Comunicação 3

Uma generalização da "lei de Gibrat" para o crescimento da firma

JOÃO LUIZ MAURITY SABOIA *

1 — Introdução

Diversas variáveis sócio-econômicas, tais como a distribuição de firmas segundo o tamanho, a de cidades pela população e a de renda pelo tamanho, possuem distribuições assimétricas com longas caudas à direita. Vários autores desenvolveram modelos matemáticos como tentativas para uma melhor compreensão das razões que acarretam o aparecimento de tais distribuições.

Gibrat [1] e Kalecki [2] desenvolveram modelos que sugerem o sistema lognormal como adequado para a distribuição das firmas pelo tamanho. Champernowne [3] e Simon, [4] por sua vez, sugerem outra distribuição assimétrica, a de Yule. O modelo de Champernowne foi desenvolvido para a distribuição de renda segundo o tamanho e o modelo de Simon para o estudo da distribuição de palavras de acordo com a freqüência de ocorrência. Ambos podem ser adapta-

* Da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

1 R. Gibrat, *Les Inegalités Économiques* (Paris: Sirey, 1931).

2 M. Kalecki, "On the Gibrat Distribution", *in Econometrica* (abril de 1945), pp. 161-170.

3 D. G. Champernowne, "A Model of Income Distribution", *in Economic Journal* (junho de 1953), pp. 318-351.

4 H. A. Simon, "On a Class of Skew Distribution Functions", *in Biometrika* (1955), pp. 425-440.

dos para a distribuição de firmas segundo o tamanho.[5] As distribuições assimétricas aparecem também em diversas outras aplicações, tais como a distribuição de cientistas pelo número de artigos publicados, a de espécies biológicas e a de sindicatos pelo tamanho.[6]

Nesta comunicação desenvolvemos um modelo que é uma generalização do de Gibrat para o processo de crescimento das firmas. Um dos pontos críticos do modelo de Gibrat é a suposição de que, no processo de crescimento, as firmas apresentam taxas de crescimento cujas distribuições são idênticas e independentes entre si. Em nosso modelo esta hipótese é relaxada e em seu lugar supomos que as taxas de crescimento constituem um processo estacionário em média e variância, com uma estrutura de autocorrelação.

Da mesma forma que Gibrat e Kalecki, nosso modelo sugere a distribuição lognormal como sendo adequada à distribuição das firmas segundo o tamanho. Uma de suas vantagens é a possibilidade de incorporar os ciclos econômicos, característicos das economias capitalistas.

2 — O modelo de Gibrat

Para explicar o aparecimento da lognormal como distribuição das firmas segundo o tamanho, Gibrat[7] propôs a "lei dos efeitos proporcionais", também conhecida como "lei de Gibrat". Segundo esse autor, no processo de crescimento as taxas de crescimento das firmas possuiriam distribuições idênticas e independentes entre si, com média μ_ε e variância σ^2_ε.

[5] Ver R. dos S. Bartholo Jr., "Processos Estocásticos em Economia: Modelos e Aplicações ao Crescimento da Firma", tese de M. Sc. (COPPE/UFRJ, 1976); e J. Steindl, *Random Process and the Growth of Firms — A Study of the Pareto Law* (Londres: Griffin, 1965).

[6] Ver H. T. Davis, *The Analysis of Economic Time Series* (Principia Press, 1941); G. U. Yule, "A Mathematical Theory of Evolution Based on the Conclusions of Dr. J. C. Willis", Phil. Trans. B, 213 (1924); e P. E. Hart e E. H. P. Brown, "The Sizes of Trade Unions: A Study of the Laws of Aggregations", *in Economic Journal* (março de 1957), pp. 1-15.

[7] R. Gibrat, *op. cit.*

Seja $\{X_t\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, o tamanho de uma firma qualquer no tempo t, e seja ε_t sua taxa de crescimento durante o intervalo de tempo $(t-1, t]$. Assim, teremos:

$$X_1 = X_0(1 + \varepsilon_1)$$

$$X_2 = X_1(1 + \varepsilon_2) = X_0(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)$$

Em geral:

$$X_t = X_0(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)\ldots(1 + \varepsilon_t) \tag{1}$$

Tomando-se o logaritmo da equação (1), obtemos:

$$\begin{aligned} log\ X_t = log\ X_0 + log\ (1 + \varepsilon_1) + log\ (1 + \varepsilon_2) + \ldots \\ \ldots + log\ (1 + \varepsilon_t) \end{aligned} \tag{2}$$

Seja:

$$Y_i = log\ X_i \qquad i = 0,t$$

e

$$y_i = log\ (1 + \varepsilon_i) \quad i = 1,2,\ldots,t$$

Assim, podemos reescrever a equação (2) como:

$$Y_t = Y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_t \tag{3}$$

que pode ser aproximada por:

$$Y_t \simeq Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_t \tag{4}$$

onde foi utilizada a aproximação linear da expansão de Taylor em torno do ponto zero, isto é:

$$log\ (1 + \varepsilon_i) \simeq \varepsilon_i \qquad i = 1, 2, \ldots, t$$

Se supusermos que as taxas de crescimento são independentes do tamanho inicial da firma e que este possui média e variância finitas, podemos aplicar o Teorema do Limite Central que nos afirma que $(Y_t - \mu_\varepsilon t)/\sigma_\varepsilon \sqrt{t}$ tende para uma distribuição normal com média *0* e variância *1* quando $t \to \infty$ (desprezando-se a contribuição do tamanho inicial Y_0, que é pequena para t grande).[8] Portanto, o tamanho da firma X_t possuirá uma distribuição lognormal quando o tempo t for suficientemente grande.

Um dos pontos mais vulneráveis do modelo de Gibrat é a hipótese de taxas de crescimento com distribuições idênticas e independentes entre si. Na prática, isto não ocorre, sendo comum nas economias capitalistas a existência de ciclos com uma fase de altas taxas de crescimento seguida de outra de baixas (ou taxas de crescimento negativo). É comum também no processo evolutivo encontrar-se pontos de estrangulamento que afetam as taxas de crescimento das firmas. Este último ponto foi estudado por Kalecki,[9] que propôs dois modelos, em que as taxas de crescimento estão correlacionadas negativamente com o tamanho que as firmas tenham atingido. Desta forma evita-se a tendência à dispersão encontrada no modelo de Gibrat. Apesar da generalização introduzida por Kalecki, seus modelos também sugerem a lognormal como sendo adequada à distribuição das firmas segundo o tamanho.

Os críticos de Kalecki afirmam que, embora seus modelos possam ser adequados para firmas quando consideradas como plantas industriais, estes não refletem a realidade das grandes corporações, que continuam crescendo e absorvendo firmas menores, apesar de terem atingido tamanhos enormes.

Na próxima seção mostraremos uma outra forma de relaxar a hipótese de Gibrat de taxas de crescimento com distribuições idênti-

[8] Levando em consideração a contribuição do tamanho inicial Y_0, a expressão se transformaria em:

$$[Y_t - \mu_\varepsilon t - E(Y_0)] / \sqrt{t\sigma_\varepsilon^2 + Var\ (Y_0)}$$

onde:

$E(Y_0)$ = valor esperado de Y_0;

$Var\ (Y_0)$ = variância de Y_0.

[9] M. Kalecki, *op. cit.*

cas e independentes entre si. As taxas de crescimento das firmas serão supostas constituindo um processo estocástico estacionário em média e variância, cuja estrutura de autocorrelação é considerada. Uma das vantagens do nosso modelo é que ele pode incorporar os ciclos econômicos que citamos acima, ao mesmo tempo em que mostra, como Gibrat e Kalecki o fizeram, que a distribuição lognormal é adequada à das firmas de acordo com o tamanho.

3 — O modelo proposto

Seja $\{\varepsilon_t\}$, $t = 1, 2, \ldots$, a taxa de crescimento de uma firma qualquer durante o intervalo de tempo $(t-1, t]$. Vamos supor o processo estocástico $\{\varepsilon_t\}$ estacionário em média e variância, isto é, possuindo médias e variâncias independentes do tempo t e com uma estrutura de autocorrelação (isto nos parece uma hipótese razoável para o processo de crescimento das firmas).

De acordo com Box e Jenkins,[10] uma classe de modelos que podem representar o processo $\{\varepsilon_t\}$ são os modelos auto-regressivos e de médias móveis, isto é:

$$\phi(B)\varepsilon_t = \Theta_0 + \Theta(B)a_t \tag{5}$$

sendo

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p \tag{6}$$

$$\Theta(B) = 1 - \Theta_1 B - \ldots - \Theta_q B^q \tag{7}$$

onde $\{a_t\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias idênticas e independentes entre si com média zero e variância σ_a^2, B é o operador retardador, isto é, $B\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$, $B^n\varepsilon_t = \varepsilon_{t-n}$, e $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$, $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_q$ são constantes.

[10] G. E. P. Box e G. M. Jenkins, *Time Series Analysis — Forecasting and Control* (São Francisco: Holden Day, 1970).

Para processos estacionários, a equação (5) pode ser também representada por:

$$\varepsilon_t = \mu\varepsilon + \Psi(B)\ a_t \tag{8}$$

sendo

$$\Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j\ B^j \tag{9}$$

onde $\Psi_0 = 1$ e $\Psi_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Das equações (8) e (9), observamos que a média e variância do processo$\{\varepsilon_t\}$ são dadas por μ_ε e $\sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^2$ respectivamente.

Substituindo-se (8) em (4), obtemos:

$$Y_t \simeq Y_0 + \mu_\varepsilon t + \sum_{i=0}^{t-1} \Psi(B)\ a_{t-i} \tag{10}$$

ou, equivalentemente, substituindo-se (9) em (10):

$$Y_t \simeq Y_0 + \mu_\varepsilon t + \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{N} \Psi_j B^j\ a_{t=i} \tag{11}$$

Com base nas mesmas suposições já feitas anteriormente (isto é, taxas de crescimento independentes do tamanho inicial da firma e distribuição para o tamanho inicial da firma com média e variância finitas), e aplicando-se o Teorema do Limite Central, podemos afirmar que $(Y_t - \mu_\varepsilon t)/\sigma_a \sqrt{t \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^2}$ tende para uma distribuição normal com média 0 e variância 1 quando $t \rightarrow \infty$ (desprezando-se a contribuição do tamanho inicial Y_0, que é pequena para t grande).[11] Portanto, o tamanho da firma X_t possuirá uma distribuição lognor-

[11] Levando em consideração a contribuição do tamanho inicial Y_0, a expressão se transformaria em:

$$[Y_t - \mu_\varepsilon t - E(Y_0)]/\sqrt{t\sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^2 + Var\ (Y_0)}$$

mal quando o tempo t for suficientemente grande (o mesmo resultado que Gibrat e Kalecki obtiveram partindo de hipóteses distintas).

Como já foi dito, uma das vantagens do modelo desenvolvido acima é a possibilidade de incorporar os ciclos econômicos característicos das economias capitalistas. No caso em que as taxas de crescimento $\{\varepsilon_t\}$ sejam representadas por um modelo estacionário auto-regressivo de grau 2, isto é, $\varepsilon_t = \theta_0 + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_2\varepsilon_{t-2} + a_t$ tal que as raízes-polinômio $B^2 - \phi_1 B - \phi_2 = 0$ sejam complexas conjugadas e localizadas no interior do círculo unitário, este modelo incorporará ciclos. Se as raízes forem representadas por $c\, e^{\pm \alpha j}$ (onde $j = \sqrt{-1}$), então os ciclos terão período $2\pi/\alpha$.[12]

4 — Conclusão

Nesta comunicação, foi desenvolvido um modelo para o processo de crescimento de firmas em que a "lei dos efeitos proporcionais" de Gibrat foi substituída por uma hipótese bem mais fraca, qual seja, que as taxas de crescimento das firmas sejam representadas por um processo estacionário em média e variância com uma estrutura de autocorrelação. O modelo nos sugere a distribuição lognormal como sendo adequada para a distribuição das firmas pelo tamanho.

Da mesma forma que Gibrat, nosso modelo não considera nascimento ou morte de firmas e mostra uma tendência à dispersão. Portanto, o modelo só se aplicaria àquelas sobreviventes de um conjunto inicial de firmas.

Na prática, a distribuição de firmas pelo tamanho tem sido bem ajustada utilizando-se o modelo lognormal. As razões pelas quais o nascimento de novas firmas e a morte de velhas não distorcem a distribuição lognormal ainda não estão suficientemente compreendidas e merecem um estudo mais profundo.

[12] Para uma discussão mais detalhada, ver J. L. M. Saboia, "Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) Models for Birth Forecasting", in *Journal of the American Statistical Association*, vol. 72 (junho de 1977).