

DERIVATIVOS DE RENDA FIXA NO BRASIL: MODELO HULL-WHITE*

Leonardo A. Almeida

Professor de Administração de Carteiras de Investimento no Faap/MBA

Joe A. Yoshino

Professor do Departamento de Economia da FEA/USP e do Mestrado Profissionalizante FEA/IME "Modelagem Matemática em Finanças"

Pedro P. Schirmer

Professor do Departamento de Matemática Aplicada do IME/USP e do Mestrado Profissionalizante FEA/IME "Modelagem Matemática em Finanças"

No mercado de renda fixa brasileiro observamos não somente altas taxas de juros tanto nominais como reais, mas também suas extremas volatilidades em relação ao padrão internacional dos países desenvolvidos. Assim, a implementação doméstica de modelos largamente utilizados nesses países torna-se um enorme desafio em termos de engenharia financeira. Igualmente, não é uma tarefa trivial calibrar modelos de taxas de juros que venham a incorporar os fatos estilizados que observamos no mercado brasileiro. Neste trabalho vamos mostrar, de um modo didático e simples, como implementamos o modelo Hull-White de um fator (um choque browniano) para o mercado de opções de IDI na BM&F. O aspecto crítico nessa tarefa é o algoritmo que replica os preços de mercado com base nos preços teóricos. A calibração envolve a estimação de dois parâmetros básicos: a volatilidade das taxas de juros de curto prazo e a velocidade de reversão à média dos juros de curto prazo com relação aos juros de longo prazo. Apesar da escassez de dados diários das opções de renda fixa, mostramos que é possível calibrar o modelo Hull-White somente nos períodos de estabilidade. Atualmente, o assunto é da maior relevância, pois o Banco Central do Brasil passou a praticar as políticas monetária e cambial com o uso de derivativos.

1 INTRODUÇÃO

O apreçamento das opções de índice de depósito interfinanceiro (IDI) que são negociadas na Bolsa de Mercadorias & Futuros de São Paulo (BM&F) é feito majoritariamente por meio da adaptação do modelo de Black (1976).¹

Para um tratamento geral e consistente dos produtos de renda fixa, é necessária a implementação de modelos que lidem com toda a extensão da estrutura a termo. Assim, os diversos modelos de taxas de juros existentes

* Agradecemos aos *referees* anônimos desta revista, aos participantes do II Congresso Brasileiro de Finanças no Ibmecc/RJ e aos professores e alunos do Mestrado Profissionalizante FEA/IME "Modelagem Matemática em Finanças" as críticas, as sugestões e os comentários apresentados.

1. Algumas hipóteses do modelo de Black não são consistentes para o apreçamento de derivativos de renda fixa. Por exemplo, é considerada a distribuição lognormal no vencimento para a variável subjacente à opção, seja ela o preço de um título ou uma taxa de juros. Logo, esse modelo não é adequado para a agregação da exposição gerada por derivativos referenciados a ativos diferentes, como opções sobre títulos e *caps*. Além do mais, derivativos com exercício antecipado não podem ser tratados pelo modelo de Black. Apesar disso, a extrema facilidade de implementação minimizou esses inconvenientes teóricos, sob a ótica dos usuários do modelo.

precisam ser adaptados à realidade do mercado brasileiro no período recente, caracterizada por altas taxas de juros, enorme volatilidade, carência de maior variedade de instrumentos e reduzida liquidez. Nesse contexto, a estimação dos parâmetros do modelo com base nos preços de opções não é uma tarefa trivial. Portanto, a implementação e a aplicabilidade desses modelos ao comportamento da estrutura a termo das taxas de juros no Brasil constituem o principal desafio deste trabalho.

O restante do artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, são apresentados alguns dados das taxas de juros e uma breve descrição das condições de liquidez para as opções de IDI na BM&F. A Seção 3 resume os principais modelos de taxas de juros, em particular o modelo Hull-White de um fator. A Seção 4 explica como se calibram os preços de mercado aos do modelo. No final da seção, são discutidos os resultados empíricos da calibração. A Seção 5 contém as conclusões e uma agenda para a pesquisa na área. Nos Apêndices A e B apresentamos, respectivamente, as rotinas de calibração do modelo Hull-White no caso brasileiro e os códigos de Matlab para o apreçamento da opção usando esse modelo.

2 DESCRIÇÃO DOS DADOS E ANÁLISE DE LIQUIDEZ DAS OPÇÕES DE IDI

O período em análise vai de 03/01/2000 a 31/12/2001. Os dados considerados são: *a*) a média diária anualizada do CDI-Cetip; *b*) as taxas de *swaps* pré x CDI divulgadas pela BM&F; e *c*) os dados do mercado de opções de IDI na BM&F.² O Gráfico 1 ilustra o comportamento da taxa do CDI-Cetip no referido período. Pode-se verificar dois padrões bem distintos: *a*) queda das taxas de juros básicas até meados de março de 2001, cujo piso ficou em torno de 15% a.a.; e *b*) contágio da crise argentina no mercado brasileiro. A partir do mesmo mês de março de 2001, ocorrem sucessivas elevações nas taxas de juros primárias (Selic), as quais são acompanhadas pelo Certificado de Depósito Interfinanceiro (CDI) e levadas novamente ao patamar de 19% a.a.

Os Gráficos 2 e 3 exemplificam os mais variados formatos que as curvas de taxas de juros assumiram recentemente no Brasil.³

As mudanças na estrutura a termo das taxas de juros atestam a instabilidade e a volatilidade que o mercado de renda fixa brasileiro sofreu a partir da grave deterioração do risco soberano da Argentina. O aumento tanto da volatilidade

2. Trata-se, sem dúvida alguma, de um período um tanto quanto limitado em termos de base de dados; entretanto, justificado pelo acréscimo recente de operações envolvendo opções de IDI.

3. Nos dois gráficos, foram utilizadas as taxas de *swap* pré x CDI, divulgadas diariamente pela BM&F.

GRÁFICO 1
EVOLUÇÃO DA TAXA DE JUROS CDI NO BRASIL — DE 2000:01 A 2001:12

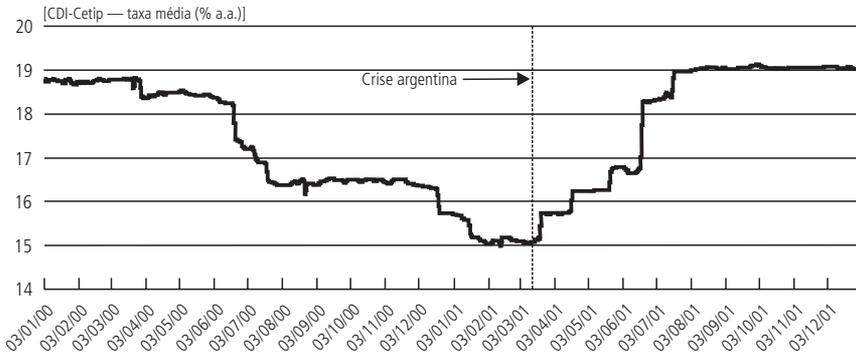


GRÁFICO 2
SUPERFÍCIE PARA AS CURVAS DE TAXAS DE JUROS BRASILEIRA — DE 1998:01 A 2001:12

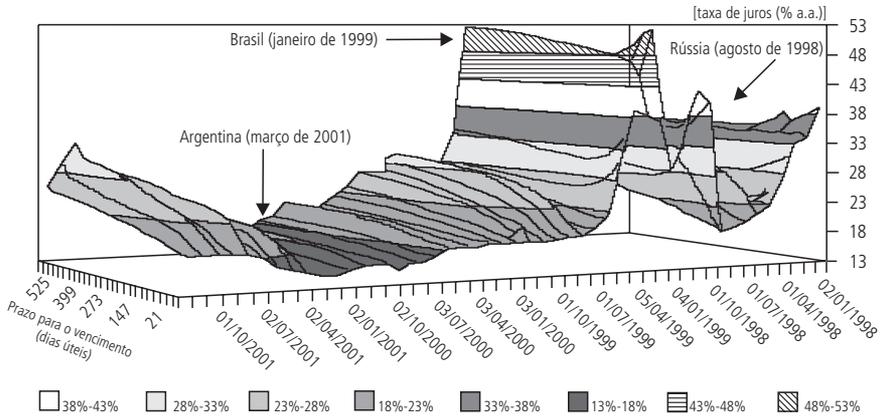
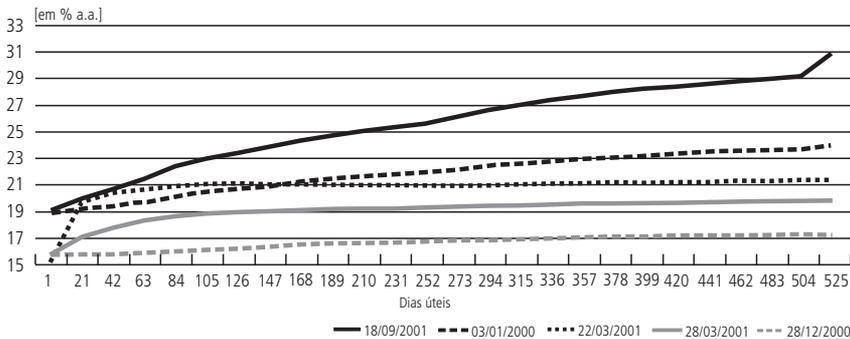


GRÁFICO 3
ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JUROS PREFIXADAS PARA ALGUMAS DATAS SELECIONADAS



como do prêmio de risco exigido pelo mercado para as operações com prazos mais longos fica mais nítido quando são comparadas as curvas de juros nos dias 28/12/2000 e 18/09/2001.

A opção de IDI é um instrumento derivativo de taxas de juros negociadas na BM&F.⁴ Considerando um período entre as datas t e T ($T > t$), temos:

$$IDI_T = IDI_t \prod_{i=t}^{T-1} (1 + CDI_i) \quad (1)$$

$$CDI_i = (1 + CDI_i \% \text{ a.a.})^{(\frac{1}{252})} - 1 \quad (2)$$

Para a opção de compra, o *payoff* na data de vencimento T é dado por:

$$C_T = \max(0, IDI_T - K) \quad (3)$$

Para que uma opção de compra de IDI seja exercida no vencimento, a variação acumulada do CDI diário, decorrida entre a data de negociação da opção e o seu vencimento, deve ser superior à taxa de juros implícita na opção e dada pela divisão do preço de exercício (K) pelo IDI na data de negociação (IDI). A Tabela 1 é um resumo dos negócios realizados com opções de IDI. Podemos notar que esse mercado ainda sofre pela falta de liquidez, pois não se observam operações em todos os dias, mas apenas em 85,02% dos dias contidos na amostra.⁵

4. Essa opção pode ser usada para propósitos de *hedge*, apostas direcionais e outros tipos de operações na curva de taxas de juros. O ativo-objeto dessa opção é o IDI. Esse é um índice divulgado diariamente que reflete o acúmulo do dia das taxas médias de CDI, tendo partido de 100 mil em 03/01/2000. Essas opções são do tipo europeu e possuem vencimentos em todo primeiro dia útil de cada mês — data em que ocorre a liquidação financeira das posições pela diferença entre o valor do IDI no vencimento da opção (IDI_t) e seu respectivo preço de exercício (K).

5. Como esperado, a predominância é ampla para os contratos de opções de compra, cuja participação no total de número de negócios efetuados equivale a 96,71%. Adicionalmente, para outros derivativos de taxas de juros como *caps*, *floors* e *swaptions*, a negociação ocorre apenas no mercado OTC (*over-the-counter*) e com liquidez ainda mais reduzida. Na maioria dos casos, essas operações são realizadas por tesourarias de grandes bancos para grandes clientes corporativos e assim a indisponibilidade desses dados é total. Na realidade, a dificuldade para obter dados não é exclusiva do mercado brasileiro. Conforme citam Gupta e Subrahmanyam (2000): "Therefore, while these models have provided important theoretical insights, their empirical validity and performance remain to be tested. Empirical research in this area has lagged behind theoretical advances partly due to the difficulty in obtaining data, as most of these interest rate contingent claims are traded in over-the-counter markets, where data are often not recorded in a systematic fashion. This gap is being slowly filled by recent research in this area."

TABELA 1
INDICADORES DE LIQUIDEZ DAS OPÇÕES DE IDI NA BM&F

Opções de IDI na BM&F		%
Início da amostra	03/01/2000	
Fim da amostra	28/12/2001	
Número de dias	494	
Total de dias com negócios	420	85,02
Total de negócios efetuados	4.685	100,00
Calls	4.531	96,71
Puts	154	3,29
Total de contratos negociados	1.790.278	100,00
Calls	1.665.380	93,02
Puts	124.898	6,98

3 MODELOS DE TAXA DE JUROS

A evolução dos modelos de opção para as taxas de juros tem dependido da incorporação dos principais fatos estilizados que procuram descrever a dinâmica evolutiva da estrutura a termo das taxas de juros. A família de modelos de um fator para as taxas de juros pode ser sintetizada por:

$$df(r_t) = [\theta(t) - a(t)f(r_t)]dt + \sigma(t)f(r_t)^\beta dW_t \quad (4)$$

onde $f(r_t)$ descreve a taxa de juros de curto prazo; $\theta(t)$ é um parâmetro de ajuste para a curva de juros observada no mercado; $a(t)$ é a velocidade de reversão à média; $\sigma(t)$ é a volatilidade da taxa de juros de curto prazo; β é um coeficiente de elasticidade sobre a taxa de juros r_t ; e W_t é um movimento browniano na medida de probabilidade natural.⁶

Com base no modelo geral data descrito pela equação (4), podemos obter os casos particulares dos diversos modelos de taxa de juros. Assim, temos:

- Merton (M-1973)

$$dr_t = \theta dt + dW_t \quad (5)$$

6. O movimento browniano na medida de probabilidade ajustada ao risco é dado por W_t^Q .

- Vasicek (V-1977)

$$dr_t = a(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (6)$$

- Cox-Ingersoll-Ross (CIR-1985)

$$dr_t = a(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (7)$$

- Ho-Lee (HL-1986)

$$dr_t = \theta(t)dt + \sigma dW_t^Q \quad (8)$$

- Hull-White (HW-1990)

$$dr_t = [\theta(t) - a(t)(b - r_t)]dt + \sigma(t)r_t^\beta dW_t \quad (9)$$

- Black-Derman-Toy (BDT-1990)

$$d \ln(r_t) = [\theta(t) - a \ln(r_t)]dt + \sigma(t) dW_t^Q \quad (10)$$

- Black-Karasinski (BK-1991)

$$d \ln(r_t) = [\theta(t) - a(t) \ln(r_t)]dt + \sigma(t) dW_t^Q \quad (11)$$

- Heath-Jarrow-Morton (HJM-1992)

$$df(t, T) = a(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t^Q \quad (12)$$

A alternativa escolhida neste trabalho foi a versão Vasicek Estendida do modelo Hull-White, que é descrita pela equação (9), com $\beta = 0$ e valores constantes para a velocidade de reversão à média (a) e para a volatilidade da taxa de juros de curto prazo (σ). Evitou-se a parametrização dependente do tempo para (a) e (σ), pois, ao se ajustar os preços exatos aos preços de mercado para os prêmios das opções, o modelo pode produzir padrões inconsistentes para a volatilidade futura da taxa de curto prazo $\sigma(t)$.⁷ Uma das principais razões para a escolha do modelo Hull-White é sua facilidade e simplicidade de

7. É claro que ao tornar (a) e (σ) como constantes impede-se que os preços das opções sejam recuperados com precisão. O resultado é uma estrutura estacionária para a volatilidade e um apreçamento mais robusto para derivativos exóticos.

implementação.⁸ A deficiência desse modelo está na hipótese de uma distribuição normal para as taxas de juros de curto prazo r_t , o que não impede a existência de taxas de juros nominais negativas.⁹

A fórmula para o apreamento das opções de IDI,¹⁰ de acordo com o modelo escolhido¹¹ e para as opções de compra, é dada por:

$$C_t = IDI_t N(d_1) - KP(t, T) N(d_1 - \sigma_p) \quad (13)$$

onde d_1 é definido da seguinte forma:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{IDI_t}{KP(t, T)}\right) + \frac{\sigma_p^2}{2}}{\sigma_p} \quad (14)$$

8. Por ser um modelo de um fator (somente um choque browniano), gaussiano e markoviano para as taxas de juros de curto prazo, possui grande tratabilidade analítica, permitindo o uso de fórmulas fechadas ou a implementação de árvores trinomiais. Como exemplo, por admitirem distribuição lognormal para r_t , os modelos de Black, Derman e Toy (1990) e Black e Karasinski (1991) requerem métodos numéricos específicos para sua resolução. Além disso, no modelo Hull-White, consegue-se reproduzir a curva de taxas de juros negociadas no mercado, ao contrário dos modelos de equilíbrio geral, tais como Merton (1973), Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1985), os quais deduzem endogenamente uma estrutura a termo para as taxas de juros. Com relação à preferência pela modelagem com um fator, podemos defender seu uso ao examinarmos os resultados da análise de componentes principais ao mercado brasileiro, os quais atribuem ao primeiro fator (mudança de nível da curva-movimento de translação da curva) a responsabilidade por elevada parcela das variações na curva de juros. Um outro ponto positivo para a adoção de modelos de um fator é a possibilidade maior de realizar calibração diária, porque possui menos parâmetros e, assim, requer um número menor de observações necessárias para a calibração. Por exemplo, a versão Hull-White com dois fatores possui mais parâmetros para serem calibrados, logo, necessita de um número maior de observações para o seu ajuste. Se estamos trabalhando em um mercado com liquidez relativamente menor, a calibração pelo modelo Hull-White dois fatores deixará de ser diária em alguns dias.

9. Porém, é interessante repetir aqui o argumento usado por Vieira Neto (1999), no qual reproduziu uma frase de Duffie (1996): "Gaussian short-rate models are nevertheless useful, and frequently used, since the probability of negative interest rates within a reasonably short time, with reasonable choices for the coefficient functions, is relatively small. Since any model is only an approximation, there may, therefore, be applications for which it is worth the trouble of having negative interest rates if the tractability that is offered in return is sufficiently great." Além disso, o modelo pode ser deduzido no contexto do paradigma de não-arbitragem para HJM.

10. A primeira derivação dessa fórmula deve-se ao artigo de Vieira Neto e Valls Pereira (1999).

11. Para comprovar a capacidade do modelo, realizamos alguns testes de replicação com o objetivo de verificar se uma carteira sintética seria capaz de replicar os ganhos e perdas do derivativo, cujo preço é dado por $C(t, T)$. O *portfolio* de replicação $PR(t, T) = Caixa(t, T) + \Delta(t, T) * IDI(t, T)$. Realizamos o rebalanceamento do *delta* periodicamente (*delta-hedging*), se o modelo for consistente, o valor do *portfolio* replicante deve ser igual ao *payoff* da opção no vencimento, ou seja, para uma opção de compra, $PR(T, T) = C(T, T) = \text{Max}(IDI - K, 0)$. Um bom modelo deve produzir um erro de balanceamento que seja residual. Para o caso de se preferir uma opção de IDI com três meses para o vencimento, foram simulados 5 mil caminhos da taxa de juros para três frequências de revisão: 35, 63 e 125 vezes. A média dos erros de replicação do modelo foi de $-4,27\%$, $-4,13\%$ e $-4,31\%$, com desvio-padrão de $11,99\%$, $12,45\%$ e $13,25\%$, respectivamente. Portanto, supondo-se que a distribuição desses erros seja normal, não se rejeita a hipótese nula de eles serem iguais a zero, com 95% e 99% de intervalo de confiança. O leitor que quiser verificar esse teste de replicação deve solicitar aos autores o enorme banco de dados com as séries temporais das opções contendo o prêmio na data $t < \tau$, o valor do preço de exercício e os parâmetros considerados.

e:

$$\sigma_p^2 = \frac{\sigma^2}{2a^3} [2a\tau + 4e^{(-a\tau)} - e^{(-2a\tau)} - 3] \quad (15)$$

em que IDI_t é o valor do IDI na data t ; K é o preço de exercício da opção; $P(t, T)$ é o preço na data t de um título descontado com vencimento em T ; σ_p^2 é a variância do ativo-objeto em (15); e τ é a diferença (fração do ano) entre a data de vencimento da opção (T) e a data de análise (t).

4 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO HULL-WHITE AO MERCADO DE RENDA FIXA NO BRASIL

A calibração envolve um certo grau de empirismo (*learning-by-doing*) e intuição, pois a tarefa de estimar os parâmetros que melhor se ajustam a um conjunto de dados é função de uma série de fatores, tais como: que instrumentos derivativos considerar; definição da amostra para evitar a presença de *outliers*; escolha de um critério para ser utilizado como peso; a que restrições os parâmetros devem se limitar; e a definição do algoritmo de otimização e os valores iniciais a serem considerados.¹²

Uma abordagem alternativa no processo de calibração dos parâmetros seria a estimação estatística deles.¹³

No mercado de derivativos de taxas de juros no Brasil, o único instrumento passível de fornecer estimativas para os parâmetros que desejamos cali-

12. Segundo Ong (1996): "Calibration is definitely more an art than science. Consequently, calibrating to the market can be highly subjective."

Denominamos *outliers* os dados que embutem pouca ou nenhuma informação para a calibração. A sua manutenção no conjunto de dados para a calibração pode levar a estimativas totalmente viesadas para os parâmetros.

As rotinas de otimização para a calibração do modelo Hull-White foram criadas no Matlab pelo fato de este possuir grande capacidade computacional em prover respostas rápidas e com muita informação. Apesar disso, concluímos que, sem dúvida alguma, a calibração é a parte mais difícil de todo o conjunto relacionado ao apreçamento de um contrato derivativo de taxa de juros.

13. As estimativas obtidas nesse processo poderiam servir como base de comparação para as estimativas obtidas implicitamente no processo de calibração. Uma boa referência sobre o tema é o artigo de Gonçalves e Issler (1997), no qual vários modelos econométricos são testados para a estimação dos parâmetros do modelo de taxa de juros gaussiano. Essa abordagem requer modelos econométricos, que não é o objetivo principal deste artigo. Desse modo, decidimos pela sua não-implementação. De todo modo, a menção é válida pois se trata de métodos alternativos complementares para a verificação da consistência dos parâmetros estimados.

Cabe mencionar a enorme polêmica na calibração dos modelos de derivativos, em termos de modelagem, entre os chamados "econometristas financeiros" e os "rocket scientists" — utilizam o cálculo estocástico.

brar e com preços divulgados ao público é a opção de IDI, negociada na BM&F.¹⁴

Apenas para comprovar a qualidade do ajuste logarítmico que usamos na minimização dos resíduos quadráticos entre os preços de mercado das opções e os preços do modelo, comparamos os resultados dos resíduos ao quadrado com e sem o ajuste pelo logaritmo, de acordo com a Tabela 2. Os resíduos ao quadrado diminuem sensivelmente após a aplicação do logaritmo aos preços.¹⁵

A Tabela 3 exemplifica a existência de negócios com opções totalmente fora do dinheiro, sobre as quais devemos colocar em dúvida a validade de seus preços para o propósito de calibração. Nesses preços para a série MR05,¹⁶ a coluna “*r* implícito” indica a taxa de juros anualizada, entre a data da cotação e a data de vencimento da opção, que é requerida para que a opção tenha *payoff* nulo, enquanto a coluna “*r* mercado” mostra a taxa de juros negociada em mercado para o mesmo período. As diferenças entre as duas colunas são extremamente elevadas.

Diante disso, foram testadas diversas variações para a função-objetivo com o intuito de ajustar melhor os prêmios das opções e estimar parâmetros estáveis para a volatilidade (σ) e para a velocidade de reversão à média (a).

14. Trata-se de um mercado relativamente ilíquido se compararmos com outros mercados de opções, como Bovespa ou BM&F (dólar, por exemplo). Portanto, devemos atribuir importância especial ao critério empregado para a seleção dos dados e constituição da amostra, devido à sua relativa liquidez, em termos de opções negociadas para poucos vencimentos e exercícios diferentes. Isso torna difícil, se não impossível, a tarefa de observar superfícies de volatilidades implícitas para as opções de IDI. Assim, as metodologias de Breedem e Litzenberger (1978), Banz e Miller (1978), Shimko (1993), Rubinstein (1994), Derman e Kani (1994) e Dupire (1994) não podem ser implementadas. Yoshino (2001) estima a superfície de volatilidade para o mercado de opção Ibovespa.

Como consequência da análise dos preços das opções, foram observados alguns critérios preliminares para a definição da amostra: *a*) devido ao fato de o volume de negócios com opções de venda de IDI influir minimamente no total de negócios efetuados dentro do período da amostra, optamos por desconsiderá-las para a otimização; *b*) escolhemos o preço médio das opções pelo motivo de o último preço ser passível de alguma “puxada” no fechamento do pregão ou por estar distorcido ao fazer parte de alguma operação estruturada, na qual não se observa o preço individual de cada opção, mas sim o conjunto. Isso pode ocorrer em consequência de uma operação de arbitragem, por exemplo. Contudo, permanece na amostra o problema do assincronismo das informações, o qual ocorre porque todos os dados necessários para o apreçamento de qualquer opção devem ser coletados no mesmo instante. No caso das opções de IDI, a estrutura a termo das taxas de juros e o prêmio pago pela opção precisariam ser coletados no mesmo instante. Esse é um problema que existe tanto no uso de um preço médio, como no uso de um preço último e é difícil de ser tratado porque os bancos de dados existentes e disponíveis ao público não levam em consideração o assincronismo das informações; *c*) seguimos a sugestão de Pelsser (2000) e calculamos todos os preços em termos logarítmicos. A amplitude nos preços negociados justifica essa decisão por melhorar os resultados da otimização; e *d*) para evitar a resolução do sistema com um número de variáveis maior do que o número de observações, consideramos somente os dias em que há, no mínimo, mais de dois preços disponíveis, pois temos dois parâmetros para calibrar: a e σ .

15. Porém, nessa primeira tentativa de calibração, os resultados ainda não foram bons, motivo que nos levou a investigar minuciosamente toda a informação contida na amostra. Essa rápida pesquisa concluiu que muitas observações, principalmente as opções muito dentro ou fora do dinheiro e as opções com prazo muito curto para o vencimento, poderiam estar prejudicando o desempenho do algoritmo de otimização. Diante disso, parecia mais adequado testar algumas alternativas de filtragem dos dados, da função-objetivo usada na otimização e de algum tipo de peso que minimizasse de forma acentuada a importância dessas informações relativas às opções muito dentro ou fora do dinheiro.

16. O termo MR05 é um código de negociação definido para opção de IDI cuja série é 05 e o mês de vencimento março de 2000.

TABELA 2
EXEMPLO COM RESULTADOS DE DUAS CALIBRAÇÕES, COM E SEM A APLICAÇÃO DO LOG AOS PRÊMIOS DAS OPÇÕES

Amostra: 1.390 observações

Chute inicial: 50% e 100% (σ/a)

Restrição inferior: 0,001% e 10% (σ/a)

Restrição superior: 500% e 150% (σ/a)

Estatísticas	Função-objetivo: [mercado – modelo] ²					Função-objetivo: [log (mercado + 1) – log (modelo + 1)] ²				
	Sem log					Com log				
	Volatilidade (σ) (%)	Reversão à média (a) (%)	Resíduos ao quadrado	Iterações		Volatilidade (σ) (%)	Reversão à média (a) (%)	Resíduos ao quadrado	Iterações	
Média	8,37	121,59	33,182	13		14,648	129,549	3	8	
Desvio-padrão	7,35	49,62	125,819	4		11,354	42,299	7	3	
Min	0,24	10,00	0	1		0,031	10,000	0	1	
Q1	3,57	132,03	678	11		6,702	136,715	0	6	
Mediana	6,77	145,56	5,114	12		11,809	149,945	1	7	
Q3	10,84	150,00	21,346	16		20,412	150,000	3	8	
Max	50,00	150,00	1.849,477	32		65,537	150,000	59	26	

TABELA 3
RESUMO DOS NEGÓCIOS COM A SÉRIE MARÇO 05 DE OPÇÃO DE IDI — JAN/2000

Data de cotação	Código de negociação	Tipo de série	Data de vencimento	K	Último	Médio	r implícito (r_k) (%)	r mercado (r_m) (%)
14/01/2000	MR05	C	01/03/2000	129,500	9	9	587,03	18,96
21/01/2000	MR05	C	01/03/2000	129,500	5	5	840,01	19,04
26/01/2000	MR05	C	01/03/2000	129,500	3	3	1.104,88	19,00

$$\min_{a,\sigma} \Phi_1 = \sum_{i=1}^n \left(\log(P_i^{\text{mercado}} + 1) - \log(P_i^{\text{modelo}} + 1) \right)^2 \quad (16)$$

$$\min_{a,\sigma} \Phi_2 = \sum_{i=1}^n w_i \left(\log(P_i^{\text{mercado}} + 1) - \log(P_i^{\text{modelo}} + 1) \right)^2 \quad (17)$$

$$\min_{a,\sigma} \Phi_3 = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\log(P_i^{\text{mercado}} + 1)} \left(\log(P_i^{\text{mercado}} + 1) - \log(P_i^{\text{modelo}} + 1) \right)^2 \quad (18)$$

$$\min_{a,\sigma} \Phi_4 = \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{\log(P_i^{\text{mercado}} + 1) - \log(P_i^{\text{modelo}} + 1)}{\log(P_i^{\text{mercado}} + 1)} \right)^2 \quad (19)$$

Nas funções-objetivo (16), (17), (18) e (19), empregadas na otimização não-linear, P_i^{mercado} é o preço médio da opção de IDI, P_i^{modelo} é o preço gerado pelo modelo para cada uma das n opções e w_i é um peso escolhido cuja soma é igual a 1.¹⁷

Restringimo-nos a analisar três critérios para a escolha do peso (w_i) na calibração:

a) O Vega calculado pelo modelo de Black (1976)¹⁸

$$\text{Vega} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = F e^{-r(T-t)} N'(d_1) \sqrt{T-t} \quad (20)$$

17. Nessas quatro funções, foi somado 1 para evitar que o log do preço fosse igual a zero quando o prêmio da opção era igual a 1. Portanto, é possível produzir diversas combinações entre as funções-objetivo e várias alternativas para os pesos na busca pelas estimativas que sejam as mais estáveis e que minimizem os resíduos ao quadrado.

18. Os parâmetros para o cálculo do Vega foram definidos assim: F é uma estimativa para o preço futuro do IDI na data de vencimento da opção, dada pelo valor atual do IDI multiplicado pelo fator equivalente à taxa de juros de mercado prevista no mercado futuro para o mesmo prazo. Os outros parâmetros são: r é a taxa de juros anualizada até a data de vencimento da opção, $T-t$ é o prazo para o vencimento da opção em termos de fração de ano, $N'(d_1)$ é a derivada da função de densidade cumulativa normal.

b) O *moneyness* da opção, definido aqui como:

$$moneyness = \left(\frac{IDI_t}{KP(t, T)} \right) \quad (21)$$

onde K é o preço de exercício na data T de vencimento da opção, IDI_t é o preço do IDI na data t e $P(t, T)$ é o fator de desconto, dado pelas taxas de juros projetadas pelo mercado futuro, o qual traz o preço de exercício a valor presente, da data T até a data t .

c) Um novo tipo de peso (w_3) é definido a seguir. Esse peso pondera, pelo prazo remanescente da opção (τ), o módulo da diferença relativa entre a taxa de juros requerida para que a opção seja exercida e a taxa de juros projetada no

mercado futuro para a data de vencimento da opção $\left| \frac{J_K - J_M}{J_M} \right|$.

$$W_3 = \frac{1}{\left| \frac{J_K - J_M}{J_M} \right|} * \tau \quad (22)$$

onde J_K é o juro implícito para que a opção tenha *payoff* nulo e calculado de acordo com a equação a seguir.

$$J_K = \text{juro implícito para exercício (\% a.a.)} = \left(\frac{K}{IDI_t} \right)^{\left(\frac{252}{du(t, T)} \right)} - 1 \quad (23)$$

onde K é o preço de exercício na data T de vencimento da opção; IDI_t é o preço do IDI na data t ; $du(t, T)$ é o número de dias úteis entre as datas t e T ; e 252 é um parâmetro para seguir a convenção do mercado brasileiro de renda fixa em reais, que considera um ano possuindo 252 dias úteis para a anualização da taxa de juros. O parâmetro J_M é o juro de mercado, projetado pelo mercado futuro, entre as duas datas e τ representa o tempo para o vencimento da opção (fração do ano), de acordo com:

$$\tau = \frac{du(t, T)}{252} \quad (24)$$

A intuição existente nesse peso é que as diferenças relativas elevadas entre J_K e J_M (opções muito dentro ou fora do dinheiro) — por estarem no denominador de (22) — receberão peso inversamente proporcional. Ao contrário, quando as diferenças entre J_K e J_M forem muito pequenas (opções no dinheiro), elas receberão peso consideravelmente maior. Adicionalmente, o termo τ pondera mais as opções com prazo mais longo.¹⁹ A Tabela 4 apresenta os resultados.

Para comprovar a influência positiva da inclusão dos pesos, testamos a rotina de calibração para duas funções-objetivo listadas anteriormente e para cada um dos quatro pesos, de modo que no final pudemos analisar os resultados das oito alternativas de calibração. Claramente, percebe-se, na Tabela 5, que a média dos resíduos quadráticos é reduzida de modo considerável quando é feito algum tipo de ponderação dos erros.

Destacaram-se o Vega e o w_3 como aqueles que apresentaram menor média e desvio-padrão para os resíduos da otimização. Dessa forma, as conclusões preliminares indicam a superioridade dos resultados com o uso do log, de funções-objetivo com diferenças relativas e da ponderação pelo Vega ou pelo w_3 .²⁰

TABELA 4
ESTATÍSTICAS PARA OS TRÊS TIPOS DE PESOS

Estatísticas	W_3	<i>Moneyness</i>	Vega (modelo Black)
Média	22,26	0,995	160,21
Desvio-padrão	185,26	0,023	113,63
Min	0,00	0,792	0,00
Q1	0,86	0,995	34,52
Mediana	2,65	0,999	178,10
Q3	8,87	1,001	254,15
Max	5.985,62	1,021	482,17

19. Por exemplo, se a diferença (J_K e J_M) for de 5% para duas opções diferentes, uma com 1 mês para o vencimento e a outra com 6 meses para o vencimento, é razoável supor que exista uma probabilidade maior de exercício para a opção mais longa e, assim, ela deva receber maior peso, pois as chances de a taxa de juros subir 5% faltando apenas 1 mês para o vencimento da opção são menores. Entretanto, uma primeira pergunta que inevitavelmente surge é o motivo que nos levou a sugerir o critério anterior como uma ponderação para os resíduos quadráticos. A primeira inspeção visual das séries temporais dos três pesos mostrou que w_3 oscilava mais e, efetuada uma análise estatística dos dados, verificou-se que, realmente, w_3 possuía maior desvio-padrão e maior amplitude em seus dados. Pelo fato de o w_3 ser mais sensível, acreditávamos que ele conseguiria minimizar os erros e gerar estimativas melhores para a e σ .

20. Considerando o fato de essa seleção inicial dos dados apenas descartar os dias em que somente um negócio foi efetuado, havia muitas opções totalmente fora do dinheiro (OTM) que poderiam ser retiradas da amostra através de algum procedimento para filtrar essas informações. O objetivo principal seria eliminar prêmios distorcidos ou de opções muito dentro ou fora do dinheiro e assim obter estimativas estáveis para a e σ .

TABELA 5
COMPORTAMENTO DOS RESÍDUOS QUADRÁTICOS DA OTIMIZAÇÃO DOS PARÂMETROS a E σ

Ponderação	Média	Desvio-padrão	Número de vezes em relação à menor média
Função-objetivo: $[\log(\text{mercado} + 1) - \log(\text{modelo} + 1)]^2$			
Sem peso	2,869	6,778	29,322
<i>Moneyness</i>	0,194	0,904	1,983
Vega + 1	0,098	0,886	1,000
W_3	0,110	0,931	1,129
Função-objetivo: $1/\log(\text{mercado} + 1) * [\log(\text{mercado} + 1) - \log(\text{modelo} + 1)]^2$			
Sem peso	0,327	0,642	62,568
<i>Moneyness</i>	0,019	0,050	3,709
Vega + 1	0,005	0,038	1,000
W_3	0,006	0,038	1,091

Filtramos a amostra usando como base o inverso do peso w_3 , ou seja, a diferença percentual entre a taxa de juros para o exercício da opção e a taxa de juros de mercado para o mesmo prazo, ajustado pelo tempo para o vencimento.²¹

$$\text{filtro} = \left| \frac{J_K - J_M}{J_M} \right| * \left(\frac{1}{\tau} \right) \quad (25)$$

Com base na equação (25), criamos três seleções diferentes de dados, aplicando filtros definidos arbitrariamente de 100%, 50% e 40%. As otimizações com base tanto na função dada pela equação (19) como nas ponderações pelo Vega e pelo w_3 produziram resultados bastante semelhantes para as estimativas dos parâmetros de reversão à média, da volatilidade e dos resíduos quadráticos.

Com relação aos resultados da estimação, temos que a primeira constatação é que se pode distinguir três períodos com comportamentos distintos. O primeiro período, que chamaremos de P1, vai de 03/01/2000 a 30/11/2000. O segundo período, chamado de P2, vai de 01/12/2000 a 15/03/2001. O último período, P3, de 16/03/2001 a 28/12/2001.

Para P1, verificamos que praticamente todo o ano de 2000 gerou estimativas instáveis e com excessivo desvio-padrão para a e σ , de acordo com os

21. Existem diversos procedimentos estatísticos que poderiam ser utilizados para filtrar os dados da amostra, tais como *box-plot* ou quantis da distribuição normal.

Gráficos 4 e 5. Pode-se explicar esse resultado devido à pequena liquidez do mercado de opções de IDI em 2000, a qual foi crescendo durante o ano, e à convergência da estrutura a termo das taxas de juros para condições menos voláteis, com taxas de juros menores e uma estrutura a termo mais plana somente no fim do ano citado, conforme Gráfico 6.²²

No período P2, a partir de dezembro de 2000 até março de 2001, as estimativas para α e σ surpreendentemente mostraram maior estabilidade, com queda da volatilidade de 8%-9% a.a. para 2%-3% a.a. e a velocidade de reversão à média entre 130% e 140% a.a.

GRÁFICO 4
PARÂMETRO σ (VOLATILIDADE DA TAXA DE JUROS DE CURTO PRAZO) NO PERÍODO P1 — DE 03/01/2000 A 30/11/2000

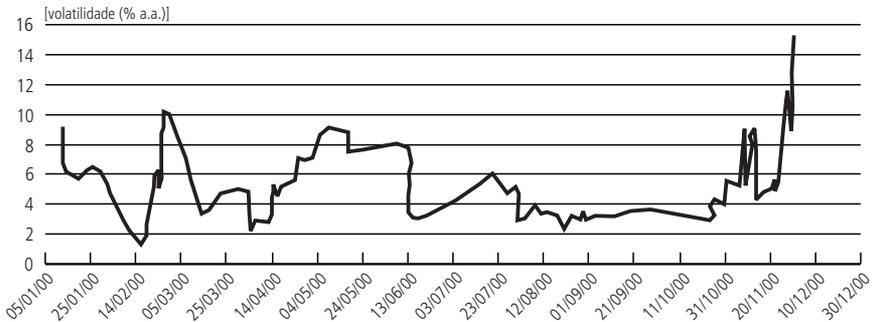
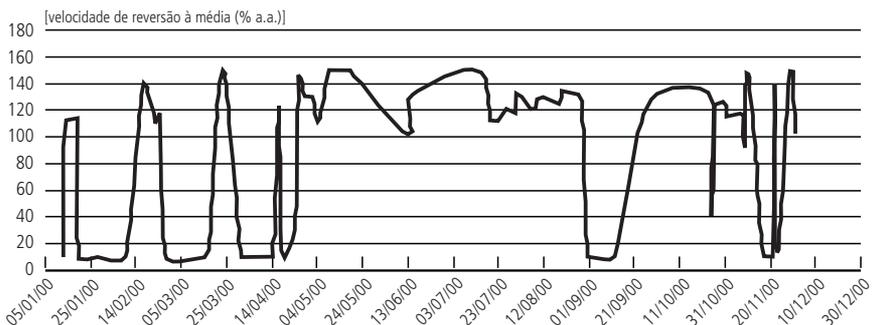


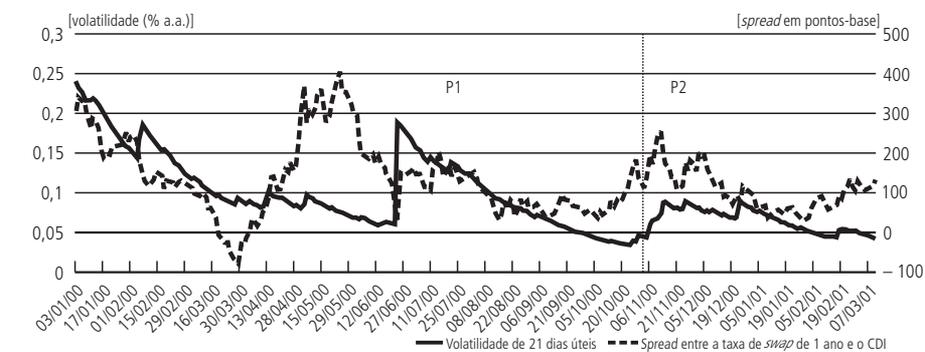
GRÁFICO 5
PARÂMETRO α (VELOCIDADE DE REVERSO À MÉDIA) NO PERÍODO P1 — DE 03/01/2000 A 30/11/2000



22. A volatilidade da taxa de juros de 21 dias úteis foi calculada por alisamento exponencial e fator de decaimento igual a 0,94, com base nas taxas de *swap* pré x CDI-BM&F e o *spread*, medido em pontos-base, é entre a taxa de *swap* de 1 ano e a taxa média diária anualizada do CDI-Cetip.

GRÁFICO 6

VOLATILIDADE DA TAXA DE JUROS DE 21 DIAS ÚTEIS E *SPREAD* ENTRE A TAXA DE *SWAP* DE 1 ANO E A TAXA DE 1 DIA — DE 03/01/2000 A 15/03/2001



Um exemplo da redução da volatilidade das taxas de juros no período está presente no Gráfico 6, que mostra a visível queda na volatilidade de novembro de 2000 a março de 2001. Nesse gráfico, a outra série representa o *spread* entre a taxa de *swap* de 1 ano e a taxa diária do CDI, na qual verificamos a redução de 200 pontos-base no início de novembro de 2000 para a metade no início de março de 2001. Essa redução nos *spreads* representa uma diminuição no prêmio de risco exigido para operações de prazo mais longo, ocorrendo em uma estrutura mais plana das taxas de juros. Portanto, no período em que houve relativa estabilidade no mercado de renda fixa, conforme descrição da curva de juros e sua volatilidade, foi possível inferir boas estimativas para os parâmetros.

Nos Gráficos 7 e 8 apresentamos um dos resultados da calibração das opções de IDI para a e σ , para o período de 01/12/2000 a 15/03/2001. A estabilidade da volatilidade é marcante a partir da metade de dezembro de 2000, ocorrendo o mesmo para a velocidade de reversão à média, com exceção de algumas datas, as quais foram ressaltadas no Gráfico 8. Apesar disso, conseguimos calibrar o parâmetro a para 90% dos casos.

O mais interessante é que no dia 15/03/2001, quando as inquietações com a situação argentina começaram a se agravar, ocorre uma ruptura nesse comportamento mais estável para as estimativas. A partir dessa data, a ampliação do nervosismo em relação ao futuro econômico da Argentina e o eventual contágio para o Brasil, a crise energética no segundo semestre e os atentados de 11 de setembro desestabilizaram completamente as estimativas geradas pela calibração diária, ilustradas nos Gráficos 9 e 10.

Os Gráficos 11 e 12 conseguem ilustrar perfeitamente a magnitude do choque ocorrido no mercado de renda fixa brasileiro a partir de março de 2001. No primeiro dia do contágio desse mercado devido à crise argentina, a

GRÁFICO 7
PARÂMETRO σ (VOLATILIDADE DA TAXA DE JUROS DE CURTO PRAZO) NO PERÍODO P2 — DE 01/12/2000 A 15/03/2001

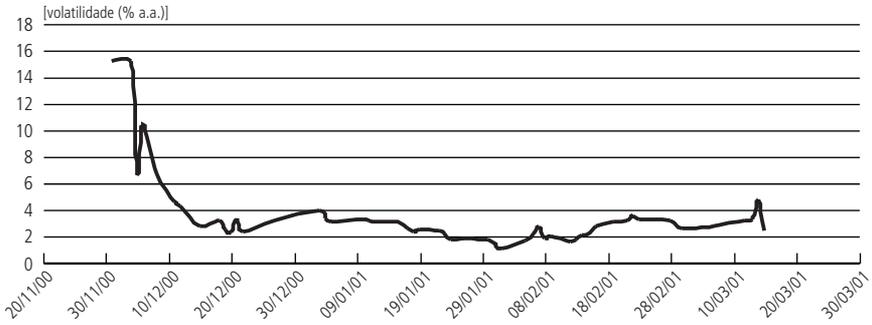


GRÁFICO 8
PARÂMETRO α (VELOCIDADE DE REVERSÃO À MÉDIA) NO PERÍODO P2 — DE 01/12/2000 A 15/03/2001

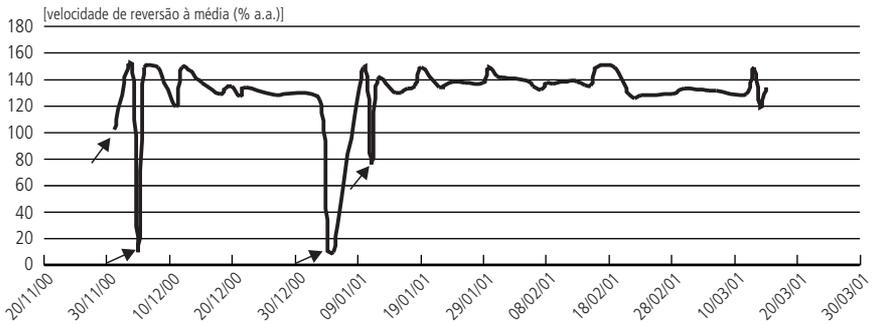


GRÁFICO 9
PARÂMETRO σ (VOLATILIDADE DA TAXA DE JUROS DE CURTO PRAZO) NO PERÍODO P3 — DE 16/03/2001 A 28/12/2001

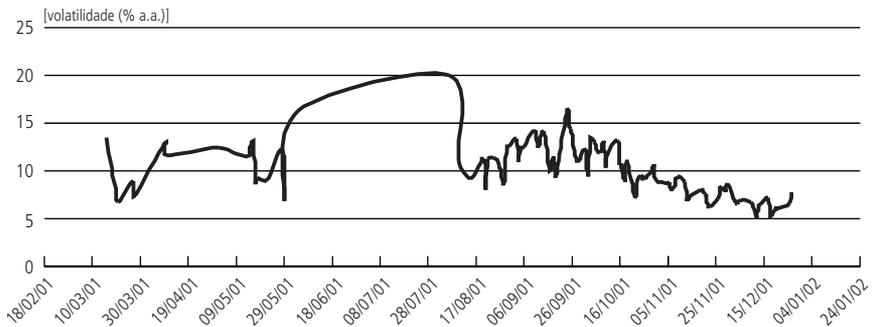


GRÁFICO 10

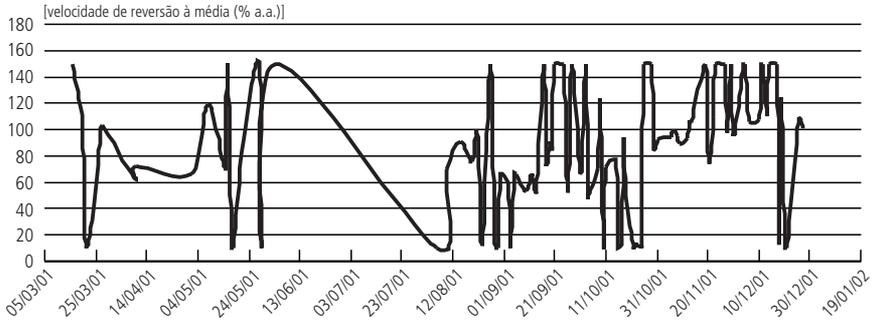
PARÂMETRO a (VELOCIDADE DE REVERSÃO À MÉDIA) NO PERÍODO P3 — DE 16/03/2001 A 28/12/2001

GRÁFICO 11

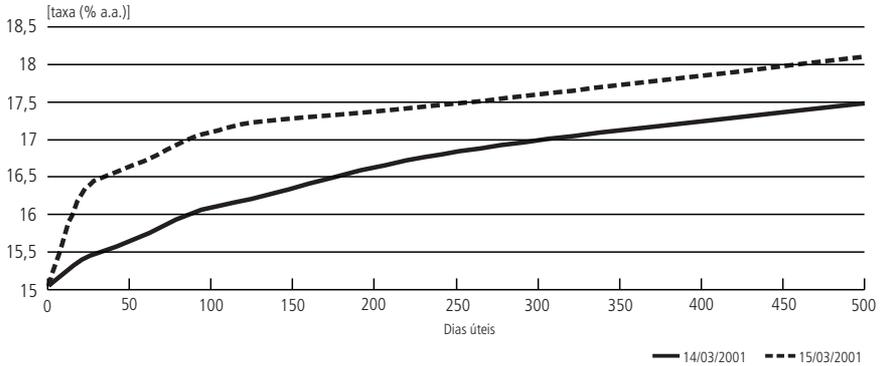
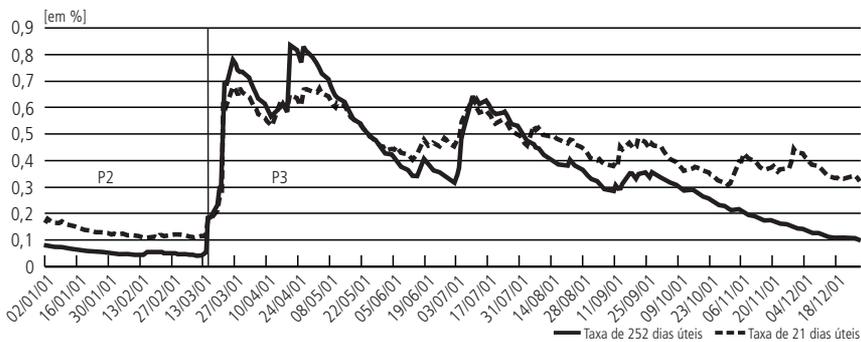
CURVAS DE TAXAS DE JUROS (*SWAPS* PRÉ X CDI-BM&F) PARA 14/03/2001 E 15/03/2001

GRÁFICO 12

VOLATILIDADE DAS TAXAS DE JUROS DE 21 E 252 DIAS ÚTEIS — DE 02/01/2001 A 28/01/2001

curva de juros deslocou-se para cima, praticamente de maneira paralela, cerca de um ponto percentual e o deslocamento para cima da estrutura a termo de juros continuou até o final do mês de março. Conseqüentemente, a volatilidade das taxas de juros aumentou de modo expressivo — por exemplo, a volatilidade da taxa de juros para 252 dias úteis, cerca de um ano, foi multiplicada por seis entre a metade e o final do mês de março de 2001. Certamente, nenhum modelo de taxa de juros da família de um fator consegue ajustar-se a esse choque.

Em virtude do cenário de excessiva volatilidade iniciado em março e prolongado devido à crise energética e aos atentados nos Estados Unidos, a impossibilidade em extrair estimativas estáveis para a e σ ficou mais clara. O processo de calibração do modelo Hull-White gerou estimativas enquanto a curva de juros era estável, praticamente plana, e as volatilidades das taxas de juros estavam em trajetória declinante. Entretanto, concluímos também que o conjunto de condições adversas após março de 2001 impediu que o modelo proposto obtivesse o ajuste necessário, de modo que fornecesse parâmetros confiáveis para o apreamento e *hedge* de derivativos de taxa de juros.

5 CONCLUSÕES

Apesar da escassez de dados diários para as opções de IDI, mostramos que é possível calibrar, de maneira razoavelmente robusta, o modelo de Hull-White em períodos de estabilidade econômico-financeira. Mostramos também que, em períodos com grande volatilidade ou pós-crise, o mesmo modelo gera parâmetros instáveis. A partir dos estudos realizados para a calibração, são necessários testes de apreamento e *hedging*, o que não foi feito neste trabalho, para que se tenham argumentos a favor ou contra a qualidade da calibração do modelo.

Certamente, se o mercado de opções de taxas de juros no Brasil, hoje representado somente pela opção de IDI, mostrar aumento significativo de liquidez, a tarefa de calibração será muito facilitada.

Como sugestões de pesquisa futura na área de modelagem de derivativos de taxas de juros, existem inúmeros caminhos a serem seguidos. Um deles pode ser a elaboração de modelos que incorporem o caráter estocástico da volatilidade mais saltos discretos (*stochastic volatility jump diffusion model*) provocados pelas reuniões do Comitê de Política Monetária (Copom), do Banco Central do Brasil. Uma outra linha é a implementação de modelos unifatoriais da classe HJM, mas com especificações diferentes para a variância.

APÊNDICE A

RESULTADOS DIÁRIOS DA CALIBRAÇÃO

CALIBRAÇÃO DAS OPÇÕES DE IDI AO MODELO HULL-WHITE

Amostra: Calibração diária, apenas mais de uma observação por dia é válida

Amostra: 723 observações

Filtro: $\leq 50\%$

Peso: w_3

Função-objetivo: $w * [(\log(\text{mercado} + 1) - \log(\text{modelo} + 1)) / \log(\text{mercado} + 1)]^2$

Algoritmo: Large Scale e ON-Gauss Newton

Chute inicial: 8% e 100% (σ e a)

Restrição inferior: 0,001% e 10% (σ e a)

Restrição superior: 20% e 150% (σ e a)

		%			
Média	3	6,849	97,073	9.05E-04	5
Desvio-padrão	1	3,792	50,683	2.53E-03	1
Min	2	1,191	10,000	1.35E-09	2
Q1	2	3,302	66,062	3.20E-05	4
Mediana	3	6,311	115,750	2.57E-04	5
Q3	4	9,265	137,883	7.73E-04	5
Max	6	20,000	150,000	2.51E-02	11

Data	Número de observações	Volatilidade (σ) (%)	Reversão à média (a) (%)	Resíduos ao quadrado	Iterações
13/01/00	2	9,12	10,00	9.52.E-04	7
14/01/00	3	6,17	111,04	3.57.E-04	4
19/01/00	2	5,82	112,81	3.34.E-04	4
20/01/00	3	5,75	10,00	3.15.E-04	4
28/01/00	2	6,39	10,00	3.67.E-04	6
09/02/00	3	2,83	10,00	1.30.E-03	11
17/02/00	2	1,30	141,81	3.71.E-03	7
18/02/00	2	1,59	139,95	5.54.E-04	6
23/02/00	2	6,26	110,70	1.49.E-03	4
24/02/00	2	5,10	118,09	7.35.E-05	4
25/02/00	2	6,11	112,70	1.49.E-03	4
28/02/00	3	10,19	10,00	8.11.E-03	6

(continua)

(continuação)

Data	Número de observações	Volatilidade (σ) (%)	Reversão à média (a) (%)	Resíduos ao quadrado	Iterações
15/03/00	4	3,21	10,00	1.12.E-04	6
16/03/00	3	3,42	10,02	312.E-03	9
17/03/00	3	3,39	15,77	3.57.E-03	8
23/03/00	2	4,65	150,00	8.08.E-03	6
31/03/00	2	4,95	10,00	2.51.E-02	6
03/04/00	2	4,89	10,00	2.32.E-02	6
05/04/00	3	2,26	10,00	3.42.E-03	6
06/04/00	3	1,86	10,00	2.46.E-03	7
07/04/00	4	2,87	10,00	1.39.E-03	6
13/04/00	3	2,86	10,00	8.45.E-04	6
14/04/00	3	5,28	10,00	3.39.E-04	5
17/04/00	2	4,49	121,89	4.48.E-04	4
18/04/00	3	5,19	15,92	3.50.E-05	5
20/04/00	3	5,18	10,00	9.10.E-06	5
24/04/00	3	5,75	29,85	8.83.E-05	6
26/04/00	3	7,07	149,60	1.49.E-05	5
28/04/00	3	6,99	129,43	3.74.E-06	4
02/05/00	3	7,05	129,48	3.59.E-05	4
05/05/00	3	8,59	110,92	3.62.E-06	3
09/05/00	3	8,97	150,00	9.56.E-04	4
10/05/00	3	9,17	150,00	9.90.E-04	5
17/05/00	3	8,81	150,00	1.07.E-03	4
18/05/00	3	8,11	150,00	1.25.E-03	4
19/05/00	3	7,52	149,94	4.92.E-04	4
13/06/00	2	7,73	101,66	7.68.E-06	3
15/06/00	2	3,16	131,28	4.32.E-04	5

(continua)

(continuação)

Data	Número de observações	Volatilidade (σ) (%)	Reversão à média (a) (%)	Resíduos ao quadrado	Iterações
14/07/00	5	5,30	149,96	1.82.E-04	5
20/07/00	2	6,10	111,97	1.30.E-04	4
27/07/00	2	4,73	120,43	5.54.E-05	4
31/07/00	2	5,10	118,14	4.91.E-05	4
01/08/00	2	2,96	131,52	1.41.E-04	5
08/08/00	2	3,80	120,02	2.20.E-04	6
10/08/00	2	3,41	129,54	2.83.E-04	5
18/08/00	2	3,27	125,36	2.53.E-04	6
21/08/00	2	2,31	134,15	1.58.E-03	5
24/08/00	2	3,15	134,00	6.94.E-04	5
25/08/00	2	3,23	128,89	5.05.E-04	5
28/08/00	2	2,94	131,61	3.79.E-04	4
29/08/00	2	3,56	129,83	6.92.E-04	5
31/08/00	3	2,96	10,01	4.01.E-04	6
04/09/00	3	3,23	10,05	3.34.E-04	6
12/09/00	3	3,21	10,00	3.60.E-04	7
28/09/00	2	3,64	126,82	5.24.E-03	4
24/10/00	2	2,96	132,34	1.05.E-03	5
25/10/00	4	3,83	40,65	3.28.E-06	5
26/10/00	2	4,30	123,10	7.29.E-04	4
27/10/00	2	4,19	123,81	9.77.E-05	4
30/10/00	2	4,00	125,02	1.61.E-06	5
01/11/00	2	5,61	114,96	3.57.E-05	4
06/11/00	2	5,22	117,47	1.47.E-04	4
07/11/00	2	5,45	115,06	6.29.E-04	4
08/11/00	2	5,72	116,44	9.79.E-04	4

(continua)

(continuação)

Data	Número de observações	Volatilidade (σ) (%)	Reversão à média (a) (%)	Resíduos ao quadrado	Iterações
09/11/00	2	8,94	92,91	1.29.E-04	4
10/11/00	3	5,13	150,00	5.29.E-04	5
13/11/00	2	9,08	91,91	1.36.E-05	4
14/11/00	3	4,08	62,64	1.63.E-05	6
17/11/00	3	4,85	10,00	9.01.E-04	5
20/11/00	2	4,97	10,00	1.48.E-03	5
21/11/00	3	5,01	10,02	1.17.E-04	4
22/11/00	3	5,65	139,51	2.37.E-05	5
23/11/00	2	4,93	10,00	8.37.E-05	7
28/11/00	4	11,42	150,00	6.76.E-04	5
29/11/00	3	9,01	141,19	2.82.E-07	4
30/11/00	3	10,46	150,00	1.03.E-03	5
01/12/00	3	15,21	102,51	6.54.E-06	6
04/12/00	3	15,24	150,00	4.96.E-04	7
05/12/00	2	6,79	10,49	1.98.E-06	6
06/12/00	3	10,44	150,00	6.50.E-03	7
08/12/00	2	6,80	149,97	1.23.E-04	5
11/12/00	2	4,72	120,44	1.05.E-03	4
12/12/00	3	4,37	150,00	2.83.E-03	5
15/12/00	4	2,88	137,85	8.89.E-05	5
18/12/00	2	3,30	129,23	3.63.E-04	5
19/12/00	2	2,61	133,73	4.13.E-03	6
20/12/00	2	2,35	135,33	2.23.E-05	5
21/12/00	2	3,47	128,17	9.22.E-03	5
22/12/00	3	2,41	134,93	3.52.E-04	5
27/12/00	2	3,30	129,06	2.03.E-04	5

(continua)

(continuação)

Data	Número de observações	Volatilidade (σ) (%)	Reversão à média (a) (%)	Resíduos ao quadrado	Iterações
03/01/01	2	4,02	124,91	7.33.E-04	4
04/01/01	4	3,42	11,50	4.37.E-04	7
05/01/01	5	3,14	10,00	5.16.E-04	7
10/01/01	2	3,38	150,00	8.64.E-05	6
11/01/01	4	3,22	76,30	4.39.E-05	6
12/01/01	4	3,21	140,05	2.23.E-05	5
15/01/01	3	3,16	130,28	5.08.E-08	5
16/01/01	2	3,10	130,64	2.20.E-06	5
17/01/01	3	2,65	133,44	1.13.E-04	5
18/01/01	4	2,39	135,51	6.07.E-04	5
19/01/01	3	2,61	150,00	1.37.E-03	7
22/01/01	4	2,52	134,62	7.66.E-04	5
23/01/01	4	2,22	136,36	1.62.E-03	5
24/01/01	3	1,80	138,71	1.69.E-03	5
26/01/01	3	1,88	138,21	1.01.E-03	5
29/01/01	3	1,88	137,98	2.22.E-03	5
30/01/01	5	1,81	150,00	1.29.E-03	6
31/01/01	5	1,57	142,73	1.59.E-03	5
01/02/01	5	1,19	142,57	9.50.E-04	6
05/02/01	4	1,72	139,44	2.00.E-03	6
06/02/01	5	2,24	135,82	1.99.E-03	5
07/02/01	5	2,85	132,97	8.73.E-04	5
08/02/01	3	1,97	137,67	6.61.E-04	5
09/02/01	4	2,11	136,81	2.69.E-04	5
12/02/01	3	1,71	139,30	2.10.E-05	6
13/02/01	4	1,85	138,45	1.13.E-05	6

(continua)

(continuação)

Data	Número de observações	Volatilidade (σ) (%)	Reversão à média (a) (%)	Resíduos ao quadrado	Iterações
14/02/01	3	2,21	136,21	1.25.E-04	5
15/02/01	4	2,25	135,61	1.46.E-03	5
16/02/01	5	2,84	150,00	1.25.E-03	6
19/02/01	5	3,15	150,00	7.75.E-04	5
21/02/01	3	3,25	129,67	2.85.E-05	5
22/02/01	3	3,68	125,85	3.17.E-04	5
23/02/01	2	3,35	128,38	6.80.E-04	5
28/02/01	2	3,29	129,33	2.79.E-04	5
02/03/01	2	2,70	133,36	2.52.E-03	5
06/03/01	2	2,77	132,22	2.54.E-03	5
07/03/01	2	2,80	132,28	2.22.E-03	5
12/03/01	3	3,28	129,47	1.61.E-03	4
13/03/01	5	3,31	150,00	2.19.E-03	5
14/03/01	4	4,86	119,65	1.94.E-05	4
15/03/01	4	2,49	134,53	7.73.E-04	5
16/03/01	4	13,49	150,00	3.92.E-05	6
20/03/01	3	7,63	102,32	8.56.E-06	3
21/03/01	3	6,74	10,01	1.56.E-05	4
27/03/01	2	9,00	92,45	4.00.E-05	3
28/03/01	2	7,46	103,40	6.71.E-05	3
09/04/01	2	12,89	63,23	3.49.E-05	5
10/04/01	2	11,66	72,58	7.39.E-05	4
02/05/01	2	12,49	66,30	2.37.E-06	5
08/05/01	2	11,92	119,49	1.35.E-09	6
14/05/01	2	11,49	73,80	1.52.E-05	5
15/05/01	2	12,04	69,69	6.08.E-05	5

(continua)

(continuação)

Data	Número de observações	Volatilidade (σ) (%)	Reversão à média (a) (%)	Resíduos ao quadrado	Iterações
16/05/01	3	13,03	150,00	1.05.E-05	6
17/05/01	3	8,72	10,00	5.14.E-04	5
18/05/01	2	9,26	10,00	1.83.E-03	6
22/05/01	2	9,07	92,02	2.81.E-04	4
28/05/01	2	12,19	150,00	1.81.E-05	6
29/05/01	3	6,89	10,00	2.33.E-04	5
04/06/01	2	16,28	150,00	1.88.E-03	6
06/08/01	2	20,00	10,00	2.87.E-04	8
10/08/01	2	11,08	69,54	4.41.E-09	4
15/08/01	2	9,23	90,80	1.57.E-05	3
20/08/01	2	11,27	75,45	1.09.E-05	4
21/08/01	2	8,01	99,93	2.33.E-05	2
22/08/01	3	11,32	90,81	1.50.E-06	5
24/08/01	5	11,34	12,58	1.55.E-04	5
27/08/01	5	10,56	150,00	2.87.E-04	5
28/08/01	4	8,45	19,80	2.50.E-05	5
29/08/01	4	9,95	10,14	1.29.E-04	5
30/08/01	4	12,39	10,05	1.63.E-04	6
31/08/01	3	12,60	65,49	3.63.E-05	5
03/09/01	3	13,35	59,91	9.76.E-06	5
04/09/01	5	10,92	10,06	2.67.E-04	5
05/09/01	4	12,42	66,88	6.30.E-05	5
06/09/01	3	12,50	66,25	1.01.E-05	5
10/09/01	2	14,25	53,11	9.82.E-07	6
12/09/01	3	12,50	66,27	1.78.E-06	5
14/09/01	3	14,23	53,30	9.64.E-06	5

(continua)

(continuação)

Data	Número de observações	Volatilidade (σ) (%)	Reversão à média (a) (%)	Resíduos ao quadrado	Iterações
17/09/01	5	10,15	150,00	4.47.E-03	4
18/09/01	4	11,48	73,87	4.68.E-05	5
19/09/01	2	9,28	90,44	2.66.E-06	4
20/09/01	3	9,97	85,23	1.38.E-04	4
21/09/01	4	11,23	150,00	3.59.E-04	5
24/09/01	4	16,40	149,99	3.01.E-05	7
25/09/01	5	14,92	150,00	7.22.E-05	7
26//09/01	4	14,41	51,94	1.54.E-04	5
28/09/01	3	11,06	150,00	5.02.E-04	5
01/10/01	2	12,35	67,37	1.96.E-05	5
02/10/01	3	11,68	72,42	3.43.E-05	5
03/10/01	4	9,47	149,99	2.30.E-04	4
04/10/01	4	13,44	48,20	7.68.E-06	5
05/10/01	4	13,04	54,20	1.82.E-06	5
08/10/01	3	11,89	70,85	2.01.E-05	5
09/10/01	4	13,15	123,13	4.97.E-06	6
10/10/01	3	10,37	10,01	3.39.E-04	5
11/10/01	2	11,76	71,82	2.12.E-05	5
15/10/01	3	13,30	76,94	2.58.E-05	5
16/10/01	3	10,99	10,01	1.92.E-04	6
17/10/01	4	10,81	15,23	2.91.E-05	5
18/10/01	2	8,89	93,22	7.37.E-04	3
19/10/01	3	11,22	49,90	2.29.E-07	5
22/10/01	5	7,19	10,06	2.69.E-04	3
23/10/01	3	8,86	14,14	1.19.E-05	5
25/10/01	4	9,49	10,61	4.62.E-05	5

(continua)

(continuação)

Data	Número de observações	Volatilidade (σ) (%)	Reversão à média (a) (%)	Resíduos ao quadrado	Iterações
26/10/01	4	9,17	150,00	1.25.E-04	4
29/10/01	3	9,79	150,00	7.34.E-05	5
30/10/01	4	10,66	84,69	2.23.E-06	4
31/10/01	5	9,04	92,23	1.74.E-07	4
05/11/01	4	8,75	94,35	3.27.E-05	4
06/11/01	4	8,83	93,81	5.55.E-05	3
07/11/01	5	7,92	100,43	1.36.E-04	3
08/11/01	3	8,68	94,93	3.51.E-04	3
09/11/01	4	9,44	89,21	6.89.E-04	4
12/11/01	3	8,89	93,18	5.89.E-04	4
13/11/01	5	6,91	106,81	2.48.E-04	3
14/11/01	3	7,18	105,10	5.52.E-05	3
19/11/01	5	8,07	150,00	4.03.E-04	4
20/11/01	6	7,57	102,66	5.22.E-04	3
21/11/01	5	7,20	73,79	1.28.E-04	3
22/11/01	2	6,32	110,58	2.06.E-03	3
23/11/01	2	6,30	150,00	2.10.E-05	6
26/11/01	4	7,06	150,00	5.34.E-04	4
27/11/01	5	8,01	150,00	7.16.E-04	4
28/11/01	4	8,34	97,48	8.85.E-05	3
29/11/01	5	7,74	150,00	2.35.E-04	4
30/11/01	4	8,71	94,70	1.71.E-05	3
03/12/01	5	6,63	135,61	3.60.E-05	4
04/12/01	4	6,46	150,00	1.55.E-04	5
05/12/01	5	6,73	150,00	1.99.E-04	5
06/12/01	4	6,99	106,31	2.61.E-04	3
10/12/01	2	6,75	107,80	2.09.E-03	4

APÊNDICE B

CÓDIGOS DE MATLAB PARA A IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO HULL-WHITE

```
function F = HWIDICall (x,P1,P2,P3,P4,P5,P6)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% HWIDICall: Calcula o preço de uma opção de compra sobre o IDI, de acordo
% com o modelo Hull-White 1 fator. A fórmula da variância segue derivação
% de Vieira Neto e Valls Pereira (1999).
%
% A função HWIDICall é usada na função de otimização LSQNONLIN para encontrar
% os parâmetros de volatilidade e reversão à média.
%
% Os parâmetros da função HWIDICall são:
% P1: IDI é o preço do IDI na data de cálculo da opção
% P2: K é o preço de exercício da opção de compra
% P3: PtT é o preço do discount bond (fator de desconto)
% P4: tau é o tempo para o vencimento da opção, mensurado em fração de ano
% P5: mktprices é o log do preço de mercado (último ou médio) da opção
% P6: weight é um peso escolhido para otimização
%
% Autor: Leonardo A. Almeida, 02-10-2002
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
IDI = P1(:,1)
K = P2(:,1)
PtT = P3(:,1)
tau = P4(:,1)
mktprices = P5(:,1)
weight = P6(:,1)
% o termo x(1) é igual ao sigma e x(2) é igual ao alfa
varP = (x(1)^2/(2*x(2)^3))*(2*x(2)*tau + 4*exp(-x(2)*tau) - exp(-2*x(2)*tau)-3)
```

$\text{sigP} = \text{sqrt}(\text{varP})$

$d1 = (\log(\text{IDI}/(\text{K} \cdot \text{PtT})) + \text{varP}/2) / \text{sigP}$

$d2 = d1 - \text{sigP}$

$\text{call} = (\text{IDI} \cdot \text{normcdf}(d1) - \text{K} \cdot \text{PtT} \cdot \text{normcdf}(d2))$

$F = (\text{mktprices} - \log(\text{call} + 1)) / \text{mktprices}$

$\text{err_weighted} = F \cdot \text{weight}$

$F = \text{err_weighted}$

function F = Calibration

#####

%

% Esta rotina foi desenhada com o objetivo de descobrir as estimativas

% implícitas de velocidade de reversão à média e volatilidade nos preços

% das opções de IDI negociadas na BM&F

% O modelo Hull-White 1 fator foi o escolhido para descrever o comportamento

% da taxa de juros de curto prazo

%

% IDI é o preço do IDI na data de cálculo da opção

% K é o preço de exercício da opção de compra

% PtT é o preço do *discount bond* (fator de desconto)

% a é o parâmetro de velocidade de reversão à média

% sig é a volatilidade da taxa de juros de curto prazo

% tau é o tempo para o vencimento da opção, mensurado em fração de ano

%

% Autor: Leonardo A. Almeida, 02-10-2002

#####

DataOpt = wk1read('c:\Calibradia.wk1')

w = 1

fimdados = length(DataOpt)

a1 = 2

```

ini = a1
for i = ini : fimdados
k = DataOpt(i,3)
if i == fimdados
l = k+1
else
l = DataOpt(i+1,3)
end
if k == l
else
a2 = i
nlin = a2 - a1 + 1
% são os parâmetros que irão entrar na função HWIDICall
P1 = zeros(nlin,1)
P2 = zeros(nlin,1)
P3 = zeros(nlin,1)
P4 = zeros(nlin,1)
P5 = zeros(nlin,1)
P6 = zeros(nlin,1)
% onde P1,P2,P3,P4,P5 e P6 são, respectivamente, IDI,K,PtT,tau,mktprices
e weight(Vega)
P1(1:nlin,1)=DataOpt(a1:a2,8)
P2(1:nlin,1)=DataOpt(a1:a2,7)
P3(1:nlin,1)=DataOpt(a1:a2,9)
P4(1:nlin,1)=DataOpt(a1:a2,11)
% med e ult é um vetor com os preços médios e de fechamento das opções
ult=log(DataOpt(a1:a2,12))
med=log(DataOpt(a1:a2,13)+1)
%ult=DataOpt(a1:a2,12)

```

```

%med=DataOpt(a1:a2,13)
% pesos para calibração, escolher um deles
difjrs =DataOpt(a1:a2,14)
difjrs = difjrs(:,1)/sum(difjrs)
moneyness=DataOpt(a1:a2,15)
moneyness = moneyness(:,1)/sum(moneyness)
Vega=DataOpt(a1:a2,17)+1
Vega = Vega(:,1)/sum(Vega)
% pesos
P5(1:nlin,1)=med
P6(1:nlin,1)=difjrs
% é um chute inicial para sig e alfa, respectivamente
x0=[0.08,1]
% restrições das soluções
lb=[1e-5,0.10]
ub=[0.2,1.5]
% descrição das opções
options=optimset('LargeScale','on','LevenbergMarquardt','off')
[x,resnorm,residual,exitflag,output] =
lsqnonlin('HWIDICall',x0,lb,ub,options,P1,P2,P3,P4,P5,P6)
DataCalc = DataOpt(a2,1)
iterations = getfield(output, 'iterations')
algorithm = getfield(output, 'algorithm')
MatrResult(w,1)= DataCalc
MatrResult(w,2:3)= x
MatrResult(w,4)= resnorm
MatrResult(w,5)= iterations
w = w + 1
a1 = a2 +1
end
end

```

ABSTRACT

The Brazilian fixed income market, when compared to the international standards of developed countries, is characterized by high interest rates and huge volatility. These features turn the modeling of financial engineering into an extremely challenging task. It is not trivial to calibrate interest rate models that capture the stylized facts for the different regimes observed for the Brazilian market. We implement the Hull-White model, with one factor, for the IDI-BM&F option market. The critical aspect of this task is to implement the algorithm to match the market prices to the theoretical ones. The procedure allows us to estimate, endogenously, both the mean-reverting speed and the short rate volatility parameter. Despite the scarcity of IDI options daily data, we show that it is possible to calibrate the Hull-White model in a very robust fashion for the periods of financial stability. We also show that in periods with huge volatility — specifically during the recent Argentinean contagion effect in the Brazilian fixed income market—the model renders unstable parameters. Nowadays, this issue is relevant because the Central Bank has started using derivatives to perform both the monetary and exchange rate policies. Our work contributes, providing practical alternative ways for implementing the Hull-White model for the Brazilian fixed income market.

BIBLIOGRAFIA

- ALMEIDA, L. A. *Análise do modelo Hull-White para o mercado brasileiro de derivativos de taxas de juros*. IME/FEA-USP, 2002 (Dissertação de Mestrado).
- BANZ, R., MILLER, M. Prices for state contingent claims: some estimates and applications. *Journal of Business*, v. 51, p. 653-672, 1978.
- BLACK, F. The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, v. 3, p. 167-179, Mar. 1976.
- BLACK, F., DERMAN, E., TOY, W. A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options. *Financial Analysts Journal*, v. 46, p. 33-39, 1990.
- BLACK, F., KARASINSKI, P. Bond and option pricing when short rates are lognormal. *Financial Analysts Journal*, v. 47, p. 52-59, 1991.
- BREEDEN, D., LITZENBERGER, R. Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, v. 51, p. 621-651, 1978.
- BRIGO, D., MERCURIO, F. *Interest rate models: theory and practice*. 1st ed. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001. 1rs.
- CASSETARI, A., NETO, L. F. A precificação de derivativos de taxa de juro no Brasil. *Revista BM&F*, n. 145, p. 35-47, 2001.
- CLEWLOW, L., STRICKLAND, C. *Implementing derivatives models*. 2nd ed. London: John Wiley e Sons, 1999.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E., ROSS, S. A. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, v. 53, p. 363-384, 1985.
- DERMAN, E., KANI, I. Riding on the smile. *Risk*, v. 7, p. 32-39, 1994.
- DOUADY, R. *Model calibration in the Monte-Carlo framework*. école Normale Supérieure, CMLA, 1999 (Working Paper, CNRS).

- DUFFIE, D. *Dynamic asset pricing theory*. 2nd ed. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1996.
- DUPIRE, B. Pricing with a smile. *Risk*, v. 7, p. 18-20, 1994.
- GIBSON, R., LHABITANT, F. S., TALAY, D. *Modeling the term structure of interest rates: a review of literature*. Zurich: RiskLab, 2001 (Working Paper).
- GONÇALVES, F. O., ISSLER, J. V. Estimating the term structure of volatility and fixed income derivative pricing. *Journal of Fixed Income*, v. 6, p. 32-39, 1997.
- GUPTA, A., SUBRAHMANYAM, M. *An examination of the static and dynamic performance of interest rate option pricing models in the dollar cap-floor markets*. Case Western Reserve University e New York University, 2000 (Working Paper).
- HEATH, D., JARROW, R., MORTON, A. Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology. *Econometrica*, v. 60, p. 77-105, 1992.
- HO, T. S. Y., LEE, S. B. Term structure and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance*, v. 41, p. 1.011-1.029, 1986.
- HULL, J. *Options, futures, and other derivative securities*. 3rd ed. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, 1997.
- HULL, J., WHITE, A. Pricing interest rate derivative securities. *Review of Financial Studies*, v. 3, p. 573-592, 1990.
- . Single-factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 28, p. 235-254, 1994a.
- . Numerical procedures for implementing term structure models I: single-factor models. *Journal of Derivatives*, v. 2, p. 7-16, 1994b.
- . *Hull-White on derivatives a compilation of articles by John Hull e Alan White*. 1st ed. London: Risk Publications, 1996a.
- . Using Hull-White interest rate trees. *Journal of Derivatives*, v. 3, p. 26-36, 1996b.
- . *The general Hull-White model and super calibration*. Canada: University of Toronto, 2000 (Working Paper).
- JAMES, J., WEBER, N. *Interest rate modelling*. 1st ed. John Wiley e Sons, Chichester, 2000.
- MERTON, R. The theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, v. 4, p. 141-183, 1973.
- MUSIELA, M., RUTKOWSKI, M. *Martingale methods in financial modelling*. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- NEFTCI, S. N. *An introduction to the mathematics of financial derivatives*. 2nd ed. California: Academic Press, San Diego, 2000.
- ONG, M. K. *Volatility and calibration in interest rate models*. 1996 (Working Paper).
- PELSSER, A. *Efficient methods for valuing interest rate derivatives*. 1st ed. London: Springer-Verlag, 2000.
- REBONATO, R. *Interest-rate option models*. 2nd ed. John Wiley e Sons, Chichester.

- RUBINSTEIN, M. Implied binomial trees. *Journal of Finance*, v. 49, p. 771-818, 1994.
- SHIMKO, D. Bound of probability. *Risk*, v. 6, p. 33-37, 1993.
- SHREVE, S. *Steven Shreve: stochastic calculus and finance*. Carnegie Mellon University, 1996.
- VASICEK, O. A. An equilibrium characterisation of the term structure. *Journal of Financial Economics*, v. 5, p. 177-188, 1977.
- VIEIRA NETO, C. A. *Modelagem da estrutura a termo da taxa de juros e avaliação de contratos derivativos*. FEA-USP, 1999 (Tese de Doutorado).
- VIEIRA NETO, C. A., VALLS PEREIRA, P. Derivação de uma fórmula para o cálculo do preço livre de arbitragem das opções sobre o índice de depósitos interfinanceiros de 1 dia-IDI. *Resenha BM&F*, v. 136, 1999.
- YOSHINO, J. A. Uma metodologia para a estimação do risco no mercado acionário brasileiro: preço Arrow-Debreu. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, Rio de Janeiro, v. 31, n. 1, p. 125-152, abr. 2001.

(Originais recebidos em fevereiro de 2003. Revistos em junho de 2003.)

