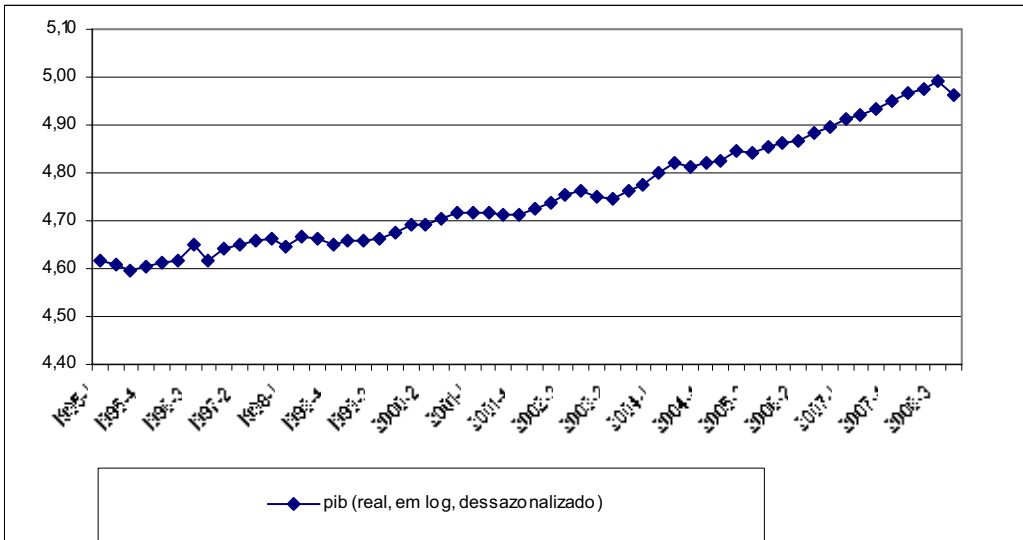
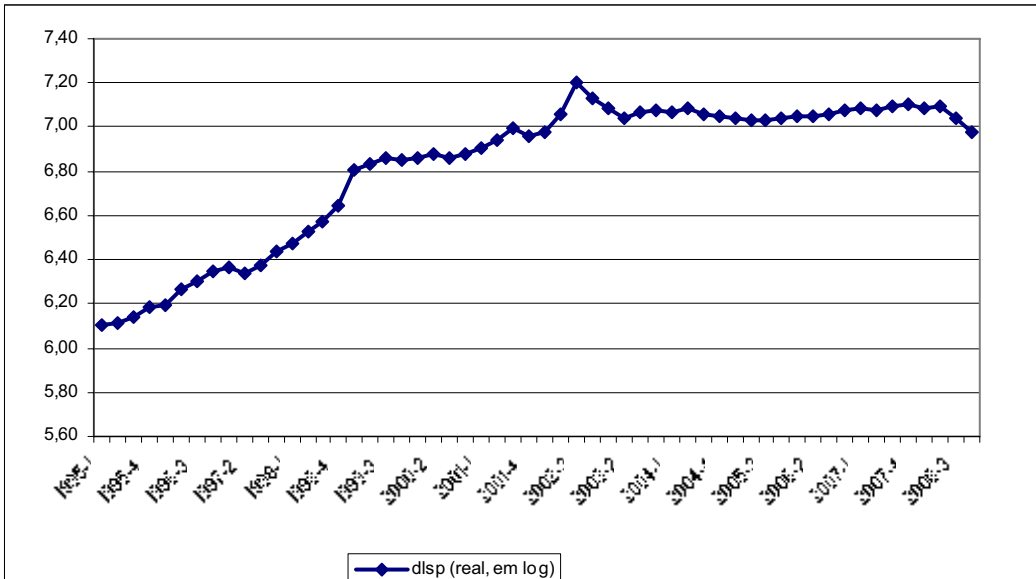
WEST, M.; HARRISON, J. **Bayesian forecasting and dynamic Models.** Springer, 1997.

# ANEXO 1

## Gráfico das variáveis







Elaboração dos autores.

## ANEXO 2

### A METODOLOGIA DE ESTIMAÇÃO UTILIZADA NESTE TRABALHO

#### A.2.1 MODELO DE REGRESSÃO LINEAR DINÂMICO

A forma geral do modelo DLM (*dynamic linear model*) pode ser definida da seguinte forma:

$$y_t = X_t \theta_t + S_t + v_t' \quad (2.1)$$

$$\theta_t = \Gamma_1 \theta_{t-1} + \dots + \Gamma_p \theta_{t-p} + \omega_t' \quad (2.2)$$

onde  $y_t$  é a variável endógena e  $X_t$  é um vetor  $k \times 1$  de variáveis exógenas. Este modelo permite ainda a presença de um componente sazonal,  $S_t$ , que pode ser modelado segundo a representação do tipo de Fourier (WEST e HARRISON, 1997), de modo que

$$S_t = \sum_{j=1}^2 \left[ a_j \text{sen} \left( \frac{2\pi j t}{4} \right) + b_j \cos \left( \frac{2\pi j t}{4} \right) \right] = Z_t \varphi, \text{ onde}$$

$$Z_t = \left( \text{sen} \left( \frac{2\pi t}{4} \right) \quad \text{sen} \left( \frac{2\pi 2t}{4} \right) \quad \cos \left( \frac{2\pi t}{4} \right) \quad \cos \left( \frac{2\pi 2t}{4} \right) \right)^T \text{ e } \varphi = (a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2),$$

sendo  $\theta_t$  o vetor  $k \times 1$  de parâmetros que segue um processo autorregressivo de ordem  $p$ , em que os coeficientes estão contidos na matriz diagonal  $\Gamma_i$ ,  $k \times k$ , para  $i = 1, \dots, p$ . Supõe-se que  $\omega_t' \sim N(0_{k \times 1}, W_{k \times k})$  e  $v_t' \sim N(0, V)$ , admitindo-se ainda que  $\omega_t'$  e  $v_t'$  não são correlacionados. Por simplicidade, admite-se também que  $W = \text{diag}(w_1, \dots, w_k)$ .

A ideia da aplicação da forma de Fourier para tratar sazonalidade está ligada ao fato de que qualquer padrão cíclico pode ser representado em termos da combinação linear de funções periódicas.<sup>22</sup> Outra motivação para o uso desta abordagem, além da flexibilidade, é a facilidade de se obter interpretação, já que as trajetórias em forma de ondas podem ser associadas aos variados padrões observados na prática. Mais uma forma de tratar a sazonalidade seria introduzi-la diretamente na equação de estado. Neste caso, a equação 2.2 assumiria a seguinte forma:

$$\theta_t = \Gamma_1 \theta_{t-1} + \dots + \Gamma_p \theta_{t-p} + S_t + \omega_t' \quad (2.2')$$

Por fim, a sazonalidade pode tomar uma forma dinâmica. Neste caso, seria possível ter-se um modelo no qual a equação da medida é dada da seguinte forma:  $y_t = F_t \theta_t^* + v_t'$ , onde  $F = [X_t, Z_t]$  e  $\theta_t^* = [\theta_t, \varphi_t]$ .

Será feito agora uso da seguinte notação para encaixar as equações numa forma mais compacta, que reduz o sistema expresso pelas equações (2.1-2.2) numa forma de espaço-estado de ordem um:

---

22. Uma função  $g(t)$  é dita periódica se, para algum inteiro  $p > 1$ , e todo  $n, t > 0$ , tem-se que  $g(t + np) = g(t)$ .

$$\underline{\theta}_t = \begin{bmatrix} \theta_t \\ \theta_{t-1} \\ \vdots \\ \theta_{t-p+1} \end{bmatrix}_{kp \times 1}, \quad G = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_{p-1} & \Gamma_p \\ I_k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_k & 0 \end{bmatrix}_{kp \times kp}, \quad \underline{\omega}_t = \begin{bmatrix} \omega_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{kp \times 1} \quad \text{e} \quad F_t' = \begin{bmatrix} X_t' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{kp \times 1}$$

Visto isso, tem-se que:

$$y_t = F_t' \underline{\theta}_t + z_t \varphi + v_t' \quad (3.1)$$

$$\underline{\theta}_t = G \underline{\theta}_{t-1} + \underline{\omega}_t \quad (3.2)$$

onde (3.1) representa a equação da medida ou do movimento, enquanto (3.2) define a equação de estado.

A função de verossimilhança de  $(\theta, G, \varphi, V)$  é dada por  $p(y | \theta, G, \varphi, V) = (2\pi)^{-T/2} V^{T/2} \exp\left(-\frac{1}{2V} \sum_{t=1}^T (y_t - F_t' \underline{\theta}_t - z_t \varphi)^2\right)$ , onde  $y = (y_1 \dots y_T)$ ,  $\theta = (\underline{\theta}_1 \dots \underline{\theta}_T)$  e  $\Gamma = (\Gamma_1 \dots \Gamma_p)$ .

## A.2.2 PROCEDIMENTO DE INFERÊNCIA

Nesta seção, é realizado um procedimento de inferência baseado no paradigma bayesiano. Inicialmente apresentam-se distribuições *a priori* para todos os parâmetros. Em seguida, o algoritmo MCMC é utilizado para obter amostras *a posteriori* de todos os parâmetros do modelo.

### *Distribuição a priori*

Por simplicidade, distribuições *a priori* conjugadas são utilizadas para todos os parâmetros. A distribuição *a priori* para  $\theta_t$  é especificada na equação (3.2) e completada pela informação inicial  $\theta_0$  tal que  $\theta_0 \sim N(m_0, C_0)$ , onde  $m_0$  e  $C_0$  são hiperparâmetros conhecidos. As distribuições *a priori* para os parâmetros  $V$ ,  $W$ ,  $\Gamma$  e  $\varphi$  são as seguintes: *i)*  $V \sim GI(n_V / 2, n_V S_V / 2)$ ; *ii)*  $w_j \sim GI(n_W / 2, n_W S_W / 2)$ ,  $j = 1, \dots, k$ ; *iii)*  $\Gamma_j \sim N(m_\Gamma, S_\Gamma)$ ,  $j = 1, \dots, p$ ; e *iv)*  $\varphi \sim N(m_\varphi, S_\varphi)$ , onde  $n_V, S_V, n_W, S_W, m_\Gamma, S_\Gamma, m_\varphi$  e  $S_\varphi$  são hiperparâmetros conhecidos.

### *Inferência a posteriori*

A distribuição *a posteriori* conjunta de  $(\theta, \Gamma, \varphi, V, W)$  é dada por

$$p(\theta, G, \varphi, V, W | y) \propto \prod_{t=1}^T p(y_t | \underline{\theta}_t, \varphi, V) \prod_{t=1}^T p(\underline{\theta}_t | \underline{\theta}_{t-1}, W, G) p(\underline{\theta}_0 | m_0, C_0) P(\varphi) p(V) p(W) p(\Gamma),$$

a qual é analiticamente intratável e, por conseguinte, a inferência *a posteriori* exata é feita utilizando-se o esquema MCMC. Neste caso, o vetor da variável de estado é amostrado conjuntamente, utilizando-se o algoritmo FFBS (*forward filtering backward sampling*) de CARTER e KOHN (1994) e FRÜHWIRTH-SCHNATTER (1994). Para o resto de parâmetros  $\Gamma$ ,  $\varphi$ ,  $V$  e  $W$ , todas as distribuições condicionais

completas são distribuições normais ou distribuições gama inversa. Todas as distribuições condicionais completas estão listadas a seguir.

a) A distribuição condicional de  $V$  é  $(V | \theta, W, \varphi, \Gamma) \sim GI(n_V^* / 2, n_V^* S_V^* / 2)$ , onde

$$n_V^* = n_V + T \text{ e } n_V^* S_V^* = n_V S_V + \sum_{t=1}^T (y_t - F_t \underline{\theta}_t - z_t \varphi)^2.$$

b) A distribuição condicional de  $W = \text{diag}(w_1, \dots, w_k)$  é

$$(w_j | \theta, V, \varphi, \Gamma) \sim GI(n_W^* / 2, n_W^* S_W^* / 2) \text{ para } j = 1, \dots, k, \text{ onde}$$

$$n_W^* = n_W + T - 1 \text{ e } n_W^* S_W^* = n_W S_W + \sum_{t=2}^T (\underline{\theta}_t - G \underline{\theta}_{t-1})^T (\underline{\theta}_t - G \underline{\theta}_{t-1}).$$

c) A distribuição condicional de  $\Gamma = (\Gamma_1 \dots \Gamma_p)$  é

$$(\Gamma_j | \theta, V, W, \varphi) \sim N(m_\Gamma^*, S_\Gamma^*) \text{ para } j = 1, \dots, k, \text{ onde}$$

$$S_\Gamma^* = (S_\Gamma^{-1} I_{p \times p} + w_j^{-1} H_j^T H_j)^{-1} \text{ e } m_\Gamma^* = S_\Gamma^{-1} (S_\Gamma^{-1} I_{p \times p} \mathbf{1}_p + w_j^{-1} B_j^T H_j) \text{ para}$$

$$H_j = \begin{pmatrix} \theta_{p,j} & \theta_{p-1,j} & \dots & \theta_{1,j} \\ \theta_{p+1,j} & \theta_{p,j} & \dots & \theta_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{T-1,j} & \theta_{T-2,j} & \dots & \theta_{T-p,j} \end{pmatrix} \text{ e } B_j = \begin{pmatrix} \theta_{p+1,j} \\ \theta_{p+2,j} \\ \vdots \\ \theta_{T,j} \end{pmatrix}.$$

d) A distribuição condicional de  $\varphi$  é  $(\varphi | \theta, V, W, \Gamma) \sim N(m_\varphi^*, S_\varphi^*)$ , onde

$$S_\varphi^* = (S_\varphi^{-1} I_{4 \times 4} + V^{-1} Z^T Z)^{-1} \text{ e } m_\varphi^* = S_\varphi^{-1} (S_\varphi^{-1} I_{4 \times 4} \mathbf{1}_4 + V^{-1} Z^T (y - F \theta)).$$

Os estados  $\theta_1, \dots, \theta_T$  são amostrados conjuntamente, utilizando-se o algoritmo FFBS, condicional sobre  $\Gamma$ ,  $\varphi$ ,  $V$  e  $W$ . A distribuição condicional completa conjunta segue a decomposição retrospectiva  $p(\theta | y) = p(\theta_T | D_T) \prod_{t=1}^{T-1} p(\theta_t | \theta_{t+1}, D_t)$ , onde

$D_T = \{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ ,  $t = 1, \dots, T$  e  $D_0$  representam a informação inicial. Iniciando com  $\theta_0 \sim N(m_0, C_0)$ , através do Filtro de Kalman pode ser mostrado que

$\theta_t | D_t \sim N(m_t, C_t)$ , onde  $m_t = a_{t-1} + A (y_t - f_t - z_t \varphi)$ ,  $C_t = R_t - A_t Q_t A_t'$ ,  $a_t = G m_{t-1}$ ,  $R_t = G C_{t-1} G' + W$ ,  $f_t = F_t' a_t + z_t \varphi$ ,  $Q_t = F_t' R_t F_t + V$  e  $A_t = R_t F_t Q_t^{-1}$ , para  $t = 1, \dots, T$ ;  $\theta_T$  é amostrado de  $p(\theta_T | D_T)$  (passo denominado *forward filtering*). Para  $t = T - 1, T - 2, \dots, 2, 1$ ,  $\theta_t$  é amostrado de  $p(\theta_t | \theta_{t+1}, D_t) = N(\tilde{a}_t, \tilde{C}_t)$ ,

onde  $\tilde{a}_t = m_t + B_t(f_{t+1} - a_{t+1})$ ,  $\tilde{C}_t = C_t - B_t R_{t+1} B_t'$  e  $B_t = C_t G' R_{t+1}^{-1}$  (passo denominado *backward sampling*).

### Previsão modelo de regressão linear dinâmico

Fazer previsão nesta classe de modelos é teoricamente direto. Frequentemente, surge o interesse de aprender a densidade preditiva  $h$  passos a frente,  $p(y_{T+h} | y)$ , ou seja

$$p(y_{T+h} | y) = \int p(y_{T+h} | \underline{\theta}_{T+h}, \varphi, V) p(\underline{\theta}_{T+h} | \underline{\theta}_T, W, \Gamma) p(\underline{\theta}_T, W, \Gamma, V | y) d\underline{\theta}_{T+h} d\underline{\theta}_T d\varphi dV dW d\Gamma,$$

onde  $(y_{T+h} | \underline{\theta}_{T+h}, \varphi, V) \sim N(F_{T+h}, V)$ ,  $(\underline{\theta}_{T+h} | \underline{\theta}_T, W, \Gamma) \sim N(\mu_h, V_h)$ ,  $\mu_h = G^h \underline{\theta}_T$  e

$$V_h = \sum_{j=1}^h G^{j-1} W (G^{j-1})', \quad \text{para } h > 0. \quad \text{Portanto, se}$$

$\{(\underline{\theta}_T^{(1)}, \varphi^{(1)}, V^{(1)}, W^{(1)}, \Gamma^{(1)}), \dots, (\underline{\theta}_T^{(L)}, \varphi^{(L)}, V^{(L)}, W^{(L)}, \Gamma^{(L)})\}$  é uma amostra de

$p(\underline{\theta}_T, W, \Gamma, V | y)$ , é fácil amostrar  $\underline{\theta}_{T+h}^{(j)}$  de  $p(\underline{\theta}_{T+h} | \underline{\theta}_T^{(j)}, W^{(j)}, \Gamma^{(j)})$ , para todo

$j = 1, \dots, L$ , tal que  $p(y_{T+h} | y) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L p(y_{T+h} | \underline{\theta}_{T+h}^{(j)}, \varphi^{(j)}, V^{(j)})$  é a aproximação via

Monte Carlo de  $p(y_{T+h} | y)$ . Analogamente, se  $y_{T+h}^{(j)}$  é amostrado de

$p(y_{T+h} | \underline{\theta}_{T+h}^{(j)}, \varphi^{(j)}, V^{(j)})$ , para  $j = 1, \dots, L$ , então  $\{y_{T+h}^{(1)}, \dots, y_{T+h}^{(L)}\}$  representa uma

amostra de  $p(y_{T+h} | y)$ .

## ANEXO 3

### Dados trimestrais referente ao período de jan./1995 a dez./2008

	ln CTBB	ln DLSP	Inflação	ln PIB
1995-1	4,81615	6,10669	4,23000	4,61681
1995-2	4,79957	6,10980	7,27019	4,60725
1995-3	4,75325	6,13573	4,30264	4,59493
1995-4	4,79696	6,18348	4,40763	4,60509
1996-1	4,82850	6,19229	2,70533	4,61369
1996-2	4,75374	6,26981	3,64760	4,61721
1996-3	4,77661	6,30614	1,69318	4,65003
1996-4	4,88557	6,34781	1,08862	4,61864
1997-1	4,84828	6,36084	2,18108	4,64132
1997-2	4,80675	6,33607	1,82351	4,65150
1997-3	4,84135	6,37004	0,25972	4,65829
1997-4	4,92830	6,43294	0,82812	4,66359
1998-1	4,95509	6,46934	1,50556	4,64629
1998-2	4,86232	6,52739	0,75799	4,66566
1998-3	4,88581	6,57048	-0,85143	4,66304
1998-4	4,94425	6,64054	0,22931	4,65018
1999-1	5,02780	6,80178	2,83623	4,65634
1999-2	4,91829	6,83187	1,04772	4,65960
1999-3	4,95704	6,86248	1,95187	4,66142
1999-4	5,02186	6,84665	2,72670	4,67449
2000-1	5,09071	6,85729	0,96788	4,69085
2000-2	5,01929	6,87901	0,65929	4,69265
2000-3	5,01792	6,85804	3,12839	4,70250
2000-4	5,11160	6,87496	1,04736	4,71598
2001-1	5,15510	6,90527	1,40678	4,71595
2001-2	5,14262	6,94108	1,50618	4,71605
2001-3	5,09851	6,99944	2,29796	4,71284
2001-4	5,16524	6,96101	2,18236	4,71450
2002-1	5,23180	6,97583	1,47637	4,72588
2002-2	5,16383	7,05886	1,42542	4,73791
2002-3	5,17330	7,19876	2,54815	4,75394
2002-4	5,21328	7,13058	6,35526	4,76411
2003-1	5,21455	7,08847	5,00598	4,74845
2003-2	5,17083	7,03780	1,42326	4,74769
2003-3	5,13381	7,06440	1,31622	4,76193
2003-4	5,23205	7,07737	1,14763	4,77448
2004-1	5,30927	7,07133	1,83373	4,79806
2004-2	5,24500	7,08090	1,58508	4,82075
2004-3	5,24690	7,05351	1,92285	4,81263
2004-4	5,33977	7,05103	1,98291	4,81902
2005-1	5,35873	7,04259	1,77455	4,82706
2005-2	5,33098	7,02929	1,33470	4,84631
2005-3	5,30090	7,02929	0,76925	4,84007
2005-4	5,41707	7,04213	1,65478	4,85327
2006-1	5,40677	7,04692	1,42663	4,86371
2006-2	5,39264	7,04839	0,09949	4,86641
2006-3	5,38471	7,05894	0,44958	4,88431
2006-4	5,49428	7,07391	1,11748	4,89618
2007-1	5,49325	7,08100	1,24761	4,91080
2007-2	5,48240	7,07895	0,80869	4,91932
2007-3	5,47842	7,09305	0,88876	4,93143
2007-4	5,58996	7,10518	1,41610	4,95187
2008-1	5,60405	7,08223	1,50638	4,96498
2008-2	5,55233	7,09484	2,07279	4,97659
2008-3	5,56448	7,03834	1,06769	4,99127
2008-4	5,62021	6,97502	1,08822	4,96382

Elaboração dos autores.

## **EDITORIAL**

### **Coordenação**

Iranilde Rego

### **Revisão**

Cláudio Passos de Oliveira

Luciana Dias Jabbour

Marco Aurélio Dias Pires

Reginaldo da Silva Domingos

Leonardo Moreira de Souza (estagiário)

Maria Angela de Jesus Silva (estagiária)

### **Editoração**

Bernar José Vieira

Cláudia Mattosinhos Cordeiro

Everson da Silva Moura

Renato Rodrigues Bueno

### **Livraria**

SBS – Quadra 1 – Bloco J – Ed. BNDES, Térreo.

70076-900 – Brasília – DF

Fone: (61) 3315-5336

Correio eletrônico: [livraria@ipea.gov.br](mailto:livraria@ipea.gov.br)

Tiragem: 130 exemplares