A estrutura a termo da taxa de juros: uma síntese*

José W. Rossi**

Inicialmente discute-se o uso das taxas de juros e do spread *entre taxas de juros para a previsão da atividade econômica, da variação na taxa de juros de curto prazo e da taxa de inflação. Em seguida apresenta-se a teoria da relação entre as taxas de juros de curto e de longo prazos através da chamada curva de retorno* (yield curve) *e mostra-se como realizar o teste empírico da sua validade. As dificuldades no teste empírico da teoria são apresentadas à luz de duas experiências distintas: a dos Estados Unidos e a do Brasil, mostrando que os modelos teóricos baseados na hipótese de valor presente são em geral rejeitados. Finalmente, discutem-se, com base na estrutura a termo da taxa de juros, as vantagens e desvantagens de se ter uma dívida pública de curto prazo em vez de uma de longo prazo.*

1 - Introdução [1]

Sabe-se que certas variáveis do mercado financeiro contêm informações úteis sobre as condições futuras da economia. Por exemplo, o preço das ações tem sido tradicionalmente usado como um importante indicador antecedente da atividade econômica. [2] Estudos recentes mostram que também a taxa de juros e o *spread* entre as taxas de juros de ativos financeiros alternativos e com distinta maturidade têm sido usados como previsores do nível da atividade econômica e/ou das variações tanto das taxas de juros de curto prazo como do nível dos preços.

O interesse no papel da taxa de juros como previsor do nível de atividade na economia surgiu com o trabalho de Sims (1980). A estimação do seu modelo Vetor Auto-Regressivo (VAR = Vector Autoregression System) com dados do pós-guerra para os Estados Unidos, usando variáveis tais como o nível da produção industrial, o índice de preços no atacado e o estoque de M1, mostrou que a expansão em M1 era, corroborando um resultado seu anterior [conforme Sims (1972)], importante para explicar variações na produção industrial; mais precisamente, aquela variável explicava cerca de 37% da variância da produção industrial em um horizonte de 48 meses. Todavia, quando a taxa de juros dos títulos comerciais era incluída no seu modelo, quase todo o poder preditivo do estoque de moeda transferia-se para a taxa de juros, que passava a explicar, então, 30% da variância

* Agradeço os comentários e sugestões de Octávio Tourinho e de dois pareceristas desta revista. Este projeto contou com o apoio financeiro do CNPq (Proc. 350128/92-8).

** Do IPEA e da Uerj.

1 Esta seção baseia-se em Bernanke (1990).

2 O preço das ações é determinado pela expectativa sobre o fluxo futuro dos dividendos, que, por sua vez, está relacionado à situação econômica futura.

Pesq. Plan. Econ., Rio de Janeiro, v. 26, n.3, p. 521-548, dez. 1996

da produção industrial no mesmo horizonte de 48 meses. Agora o estoque de moeda explicava tão-somente 4% da variância da produção industrial. Mais importante, estes resultados de Sims são robustos ao uso de diferentes taxas de juros, conforme constataram, por exemplo, Litterman e Weiss (1985) quando substituíram no modelo de Sims a taxa de juros dos papéis comerciais pela taxa de juros das Letras do Tesouro americano.

Os resultados acima sugerem, à primeira vista, a ineficácia da política monetária sobre o nível da atividade econômica. Essa grave conclusão motivou um grande debate entre os economistas. McCallum (1983), por exemplo, foi um dos primeiros a questionar as conclusões do trabalho de Sims, argumentando que, se a taxa de juros for um melhor indicador da política monetária do que a expansão da moeda, então a utilização desta última variável não poderia servir como evidência da ineficácia da política monetária. Esse ponto de vista foi corroborado por Bernanke e Blinder (1989), que mostraram ser a taxa dos fundos federais (variável fortemente correlacionada com a política monetária) muito informativa do curso futuro da economia.

Apesar dos estudos inspirados em Sims terem utilizado a taxa de juros como previsor do nível da atividade econômica, muitos dos trabalhos subseqüentes concluíram que também o *spread* entre as taxas de juros de distintos ativos seria útil na previsão não só do nível da atividade econômica mas ainda das variações tanto nas taxas de juros de curto prazo como na própria taxa de inflação.[3]

Neste ponto cumpre indagar: por que o *spread* entre taxas de juros seria útil em estudos de previsão? No que se refere à experiência dos Estados Unidos, há duas hipóteses básicas para a utilidade do *spread* entre as taxas de juros dos papéis comerciais e das Letras do Tesouro como previsor. A primeira (hipótese do risco de falência) é que o *spread*, por representar a percepção do mercado sobre o risco de falência na economia, indicaria a possibilidade de ocorrência de recessão.[4] A segunda hipótese sugere que o *spread* é um bom previsor por conter informação sobre a postura da política monetária (hipótese da política monetária).[5]

Este estudo está estruturado da seguinte forma: A Seção 2 trata formalmente a estrutura a termo para a taxa de juros, que relaciona as taxas de curto e de longo prazos. A Seção 3 discute o modelo de valor presente que resulta da estrutura a termo. A Seção 4 apresenta algumas das dificuldades com o desempenho empírico do modelo tanto para o caso americano como para o Brasil. Finalmente, a Seção 5 explora o uso da estrutura a termo na escolha do perfil (de curto ou longo prazo) da dívida pública.

---

3 Bernanke (1990) faz um breve resumo da evidência empírica do uso do *spread* entre taxas de juros como previsor da atividade econômica nos Estados Unidos.

4 Estrella e Mishkin (1996) mostram, por exemplo, que, para o caso americano, com o *spread* entre as taxas de juros das Notas do Tesouro de 10 anos e das Letras do Tesouro de três meses, os resultados das previsões para a recessão são superiores àqueles obtidos por três modelos de previsão de reconhecido prestígio, a saber: o índice de preço das ações da Bolsa de Valores de Nova York e os indicadores antecedentes da atividade econômica propostos pelo Departamento de Comércio e por Stock e Watson (1989), respectivamente.

5 Para detalhes adicionais, ver Bernanke (1990).

2 - Relação entre as taxas de curto e longo prazos

A relação entre as taxas de curto e longo prazos (estrutura a termo) é considerada aqui tanto para o caso dos títulos com desconto puro (cupom zero) como para os títulos com pagamento de cupom. Neste último caso a relação entre essas taxas de juros pode ser representada por um modelo de valor presente. Também a relação entre a taxa de juros de longo prazo e as taxas futuras de inflação é discutida abaixo no contexto de um modelo de valor presente. Finalmente, discute-se nesta seção a relação entre a taxa *spot* de juros e a taxa futura previamente contratada (*forward rate*).

2.1 - O caso do título com desconto puro (cupom zero)

Para estabelecer a relação entre as taxas de juros de curto e longo prazos no contexto de um título com desconto puro (cupom zero), considere-se inicialmente o caso sem incerteza, sem custo de transação, e com previsão perfeita. O investidor compara então o retorno de duas estratégias de aplicação financeira. Na primeira, compra um título do governo com vencimento em N, mantendo-o até essa data. Na segunda, compra uma Letra do Tesouro de um período, reinvestindo o resultado (principal mais os juros) na compra de uma nova Letra do Tesouro para o período seguinte, repetindo a operação N vezes. Cumpre ressaltar que a Letra do Tesouro é um tipo de ativo com desconto puro, pois não há qualquer pagamento de cupom. Vale dizer, o título é vendido com um desconto, sendo amortizado pelo seu valor de face. Desta forma, a percentagem do ganho de capital sobre o preço de compra é a taxa de juros que o ativo paga.

A condição de equilíbrio num mundo com previsão perfeita e sem custo de transação é que o retorno obtido com a aplicação de \$1,00 nas duas alternativas descritas seja idêntico. Mais precisamente, se R_t^N é a taxa de retorno por período obtida quando se mantém o título até o seu vencimento (*yield*), e r_t é a taxa de juros da Letra do Tesouro para um período, ambas no tempo t, tem-se: [6]

$$\left(1+R_t^N\right)^N=\left(1+r_t\right)\left(1+r_{t+1}\right)\ldots\left(1+r_{t+N-1}\right) \tag{1}$$

que é aproximada por:

$$R_t^N=\left(\frac{1}{N}\right)\left(r_t+r_{t+1}+\ldots r_{t+N-1}\right) \tag{2}$$

6 Para uma boa discussão sobre essa matéria, ver Begg (1982).

pois se r for próximo de zero pode-se usar a aproximação de Taylor $r = log(1+r)$.[7] Isto é, a taxa corrente de juros de longo prazo é uma simples média aritmética das taxas de juros por um período, válidas para cada período até o vencimento do título. É claro que, se as taxas de curto prazo permanecerem constantes, então a taxa corrente de longo prazo será igual à taxa corrente de curto prazo. Por outro lado, com taxas de curto prazo crescentes (decrescentes) ao longo dos períodos futuros, a taxa corrente de longo prazo estaria acima (abaixo) da taxa corrente de curto prazo.

No mercado de títulos (com ou sem cupom) há, de fato, um amplo espectro quanto à data dos seus vencimentos, indo desde os títulos que estão por vencer até o caso daqueles que na verdade jamais vencem, como ocorre, por exemplo, com uma perpetuidade que paga eternamente a taxa de juros correspondente ao valor do cupom. A estrutura a termo da taxa de juros é a relação, no tempo t, entre as taxas de retorno R_t^N para distintas datas de vencimento dos títulos, dadas por N. Vale dizer, a estrutura a termo mostra a ligação entre as taxas de juros de curto e de longo prazos. Como as taxas de juros de curto prazo respondem à política monetária e essas taxas afetam, conforme já se viu, as taxas de longo prazo, que são importantes nas decisões de investimento do setor privado, é importante que se conheça como essas taxas se inter-relacionam nas várias situações.

De fato, a curva de retorno (*yield curve*), a ser formalizada abaixo, é a expressão gráfica da estrutura a termo da taxa de juros de títulos, e indica a taxa corrente de retorno de longo prazo para distintos prazos de vencimento desses títulos. A curva de retorno típica tem inclinação positiva.[8] Assim, se R_t^N cresce com N é porque as taxas futuras de curto prazo estariam aumentando.[9]

---

7 Note-se que aplicando log na equação (1) vem: $Nlog\ (1+R_t^n) = log\ (1+r_t) + log\ (1+r_{t+1}) + log\ (1+r_{t+N-1})$, que, em vista da aproximação descrita acima, resulta na equação (2).

8 Conforme ressaltado por Campbell (1995), Hicks (1939) sugere que os títulos de longo prazo devem ter retorno maior do que os de curto prazo porque os tomadores de crédito preferem o longo prazo enquanto os fornecedores de crédito preferem o curto prazo. Campbell (1995) faz, de fato, considerações adicionais sobre esse ponto.

9 Segmentos da curva de retorno com inclinação negativa podem, entretanto, também ocorrer, como mostra, por exemplo, Campbell (1995) com dados para os Estados Unidos; ver as suas Figuras 1 e 3. De fato, há três teorias básicas que tentam explicar a inclinação da curva de retorno. Além da teoria da preferência pela liquidez, discutida na nota anterior, que sugere ser positiva a inclinação da curva de retorno, as duas outras, que podem resultar em qualquer inclinação para a curva, são a teoria das expectativas e a dos mercados segmentados. Na teoria das expectativas a taxa (*forward*) contratada para o futuro será dada pela expectativa do mercado com relação à taxa *spot* esperada para o futuro. Conforme se verá adiante, se a curva de retorno, por tal teoria, tem inclinação positiva, então a taxa *forward* será maior do que a taxa *spot* atual. Sendo a taxa *forward* um previsor da taxa *spot* futura, isso significa que o mercado espera um aumento na taxa *spot* entre o 1° e o 2° períodos. Já pela teoria dos mercados segmentados, os títulos de curto e longo prazos têm mercados separados cujos preços são então determinados pelas condições de oferta e demanda nos respectivos mercados. Um aperto monetário no mercado de longo prazo, por exemplo, resultaria numa estrutura a termo com inclinação positiva. Para considerações adicionais sobre esses pontos, ver Chance (1992).

Caso haja incerteza com relação às taxas futuras de juros, e sendo apenas as taxas correntes (de curto e longo prazos) conhecidas, a relação entre a taxa de longo prazo e as taxas de curto prazo seria dada por:

$$R_t^N = \left(\frac{1}{N}\right)\left[r_t + E_t r_{t+1} + \ldots + E_t r_{t+n-1}\right] \tag{3}$$

onde E_t é a expectativa com base no conjunto de informações disponíveis no tempo t. Se o investidor for avesso ao risco, será necessário adicionar um termo nesta relação para capitar o risco *ex post* do desvio das taxas de juros observadas daquelas inicialmente esperadas. Vale dizer, deve-se adicionar na equação (3) uma variável para o prêmio de risco.[10]

Freqüentemente é mais conveniente trabalhar com capitalização contínua, caso em que a taxa de retorno (*yield*) para um título com desconto puro (cupom zero), dada por R_{mt}, deve satisfazer à seguinte relação:[11]

$$P_{mt} = \frac{1}{(1+R_{mt})^m} \tag{4}$$

onde P_{mt} é o preço do título em t cujo vencimento é em m anos e que tem valor de face de \$1,00, definindo-se o retorno bruto como $(1+R_{mt})$. Com capitalização contínua a taxa de retorno até o vencimento (*yield*) pode ser aproximada pelo *log* natural do retorno bruto, como é demonstrado a seguir.[12] Considere-se:

---

10 No caso com dois períodos a equação (3) fica, após adicionar o termo para o prêmio de risco:

$$R_t^2 = \frac{1}{2}\left[r_t + E_t r_{t+1}\right] + \theta$$

onde θ é um termo constante (por pressuposto) para o prêmio de risco. Considere-se agora que as expectativas sejam racionais, de modo que:

$$r_{t+1} = E_t r_{t+1} + \varepsilon_{t+1}$$

onde ε_{t+1} é o erro de previsão, sendo ortogonal à informação disponível no tempo t. Após substituir essa equação na anterior e aplicando então esperança matemática em ambos os lados da equação, vem:

$$r_{t+1} - r_t = \alpha + \beta\left(R_t^2 - r_t\right) + v_{t+1}$$

Assim, conclui-se que o *spread* entre as taxas de curto e longo prazos prevê variações na taxa de curto prazo, com $\beta = 2$.

11 No restante desta seção, segue-se Campbell (1995), embora muitas das demonstrações de pé-de-página tenham sido aqui desenvolvidas.

12 Ressalte-se que para valores usuais da taxa de retorno essa aproximação é apenas razoável. Para usar o mesmo exemplo de Campbell (1995), se R_{mt}=7% então *log* (1,07) = 0,068; ou seja, 7% ao ano com capitalização uma vez por ano equivale à taxa de 6,8% ao ano com capitalização contínua.

$$(1+R_{mt})^m = \left(1+\frac{R_{m,n,t}}{n}\right)^{nm} \tag{5}$$

onde $R_{m,n,t}$ é a taxa por período que, capitalizada n vezes no período, equivale à taxa R_{mt} capitalizada apenas uma vez no período. Caso a capitalização seja contínua, tem-se:

$$\lim_{n\Rightarrow\infty}\left(1+\frac{R_{m,n,t}}{n}\right)^{n} = e^{R_{m,n,t}} \tag{6}$$

e, considerando este resultado na equação (5), vem:

$$R_{m,n,t} = \ln(1+R_{mt}) = r_{mt} \tag{7}$$

que, usado na equação (4), resulta em:

$$p_{mt} = -mr_{mt} \tag{8}$$

onde p_{mt}=ln P_{mt} e r_{mt} = ln(1 + R_{mt}), ou seja, o preço do título é inversamente proporcional à sua taxa de retorno de longo prazo. Mais precisamente, a duração, m, é a elasticidade do preço do título com relação à sua taxa de retorno de longo prazo (*yield*). Desta forma, se o título vence em 10 anos, segue-se que o aumento de 1% na sua taxa de retorno de longo prazo resulta em queda de 10% no preço do título, enquanto que se o vencimento for em 30 anos a queda de preço seria de 30%.

Note-se que quando se negocia um título antes do seu vencimento obtém-se a chamada taxa de retorno por período de retenção, que é assim definida: [13]

$$h_{m,t+1} = p_{m-1,t+1} - p_{mt} \tag{9}$$

13 Em Campbell (1995) o subíndice do lado direito dessa equação aparece como t-1, ao invés de t+1. Esse erro acaba afetando também o seu resultado correspondente à nossa equação (10), que em Campbell aparece com o subíndice igualmente incorreto.

Em vista do resultado em (8), tem-se:

$$h_{m,t+1} = r_{mt} - (m-1)(r_{m-1,t+1} - r_{mt}) \tag{10}$$

isto é, o (*log* do) retorno pela retenção do título por um período único é igual ao retorno corrente do título de longo prazo, caso este seja mantido até o vencimento, menos a variação desse retorno (de longo prazo) durante o período em que o título é retido, vezes o período restante até o vencimento do título por ocasião da sua venda.

Da equação (10) vem:

$$r_{mt} = \frac{1}{m}\left[h_{m,t+1} + (m-1)r_{m-1,t+1}\right] \tag{11}$$

que pode ser escrita como: [14]

$$r_{mt} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m} h_{m-i,t+i+1} \tag{12}$$

Assim, a taxa de retorno de longo prazo é uma média simples das taxas de retorno pela retenção do título por um período durante os vários períodos até o vencimento do título.[15]

Como o retorno de longo prazo e o retorno pela retenção por um período de um título de longo prazo são, em geral, medidos relativamente ao retorno de um título para um período, estabelece-se aqui a relação entre essas várias taxas com base no resultado da equação (10), a saber:

---

14 Para um período adiante a equação (11) seria $r_{m-1,t+1} = 1/m\text{-}1[h_{m-1,t+2} + (m\text{-}2)r_{m-2,t+2}]$. Após substituir esta equação na equação (11) vem: $r_{mt} = 1/m[h_{m,t+1} + h_{m-1,t+2} + (m\text{-}2)r_{m-2,t+2}]$; note-se que $r_{mt} = 1/m[h_{m,t+1} + m\text{-}1/m\text{-}1[h_{m-1,t+2} + (m\text{-}2)r_{m-2,t+2}]]$. Substituindo $r_{m-2,t+2}$ nesta equação produz: $r_{mt} = 1/m\,[h_{m,t+1} + h_{m-1,t+2} + [h_{m-2,t+3} + m\text{-}3/m\; r_{m-3,t+3}]]$; note-se que $r_{mt} = 1/m[h_{m,t+1} + h_{m-1,t+2} + (m\text{-}2)/m\text{-}2\,[h_{m-2,t+3} + (m\text{-}3)\; r_{m-3,t+3}]]$. Substituições sucessivas desse tipo resultam, finalmente, na equação (12), já que o último termo da equação seria $[(m\text{-}m)/m]\; r_{m-m,t+m} = 0$.

15 Note-se que este resultado é semelhante àquele da equação (2), só que as taxas de curto prazo daquele resultado são aqui substituídas pelas taxas de retorno por período de retenção dos títulos de longo prazo.

$$h_{m,t+1} - r_{1t} = r_{mt} - r_{1t} - (m-1)(r_{m-1,t+1} - r_{mt}) \tag{13}$$

onde os termos $h_{m,\,t+1} - r_{1t}$ e $r_{mt} - r_{1t}$ são, respectivamente, o excesso de retorno de curto prazo (isto é, o quanto a taxa de retorno pela retenção de um título de longo prazo por um período excede aquela para um título de curto prazo) e o *spread* entre os retornos de longo e curto prazos.

É bom ressaltar que as taxas de retorno (*yield*) de curto prazo variam no tempo, em geral, bem mais do que aquelas de longo prazo. Isso não impede, todavia, que haja grande variabilidade no retorno por período de retenção dos títulos de longo prazo. A decomposição em (13) pode ser, neste particular, bastante esclarecedora. Por exemplo, Campbell (1995) mostra, com dados para os Estados Unidos, que o excesso de retorno cresce para títulos até um ano, decrescendo daí em diante até tornar-se negativo para títulos de 10 anos. Isso apesar do *spread* entre os retornos de curto e longo prazos ter aumentado no período e terem aumentado também as taxas de retorno de longo prazo. Tal resultado, que é surpreendente à primeira vista, ocorre porque variações nas taxas de retorno (*yield*) provocam mudanças no preço dos títulos que são mais acentuadas para aqueles de longo prazo, conforme se viu na equação (8). A perda de capital que isso representa afeta mais, obviamente, o retorno por período de retenção dos títulos de longo prazo — ver equação (13).

Neste ponto cabe discutir a hipótese das expectativas em que se baseia a estrutura a termo da taxa de juros. Primeiramente, ressalte-se que, sendo a taxa de retorno (*yield*) de longo prazo de um título com cupom zero conhecida com certeza, então qualquer variação inesperada no preço do título terá que ser compensada adiante com variação nesse preço que seja em sentido contrário, de modo a obter-se, dada a sua taxa de retorno (*yield*), o valor de face do título. Vale dizer, essas variações são negativamente autocorrelacionadas e, portanto, previsíveis. O que não impede, entretanto, ser imprevisível o excesso de retorno por período de retenção dos títulos de longo prazo.[16] Isso sugere que o investidor necessita formar expectativas a respeito do retorno esperado na sua aplicação financeira.

Para mostrar como as expectativas são formadas nesse mercado, usa-se aqui a mesma ilustração adotada por Campbell (1995). Suponha-se inicialmente que o retorno (*yield*) de um título de 30 anos seja de 7%, enquanto que aquele para um título de um ano seja de apenas 4%. Numa primeira apreciação o título de 30 anos parece o mais rentável. O fato, porém, é que, enquanto o retorno de 4% é certo em um ano, o retorno de 7% só o é em 30 anos. Assim, por referirem-se a distintos horizontes de tempo, os dois retornos não são comparáveis.

Num raciocínio mais sofisticado deve-se levar em conta o fato de o título de longo prazo poder ser negociado dentro de um dado período de tempo. Neste caso, o retorno de 7% no período (ou seja, um excesso de retorno por período de retenção de 3% sobre o título de um ano) só seria obtido caso o retorno (*yield*) do título de longo prazo permanecesse inalterado em 7%. Uma outra possibilidade seria um excesso de retorno por período

16 Este resultado é formalizado adiante no contexto de um título com pagamento de cupom.

de retenção igual a zero, que ocorreria caso o preço do título aumentasse de 4% em um período de um ano, em vez dos 7% supostos inicialmente. Isso requer um aumento na taxa de retorno de longo prazo (*yield*) do título de 30 anos, passando de 7% para 7,1%.[17]

Suponha-se agora a estratégia representada pela rolagem sucessiva dos títulos de um ano durante 30 anos (período de vencimento do título de longo prazo). É claro que, dado o retorno de 4% do primeiro ano, isso só renderia o mesmo que o retorno (*yield*) do título de longo prazo se nos 29 anos seguintes o retorno médio das aplicações de curto prazo fosse de 7,1%.[18]

A hipótese das expectativas da estrutura a termo sugere um comportamento tal que torne idêntico o retorno nas estratégias de investimento de curto e de longo prazos (descritas acima, por exemplo). Conforme foi discutido, se o retorno de longo prazo (*yield*) exceder o de curto prazo, o primeiro deve aumentar ainda mais para que possa gerar uma perda de capital no título de longo prazo e, assim, compensar a vantagem inicial do *spread* entre o seu retorno (*yield*) e o do título de curto prazo. Mostrou-se na ilustração acima qual deva ser esse aumento no retorno de longo prazo. De fato, da equação (13) vê-se que isso deve ser igual a $1/(m\text{-}1)$ vezes o atual *spread* dos retornos (*yield*) de curto e longo prazos.[19]

Já da segunda ilustração, viu-se que a taxa média de curto prazo deve igualar (ao longo da vida do título de longo prazo) a taxa corrente de retorno (*yield*) do título de longo prazo. Assim, requer-se que a diferença entre a taxa média de curto prazo ao longo dos $(m\text{-}1)$ períodos restantes e a taxa corrente de curto prazo seja igual a $m/(m\text{-}1)$ vezes o *spread* corrente entre as taxas de retorno de longo (*yield*) e de curto prazos.[20]

---

17 Isso pode assim ser demonstrado: da equação (9) tem-se que o retorno por um período de um título de 30 anos é $30r_{30,t} - 29r_{29,t+1}$, que só é igual a 0,04 (quando $r_{30,t} = 0{,}07$) se $r_{29,t+1} = 0{,}071$.

18 Mais precisamente, tem-se $(1+0{,}07)^{30} = (1+0{,}04)(1+0{,}071)^{29}$, que, com taxas reduzidas, pode ser aproximado por $30(0{,}07) = 0{,}04 + 29(0{,}071)$.

19 O teste empírico seria, pois, obtido da regressão $r_{m-1,t+1} - r_{mt} = \alpha+\beta(r_{mt} - r_{1t}) / (m\text{-}1)$, com $\beta=1$. Cuidados especiais devem ser tomados para evitar erro de mensuração com relação à taxa de retorno de longo prazo, pois como essa variável tem o sinal negativo à esquerda da equação e positivo à direita tal erro tenderia a produzir sinal negativo para o coeficiente β. O uso de variáveis instrumentais seria recomendado em tais circunstâncias, onde os instrumentos devem ser correlacionados com o *spread* dos retornos (*yield*), mas não com o retorno (*yield*) que foi medido com erro; para considerações adicionais, ver Campbell (1995). Campbell sugere que a mesma informação contida nessa regressão é também obtida da regressão do excesso de retorno por período de retenção de um título de longo prazo contra o *spread* dos retornos (*yield*) de curto e de longo prazos. O coeficiente da inclinação dessa segunda regressão seria $1\text{-}\beta$, que sendo positivo indicaria obviamente uma relação direta entre o *spread* dos retornos (*yield*) e o excesso de retorno por retenção de um título de longo prazo.

20 A derivação desse resultado é, usando o exemplo no texto, como se segue: $[(1+x)^{29}(1+0{,}04)]^{1/30} = (1+0{,}07)$, ou $[(1+x)/(1+0{,}04)]^{29/30} = (1+0{,}07)/(1+0{,}04)$, dando, pois, aproximadamente $(x\text{-}0{,}04) = (30/29)\,(0{,}07 - 0{,}04)$, onde x é a taxa de retorno desejada. Isso pode ser testado empiricamente através da seguinte regressão:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{r_{1,t+i}}{(m-1)} - r_{1t} = \alpha + \beta\left(\frac{m}{(m-1)}\right)(r_{mt} - r_{1t})$$

com $\beta=1$. Campbell (1995) sugere que essa regressão contém a mesma informação que aquela entre $(1/m)$ vezes o excesso do retorno por retenção, ao longo de m períodos, de um título com vencimento em m contra o *spread* entre os retornos (*yield*). O coeficiente para a inclinação dessa regressão seria $1\text{-}\beta$.

2.2 - A taxa de juros futura previamente contratada (*forward rate*)

Em vista da incerteza com relação à taxa de juros futura, o investidor pode preferir contratar esse valor previamente (*forward rate*). A taxa de juros contratada é obtida das taxas (*spot*) de juros para períodos de tempo no futuro.[21] Suponha-se, por exemplo, que as taxas *spot* para investimentos de um e dois anos sejam, respectivamente, 10 e 11%. Assim, a taxa futura, contratada para vigorar entre o primeiro e o segundo anos, deve ter valor tal que, uma vez considerada a taxa *spot* para o investimento de um ano (10%), renderia o mesmo que uma aplicação de dois anos contratada à taxa *spot* de 11%. Mais precisamente, usando-se capitalização contínua e considerando-se um capital de $1,00, tem-se:[22]

$$e^{0,10}e^{f} = e^{0,11(2)} \tag{14}$$

ou seja, $f = 0{,}12$, ou 12%, que é, pois, a taxa futura para o segundo ano.

Considere-se agora que a taxa *spot* de um investimento de cinco anos seja 12,5% ao ano. A taxa futura para o período entre os anos 2 e 5 seria, neste caso (note-se que a taxa de um investimento de dois anos é 11% ao ano):

$$e^{0,11(2)}e^{f(5-2)} = e^{0,125(5)} \tag{15}$$

isto é, $f = 0{,}135$, ou 13,5%, que é, pois, a taxa futura para o período entre os anos dois e cinco.

Vê-se, assim, que a relação entre a taxa contratada para o futuro e as taxas *spot* é dada por:

$$f = \frac{\left(r^{*}m^{*} - rm\right)}{\left(m^{*} - m\right)} \tag{16}$$

---

21 De fato, o agente econômico antes de fechar o contrato em t para a taxa futura a prevalecer no período t+1 compara esta taxa com aquela esperada para t+1, caso decida tomar o empréstimo naquela ocasião. A teoria das expectativas para a estrutura a termo supõe que as forças de mercado igualem a taxa negociada para o futuro à taxa *spot* esperada para o futuro, acrescida de um termo para o prêmio de risco. Desta forma, considerando apenas o caso para um período tem-se: $f = E_t(r_{t+1}) + \theta$, onde f é a taxa futura e θ reflete a diferença de risco nas duas estratégias (isto é, contratar hoje a taxa futura de juros ou assumir o risco de enfrentar uma taxa maior caso se tome o empréstimo adiante à taxa de juros corrente).

22 Sobre isto ver Hull (1993).

onde f, r e r^* são, respectivamente, a taxa futura, e as taxas *spot* para investimentos em m e m^*, onde $m^* > m$. Note-se que esta equação pode ser reescrita como: [23]

$$f = r^* + \frac{\left(r^* - r\right)m}{(m^* - m)} \qquad (17)$$

Observe-se que, quando m se aproxima de m^* e, conseqüentemente, r se aproxima de r^*, a equação (17) fica: [24]

$$f = r + \frac{m\partial r}{\partial m} \qquad (18)$$

onde dr/dm é a inclinação da curva de retorno. Essa equação dá a taxa futura instantânea para vencimento em m. Note-se que a relação entre a taxa futura e a taxa de retorno para um título com cupom zero é análoga àquela entre os custos médio e marginal. Vale dizer, se a curva de retorno tem inclinação positiva (negativa), então a curva para a taxa futura (espécie de custo marginal resultante da extensão no período do empréstimo) situa-se acima (abaixo) da curva do retorno de longo prazo do título (custo médio do empréstimo por m períodos). [25] É claro que, se a inclinação desta última curva for nula, então ali as duas taxas são idênticas. Observe-se ainda que, se a curva de retorno tem inclinação positiva, então $r^*>r$, e, neste caso, $f>r^*>r$.

A relação entre as taxas *spot* (de curto e de longo prazos) e as taxas futuras contratadas pode ser alternativamente apresentada como em Shiller (1990). Assim, seja $P(t,T)$ o preço de mercado, no tempo t, de um título que promete amortizar, no seu vencimento em T, o principal de $1,00, onde $t<T$. O termo do título, m, é o tempo até o seu vencimento, isto é, $m=T-t$. O preço $P(t,T)$ aumenta gradualmente com o tempo até alcançar o valor $1,00 em T, e é este aumento de preço que dá o retorno do ativo. Mais precisamente, o retorno,

---

23 Para obter esse resultado basta somar e simultaneamente subtrair $r^*m/(m^* - m)$ no lado direito da equação (16).

24 Ver, a respeito, Hull (1993) ou Campbell (1995). Para uma demonstração formal desse resultado basta usar o conceito de limite. Note-se que a derivada nada mais é que o limite de uma razão quando o seu denominador tende a zero. Assim, se definirmos $dr=r^*-r$ e $dm = m^*-m$, segue-se que, quando m^* tende para m, dm tende para zero e conseqüentemente o limite da razão dr/dm é a própria derivada.

25 Ressalte-se ainda que, se a curva de retorno tem inclinação positiva, então a curva para os títulos com cupom fica abaixo da curva com cupom zero, pois, havendo no primeiro caso pagamentos antes do vencimento do título, segue-se que a taxa de desconto para tais pagamentos deve ser menor do que aquela para o último pagamento. Assim, no caso de inclinação positiva para a curva de retorno, a ordenação para as curvas das três taxas de retorno é da mais alta para a mais baixa: taxa futura instantânea, taxa de retorno com cupom zero e taxa de retorno com pagamento de cupom. Inverte-se essa ordenação quando a curva de retorno tem inclinação negativa. Para considerações adicionais sobre esses pontos ver Hull (1993).

$r(t,T)$ é a taxa de juros no tempo t que, num regime com capitalização contínua, faria $P(t,T)$ atingir o valor unitário no tempo T. Vale dizer:[26]

$$P(t,T)e^{(T-t)r(t,T)} = 1 \tag{19}$$

de modo que a taxa de retorno até o vencimento seria:

$$r(t,T) = -\ln P(t,T)/(T-t) \tag{20}$$

É interessante notar que a estrutura a termo em qualquer data contém implicitamente a taxa de juros futura.[27] Por exemplo, se a estrutura a termo for decrescente entre o primeiro e o segundo ano, então tem-se implicitamente que a taxa de juros de um ano será menor no próximo ano do que no corrente ano. Para garantir a taxa de juros futura o investidor tem que comprar e vender títulos com distinto prazo de vencimento. Assim, suponha-se que seja emitido hoje um título que promete pagar \$1,00 em T. Conforme vimos em (19), o preço desse título em t seria $P(t,T)$. Suponha-se agora que essa quantia fosse aplicada em títulos para serem resgatados em t'. Assim, em t' tem-se:

$$P(t,T)e^{(t'-t)r(t,t')} \tag{21}$$

Se o investidor negociar, ainda em t, a aplicação dessa importância a uma taxa futura para o período $(T-t')$, de modo que em T obtivesse \$1,00, viria então:

$$P(t,T)e^{(t'-t)r(t,t')}e^{(T-t')f(t,t',T)} = 1 \tag{22}$$

onde $f(t,t',T)$ é a taxa (*forward*) contratada em t para vigorar de t' a T.

Note-se que assim como se procedeu com relação à equação em (19) tem-se aqui que o preço de um título, hoje, que promete pagar \$1,00 no vencimento em t', deve satisfazer à seguinte equação:

---

26 É claro que, com base nesta equação, o preço do ativo no tempo t', $t < t' < T$, seria:
$P(t,T)\, e^{(t'-t)r(t,T)}$.

27 A estrutura a termo da taxa de juros discutida anteriormente é, agora, a função que relaciona $r(t,T+m)$ a m, com a primeira dessas variáveis sendo a taxa de retorno de um título com vencimento em m.

$$P(t,t')e^{(t'-t)r(t,t')} = 1 \tag{23}$$

Combinando (22) e (23) vem:

$$f(t,t',T) = -\ln[P(t,T)/P(t,t')]/(T-t') \tag{24}$$

que é, pois, a taxa futura contratada em t para vigorar de t' a T.

De (24) é fácil obter:

$$r(t,T) = [(t'-t)r(t,t') + (T-t')f(t,t',T)]/(T-t) \tag{25}$$

isto é, a taxa para o período completo é uma média ponderada da taxa *spot* do primeiro subperíodo e da taxa futura do segundo subperíodo. Resolvendo-se a equação (25) para $f(t,t',T)$ tem-se o mesmo resultado da equação (16).

2.3 - O caso do título do governo com cupom e o modelo de valor presente

Um título do governo caracteriza-se pela data de vencimento e pelo fluxo de pagamentos (valor do cupom) regulares. Assim, o preço corrente de um ativo desse tipo é simplesmente o valor presente do fluxo de pagamentos até o seu vencimento mais o valor presente da quantia que o título promete pagar no seu vencimento (valor de face). Mais precisamente, a relação entre essas variáveis é, supondo valor de face unitário e cupom de c, dada por:

$$P_t^N = \sum_{i=1}^{N} \frac{c}{\left(1+R_t^N\right)^i} + \frac{1}{\left(1+R_t^N\right)^N} \tag{26}$$

Supondo que o equilíbrio no mercado depende do retorno esperado, seria idêntico então o retorno de todos os títulos com vencimento em N, mesmo que tenham distintos pagamentos de cupom, c. É claro que, se o pagamento de cupom é menor, o preço de mercado do título ajusta-se de modo a compatibilizá-lo com a taxa de retorno de longo prazo dos outros títulos. Desta forma, se a data de vencimento dos títulos for idêntica e também o seu valor de face, segue-se que os títulos com menor pagamento de cupom teriam menor preço corrente, e assim maior ganho de capital no seu vencimento.[28]

Para estabelecer agora um resultado semelhante ao da equação (8), que relaciona o preço do título com cupom zero à data do seu vencimento, considere-se o caso do título com pagamento de cupom igual a c, que ocorre no tempo t ($1<t<n$). Neste caso, o preço do título, P, e a sua taxa de retorno de longo prazo com capitalização contínua, r, estariam assim relacionados:

$$P = \sum_{t=1}^{n} c_t e^{-rt} \tag{27}$$

A duração (*duration*) do título, que desempenha aqui papel semelhante ao da data de vencimento do caso do título com cupom zero, é definida como [ver Hull (1993)]:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{N} t \; c_t e^{-rt}}{P} \tag{28}$$

A duração de um título é, na verdade, uma medida do tamanho e *timing* do seu fluxo de caixa, ou o quanto se deve esperar em média para receber os pagamentos que o título promete efetuar. Note-se, neste particular, que um título com cupom zero tem duração igual à data do seu vencimento. Já um título com cupom tem duração menor do que a sua data de vencimento, pois há pagamentos anteriores a essa data.

Note-se que:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\sum_{t=1}^{n} t c_t e^{-rt} = -PD \tag{29}$$

Segue-se, pois: [29]

$$\frac{\partial P}{P} = -Ddr \tag{30}$$

---

28 Nessas considerações supôs-se o mesmo tratamento tributário para os ganhos de capital, e os rendimentos com juros e dividendos. Todavia, se na prática o ganho de capital tiver tributação menor, então os títulos com menor cupom, tendo uma parcela maior dos seus ganhos representada pelo ganho de capital, dariam um retorno bruto menor. Sobre esses pontos, ver Begg (1982).

29 Caso o pagamento de cupom seja anual, essa expressão fica [conforme Hull (1993)]:

$$\frac{dP}{P} = \frac{-Ddr}{1+r}$$

e, com o pagamento do cupom sendo duas vezes por ano, o denominador dessa expressão seria $1 + r/2$, em vez de $1 + r$ [ver Chance (1992)].

que difere do resultado em (8) apenas pela substituição do conceito de vencimento pelo de duração do título. Uma vez mais, o preço do título é inversamente proporcional à sua taxa de retorno de longo prazo (*yield*).

Quanto à relação entre as taxas de juros de curto e longo prazos, Shiller (1979) argumenta que, distintamente do caso de um título com desconto puro (cupom zero), se o título for uma perpetuidade e/ou tem pagamento de cupom e vencimento em n, então as taxas de juros de um futuro mais próximo deveriam ter peso maior na formação da taxa de longo prazo do que as taxas de juros para um futuro mais distante. Mais especificamente, a relação entre as taxas de curto e de longo prazos proposta por Shiller é o seguinte modelo de valor presente:

$$R_t^n = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^n} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i E_t \left(r_{t+i} \right) \tag{31}$$

que é obtido com base na linearização, ao redor da constante $\alpha = 1/(1+r)$, da relação exata da estrutura a termo de um título com vencimento em n e pagamento de cupom, onde r é uma média da taxa de juros de longo prazo.[30] Nesta versão o esquema de pesos adotado segue uma função exponencial truncada.

Vê-se que, se n tende a infinito (caso de uma perpetuidade), a equação acima reduz-se a: [31]

$$R_t^n = (1-\alpha) \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i E_t \left(r_{t+i} \right) \tag{32}$$

que é o resultado derivado em Mankiw (1986). A partir desta equação obtém-se: [32]

---

30 Cushing e Ackert (1994) ressaltam que há alguns pressupostos restritivos por traz desse resultado, dentre os quais o de um valor constante para o termo do prêmio de risco. Além disso, os autores argumentam que ao mesmo tempo em que Campbell (1986) procura defender essa equação também reconhece que a aproximação linear usada na sua derivação só seria válida caso as taxas de juros de curto prazo não variassem muito no tempo. Ocorre que, como sugere Shea (1991), a variação dessas taxas, pelo menos nos Estados Unidos do pós-guerra, é suficientemente grande para que a aproximação linear possa ser justificada.

31 Com taxas de juros variáveis essa equação ficaria [ver Mills (1993)]:

$$R_t^n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_{t+j} \right) E r_{t+i}$$

onde $\delta_t = \frac{1}{(1+r_t)}$.

32 Esse resultado pode ser assim demonstrado:

$$R_t^\infty - r_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i E_t r_{t+i} - r_t - \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i E_t r_{t+i} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i E_t r_{t+i} - \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i E_t r_{t+i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i E_t \Delta r_{t+i}$$

Note-se que $\alpha^0 E_t r_t = r_t$.

$$R_t^{\infty} - r_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i E_t \Delta r_{t+i} \tag{33}$$

Desta forma, se o *spread* for elevado, as taxas futuras de curto prazo devem estar em média acima da taxa corrente de curto prazo. Alternativamente, o *spread* atual entre as taxas de curto e de longo prazos é um previsor das variações futuras das taxas de curto prazo.

Um aspecto útil dessa relação para a realização de testes empíricos é que, se a ordem de integração (isto é, o número de diferenciações para tornar a série estacionária) da taxa de curto prazo e da taxa de longo prazo for igual a 1, $I(1)$, o *spread* deve ser estacionário, $I(0)$. Neste caso, há co-integração (isto é, equilíbrio de longo prazo) entre as taxas de curto e de longo prazos, e o vetor de co-integração é (1, -1).

2.4 - A relação entre a taxa de juros de longo prazo e a taxa de inflação futura

Um segundo modelo de valor presente pode ser ainda aqui obtido tendo a taxa de juros corrente de longo prazo como previsor das taxas de inflação futura. Mais precisamente, com base na equação de Fisher e considerando a linearização do retorno de uma perpetuidade, nos moldes da discussão no contexto das equações (32) e (33), obtém-se, conforme Shiller e Siegel (1977) e Engsted (1992):

$$R_t^{\infty} = \rho + (1-b)\sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t \pi_{t+j} \tag{34}$$

onde ρ é a taxa de juros real (constante), π é a taxa de inflação e $b = \dfrac{1}{1+\rho}$.

Assim como se procedeu no caso do *spread* entre as taxas de juros de curto e de longo prazos, pode-se transformar a equação (34) de modo a torná-la mais adequada ao teste empírico. Com esse objetivo, após subtrair $b\pi$ de ambos os lados da equação vem:

$$R_t - b\pi_t = \rho + \sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t \Delta\pi_{t+j} \tag{35}$$

Desta forma, se tanto a taxa de inflação como a taxa de juros de longo prazo forem $I(1)$, então a diferença entre essas variáveis deve ser $I(0)$, já que a primeira diferença da taxa de inflação seria neste caso $I(0)$. Vale dizer, as variáveis taxa de juros e taxa de inflação devem co-integrar, com vetor de co-integração $(1, -b)$.

3 - A implementação do modelo de valor presente

As duas versões do modelo de valor presente apresentadas nas equações (33) e (35) podem ser testadas estimando um modelo VAR com restrições nos parâmetros, como demonstrado a seguir, com base em Campbell e Shiller (1987). Tendo os dois modelos basicamente a mesma forma, basta usar um deles na exposição. Assim, seja o modelo:[33]

$$S_t = R_t^{\infty} - r_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i E_t \Delta r_{t+i} \tag{36}$$

que mostra, conforme já foi discutido, o *spread* entre as taxas de curto e de longo prazos, S_t, como uma função das variações futuras na taxas de juros de curto prazo, Δr_{t+i}.

Da decomposição de Wold sabe-se que, se as duas variáveis que compõem S_t em (36) forem não-estacionárias, mas co-integrarem (isto é, uma combinação linear delas seria estacionária), então aquela equação teria uma representação VAR bivariada de ordem infinita. Tal modelo pode ser aproximado por um sistema VAR contendo p defasagens, com p suficientemente elevado, como indicado em (37):

$$\begin{bmatrix} \Delta r_t \\ S_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(L) & b(L) \\ c(L) & d(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r_{t-1} \\ S_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \tag{37}$$

onde $a(L) = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + ... + a_p L^{p-1}$, com L sendo o operador de defasagens (*lag operator*). Isso pode ser escrito, alternativamente, como:

$$\begin{bmatrix} \Delta r_t \\ \Delta r_{t-p+1} \\ S_t \\ S_{t-p+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \dots a_p & b_1 \dots b_p \\ I_{p-1} & 0 \\ c_1 \dots c_p & d_1 \dots d_p \\ 0 & I_{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r_{t-1} \\ \Delta r_{t-p} \\ S_{t-1} \\ S_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ 0 \\ u_{2t} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

33 Esta equação é idêntica àquela dada em (33), e só é aqui reproduzida por conveniência.

Campbell e Shiller (1987) demonstram que modelos de valor presente equivalem a estimar modelos VAR com restrições impostas nos seus parâmetros, que seriam no caso presente como indicado em (39): [34]

$$a_1 = -c_1, \ldots, a_p = -c_p, \; d_1 + b_1 = \alpha^{-1}, \; b_2 = -d_2, \ldots, \; b_p = -d_p \tag{39}$$

isto é, a aceitação dessas restrições significa que o modelo de valor presente não pode ser rejeitado.

A versão VAR dos dois modelos de valor presente aqui discutidos permite ainda testar a direção de causalidade entre as variáveis do modelo. Por exemplo, a equação (36) sugere que a relação de causalidade de Granger vai de S_t para Δ_{rt}, já que nele testa-se a precedência temporal de uma variável sobre a outra. Assim, o teste de causalidade seria, neste caso, obtido testando-se, na equação (37), $c(L) = 0$ e $b(L) \neq 0$. A inversão desses resultados muda, é claro, a direção de causalidade, e se ambos os conjuntos de parâmetros forem diferentes de zero a relação de causalidade é, então, bidirecional.

As restrições acima permitem uma interpretação interessante para o problema da relação entre as taxas de juros de curto e longo prazos. Mais precisamente, somando as duas equações do modelo VAR obtém-se:

$$\Delta r_{t+1} + S_{t+1} = \sum_{i=1}^{p} (a_i + c_i) \Delta r_{t+1-i} + \sum_{i=1}^{p} (b_i + d_i) S_{t+1-i} + u_{1t+1} + u_{2t+1} \tag{40}$$

que, após levar em conta as restrições dadas em (39), vem:

$$\Delta r_{t+1} + S_{t+1} - \alpha^{-1} S_t = u_{1t+1} + u_{2t+1} = u_t \tag{41}$$

---

34 Note-se que em notação matricial a equação (38) seria $z_t = Az_{t-1} + v_t$, onde $z_t = [\Delta r_t \ldots \Delta r_{t-p+1} S_t \ldots S_{t-p+1}]'$ e $v_t = [u_{1t} 0 \ldots 0 \;\; u_{2t} 0 \ldots 0]$, de onde se obtém a previsão condicionada $E_t z_{t+j} = A^j z_t$. Desta forma, a variável do lado direito da equação (36) pode ser escrita como $E_t \Delta r_{t+j} = h' A^i z_t$, onde h' é um vetor linha tendo a unidade como primeiro elemento, com todos os demais elementos sendo zero. Do mesmo modo, para a variável do lado esquerdo da equação (36) tem-se $S_t = g' z_t$, onde g' é um vetor linha que consiste em p zeros, seguidos do número 1, e novamente p - 1 zeros. Esses dois últimos resultados substituídos no modelo de valor presente da equação (36) produzem $g' z_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i h' A^i z_t$. Considere-se, em seguida, a seguinte aproximação: $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i A^i = \alpha A [I - bA]^{-1}$, o que permite escrever a equação como $g' z_t = h' \alpha A [I - \alpha A]^{-1} z_t$, ou, mais simplesmente, $g' [I - \alpha A] = h' \alpha A$, onde I é a matriz identidade com a mesma dimensão da matriz A. Assim, o modelo de valor presente da equação (36) equivale a estimar o modelo VAR em (37) com as restrições em (39).

de onde se obtém: [35]

$$r_t - \frac{\alpha R_{t+1} - R_t}{1-\alpha} = u_t \tag{42}$$

Este resultado mostra que as restrições no modelo VAR equivalem à hipótese de que o excesso de retorno $H_{t+1} - r_t$ é imprevisível, dada a informação sobre os valores passados de Δr_t e S_t.[36] Isso significa que se poderia testar, alternativamente, as restrições no modelo VAR apresentadas acima testando na regressão em (43) a hipótese nula H_0:β=0:

$$H_{t+1} - r_t = \alpha + \beta X_t + u_t \tag{43}$$

onde:

$$X_t = \left(\Delta r_t, \ldots, \Delta r_{t-p+1}, S_t \ldots, S_{t-p+1}\right) \tag{44}$$

4 - Dificuldades com o teste empírico

4.1- O caso dos Estados Unidos

Apesar da elegância analítica do modelo de valor presente para a estrutura a termo da taxa de juros, o seu desempenho no teste empírico deixa a desejar, pois o modelo tem sido rejeitado por um bom número dos trabalhos que utilizaram dados do pós-guerra para a economia norte-americana, por exemplo. Vale a pena, neste particular, registrar o desapontamento de Shiller, Campbell e Schoenholtz (1983) com o uso do *spread* entre as taxas de juros das Letras do Tesouro americano de seis e três meses para prever as variações

35 Note-se que essa equação pode ser escrita como:

$$r_{t+1} - r_t + R^{\infty}_{t+1} - r_{t+1} - \alpha^{-1}\left(R^{\infty}_t - r_t\right) = u_t \quad \text{ou} \quad \alpha^{-1} r_t - r_t + R^{\infty}_{t+1} - \alpha^{-1} R^{\infty}_t = u_t$$

permitindo obter: $r_t - \alpha r_t + \alpha R^{\infty}_{t+1} - R^{\infty}_t = u_t$ ou $r_t - \frac{\alpha R^{\infty}_{t+1} - R^{\infty}_t}{(1-\alpha)} = u_t$

36 Conforme demonstrado por Shiller (1979), o segundo termo à esquerda da igualdade na equação (42) é a taxa de retorno (H_{t+1}) entre o período t e t+1 de uma perpetuidade que paga um cupom de $1,00 por período.

futuras nas taxas de três meses: "A teoria simples de que a inclinação da estrutura a termo pode ser usada para prever a direção de mudanças futuras na taxa de juros parece não ter qualquer utilidade".[37] De fato, o desempenho desfavorável nos testes tem sido interpretado como uma rejeição da teoria das expectativas racionais em que se baseia o modelo da estrutura a termo.

Embora seja longa a lista de trabalhos com rejeição do modelo de valor presente, em alguns casos constatou-se que o *spread* entre taxas de juros pode ajudar na previsão das taxas de juros futuras, principalmente em se tratando de taxas situadas nas extremidades da curva de retorno. Isso ocorre porque a política operacional do Federal Reserve Bank (Fed) privilegia as intervenções para estabilizar os juros de médio prazo, eliminando assim a possibilidade de previsão das taxas de juros no meio da curva de retorno.[38]

Nessa confrontação entre a rejeição e a aceitação do modelo o trabalho de Mankiw e Miron (1986) é digno de nota, pois alimenta, na verdade, os dois lados da disputa. Enquanto com dados até 1914, ano da criação do Fed, o *spread* entre as taxas de juros de curto e de longo prazos ajuda na previsão das taxas de juros de curto prazo, os resultados com dados posteriores a 1914 são desfavoráveis ao modelo. Os autores sugerem que estes últimos não devem ser vistos como uma rejeição da hipótese das expectativas racionais em que se baseia o modelo. De fato, como o Fed centrou os seus esforços na estabilização das taxas de juros de curto prazo, a série dessa variável passou a ter um comportamento do tipo passeio aleatório (*random walk*), vale dizer, a série tornou-se imprevisível. Desta forma, mesmo com as expectativas sendo racionais, não se poderia obter da curva de retorno a evidência empírica desejada, já que sem variações futuras nas taxas de curto prazo não haveria informação a incorporar no *spread* das taxas. Essa possibilidade motivou, aliás, o trabalho de Rudebusch (1995), que é, na verdade, uma tentativa de modelar a hipótese levantada por Mankiw e Miron (1986).

Apesar da taxa de inflação esperada ser também uma importante variável para explicar variações nas taxas de juros, o efeito parece ser maior no caso das taxas dos papéis de curto prazo. Complexa é também a relação entre a taxa de inflação e a estrutura a termo. Wheelock (1996) constatou, por exemplo, com dados para os Estados Unidos dos últimos 35 anos, que as taxas dos fundos federais (taxas cobradas no mercado interbancário para os empréstimos do *overnight*) aumentaram, em geral, com a inflação muito mais do que as taxas de retorno das notas do Tesouro de 10 anos. Vale dizer, há uma correlação negativa entre o *spread* das taxas de juros e a taxa de inflação. Isso se deve tanto à postura do Fed com relação ao problema da inflação como às expectativas do mercado quanto à intensidade e duração da taxa de inflação. No primeiro caso o Fed adota, no combate à inflação, uma política monetária que reduz a oferta de reserva dos bancos, que tendo menos reservas disponíveis para os empréstimos *overnight* no mercado interbancário causam a elevação nas taxas dos fundos federais. O ajuste que isso provoca no portfólio de ativos dos bancos acaba afetando também a taxa de juros de outros ativos.

---

37 Essa afirmativa é ressaltada também em Rudebusch (1995).

38 Para maiores detalhes sobre esses pontos e as devidas referências, ver Rudebusch (1995). Campbell (1995) fornece evidência empírica desse caso para os Estados Unidos.

Quanto ao papel das expectativas, caso se espere que a inflação tenha curta duração, seu efeito sobre a taxa corrente de retorno do título será menor quanto maior for a maturação do título. Como a inflação americana dos fins dos anos 60 e da década de 70 foi inesperada pelos padrões históricos, a expectativa era de se ter menos inflação adiante, com uma redução, pois, na taxa esperada de retorno dos títulos de curto prazo. Assim, só com a expectativa de uma inflaçao de curta duração os investidores iriam manter um título de longo prazo com menor taxa de retorno do que a dos títulos de curto prazo.

4.2- O caso do Brasil

A longa experiência inflacionária do Brasil acabou por inviabilizar as aplicações financeiras de longo prazo. Só agora com a relativa estabilidade dos preços, obtida com o Plano Real, é que se começa a vislumbrar um mercado financeiro com espectro mais variado quanto ao prazo das aplicações. Desta forma, torna-se difícil aplicar aqui uma metodologia, como a discutida acima, que requer o conhecimento das taxas de juros de curto e de longo prazos.

Mesmo assim, é possível analisar uma estrutura a termo onde o *spread* é definido como a diferença entre as taxas de curto e de curtíssimo prazos. Assim, suponha-se, inicialmente, como em Rudebusch (1995), que um título de curto prazo (cupom zero) tem vencimento que é duas vezes o do outro título, cujas taxas são, respectivamente, $r(2)$ e $r(1)$. Portanto, com base na equação (3) e na nota 10, vem:

$$r(2)_t = \frac{1}{2}\left[r(1)_t + E_t r(1)_{t+1}\right] + \theta(2) \quad (45)$$

onde $\theta(2)$ é o termo (constante) para o prêmio de risco. Suponha-se expectativas racionais para a taxa de juros de curto prazo, isto é:

$$r(1)_{t+1} = E_t r(1)_{t+1} + \varepsilon_{t+1} \quad (46)$$

Após substituir (46) em (45) vem:

$$r(2)_t = \frac{1}{2}\left[r(1)_t + r(1)_{t+1} - \varepsilon_{t+1}\right] + \theta(2) \quad (47)$$

que permite obter:

$$\frac{1}{2}r(1)_{t+1} - r(1)_t \quad = \alpha + \beta\left[r(2)_t - r(1)_t\right] + v_{t+1} \tag{48}$$

onde $\alpha = -\theta(2)$, $\beta = 1$ e $v_{t+1} = \dfrac{\varepsilon_{t+1}}{2}$.

Os resultados acima podem ser facilmente generalizados para *n* períodos. Suponha-se a unidade do tempo sendo agora um dia. Caso se queira relacionar então a taxa do *overnight*, r_t, com a taxa de um título para *n* dias, $r(n)_t$, vem — ver equação (3):

$$r(n)_t = \frac{1}{n}\left[r_t + E_t \sum_{i=1}^{n-1} r_{t+i}\right] + \theta(n) \tag{49}$$

Como se fez no caso para dois períodos, se as expectativas forem racionais, isto é, $r_{t+1} = E_t r_{t+i} + \varepsilon_{t+i}$, então substituindo isto na equação (49) tem-se: [39]

$$\frac{1}{n}\left[\sum_{i=0}^{n-1} r_{t+i}\right] - r_t = \alpha + \beta\left[\ r(n)_t - r_t\ \right] + v_{t+n-1} \tag{50}$$

onde $\alpha = -\theta(n)$ e $\beta = 1$.

Aplica-se aqui apenas tentativamente esse último modelo a dados do Brasil. Como só se dispõe de dados diários para as aplicações do *over* a partir de abril de 1995 o resultado deve, dado o pequeno tamanho da amostra (n=18 observações), ser visto com cautela, servindo mais como uma ilustração da aplicação do modelo do que propriamente algo que possa ser levado em conta para fins de política econômica.

As variáveis foram assim obtidas: primeiramente, para construir a variável dependente da regressão, calculou-se a média diária das taxas das aplicações do *overnight* para cada mês, no período de abril de 1995 a novembro de 1996, conforme o Banco de Dados da Macrométrica, tomando-se para r_t a taxa de juros do *overnight* do primeiro dia útil de cada mês; já para construir a variável explicativa da regressão, calculou-se, a partir da taxa mensal do *over*, a sua taxa equivalente diária, considerando-se um mês de 30 dias.

39 Note-se que $r(n)_t = \frac{1}{n}\left[r_t + E_t \sum_{i=1}^{n-1} r_{t+i} - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_{t+i} - \right] + \theta(n)$. Assim, vem:

$$r(n)_t - r_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} r_{t+i} - r_t + \frac{1}{n} r_t - v_{t+n-1} + \theta(n), \quad \text{ou} \quad r(n)_t - r_t = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} r_{t+i} - r_t - v_{t+n-1} + \theta(n)$$

A estimativa obtida para o modelo foi $\beta = 0{,}36$ com estatística t de 3,7 e uma precisão do ajustamento de R^2=0,44. Assim, rejeita-se tanto a hipótese nula $\beta = 0$ como a hipótese nula $\beta = 1$. Com a ressalva, uma vez mais, de que, dado o pequeno tamanho da amostra, o resultado é apenas tentativo, conclui-se que a hipótese das expectativas racionais para a estrutura a termo da taxa de juros é rejeitada com esses dados do Brasil, embora se reconheça ser baixo aqui o poder do teste.

5- A estrutura a termo e o perfil da dívida pública[40]

Um governo que se endivida tem que decidir entre o lançamento de títulos de curto e de longo prazos. É evidente que se a curva de retorno é fortemente positiva economiza-se nos gastos com os juros quando encurtam-se os prazos de vencimento dos títulos. Já as curvas de retorno planas e, principalmente, aquelas com inclinação negativa favorecem o alongamento da dívida.

De fato, a questão da administração da dívida é, em geral, um pouco mais complexa do que as ponderações acima parecem sugerir. Primeiramente, há o problema da escolha da medida a ser usada no cálculo da economia dos juros da dívida a ser obtida com base na estrutura a termo; deve-se usar o *spread* das taxas de retorno (*yield*) ou a diferença entre as taxas de retorno média por período de retenção? Campbell (1995) sugere que quando as taxas de juros de curto prazo não apresentam qualquer tendência de longo prazo obtêm-se resultados idênticos com os dois conceitos de *spread*. Entretanto, se em dado período as taxas de juros de curto prazo aumentam de modo inesperado o excesso de retorno por retenção dos títulos de longo prazo estaria abaixo da sua média de longo prazo. Assim, o uso dessa medida subestimaria a economia com os juros obtida pelo encurtamento da dívida. Por outro lado, num período onde se espera aumento nas taxas de juros de curto prazo o *spread* entre as taxas de retorno (*yield*) iria refletir esse aumento, situando-se, assim, acima da sua média de longo prazo. O uso dessa medida sobreestimaria, pois, a economia com os juros obtida pelo encurtamento da dívida.

Uma situação onde a estrutura a termo pode ser usada para reduzir o custo dos juros da dívida ocorre quando o governo dispõe de informações privilegiadas com relação ao curso futuro das taxas de juros. Uma situação desse tipo se deu no Governo Thatcher na Inglaterra durante a década de 80. O receio de que as altas taxas inflacionárias da década anterior continuassem durante os anos 80 resultou em altas taxas de juros de longo prazo no início da década de 80. A política monetária restritiva então posta em prática pelo Governo Thatcher elevou também as taxas de juros de curto prazo. Nessa ocasião foram então lançados títulos indexados, com ajuste automático tanto no valor do cupom como no valor de face do título nominal de longo prazo; o governo oferecia ao investidor a proteção da correção monetária. Como o governo tinha, é claro, mais e melhores informações sobre o seu plano de combate à inflação do que o setor privado, foi possível obter

---

40 Esta seção baseia-se em Campbell (1995).

grande economia nos gastos com os juros da dívida (os títulos indexados representam atualmente cerca de 10% da dívida pública inglesa). Como resultado da queda da inflação os títulos nominais de longo prazo tiveram bom retorno durante toda a década de 80, enquanto que os títulos indexados, devido às crescentes taxas de juros reais, pouco renderam aos seus investidores.

Às vezes, objeções são feitas à colocação de títulos de curto prazo com o argumento de que tendo as taxas de curto prazo maior variabilidade do que as de longo prazo, o risco seria maior com essa forma de endividamento. Campbell (1995) ressalva, entretanto, que se deve analisar o retorno dos títulos num período uniforme de tempo, não se devendo confundir o retorno do título até o seu vencimento (*yield*) com o retorno por período de retenção do título. Afinal, tanto as taxas de curto prazo são idênticas às taxas de retorno por período de retenção num horizonte de curto prazo, como são igualmente idênticos os retornos de longo prazo (*yield*) e por período de retenção para um título num horizonte de longo prazo. Além disso, recorde-se que a pouca variabilidade das taxas de longo prazo (*yield*) não implica taxas de retorno por período de retenção também pouco variáveis; ver a esse respeito a equação (10).

Um outro ponto relacionado à variabilidade das taxas é que para o governo o conceito relevante é o das taxas reais e não as nominais.[41] E as taxas reais de retorno dos títulos de longo prazo são mais variáveis do que as dos títulos de curto prazo. Não fica muito claro, portanto, se o risco da dívida é maior quando as taxas são de curto prazo em vez de longo prazo.

Apesar das considerações acima alinharem argumentos tanto a favor como contra o efeito das taxas de curto prazo da dívida, alguns consideram as discussões acima inócuas. O argumento é que, para dada política de gastos governamentais, a política da administração da dívida não tem qualquer efeito real (teorema da irrelevância). Isso supõe mercados plenos (*complete markets*) e taxação sem distorções (*nondistortionary taxes*). De acordo com esse ponto de vista uma política que gera perdas para o governo em dado momento não afetaria, nesse mesmo momento, o consumo do setor privado. Assim, as perdas do governo, que são, neste caso, o ganho do setor privado, poderiam ser recuperadas através de um aumento na arrecadação sem gerar problemas. Nestas circunstâncias, os custos mé-dios dos juros e a variabilidade das taxas de juros ao longo das diversas situações são irrelevantes.

É bom ressaltar ainda que a estrutura a termo considera as taxas de juros como sendo independentes da política da administração da dívida. Alguns argumentam, todavia, que a troca dos títulos de curto prazo pelos de longo prazo (ou seja, a oferta relativa desses papéis) afeta os seus respectivos retornos (*yield* e retorno por período de retenção). Desta forma, a tentativa de alterar o perfil da dívida estaria fadada ao insucesso. Por exemplo, a estratégia de aumentar a oferta de títulos de curto prazo para aproveitar-se das

---

41 Note-se que se os títulos da dívida são de longo prazo então com o aumento da inflação cai o valor do passivo real do governo já que os pagamentos são fixados em termos nominais. No caso do financiamento com títulos de curto prazo, todavia, o aumento na inflação aumenta também o custo nominal dos juros, mas como também a dívida nominal é corroída pela inflação resulta inalterado o passivo real do governo.

suas menores taxas de juros provocaria uma queda nos seus preços eliminando assim a sua vantagem inicial.

Como observação final, uma outra maneira onde a política da administração da dívida pode afetar as expectativas dos investidores quanto às taxas de juros se dá quando a dívida de longo prazo for nominal. Neste caso o governo tem um incentivo para inflacionar a economia e com isso diminuir o valor real do seu passivo. Desta forma, os investidores esperarão mais inflação e, portanto, juros nominais maiores quando a dívida for nominal e de longo prazo, em vez de ser de curto prazo ou indexada. Isso supõe naturalmente que a mesma autoridade estabelece a política fiscal e a política monetária, ou então que as considerações de ordem fiscal influenciam a autoridade monetária.

Abstract

Initially we discuss the use of the interest rate and the spread between distinct interest rates as predictors of either the level of the economic activity, the change in short-run interest rate, or the rate of inflation. Following this, the yield curve is used to explain the relationship between the short-run and the long-run interest rates, and we also show how to carry out the empirical test of such a theory. The difficulties in the realization of the empirical test are discussed in the light of the experience of both the United States and Brazil, indicating that the theorectical models based on the present value hypothesis are in general rejected. Finally, we discuss, based on the interest rate term structure, the advantage and disadvantage of having a public debt denominated in the short-run interest rate as against the long-run interest rate.

Bibliografia

BEGG, David K.H. *The rational expectations revolution in macroeconomics: theories and evidence.* 1982.

BERNANKE, B. S. On the predective power of interest rates and interest rate spreads New England. *Economic Review*, Federal Reserve Bank of Boston, Nov./Dec., p.51-68, 1990.

BERNANKE, B. S., BLINDER, A.S. *The federal funds rate and the channels of monetary transmission.* Princeton University, Sep. 1989 (Unpublished Paper).

CAMPBELL, J. Y. Some lessons from the yield curve. *Journal of Economic Perspectives*, v. 9, n. 3, p. 129-152, Summer 1995.

__________. A defense of traditional hypotheses about the term structure of interest rates. *The Journal of Finance*, v.41, n.1, p.183-194, Mar. 1986.

CAMPBELL, J. Y., SHILLER, R. J. Cointegration and tests of present value models. *Journal of Political Economy*, v.95, n. 5, p.1.062-1.088, Oct. 1987.

CHANCE, D. M. *An introduction to options and futures.* Harcourt Brace Javanovich College Publishers, 1992.

CUSHING, M. J., ACKERT, L. F. Interest rate innovations and the volatility of long-term bond yields. *Journal of Money, Credit and Banking*, v.26, n.2, p.171-344, May 1994.

ENGSTED, T. Does the long-term interest rate predict future inflation? A multi-country analysis. *The Review of Economics and Statistics*, 1992.

ESTRELLA, A., MISHKIN, F. S. The Yield Curve as a Predictor of U.S. Recessions. *Current Issues in Economics and Finance*, Federal Reserve Bank of New York, v. 2, n. 7, p. 1-6, June 1996.

HICKS, J. R. *Value and capital: an inquiry into some fundamental principles of economic theory*. Oxford: Clarendon Press, 1939.

HULL, J. C. *Options, futures, and other derivative securities*. Prentice Hall, 1993.

LITTERMAN, R. B., WEISS, L. Money, real interest rates, and output: a reinterpretation of postwar U.S. data. *Econometrica*, v. 53, p.129-56, Jan. 1985.

Macrométrica (Banco de Dados).

MANKIW, G. The term structure of interest rates revisited. *Brookings Papers on Economic Activity*, n.1, p.61-110, 1986.

MANKIW, G., MIRON, J. A. The changing behavior of the term structure of interest rates. *The Quarterly Journal of Economics*, v.CI, Issue 2, p.211-228, May 1986.

MCCALLUM, B. A Reconsideration of sims' evidence concerning monetarism. *Economics Letters*, v.13, p.161-71, 1983.

MILLS, Terence C. *The econometric modelling of financial time series*. Cambridge University Press, 1993.

__________. The term structure of UK interest rates: tests of the expectations hypothesis. *Applied Economics*, v.23, p.599-606, 1991.

RUDEBUSCH, Glenn D. Federal reserve interest rate targeting, rational expectations, and the term structure. *Journal of Monetary Economics*, v.35, n.2, p.245-274, Apr. 1995.

SHEA, Gary S. Qualms about the linearized expectations hypothesis and variance-bounds studies of the interest rate term structure. In: GRUBER, Josef (ed.). *Econometric decision models: new modeling and modeling and applications*, p. 305-19. Berlim: Springer-Verlag, 1991.

SHILLER, R. J., The term structure of interest rates. In: FRIEDMAN, B., HAHN, F. (eds.). *A handbook of monetary economics*, v. 1, Amsterdam: North Holland, p.629-716, 1990.

__________. The volatibility of long term interest rates and expectations models of the term structure. *Journal of Political Economy*, v.87, n. 4, 1979.

SHILLER, R. J., CAMPBELL, J.Y., SCHOENHOLTZ, K. L. Forward rates and future policy: interpreting the term structure of interest rates. *Brookings Papers on Economic Activity*, n. 1, p. 173-224, 1983.

SHILLER, R. J., SIEGEL, J. J. The Gibson paradox and historical movements in real interest rates. University of Pennsylvania, *Journal of Political Economy*, v.85, n. 5, Oct.1977.

SIMS, C. A. Monetary, income, and causality. *The American Economic Review*, v.62, p.540-52, Sep. 1972.

__________. Comparison of interwar and postwar cycles: monetarism reconsidered. *The American Economic Review*, v.70, p.250-57, May 1980.

STOCK, J., WATSON, M. New indexes of coincident and leading indicators. In: BLANCHARD, Oliver, FISCHER, Stanley (eds.). *NBER macroeconomic annual*, n.4, 1989.

WHEELOCK, D. C. How does inflation affect yield spreads? *Monetary trends*. Federal Reserve Bank of St. Louis, p.1,May 1996.

(Originais recebidos em janeiro de 1996. Revistos em novembro de 1996.)