INSTITUTO DE PLANEJAMENTO ECONÔMICO E SOCIAL
INSTITUTO DE PESQUISAS - INPES

CLÓVIS DE FARO

# CRITERIOS QUANTITATIVOS PARA AVALIAÇÃO E SELEÇÃO DE PROJETOS DE INVESTIMENTOS

MINISTÉRIO DO PLANEJAMENTO E COORDENAÇÃO GERAL
INSTITUTO DE PLANEJAMENTO ECONÔMICO E SOCIAL (IPEA)
INSTITUTO DE PESQUISAS (INPES)

MONOGRAFIA Nº 2

# CRITÉRIOS QUANTITATIVOS PARA AVALIAÇÃO E SELEÇÃO DE PROJETOS DE INVESTIMENTOS

(Estudo Especial da Pesquisa sôbre Análise Governamental de Projetos de Investimentos no Brasil)

Clóvis de Faro

RIO DE JANEIRO
IPEA/INPES
1971

Faro, Clóvis de
Critérios quantitativos para a avaliação e seleção de projetos de investimentos, por Clóvis de Faro. Apresentação de Annibal Villanova Villela e Hamilton Carvalho Tolosa. Rio de Janeiro, IPEA/INPES, 1971.
142 p. tab. graf. (Brasil. IPEA/INPES. Monografia, nº 2).

1. Análise de projetos. 2. Modêlos matemáticos. I. Villela, Annibal Villanova. II. Tolosa, Hamilton Carvalho. III. Brasil. Instituto de Planejamento Econômico e Social. Instituto de Pesquisas. IV. Título. V. Série.

CDD 658.1514
CDU 658.15:332.67

Êste estudo foi realizado no decorrer de 1970, inicialmente sob a coordenação do Dr. Graciano Sá, do Setor de Planejamento Geral do IPEA. Posteriormente, passou a integrar a pesquisa sôbre "Análise Governamental de Projetos de Investimento no Brasil", realizada no INPES sob a supervisão do Dr. Edmar Bacha. O autor agradece a êsses dois técnicos suas sugestões e comentários a versões preliminares dêste trabalho, eximindo-os de responsabilidade por possíveis falhas na versão final.

CLÓVIS DE FARO
Janeiro 1971

# SUMÁRIO

Página

# APRESENTAÇÃO

A presente monografia, desenvolvida como parte de uma pesquisa mais ampla sôbre Análise Social de Projetos,* procura analisar, do ponto de vista quantitativo, alguns dos critérios mais conhecidos para a avaliação de projetos de investimento.

Inicialmente, o estudo faz uma exposição detalhada, com exemplos de aplicações, sôbre critérios comumente utilizados por Agências de Financiamento na avaliação de projetos. Segue-se uma análise comparada entre três dos principais critérios - relação benefício-custo, taxa interna de retôrno e valor atual - tendo o autor concluído pela superioridade dêste último. Em virtude do caráter prático do estudo, não são discutidos critérios de interêsse mais teórico, tais como o de Produtividade Marginal Social (Chenery) e suas variações (Eckstein), o Método de Semi-Insumo-Produto (Tinbergen) etc.

---

* Ver a publicação "Análise Governamental de Projetos de Investimento no Brasil: Procedimentos e Recomendações" (Relatório de Pesquisa Nº 1 - INPES/IPEA, 1971) de autoria de Edmar L. Bacha, Aloisio B. Araujo, Milton da Mata e Rui L. Modenesi.

O estudo cresce de interêsse quando passa a discutir problemas relativos à determinação da taxa mínima da rentabilidade de um projeto e sua relação com uma taxa social de desconto. Trata-se de assunto complexo e controvertido em Teoria Econômica e, portanto, de difícil solução. Ainda neste capítulo, o autor apresenta algumas técnicas de análise pouco difundidas entre os economistas brasileiros, dentre as quais destaca-se a formulação do problema de restrição orçamentária como um modêlo de programação matemática, ou mais precisamente, de programação discreta.

Acreditamos que, além do interêsse óbvio para os analistas de projetos em geral, o presente trabalho se caracteriza pela sua exposição clara e didática prestando-se, inclusive, como texto para cursos sôbre Avaliação de Projetos.

ANNIBAL VILLANOVA VILLELA

HAMILTON CARVALHO TOLOSA

## CRITÉRIOS QUANTITATIVOS PARA AVALIAÇÃO E SELEÇÃO DE PROJETOS DE INVESTIMENTO

### 1 - INTRODUÇÃO

O presente trabalho vem apresentar, em primeira aproximação, o resultado de estudos relativos a alguns dos métodos usuais de seleção e avaliação de alternativas de investimento. O número dos critérios encontrados na copiosa literatura existente sôbre o assunto é muito vasto, cada um dêles partindo de determinadas premissas, não existindo um consenso geral quanto ao mais indicado.

Aprioristicamente, deixamos de lado a consideração de métodos que partem da análise do que se costuma denominar período padrão do projeto, usualmente estabelecido como ano típico, não só pela dificuldade em definir tal período como, mais ainda, por ser nossa opinião que a economicidade de uma alternativa só pode ser avaliada desde que se leve em consideração a distribuição de receitas e despesas, a ela associadas, ao longo de todo o espaço de tempo, incluindo as fases de construção e maturação, em que irá operar. Por êsse motivo, abordamos tão sòmente os métodos que têm como ponto de partida a chamada sequência dos fluxos de caixa periódicos associada ao projeto em análise, e, dentre êstes, limitamo-nos ao estudo dos critérios mais usuais.

Nosso objetivo foi o de apontar o critério que, satisfazendo requisitos básicos, como simplicidade de aplicação e consistência nos resultados, fôsse capaz de ser utilizado no caso mais geral e não sòmente em certos casos particulares. Procurou-se evidenciar que tal método é o do valor atual. Não obstante, como os casos particulares são de ocorrência frequente, concluímos ser recomendável, em caráter complementar, por traduzir um melhor sentido de ordenação, a utilização simultânea do critério da taxa interna de retôrno, e, em alguns casos ainda, a aplicação, também, do método do tempo de recuperação do capital.

Sob forma de apêndices, além de algumas considerações teóricas adcionais, são apresentados algoritmos e correspondentes programas para processamento, escritos em FORTRAN-IV, para o emprêgo do critério do valor atual e do da taxa interna de retôrno.

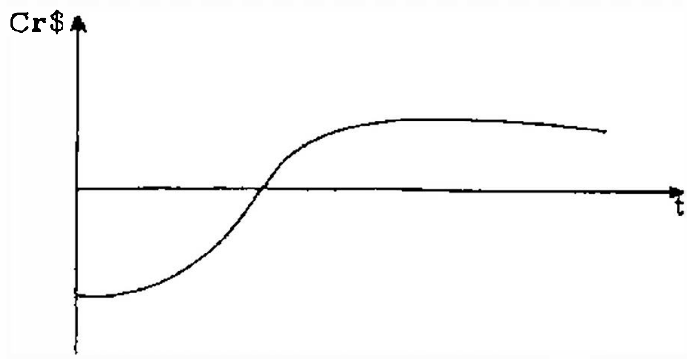
## 2 - CONVENÇÕES E DEFINIÇÕES

Por projeto de investimento entendemos a inversão de capital em determinado empreendimento, quer seja êle uma aplicação no mercado de capitais ou a montagem de uma unidade produtiva como uma fábrica ou um hospital, com a finalidade de obtenção de receitas. Isto é, nessa abordagem, estaremos supondo que todos os insumos e produtos associados ao projeto possam ser quantificados em têrmos monetários; os chamados itens intangíveis porventura existentes, como, por exemplo, a melhoria da moral resultante da utilização de um equipamento mais silencioso, ou terão suas consequências avaliadas mediante um procedimento "ad hoc", ou não serão considerados em nossa análise.+ De maneira geral, teremos um projeto de investimento quando nos depararmos com a eventualidade de ter que alocar recursos escassos, passíveis ou não de serem medidos em têrmos de dinheiro, visando-se à obtenção de determinados resultados, os quais, também, poderão ou não ser traduzidos monetàriamente.

Ao contemplar-se um projeto de investimento, o primeiro passo será a determinação, através de estudos de engenharia e de economia, de estima-

+ Nessa última hipótese caberá ao órgão encarregado de tomar as decisões finais, após o recebimento dos dados "objetivos" resultantes da aplicação dos critérios de avaliação, a consideração quanto à oportunidade de levar em conta ou não êsses itens.

tivas dos desembolsos e receitas que ocorrerão, ao longo do tempo, caso o projeto seja levado a efeito. Isto é, estudos preliminares fornecerão ao analista um cronograma financeiro do projeto, o qual, genèricamente, considerando-se as receitas líquidas, terá a forma dada no esquema abaixo:




Nas despesas, além dos custos de operação e manutenção, estarão incluídos todos os gastos com aquisição de equipamentos e construção de obras civis, bem como o capital de giro necessário à implementação do empreendimento. Quanto à depreciação dos chamados bens de capital, não sendo esta efetivamente uma despesa, mas tão sòmente uma rubrica contábil não correspondendo a nenhum desembôlso físico de caixa, teremos duas possibilidades:

a) no caso em que a análise do projeto seja feita considerando-se as receitas líquidas antes da incidência do impôsto de renda, a depreciação não será incluída;

b) sendo considerada a aplicação de uma alíquota de imposto de renda, a depreciação deverá ser incorporada, indiretamente, às despesas, pois sua finalidade é, justamente, a de permitir uma redução no tributo. Assim, o que será incorporado às despesas é o valor a ser pago como tributo, o qual é dado pelo produto da alíquota pela diferença entre a receita líquida e a depreciação.

Neste estudo iremos supor que as receitas e despesas só ocorram após intervalos de tempo iguais e finitos,[+] ou seja, se o ano fôr o intervalo de tempo tomado como base para efeito de determinação das estimativas financeiras, admitiremos que as receitas e despesas a ocorrer durante um ano qualquer estejam concentradas no fim dêsse ano.

---

[+] No Apêndice II é abordado o caso em que seja mais adequada a hipótese de reduzir-se o intervalo até o limite, passando-se a ter fluxos de caixa contínuos.

Dêsse modo, cada projeto será caracterizado por uma sequência de números reais, $a_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, onde $a_j$, receita líquida relativa ao período $j$, representa o denominado fluxo de caixa associado ao projeto durante o $j$-ésimo período, fluxo êsse suposto concentrado no fim do intervalo de tempo ao qual se refere. Teremos $a_j > 0$ se, ao longo do período $j$, tivermos excesso de receitas em relação às despesas, e, teremos $a_j < 0$ em caso contrário. O investimento inicial, representando gastos tais como o custo de elaboração de projetos técnicos[+] e o de aquisição de terrenos, será admitido como concentrado no início do primeiro período e será representado por $a_0$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $a_0 < 0$ e que $a_n \neq 0$; em períodos intermediários, para $0 < j < n$, poderemos ter receitas igualando despesas quando, então, $a_j = 0$.

Em nossa análise, o período de estudo das consequências financeiras do projeto, representado por $n$ e expresso em um número inteiro de períodos base, será o denominado horizonte de dados, que é o espaço de tempo dentro do qual podemos estimar, com razoável precisão, os futuros fluxos de caixa associados à alternativa. Poderemos ter o caso em que o horizonte de dados seja inferior ao chamado horizonte de planejamento, período durante o qual estima-se irá o empreendimento operar e que é intimamente relacionado com a vida econômica dos equipamentos envolvidos no projeto; em tais casos, devemos introduzir, de uma maneira que será um tanto ou quanto arbitrária, crédito ou débito, na época $n$, que reflita receitas e gastos futuros. Tal procedimento corresponde a atribuir ao projeto, no fim do horizonte de dados, o que se pode denominar de valor residual do projeto.

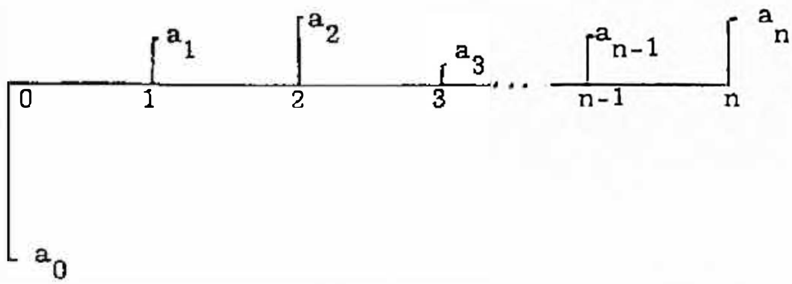
Dentro do horizonte de dados, que ora assumimos coincidir com o de planejamento, iremos supor que tôdas as estimativas de fluxo de caixa, $a_j$, sejam eventos certos; ou seja, estudaremos, nessa primeira abordagem, sòmente o caso dito determinístico.

Definiremos como sendo um projeto de investimento simples aquêle no qual $a_0 < 0$, $a_j \geqslant 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ e ... $\sum_{j=1}^{n} a_j > -a_0$. A rigor, projetos para os quais $\sum_{j=1}^{n} a_j \leqslant -a_0$ são também, obedecidas as outras características citadas, dîtos de investimento simples, mas não serão abordados por não serem, *a priori*, econômicamente justificáveis.

---

[+] Exclusive os dos chamados projetos de viabilidade, pois êstes ocorrem quer seja o projeto implementado ou não.

De uma maneira geral, o cronograma financeiro de um projeto de investimento simples terá a seguinte representação gráfica:




Entendemos por <u>projeto convencional de investimento</u> como aquêle tal que $a_0 < 0$, $a_j \leqslant 0$ para $j = 1, \ldots, k$, $a_j > 0$ para $j = k + 1, \ldots, n$ e $\sum_{j=k+1}^{n} a_j > - \sum_{j=0}^{k} a_j$. Isto é, um projeto convencional de investimento é aquêle em que só há uma mudança de sinal na sequência de seus fluxos de caixa; após um espaço de tempo em que as despesas excedam ou igualem as receitas, passamos a ter, até o fim do horizonte de dados, receitas superiores ou iguais às despesas. Notemos que um projeto de investimento simples é um caso particular de projeto de investimento convencional.

Um exemplo de projeto convencional de investimento é o representado pela alternativa $A_1$ cujos fluxos de caixa são:

$$A_1 : a_0 = -100; \; a_1 = -80; \; a_2 = 50; \; a_3 = 100; \; a_4 = 60.$$

Finalmente, definimos como <u>projeto de investimento não convencional</u> aquêle no qual $a_0 < 0$ e que apresenta mais de uma variação de sinal na sequência de seus fluxos de caixa, satisfazendo ainda a condição $\sum_{j=0}^{n} a_j > 0$.

Um exemplo de projeto não convencional de investimento seria o representado pela proposta $A_2$, cuja sequência de receitas líquidas periódicas é:

$$A_2 : a_0 = -100; \; a_1 = a_2 = 50; \; a_3 = -20; \; a_4 = 30; \; a_5 = 20.$$

Projeto nos quais $a_0 > 0$ serão ditos de <u>financiamento</u>, e classificam-se de maneira análoga aos de investimento.

Dois ou mais projetos serão ditos tècnicamente <u>compatíveis</u> se a execução de qualquer um dêles não implicar na impossibilidade da execução simultânea dos demais; em caso contrário, o que aconteceira na hipótese em que as alternativas em análise fôssem, por exemplo, ou construir uma fábrica ou erigir um hotel em determinado terreno, os projetos serão denominados incompatíveis ou mùtuamente exclusivos.

Como contrapartida econômica da noção de compatibilidade, que é baseada em características físicas e tecnológicas dos empreendimentos, temos o conceito de dependência. Dois ou mais projetos são ditos independentes quando a execução de um dêles não acarretar mudanças nas estimativas dos fluxos de caixa associados aos outros; em caso contrário, o que aconteceria, por exemplo, caso tivéssemos alternativas cujos produtos sejam insumos auxiliares para os demais, os projetos serão denominados dependentes.

Observemos que projetos mùtuamente exclusivos constituem um caso extremo de dependência, pôsto que, ao executarmos um dêles estaremos anulando os fluxos de caixa dos demais, já que êsses últimos não mais serão cogitados.

Notemos, ainda, que a noção de independência e relacionada com a disponibilidade de capital. Mesmo no caso em que todos os projetos em pauta sejam compatíveis e independentes de per si, o fato de termos que nos restringir, por uma imposição exógena qualquer, a um determinado orçamento de capital que seja insuficiente para cobrir os gastos de investimento com tôdas as propostas em consideração, as alternativas deixarão de ser independentes no sentido mais geral, pois algumas delas deverão ser preteridas em favor das demais.

Por avaliação de um projeto entenderemos o cotejo do número a ser obtido mediante a aplicação, aos fluxos de caixa a êle associados, de um dos métodos adiante descritos (os quais são genèricamente denominados critérios de avaliação econômica), com um outro número prèviamente fornecido. Dependendo do resultado dessa comparação, o projeto será dito econômicamente viável ou interessante, segundo o critério utilizado.

No caso em que devemos decidir entre dois ou mais projetos, quer por limitação do capital disponível, quer porque sejam mùtuamente exclusivos, será necessário proceder-se à chamada seleção dos mesmos. A seleção consiste em eleger para implementação o(s) projeto(s) melhor(es) situado(s) na lista resultante da ordenação dos resultados numéricos obtidos segundo um dos métodos de avaliação.

Em nosso estudo partiremos da premissa de que cabe ao analista tão sòmente decidir como distribuir o capital, dado como disponível, entre as alternativas de investimento em aberto. Ou seja, diferentemente da análise de Hirshleifer, [10], suporemos que a questão da consideração das oportunidades alternativas entre consumir e investir sejam resolvidas fora do âmbito de nosso estudo.

## 3 - CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO ECONÔMICA

Iremos tratar, de uma maneira comparativa, procurando mostrar as vantagens e desvantagens de cada método, dos resultados das avaliações obtidas através da aplicação dos critérios clássicos mais usuais.

De maneira geral, êsses métodos podem ser classificados em dois grandes grupos:

a) aquêles em que não se considera a variação que o capital sofre com o tempo. Entre êles, por que são de uso mais freqüente, abordaremos:

- a.1 - critério do tempo de retôrno do capital investido ("payback period");
- a.2 - critério da razão receita/custo;
- a.3 - critério da razão receita-média/custo.

b) aquêles em que é levada em conta a variação que o capital sofre com o tempo.

- b.1 - critério do valor atual;
- b.2 - critério da taxa interna de retôrno;
- b.3 - critério do custo (benefício) períodico equivalente;
- b.4 - critério da razão benefício/custo.

### 3.1 - Definição e Aplicações dos Métodos Citados

Consideremos o caso, seguindo a orientação em [3], em que tenhamos os seguintes projetos de investimento simples, os quais iremos avaliar e ordenar segundo cada um dos critérios mencionados. Iremos supor que êsses projetos sejam compatíveis e independentes, e, ainda, que não haja restrição orçamentária, isto é, dispomos de recursos suficientes para os gastos com a inversão simultânea de capital em todos os projetos.

| Projeto | Custo Inicial ($a_0$) | Futuras Receitas Líquidas Anuais | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | ($a_1$) | ($a_2$) | ($a_3$) | ($a_4$) |
| A | - 50 000 | 25 000 | 25 000 | - | - |
| B | - 50 000 | 25 000 | 25 000 | 5 000 | - |
| C | - 50 000 | 10 000 | 20 000 | 15 000 | 15 000 |
| D | - 50 000 | 20 000 | 10 000 | 15 000 | 15 000 |

Antes de procedermos à aplicação dos critérios de avaliação, notemos que, como tôdas as alternativas apresentam o mesmo gasto inicial de investimentos, é óbvio, por simples inspeção direta dos fluxos de caixa, que certos projetos são preferíveis a outros. Assim, temos que a proposta B é mais interessante do que a A; nos dois primeiros anos ambos apresentam as mesmas receitas líquidas, sendo que B ainda apresenta um superavit no terceiro período. É também evidente, devido à inversão na ordem de ocorrência das duas primeiras receitas, ser o projeto D mais desejável que o C; isto porque, por influência da existência de taxas de juro, o valor do dinheiro sofre uma variação ao longo do tempo. De maneira geral, a presença de taxas de juro positivas faz com que haja uma preferência generalizada em receber-se uma mesma soma nominal de capital em datas mais próximas daquela em que nos encontramos. +

Isto pôsto, passemos às avaliações segundo cada um dos métodos aludidos.

### 3. 1. 1 - Tempo de Retôrno do Capital Investido

O <u>tempo de retôrno do capital investido</u>, ou <u>tempo de recuperação do</u>

---

+ Eliminaremos a possibilidade de taxas de juro negativas e estaremos supondo também que, se houver inflação, esta incida por igual em todos os setores da economia.

capital, é definido como o espaço de tempo necessário para que a soma das receitas nominais futuras iguale o valor do investimento inicial.

A definição acima que é relativa ao caso de projetos simples, pode ser fàcilmente estendida ao caso de alternativas convencionais de investimento, bastando chamar de investimento inicial a $\sum_{j=0}^{k} a_j$, sendo k + 1 o índice relativo à primeira receita líquida positiva; notemos, porém, que essa definição não se aplica a propostas não-convencionais.

No caso de projetos simples, sendo usada a mesma unidade de tempo que a para o intervalo de tempo entre os fluxos de caixa consecutivos, o tempo de recuperação do capital, T, supondo que as receitas sejam constantes, será dado por:

$$T = - \frac{a_0}{R}$$

onde R é a receita constante, isto é, $a_j = R$ para $j = 1, \ldots, n$.

Num caso mais geral, quando as receitas não forem constantes, sendo m a parte inteira de T, devemos ter:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \leqslant - a_0$$

No caso de igualdade, lògicamente, T = m; caso contrário, a parte fracionária de T será determinada supondo-se que a receita a ser verificada na época m + 1 possa ser admitida como crescendo linearmente, a partir de zero, entre as épocas m e m + 1. Então, representando-se por f a parte fracionária, teremos:

$$f = \frac{a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j}{a_{m+1}}$$

Na prática, entidades que utilizam êste critério (veja-se [2]), costumam estipular um valor limite acima do qual o projeto deve ser rejeitado. Portanto, de acôrdo com o método do tempo de recuperação do capital, a alternativa mais interessante será a que apresentar o menor valor para T. Então, para as propostas em aprêço, teremos a seguinte ordem de preferência:

| Projetos | T (anos) | Ordenação |
|---|---|---|
| A | 2 | 1 |
| B | 2 | 1 |
| C | 3 1/3 | 2 |
| D | 3 1/3 | 2 |

Notemos que os resultados obtidos nos levam a classificar como equivalentes, no sentido de que ocupam, segundo o critério considerado, a mesma posição na escala de preferência, as propostas A e B, e C e D. Tal fato evidencia que o método do tempo de retôrno do capital investido, embora de largo uso, pode apresentar resultados inconsistentes quanto à seleção das alternativas. Isto decorre do fato de que êsse critério, além de não considerar a preferência pelo adiantamento de receitas, apresenta ainda o grande inconveniente de não levar em consideração as receitas a ocorrer após esgotar-se o tempo de retôrno, deixando, assim, de contemplar tôda a vida do projeto. +

Essas imperfeições nos levam a concluir que o método do tempo de recuperação do capital não pode ser sòzinho o critério decisivo para a seleção de projetos.

### 3.1.2 - Razão Receita/Custo

De acôrdo com o critério da razão receita/custo, também chamada taxa de retôrno relativa ao período n (vida do projeto), as alternativas serão consideradas tanto melhores quanto maior fôr a relação:

$$r_m = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{a_0}$$

+ Em [16] é apresentada uma versão modificada dêsse critério a qual parece padecer menos do último defeito apontado, já que trabalha com a média aritmética das receitas. Porém, essa vantagem é aparente, pois que, no caso freqüente, de receitas constantes, a nova versão conduz aos mesmos resultados do que a que apresentamos.

Então, para os nossos exemplos, teremos:

| Projetos | $\sum_{j=1}^{n} a_j$ | $a_0$ | $r_m$ | Ordenação |
|---|---|---|---|---|
| A | 50 000 | - 50 000 | 1 | 3 |
| B | 55 000 | - 50 000 | 1,1 | 2 |
| C | 55 000 | - 50 000 | 1,2 | 1 |
| D | 60 000 | - 50 000 | 1,2 | 1 |

Agora, embora a ordenação de B e A, considerados isoladamente, seja correta, vemos que C e D foram ainda classificados como alternativas equivalentes.

Não obstante o fato de que êsse método contemple tôda a vida do projeto, o que podemos inferir pela ordenação correta dos projetos A e B, o critério da taxa de retôrno relativa à vida da alternativa sofre do inconveniente de não considerar a variação do valor do dinheiro com o tempo, visto que atribui o mesmo pêso a tôdas as receitas, independentemente da época em que elas se verificam.

### 3.1.3 - Razão Receita-Média/Custo

O princípio atrás dêsse critério seria o da determinação de uma taxa média de retôrno, por período, obtida no empreendimento.[+] Para sua obtenção, divide-se pelo investimento inicial a média aritmética das receitas, inclusive as nulas; ou seja, calcula-se a relação:

$$r = - \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{n . a_0}$$

[+] Em [7] êste método é apontado como largamente utilizado para o caso em que se têm receitas e despesas periódicas constantes, incluindo-se nestas últimas, como artifício, uma parcela de depreciação.

As alternativas serão classificadas por ordem decrescente do valor de r. Assim, no nosso caso, teremos:

| Projetos | r | Ordenação |
|---|---|---|
| A | 0,5 | 1 |
| B | 0,37 | 2 |
| C | 0,3 | 3 |
| D | 0,3 | 3 |

A ordenação resultante indica-nos que êsse critério, além de não ter levado em conta a preferência pelo adiantamento de receitas, já que, mais uma vez, as propostas C e D foram classificadas como equivalentes, nos conduziria ao absurdo de preferir a alternativa A à B.

Pelo exposto, podemos concluir que os critérios que não consideram o valor no tempo do dinheiro, ou seja, que não levam em conta a existência de taxas de juro positivas, podem conduzir a resultados inconsistentes, no sentido de diferirem dos óbvios, para a seleção de projetos, sendo, portanto, em princípio, desaconselháveis.

Passemos agora a tratar dos métodos que, tendo presente a existência de taxas de juro, utilizam o chamado desconto dos fluxos de caixa, isto é, atribuem diferentes ponderações às receitas líquidas em função de sua distribuição ao longo do tempo.

### 3.1.4 - Método do Valor Atual

Considerada a taxa i, sob forma unitária e que seja relativa ao mesmo período que o do intervalo de tempo entre receitas consecutivas, definiremos o valor atual, na época zero, de um projeto como sendo:

$$V = \sum_{j=0}^{n} a_j \, (1 + i)^{-j}$$

A consideração de uma taxa de juros positiva reflete a preferência em receber Cr$ 100,00 agora, do que entrar na posse dos mesmos Cr$ 100,00 no fim de um ano. Isso porque se, por exemplo, fôr possível a inversão de capital à taxa de 10% a.a., a aplicação dos Cr$ 100,00 recebidos agora nos dará o direito de receber 100 (1 + 0,10)[+] = Cr$ 110,00 no fim de um ano. Como contrapartida, considerando-se ainda a taxa de 10% a.a., isso significa que o valor que atribuímos, na data de hoje, a Cr$ 110,00 pagáveis no fim de um ano é Cr$ 100,00. Dizemos que Cr$ 100,00 é o valor atual, ou valor descontado, à taxa de 10% a.a., de Cr$ 110,00 considerados no fim de um ano.

Por conseguinte, considerando-se o regime de juros compostos a taxa $i$, o valor atual de um projeto nada mais é do que a soma algébrica dos valôres descontados dos fluxos de caixa a êle associados.

Conceitualmente, o fato de o valor atual de um projeto ser positivo significa que, para a taxa de juros considerada, o valor que atribuímos, na data de hoje, a suas receitas futuras é superior ao valor do investimento inicial necessário a sua implementação.[1] Portanto, um valor atual positivo indica ser o projeto, com relação à taxa estipulada, econômicamente interessante. Além do mais, o projeto será tanto mais interessante quanto maior o seu valor atual.

A questão a ser levantada aqui é a de qual a taxa de desconto a ser considerada na determinação do valor atual. Por enquanto iremos adiar esta discussão, supondo que a taxa a ser utilizada seja um dado institucional. Isto é, tendo em vista o que foi dito anteriormente sôbre avaliação, a taxa de desconto seria o parâmetro fixado exògenamente.

Para o caso do projeto A, de que estávamos tratando, uma vez fixada a taxa de 12% a.a., o seu valor atual será:

$$V_A\,(12\%) = -50\,000 + 25\,000\,(1 + 0{,}12)^{-1} + 25\,000\,(1 + 0{,}12)^{-2}$$

Lançando mão de uma tabela que apresenta o valor de $(1 + i)^{-j}$, genèricamente denominado fator de valor atual à taxa i para o prazo j, para a taxa de 12% e para os prazos considerados, teremos:

---

[+] Essa interpretação, que se refere ao caso de projetos simples, é fàcilmente estendida aos demais tipos de projetos, bastando chamar de investimento inicial à soma dos valôres descontados de todos os fluxos de caixa negativos.

$$V_A\ (12\%) = -7748,72$$

Como o valor atual do projeto A é negativo, significando que o valor atribuído às receitas futuras é inferior ao gasto com investimento, concluiríamos que, para a taxa de juros de 12% a. a., o projeto A é econômicamente injustificável ou desinteressante.

Procedendo-se à determinação dos valôres atuais dos demais projetos, ainda à taxa de 12% a. a., obteremos o seguinte quadro:

| Projeto | Valor Atual | Ordenação |
|---|---|---|
| A | - 7 749 | 4 |
| B | - 4 190 | 2 |
| C | - 4 918 | 3 |
| D | - 3 961 | 1 |

Vemos que, embora para a taxa de 12% a.a. todos os projetos sejam econômicamente injustificáveis, pois apresentam valôres atuais negativos, foram verificadas as conclusões resultantes da inspeção inicial. Isto é, vemos que B é preferível, ou menos desinteressante, a A e D é também superior a C.

Infelizmente, ao contrário do que ocorre no caso dos demais critérios, onde a variação do parâmetro exógeno, seja êle, por exemplo, a mínima taxa média de retôrno ou o máximo tempo de recuperação do capital, poderá acarretar alteração na avaliação mas não na seleção, a ordenação global dos projetos depende da taxa de juros considerada. Assim se, por exemplo, a taxa de juros fôsse de 7% a. a., obteríamos:

| Projeto | Valor Atual | Ordenação |
|---|---|---|
| A | - 4 800 | 4 |
| B | - 718 | 3 |
| C | 502 | 2 |
| D | 1 114 | 1 |

Notemos que agora, em comparação com os resultados anteriores, embora a posição relativa entre os projetos B e C tenha sido trocada, continuamos a preferir B a A e D a C.

De maneira geral, apesar de que a ordenação global, e portanto a seleção, dependa da taxa de juros utilizada na determinação do valor atual de cada projeto, a posição relativa, na escala de preferência, de projetos que possam ser cotejados por simples inspeção de seus fluxos de caixa não será alterada.

### 3. 1. 5 - Método da Taxa Interna de Retôrno

Por definição, tratando-se de um projeto simples ou convencional, a taxa interna de retôrno de um projeto é a taxa de juros $\alpha$, real e não negativa, para a qual se verifica a relação:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \, (1 + \alpha)^{-j} = 0$$

Ou seja, a taxa interna de retôrno é a taxa de juros que faz com que o valor atribuído às receitas futuras iguale o custo de investimento, isto é, é a taxa que anula o valor atual do projeto.

Nos casos de projetos simples e convencionais, como definidos, esta taxa existirá sempre e será única. Para certos tipos de projetos não-convencionais, é possível a existência de mais de uma taxa, real e não negativa, que anule o valor atual do projeto, o que constituiria um caso de múltiplas taxas internas de retôrno.

Deixando para o Apêndice I o caso de projetos do tipo não-convencional, passemos a concentrar nossa análise no estudo dos projetos de investimento simples e/ou convencionais.

Visando a tornar mais concreto o critério de avaliação de um projeto segundo sua taxa interna de retôrno, consideremos um projeto de investimento com as características seguintes:

$a_0 = -10\ 000$ e $a_j = 1\ 000$ para $j = 1, 2, \ldots, 15$

O seu valor atual, à taxa $i$, será:

$$V(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{-j} = -10\,000 + 1\,000 \sum_{j=1}^{15} (1+i)^{-j} = -10\,000 + 1\,000 \left[ \frac{(1+i)^{15} - 1}{i\,(1+i)^{15}} \right]$$

ou, usando a notação clássica de matemática financeira:

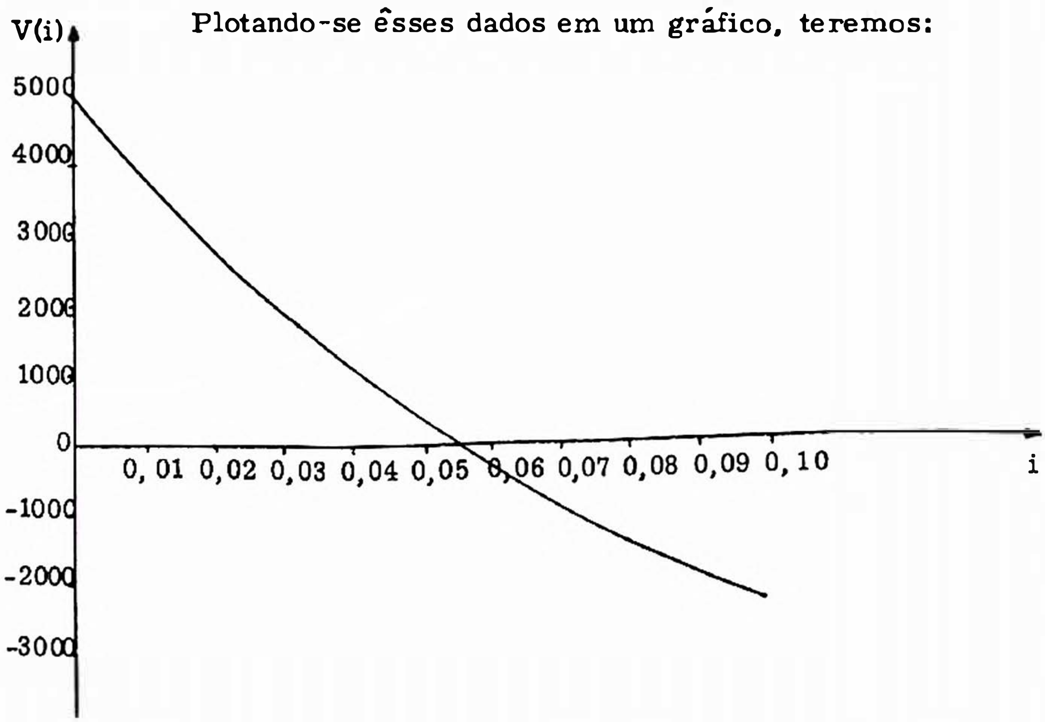
$$V(i) = -10\,000 + 1\,000 .\ a_{\overline{15|}\,i}$$

Onde $a_{\overline{15|}\,i}$ é o valor atual, à taxa i, de uma sucessão, dita anuidade, de 15 pagamentos unitários e periódicos, usualmente tabelado, [5].

Fazendo-se i assumir diversos valôres, isto é, fazendo-se variar a taxa de juros considerada para a determinação do valor atual, obteremos os dados constantes da tabela abaixo:

| i (%) | v | i (%) | v | i(%) | v |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 000 | 4 | 1 118 | 6 | - 288 |
| 1 | 3 865 | 5 | 380 | 7 | - 892 |
| 2 | 2 849 | 5, 5 | 38 | 8 | - 1 441 |
| 3 | 1 938 | 5, 6 | - 29 | 9 | - 1 939 |
| | | | | 10 | - 2 394 |

Plotando-se êsses dados em um gráfico, teremos:



Notemos que à medida que se aumenta a taxa de juros temos menor valor atual.

A taxa interna de retôrno, raiz real e positiva da equação $\sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{-j} = 0$, representa, como inferimos do gráfico, a maior taxa de juros para a qual o projeto apresenta valor atual não negativo. Portanto, para taxas inferiores à taxa de retôrno as receitas futuras compensam o capital investido, no sentido de que, se considerarmos o investimento inicial como resultante de um empréstimo a ser restituído a determinada taxa de juros, as receitas futuras seriam mais do que suficientes para o resgate do empréstimo, [4]. Por conseguinte, em princípio, um projeto será tanto mais desejável quanto maior a sua taxa interna de retôrno, pois tanto maior seria a taxa de juros que aceitaríamos pagar pelo empréstimo do capital inicial.

No caso da avaliação de um projeto pelo critério da taxa interna de retôrno, sua aceitação, no sentido de ser econômicamente desejável, ocorrerá se a sua taxa interna de retôrno fôr superior a uma dada taxa de juros, taxa essa cujo valor é passível das mesmas discussões que surgem quando se usa o critério do valor atual e que, usualmente, é denominada de taxa mínima de atratividade, [8].

Observemos que a determinação da taxa interna de retôrno é trabalhosa, pois consiste na resolução de um polinômio de grau $n$, sendo que $n$, geralmente, é um número elevado. O método utilizado para encontrar a raiz real e positiva do polinômio, quando não se dispõe de um computador, vide Apêndice III, é o de tentativas; procura-se determinar, com o auxílio de tabelas financeiras, o menor intervalo, entre taxas tabeladas, em cujas extremidades o valor atual do projeto muda de sinal, procedendo-se, a seguir, a uma interpolação linear entre estas últimas taxas.

Assim, no caso do exemplo, como as taxas tabeladas variavam de 0,5% a 0,5% e determinou-se que V (0,055) = 38 e V (0,060) = - 288, uma interpolação linear indicou que a taxa interna de retôrno dêsse projeto, que é a taxa real e positiva que anula seu valor atual, é de, aproximadamente, 5,6% por período.

Notemos que a equação $\sum_{j=0}^{n} a_j (1 + i)^{-j} = 0$ é equivalente, para $i \neq -1$, à equação $\sum_{j=0}^{n} a_j (1 + i)^{n-j} = 0$, pois esta última resultou da multiplicação de am bos os membros da primeira por $(1 + i)^n$. Ora, a equação $\sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{n-j} = 0$, traduz o fato de, considerada a taxa $i$, igualarmos o que se denomina montante, na época $n$, do capital investido à soma dos montantes, na mesma época e à mesma taxa $i$, das receitas líquidas.

Então, estaria implícito, ao analisar-se um projeto pelo método da taxa interna de retôrno, que se está supondo que as receitas líquidas sejam reinvestidas à taxa interna $\underline{\alpha}$ raiz da equação $\sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{n-j} = 0$.+

Considerando-se o caso dos nossos projetos, a aplicação do método da taxa interna de retôrno conduzirá à seguinte ordenação na escala de preferência:

| Projeto | Taxa Interna ($\alpha$ % a.a.) | Ordenação |
|---|---|---|
| A | 0,000 | 4 |
| B | 6,043 | 3 |
| C | 7,427 | 2 |
| D | 8,023 | 1 |

Êsses resultados indicam que, individualmente, sendo considerada uma taxa mínima de atratividade de 7% a.a., por exemplo, os projetos A e B seriam recusados, pois apresentam taxas internas inferiores à mínima de atratividade, sendo considerados como econômicamente interessantes sòmente os projetos C e D.

Notemos que, deixando de lado a avaliação individual, a ordenação obtida, e sempre será o caso, admitidas as hipóteses iniciais de compatibilidade e independência, corrobora o resultado da nossa inspeção inicial, isto é, B é preferível a A e D é mais interessante do que C.

Observemos, ainda, o que será o motivo para discussão posterior,

---

+ Esta é uma hipótese algo controvertida; veja-se, por exemplo, [13] e [20] para pontos de vista opostos.

que a ordenação global obtida concorda com a resultante da adoção do método do valor atual à taxa de 7% a.a., mas que difere da que obteríamos à taxa de juros de 12% a.a.

### 3.1.6 - Critério do Custo (Benefício) Periódico Equivalente

Considerada a taxa i, sob forma unitária e que seja relativa ao mesmo período que o adotado para o intervalo entre os fluxos de caixa, definimos o custo, se fôr negativo, ou benefício, se fôr positivo, periódico equivalente de um projeto através a relação:

$$C(i) = V(i) \cdot a^{-1}_{\overline{n}|i}$$

onde $V(i)$ é o valor atual do projeto à taxa i e $a^{-1}_{\overline{n}|i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$

é o chamado fator de recuperação de capital.

Ou seja, $C(i)$ será o fluxo de caixa líquido, periódico e constante, o primeiro suposto concentrado na época um, de um "projeto" que, com vida igual à da alternativa que está sendo analisada, apresente o mesmo valor atual.

Êsse indicador é muito utilizado na prática quando, por exemplo, estão sendo cotejados equipamentos alternativos para a execução de uma mesma tarefa. Nesse caso, como as receitas brutas (benefícios) serão as mesmas qualquer que seja a alternativa adotada, estas serão caracterizadas pela sucessão de desembolsos a elas associadas: custo inicial de aquisição e instalação e gastos periódicos de operação e manutenção, considerando-se, ainda, como um custo negativo, a receita estimada para a venda do equipamento no fim do período de estudo (valor residual). Então, supondo que os equipamentos tenham a mesma duração (vida útil) e que o período base seja o ano, o equipamento a ser selecionado é aquêle que, para a taxa de juros anual considerada com a mínima de atratividade, apresentar o menor custo anual equivalente.

Notemos que êsse critério é, para o caso acima, inteiramente coincidente com o valor atual, pois que:

$$C_A(i) > C_B(i) \Rightarrow V_A(i) \cdot a^{-1}_{\overline{n}|i} > V_B(i) \cdot a^{-1}_{\overline{n}|i}$$

$$\therefore V_A(i) > V_B(i) \text{ já que } a^{-1}_{\overline{n}|i} > 0 \text{ para taxas positivas.}$$

Considerando a taxa de 12% a.a., o custo anual equivalente para o caso do projeto A, será:

$$C_A(0,12) = V_a(0,12) \cdot a^{-1}_{\overline{2}|12}$$

$$= - 7749 \times 0,4717 = - 3655$$

Isto é, a "alternativa" que apresenta um fluxo de caixa igual a - 3655 unidades de capital no fim do primeiro ano, e ainda o mesmo fluxo de caixa no fim do segundo ano, apresentará, para a taxa de 12% a.a., o mesmo valor atual que o projeto A.

Como o fluxo anual equivalente é negativo, sendo pois um custo, segue-se que, para a taxa de 12% a.a., o projeto A deve ser rejeitado.

Procedendo-se de maneira análoga para o caso dos demais projetos, obtemos o seguinte quadro:

| Projeto | Custo Anual | Ordenação |
|---|---|---|
| A | - 3655 | 4 |
| B | - 1744 | 3 |
| C | - 1619 | 2 |
| D | - 1304 | 1 |

Notemos que a ordenação resultante não entra em conflito com a obtida mediante simples inspeção, porém há uma ligeira discrepância dada pela ordem dos projetos B e C, em relação à seleção produzida pela aplicação do critério do valor atual à mesma taxa de 12% a.a. Entretanto, como na prática o método do custo periódico equivalente só costuma ser empregado para o cotejo entre equipamentos alternativos, que é um caso de projetos mùtuamente exclusivos, torna-se necessário, como mostraremos adiante, que as alternativas sejam reduzidas ao caso de vida comum. Nessa hipótese, o critério do mínimo custo anual, como é comumente chamado, passará a apresentar resultados de seleção inteiramente coincidentes com os obtidos através do método do máximo valor atual.

O método descrito, também chamado de regra do benefício líquido anual equivalente, [11], apresenta uma série de variantes que remontam tão sòmente a relativamente grosseiras aproximações do valor correto do benefício líquido anual equivalente. Descrições de diversas dessas variantes podem ser encontradas em [7] e [8].

### 3.1.7 - Critério da Razão Benefício/Custo

Outro critério que considera a variação do valor do dinheiro com o tempo, e que é muito empregado na avaliação e seleção de projetos governamentais, é o denominado método da razão benefício/custo.

É inerente a projetos de obras públicas a dificuldade em identificar e mensurar o que sejam as receitas a êles associadas. Para contornar essa dificuldade criou-se, no jargão econômico, o eufemismo <u>benefício,</u> o qual passou a representar a traduação monetária, por meio de regras "ad hoc", do que corresponderia ao conceito usual de receita bruta do projeto.

Dentro dêsse espírito, consideremos agora o projeto como sendo caracterizado por duas seqüências, desprovidas de sinal algébrico, de fluxos de caixa: a primeira sendo a de custos e a segunda de receitas brutas (benefícios). Nesse caso, designando-se por VB (i) e por VC (i), respectivamente, o valor atual à taxa $\underline{i}$ da sequência de benefícios e da sucessão de custos, a razão <u>benefício/custo</u> do projeto é definida através da relação:

$$R(i) = \frac{VB(i)}{VC(i)}$$

Ou seja, a razão benefício/custo nada mais é do que o quociente entre o valor atual da sequência de receitas e o da sucessão de custos.

Notemos que, se:

$$R(i) > 1 \therefore \quad \frac{VB(i)}{VC(i)} > 1 \therefore \quad VB(i) > VC(i) \therefore \quad V(i) = VB(i) - VC(i) > 0$$

Ou seja, se a razão benefício/custo exceder a unidade, o valor atual do projeto, como anteriormente definido, é positivo; portanto, considerada uma dada taxa de atratividade **i**, o projeto será econômicamente interessante se apresentar razão benefício/custo superior à unidade (e tanto mais atrativo quanto mais a razão exceder a um).

Observemos ainda que, se:

$$R(i) = 1 \Longrightarrow VB(i) = VC(i) \quad \therefore \quad V(i) = 0$$

Isto é, a taxa interna de retôrno associada a um projeto pode também ser definida como sendo a taxa que faz com que sua razão benefício/custo iguale a unidade.

Como ilustração da aplicação do método, suponhamos que os fluxos de caixa líquidos relativos aos projetos dos nossos exemplos tenham resultado, respectivamente, da composição entre as seguintes sequências de custos ($c_j$) e de benefícios ($b_j$) anuais:

$$A \begin{cases} c_0 = 50\,000; \; c_1 = c_2 = 10\,000 \\ b_0 = 0; \; b_1 = b_2 = 35\,000 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} c_0 = 50\,000; \; c_1 = c_2 = c_3 = 10\,000 \\ b_0 = 0; \; b_1 = b_2 = 35\,000; \; b_3 = 15\,000 \end{cases}$$

$$C \begin{cases} c_0 = 50\,000; \; c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 5\,000 \\ b_0 = 0; \; b_1 = 15\,000; \; b_2 = 25\,000; \; b_3 = b_4 = 20\,000 \end{cases}$$

$$D \begin{cases} c_0 = 50\,000; \; c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 5\,000 \\ b_0 = 0; \; b_1 = 25\,000; \; b_2 = 15\,000; \; b_3 = b_4 = 20\,000 \end{cases}$$

Então, considerando-se uma taxa de atratividade de 7% a.a., obteremos a seguinte ordenação para os projetos:

| Projeto | Razão Benefício/Custo | Ordenação |
|---|---|---|
| A | 0,929 | 4 |
| B | 0,991 | 3 |
| C | 1,007 | 2 |
| D | 1,017 | 1 |

Observemos que, mais uma vez, foi confirmado o resultado obtido por inspeção direta. Notemos também que, em relação aos resultados obtidos pela aplicação do critério do valor atual a taxa de 7% a. a., chegamos às mesmas indicações quanto a avaliação e seleção dos projetos.

## 4 - CONCLUSÕES PRELIMINARES SÔBRE O USO DOS CRITÉRIOS CITADOS

O primeiro ponto a ser observado, em relação aos critérios de avaliação que foram apresentados, é que os métodos que não levam em consideração a variação do valor do dinheiro com o tempo são os de mais simples aplicação e, por isso mesmo, de larga utilização na prática.

Em particular, [4], o critério do tempo de recuperação do capital investido chega mesmo a ser o mais adotado. Isso deve-se não só à sua fácil determinação, como também devido ao fato de existir, por parte do agente investidor, uma grande preocupação com a liquidez do empreendimento, donde, via de regra, preferir apropriar os seus recursos em projetos que permitam a mais rápida recuperação do capital investido. Além do mais, para determinados tipos de empreendimentos, existe certo receio em relação à taxa de progresso tecnológico para o tipo particular de equipamento sendo considerado, o qual pode vir a tornar-se obsoleto em prazos muitos curtos e de difícil previsão. Êste último fato também contribui para com que os investidores atribuam uma grande importância ao rápido retôrno do capital empatado, procurando fixar valôres limites superiores bastante baixos, para o tempo de recuperação do capital [2], e, portanto, atrelando um grande pêso a êsse critério.

Porém, como notamos no caso dos exemplos abordados, o fato de não ser levada em conta a existência de uma taxa de juros positiva, o que corresponde a atribuir o mesmo pêso para fluxos de caixa que ocorrem em diferentes pontos no tempo, pode conduzir a resultados inconsistentes, e mesmo absurdos, quando adotamos os critérios do primeiro grupo para a seleção de projetos.

Por êsse motivo, com exceção do critério do tempo de retôrno do capital investido, o qual, pelas razões apontadas e que são ponderáveis, poderá ser utilizado com caráter complementar, abandonaremos os métodos de avaliação que não consideram a presença de uma taxa de juros positiva, em favor dos critérios do valor atual, da taxa interna de retôrno e da razão benefício/custo. +

Quanto a êsses últimos não podemos, pela simples análise dos resultados até aqui encontrados, concluir que um seja superior ao outro. Por enquanto só podemos afirmar que, no caso de projetos de investimento do tipo simples ou convencional que sejam compatíveis e independentes entre si, e não havendo restrição orçamentária, os resultados da seleção segundo os três critérios serão sempre consistentes. Podemos também afirmar que, em se tratando da avaliação individual de projetos do tipo de investimento simples ou convencional, êsses três métodos conduzirão ao mesmo diagnóstico; pois se $\alpha > i$, onde $\alpha$ é a taxa interna e $i$ a mínima de atratividade, o projeto não só apresentará um valor atual positivo quando calculado à taxa $i$, como também, considerada ainda a taxa $i$, sua razão benefício/custo será superior à unidade.

O fato de ainda não podermos chegar à uma conclusão definitiva quanto ao melhor critério, nos leva a estudar mais detalhadamente o comportamento dos métodos do valor atual, da taxa interna de retôrno e da razão benefício/custo, procurando avaliar o comportamento de cada um para casos que não os particulares acima citados.

# 5 - ESTUDO COMPARATIVO DOS CRITÉRIOS DO VALOR ATUAL, DA RAZÃO BENEFÍCIO/CUSTO E DA TAXA INTERNA DE RETÔRNO

## 5.1 - Confronto Valor Atual x Taxa Interna de Retôrno

Iremos agora proceder a uma comparação mais profunda entre os métodos do valor atual e da taxa interna de retôrno, procurando estabelecer qual o mais indicado. Êsse estudo indicará que, ainda na hipótese de projetos de investimentos do tipo simples ou convencional, existem casos, mais especìficamente para certas eventualidades de projetos mùtuamente exclusivos, em que a aplicação do critério da taxa interna de retôrno poderá conduzir a uma seleção errônea, o que não acontece quando se adota o método do valor atual.

---

+ Deixaremos de lado o critério do benefício líquido periódico equivalente pois que, sendo equivalente ao do valor atual, constitui-se em uma versão mais trabalhosa dêste último.

Tal fato nos permitirá concluir, sem necessidade de incluir na análise o caso de projetos de investimentos do tipo não-convencional, o que será feito no Apêndice I e que irá contribuir para a justificativa de nossa escolha, que o critério do valor atual é o mais indicado.

## 5.2 - Preliminares

Como vimos no item 3, o ponto crucial na aplicação do critério do valor atual para a avaliação de um projeto é a escolha da taxa de juros a ser considerada para sua determinação. Ainda tendo em mente os resultados obtidos com os exemplos do item 3, lembremos que a mudança na taxa de juros adotada para a determinação do valor atual de cada projeto fêz não só com que projetos considerados antieconômicos, para uma certa taxa, passassem a ser dados como viáveis quando avaliados segundo uma outra taxa, como também acarretou uma variação na ordenação das alternativas. Portanto, a taxa de juros a ser utilizada na aplicação do método do valor atual pode influenciar grandemente a seleção de projetos, donde ser necessário caracterizá-la perfeitamente para cada caso em análise.

Esta taxa de juros, chamada <u>taxa mínima de atratividade</u>, deve representar, para cada caso em estudo, o que se deixa de ganhar pela não aplicação do capital a ser investido em uma outra alternativa disponível.+ Então quando da adoção do critério do valor atual, o problema passa a ser, como exaustivamente discutido em [15], o da determinação da taxa mínima de atratividade em presença das alternativas em análise e da possível limitação do capital disponível para investimento, do que trataremos no item 6.

Uma vez conhecida a taxa mínima de atratividade, que representamos por $\rho$ , a aplicação do método de valor atual conduzirá, à exceção do caso de certos projetos não-convencionais, a resultados de avaliação individual sempre <u>consistentes</u>, no sentido agora, como definido em [19], de que o resultado de avaliação é consistente se, para $\rho_2 > \rho_1$ e sendo $V(\rho_1)$ e $V(\rho_2)$ valôres posi-

---

+ Obviamente, no caso em que o projeto seja financiado por um empréstimo específico, a taxa a ser utilizada para a aplicação do critério do valor atual não deve ser inferior à cobrada no financiamento.

tivos, tivermos $V(\rho_1) > V(\rho_2)$. Isto, porque, òbviamente, tanto maior aprêço atribuíremos às receitas futuras quanto menor fôr a taxa corrente de juros.

À primeira vista pareceria, então, que o critério da taxa interna de retôrno, que aparentemente independe de $\rho$ visto só utilizar os dados inerentes à alternativa, deveria ser o mais indicado. Tal porém é ilusório; basta atentar para o fato de que, no caso de termos de decidir pela aceitação ou não de um projeto único, ser necessário comparar a taxa interna de retôrno obtida, com a taxa que usufruiríamos em um empreendimento alternativo, como, por exemplo, investir em títulos à taxa de mercado. Recairíamos, pois, no mesmo problema que no caso da adoção do método do valor atual, qual seja o da determinação dessa taxa alternativa. Tendo em vista a condição imposta de simplicidade de aplicação do critério, essa discussão nos leva a pender pela adoção do valor atual que, ao contrário da taxa interna de retôrno, não requer a resolução de uma equação de grau $n$.

Além do mais, na hipótese de ser necessária a comparação de dois ou mais projetos de investimentos que sejam mùtuamente exclusivos, quando a aceitação de um dêles implica a rejeição dos demais, não só teremos de preocupar-nos com a taxa alternativa, como ainda é possível que o projeto com a maior taxa interna de retôrno, $\alpha$ , não seja o mais atrativo, como mostraremos a seguir.

## 5.3 - Caso de Projetos Mùtuamente Exclusivos

Quando se procuram cotejar projetos que sejam mùtuamente exclusivos, o que aconteceria se, por exemplo, tivéssemos que decidir entre o emprêgo de dois ou mais materiais tècnicamente viáveis, tais como aço ou concreto armado, para a construção de uma ponte, não é suficiente a determinação da taxa interna de retôrno de cada projeto, pois necessitaremos ainda de calcular a denominada taxa interna de retôrno do investimento incremental, comparando-a com a taxa alternativa.

Isto é, no caso da aplicação do critério da taxa interna de retôrno para a seleção de projetos que sejam mùtuamente exclusivos, devemos determinar a também chamada, [1], taxa de retôrno sôbre os custos de Fisher, e que nada mais é do que a taxa interna de retôrno do "projeto" cujos fluxos de caixa re sultam da diferença entre os fluxos de caixa homólogos de dois projetos em análise, o que deve ser feito para cada par de alternativas do conjunto em estudo.

Ou seja, representando-se por $a_j$ o fluxo de caixa, na época $j$, associado ao projeto A, e por $b_j$ o fluxo de caixa associado ao projeto B nessa mesma época $j$, e supondo que os dois projetos tenham a mesma vida, no sentido de que ambos possuam o mesmo horizonte de planejamento, a taxa "fisheriana" relativa à comparação entre os projetos A e B será a taxa, representada por $\alpha_{B-A}$, que seja a solução real e não negativa da equação:

$$\sum_{j=0}^{n} (b_j - a_j)\ (1 + i)^{-j} = 0.$$

Consideremos, a título de ilustração, o caso em que seja necessário decidir qual o preferível entre os dois projetos A e B, supostos mùtuamente exclusivos, e que são caracterizados pelos seguintes fluxos de caixa:

A: $a_0 = -10065;\ a_j = 1500,\ j = 1, 2 \ldots, 10$

B: $b_0 = -15100;\ b_j = 2200,\ j = 1, 2 \ldots, 10$

Suponhamos ainda que o agente investidor disponha de capital suficiente para levar avante qualquer uma dessas alternativas, e, admitamos também, que possa aplicar seus recursos disponíveis em outros empreendimentos, como investir em títulos colocados no mercado de capitais, que rendem a taxa de juros de 6% por período. Em outras palavras, estamos assumindo que a taxa mínima de atratividade, $\rho$, para o caso em aprêço, seja de 6% por período.

## 5.3.1 - Seleção pelo Critério da Taxa Interna de Retôrno

Tendo em vista o nosso exemplo, caso adotássemos o critério de seleção segundo a ordenação pela taxa interna de retôrno, o primeiro passo seria a determinação de $\alpha$ para cada projeto; para tanto, teremos de resolver as seguintes equações:

$$\sum_{j=0}^{10} a_j\ (1 + i)^{-j} = -10065 + 1500 \sum_{j=0}^{10} (1 + i)^{-j} = -10065 + 1500 . a_{\overline{10|}i} = 0$$

$$e \quad \sum_{j=10}^{10} b_j (1+i)^{-j} = -15100 + 2200 \sum_{j=1}^{10} (1+i)^{-j} = -15100 + 2200 \cdot a_{\overline{10|}i} = 0$$

Ora, essas equações são verificadas, respectivamente, para $i = 0,080$ e para $i = 0,075$; donde $\alpha_A = 8\%$ por período e $\alpha_B = 7,5\%$ por período.

Então, como ambos os projetos são econômicamente justificáveis, pois a respectiva taxa interna supera a mínima de atratividade, deveríamos, em princípio, optar pelo projeto A, visto ser o que apresenta maior taxa interna de retôrno. Porém, tratando-se de alternativas que sejam mùtuamente exclusivas, nem sempre a que apresentar a maior taxa interna deverá ser escolhida, pois que êste critério não considera as diferenças entre os gastos de investimento dos projetos que estão sendo cotejados.

Isto é, no caso, se escolhermos o projeto A, como apontado pelo critério da maior taxa interna de retôrno, teríamos disponível, de acôrdo com a hipótese inicial, a diferença entre os custos iniciais dos projetos B e A, ou seja, 15100 - 10065 = 5035 unidades de capital, as quais iremos aplicar à taxa mínima de atratividade considerada, 6% por período. Logo, precisamos comparar o investimento de 15100 unidades de capital no projeto B, contra a aplicação de 10065 unidades de capital (U. C.) no empreendimento A e mais o investimento de 5 035 unidades de capital à taxa de atratividade.

Esta comparação pode ser efetuada, por exemplo, determinando-se os montantes, nessa mesma época, que seriam obtidos segundo cada alternativa.

Então, dentro do implìcitamente presumido no critério da taxa interna de retôrno, isto é, reaplicação das receitas futuras a essa taxa interna,[+] o total de capital que teríamos, caso adotássemos o projeto A, seria:

a) devido ao investimento em A:

$$\sum_{j=1}^{10} 1500 \, (1 + \alpha_A)^j = 10065 \, (1 + 0,08)^{10}$$

---

[+] Nêsse ponto adotamos a hipótese, controversa, de reaplicação das receitas à taxa interna de retôrno, sòmente para mostrar que, mesmo na situação mais otimista, visto que, no caso, as taxas internas superam a mínima de atratividade, o investidor fará um mau negócio caso opte pelo projeto A.

b) devido à aplicação das 50035 u.c. à taxa $\rho$ :

$$5035\ (1 + 0,06)^{10}$$

$$\text{TOTAL} \longrightarrow 10065\ (1 + 0,08)^{10} + 5035\ (1 + 0,06)^{10} = 30753$$

Já se o projeto B fôr o escolhido, o total de capital que disporemos no fim dos mesmos períodos, será:

$$\sum_{j=1}^{10} 2200\ (1 + \alpha_B)^j = 15100\ (1 + 0,075)^{10} = 31106$$

Ou seja, muito embora as diferenças não sejam grandes para o caso dêste particular exemplo, obteríamos mais se optássemos pelo investimento das 15 100 u.c. no projeto B, não obstante ser êste o que apresenta menor taxa interna de retôrno.

Para casos tais como êste, de escolha entre dois projetos mùtuamente exclusivos onde um apresenta maior investimento inicial do que o outro, se quisermos continuar utilizando o critério da taxa interna de retôrno faz-se necessário, antes que se decida pela simples comparação entre as respectivas taxas internas, calcular a taxa de retôrno sôbre os custos de Fisher, e cotejá-la com a mínima de atratividade.

No nosso exemplo temos que o fluxo de caixa da diferença B-A é:

B-A: $c_0 = -5035;\ c_j = 700,\ j = 1, \ldots, 10$

Ora, a solução real e não negativa da equação:

$$-5035 + 700 \left[ \frac{(1+i)^{10} - 1}{i\ (1+i)^{10}} \right] = 0$$

é $\alpha_{B-A} \doteq 0,065$; ou seja, a taxa "fisheriana", ou taxa interna de retôrno sôbre o investimento incremental, é de, aproximadamente, 6,5% por período. Como essa taxa é maior do que a mínima de atratividade, $\rho$ = 6% por período, conclui-se que o excesso de investimento de B em relação a A será mèlhor remunerado do que aplicando-o na oportunidade alternativa, indicando-se, assim, que o projeto B é superior ao A.

Convém notar que a hipótese de que o investidor disponha de numerário suficiente para financiar o investimento em qualquer dos projetos em análise, não é, em absoluto, restritiva. Desde que consiga obter fundos à uma taxa inferior a $\alpha_{B-A}$ será interessante solicitar um empréstimo para financiar o acréscimo de investimento necessário à implantação de B ao invés de A.

Um artifício, [7], que ajuda a visualizar o motivo pelo qual o projeto B, muito embora seja o que apresenta menor taxa interna de retôrno, deva ser o escolhido, consiste em decompor os fluxos de caixa associados ao projeto com maior investimento inicial em dois outros fluxos, de tal forma que um dêles seja igual ao fluxo de caixa correspondente do outro projeto em análise.

No caso, vemos que os fluxos de caixa associados ao projeto B podem ser admitidos como resultantes das somas dos seguintes fluxos de caixa:

a) $a_0 = -10065; \quad a_j = 1500, \; j = 1, \ldots, 10$

b) $c_0 = -5035; \quad c_j = 700, \; j = 1, \ldots, 10$

Ora, a primeira sequência, sendo igual à associada ao projeto A, apresenta uma taxa interna de 8% por período, e a segunda, sendo a relativa à diferença B-A, apresenta 6,5% por período como sua taxa interna. Por conseguinte, sendo B o projeto escolhido, obter-se-á para 10 065 unidades de capital a mesma remuneração que a que seria conseguida caso se escolhesse o projeto A, obtendo-se ainda, para as 5035 unidades adicionais uma remuneração superior à que lograríamos investindo-as à taxa mínima de atratividade.

5.3.2 - Seleção pelo Método do Valor Atual

Agora, considerada ainda a taxa mínima de atratividade de 6 % por período, a aplicação do método do valor atual para o caso dos projetos em aprêço irá conduzir à seleção do projeto com o maior valor atual.

Ora, temos que:

$$V_A(0,06) = -10065 + 1500 \cdot a_{\overline{10|}6} = 975$$

e

$$V_B\ (0,06) = -15100 + 2200 \cdot a_{\overline{10}|6} \cong 1092$$

Então, como $V_B\ (0,06) > V_A\ (0,06)$, concluiríamos ser o projeto B o mais interessante.

A seleção a que chegamos pelo método do valor atual, que, como vimos, é correta, foi obtida diretamente, sem necessidade, como no caso da aplicação do critério da taxa interna, de proceder-se à análise do investimento incremental. Tal deve-se ao fato de que o critério do valor atual leva em conta, implìcitamente, a diferença entre os investimentos iniciais. Isto é fàcilmente observável no caso do exemplo, visto que, escolhendo-se A, ter-se-iam disponíveis 5035 u.c. que seriam investidas na oportunidade que rende a taxa mínima de atratividade; portanto, em última análise, iremos comparar a alternativa B com a alternativa do projeto A e mais o "projeto" investimento à taxa mínima de atratividade. Porém, êste último "projeto" apresenta, para a taxa considerada, valor atual nulo; logo basta sòmente comparar as alternativas A e B.

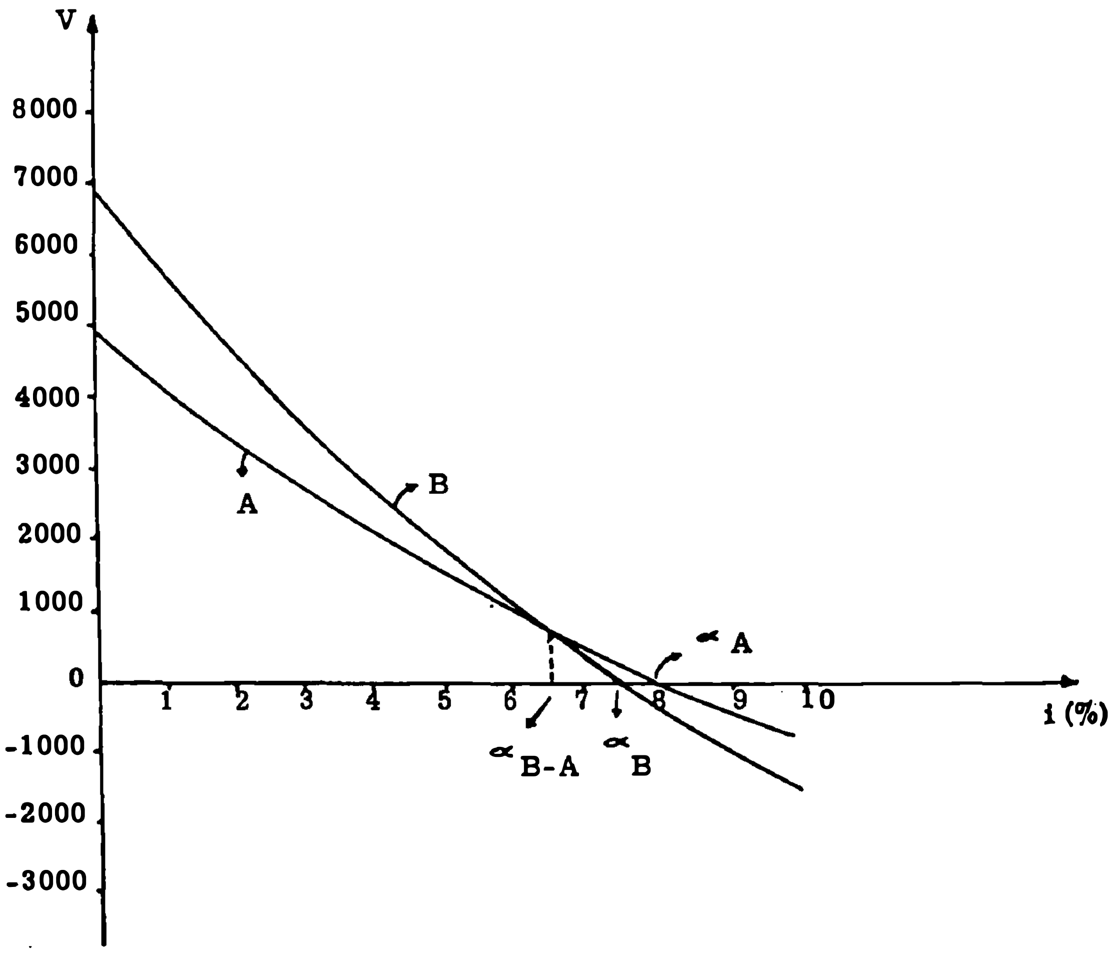
### 5.3.3 - Ilustração Gráfica da Comparação entre os Projetos A e B

Calculemos os valôres atuais, à diversas taxas de juros, de cada um dos projetos A e B, e plotemos os valôres obtidos em um mesmo gráfico.

| i (%) | $V_A$ (i) | $V_B$ (i) |
|---|---|---|
| 0 | 4 935 | 6 900 |
| 1 | 4 142 | 5 737 |
| 2 | 3 409 | 4 662 |
| 3 | 3 720 | 3 666 |
| 4 | 2 101 | 2 744 |

| i (%) | $V_A$ (i) | $V_B$ (i) |
|---|---|---|
| 5 | 1 518 | 1 888 |
| 6 | 975 | 1 092 |
| 6,5 | 718 | 716 |
| 7 | 470 | 352 |
| 7,5 | 231 | 0 |

| i (%) | $V_A$ (i) | $V_B$ (i) |
|---|---|---|
| 8 | 0 | - 338 |
| 9 | - 439 | - 981 |
| 10 | - 848 | - 1 582 |



Do gráfico vemos que para taxa inferiores à "fisheriana", que é de aproximadamente 6,5% por período, o valor atual do projeto B é superior ao do projeto A, sendo, pois, o investimento em B preferível ao investimento em A para taxas no intervalo [0; 0,065].+ Inversamente, para taxas no intervalo (0,065; $\infty$ ), o valor atual do projeto A é superior, passando a ser êste o preferível.

Interpretemos agora o que acontece no caso em que a taxa utilizada como a mínima de atratividade, que é a empregada para o cálculo dos valôres atuais, coincida com a taxa "fisheriana". Nesta hipótese os valôres atuais dos dois projetos são iguais, o que significa que ficaremos indiferentes entre os dois projetos, que serão então, ditos econômicamente equivalentes.

Notemos que nessa última eventualidade, igualdade entre taxa mínima de atratividade e a interna de retôrno sôbre o investimento incremental, um critério tal como o do tempo de recuperação do capital investido passará a ser decisivo, pois poderá permitir o desempate. Isto é, se no caso do nosso exemplo tivéssemos $\rho$ = 6,5% por período, o projeto A, na hipótese de considerar-se como critério adicional o do tempo de retôrno do capital investido, seria o escolhido, já que temos $T_A = 6{,}71 < T_B = 6{,}86$.

Mantido o critério do valor atual, observemos que, para casos tais como o do exemplo, o que vai decidir por qual dos dois projetos devemos optar é a posição relativa da taxa mínima de atratividade, $\rho$ , em relação à taxa "fisheriana", $\alpha_{B-A}$.

## 5.4 - Comparação de Projetos com Vidas Úteis Diferentes

Na maioria++ dos casos de seleção entre investimentos alternativos,

---

+ A rigor não devemos considerar incluída a possibilidade de taxa nula, pois que exatamente afastamos essa eventualidade como justificativa da eliminação dos critérios que não considerem a variação do capital com o tempo.

++ Existem exceções; uma delas, como apontada em [3], sendo a hipótese de decisão entre vender a patente de um nôvo produto ou explorá-la. Em outros casos, [14], a não redução a uma vida comum pode conduzir a paradoxos.

que sejam mùtuamente exclusivos e que tenham vidas diferentes, é necessário tornar a análise das alternativas em um caso de vidas comparáveis, ou seja, vidas iguais. Para tanto, temos, [7], dois procedimentos. O primeiro dêles consiste em tomar como período de estudo o mínimo múltiplo comum entre as vidas dos projetos que estão sendo cotejados; êsse procedimento nem sempre é possível, pois pode conduzir-nos a casos em que o mínimo múltiplo comum seja superior ao horizonte de dados, colocando-nos assim fora do caso determinístico que estamos assumindo. Além do mais, estaremos explìcitamente admitindo que os investimentos serão renovados nas mesmas condições; hipótese que não é muito plausível.

Um segundo procedimento consiste em estimar valôres residuais, no fim da vida do projeto que a tem menor, para as demais alternativas. Esta segunda hipótese, a menos da dificuldade de estimação dêsses valôres residuais, deverá, dentro do caso determinístico, ser a preferível, pois não nos colocará fora do horizonte de dados.

A título de ilustração, suponhamos que fôsse necessário selecionar um dentre os seguintes projetos:

A: $a_0 = -10\ 000$; $a_j = 1\ 500$, $j = 1, \ldots, 10$ (anos)

B: $b_0 = -17\ 045$; $b_j = 2\ 000$; $j = 1, \ldots, 15$ (anos)

Admitindo-se que a taxa mínima de atratividade seja de 8% a.a., caso não levássemos em conta o fato de que as vidas são diferentes, teríamos:

$$V_A\ (0,08) = -10000 + 1500 .\ a_{\overline{10}|8} = 65$$

$$V_B\ (0,08) = -17045 + 2000 .\ a_{\overline{15}|8} = 74$$

Então, como $V_A < V_B$, deveríamos escolher o projeto B. Porém, esta indicação sòmente por acaso estará certa, pois o critério utilizado na sua determinação é bàsicamente incorreto, visto que não se está contemplando possíveis oportunidades que poderiam surgir no período compreendido entre o fim da vida do projeto A e o da vida do projeto B.

Para contornar a deficiência apontada, teremos, procedendo-se como acima sugerido:

1) Tomando-se como período de estudo o mínimo múltiplo comum entre as vidas dos projetos em pauta.

No caso o m.m.c. é 30 anos; então, supondo-se que os projetos sejam renovados nas mesmas condições iniciais, devemos comparar os empreendimentos admitindo que estejam a êles associadas as seguintes seqüências de fluxos de caixa:

$$A: \begin{cases} a_0 = -10\,000; \; a_j = 1\,500; \; j = 1, \ldots, 9; \; a_{10} = -8\,500; \\ a_j = 1\,500; \; j = 11, \ldots, 19; \; a_{20} = -8500; \; a_j = 1500, \; j = 21 \ldots, 30 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} b_0 = -17\,045; \; b_j = 2\,000; \; j = 1, \ldots, 14; \; b_{15} = -15\,045; \\ b_j = 2\,000, \; j = 16, \ldots, 30 \end{cases}$$

Logo, teremos agora:

$$V_A\,(0,08) = -10\,000 + 1\,500 . a_{\overline{30|}8} - 10\,000 . s^{-1}_{\overline{10|}8} . a_{\overline{20|}8} \cong 109^{+}$$

e

$$V_B\,(0,08) = -17045 + 2000 . a_{\overline{30|}8} - 17045\,(1 + 0,08)^{-15} \cong 102$$

Portanto, como $V_B < V_A$, o projeto A é, realmente, o mais indicado.

2) Adotando-se, no fim da vida do projeto A, um valor residual para o projeto B.

Agora, o projeto B será o preferível se, mantida sua receita líquida na época 10, seu valor residual no fim de 10 anos, R, fôr tal que:

---

$^{+}$ - Onde $s^{-1}_{\overline{n|}i} = \dfrac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$

$$V_B(0,08) = -17045 + 2000.\, a_{\overline{10|}8} + R(1+0,08)^{-10} > V_A(0,08) =$$

$$= -10000 + 1\,500.\, a_{\overline{10|}8}$$

ou

$$R(1+0,08)^{-10} > 7045 - 500.\, a_{\overline{10|}8}$$

ou

$$R > 8014$$

O valor residual pode ser entendido como o valor de revenda dos bens, físicos (como equipamentos) e intangíveis (como patentes), associados ao projeto, menos o valor de indenização por possíveis quebras contratuais.

Para contornar a dificuldade na estimativa do valor residual R, que é uma tarefa algo delicada e subjetiva, um procedimento que pode ser adotado é o de determinar R a partir dos dados originais do projeto. O que se sugere é que o valor residual seja igualado ao valor atual, calculado à taxa interna de retôrno, dos fluxos de caixa líquidos posteriores ao fim da vida do projeto de menor duração.

Assim, para o caso do exemplo, tendo em vista que a taxa interna de retôrno do projeto B é, aproximadamente, de 8,1% a.a. o valor residual R será, tomando-se o valor atual na época 10 das receitas líquidas posteriores a essa época:

$$R = 2\,000.\, a_{\overline{5|}8,1} = 7964 < 8014$$

Donde o projeto A ser o mais econômicamente indicado, o que corrobora o resultado anterior.

## 5.5 - Primeira Conclusão

A análise dos resultados observados permite-nos concluir que a sele ção de projetos pelo critério da taxa interna de retôrno, como inicialmente definido, não é consistente, pois pode conduzir, para certos casos de alternativas que sejam mùtuamente exclusivas, a ordenações incorretas. Como vimos para os exemplos apresentados, esta deficiência pode ser contornada, ao preço de acréscimo de trabalho, mediante a introdução do cálculo da taxa interna de retôrno sôbre o investimento incremental, mas ficando agora evidente a necessidade de também explicitar-se a taxa mínima de atratividade.

Porém, o preço a pagar pela manutenção do critério da taxa interna de retôrno é muito alto. Assim, no caso de termos que cotejar M projetos que sejam mùtuamente exclusivos, poderemos ser obrigados a determinar até $\binom{M}{2} = M(M-1)/2$ taxas internas adicionais. É ainda possível, mesmo que os projetos sejam todos do tipo de investimento simples, existir, como mostraremos no Apêndice I, mais de uma solução real ou positiva para a equação que iguala a zero o valor atual do "projeto diferença". Ou seja, poderemos deparar-nos com o caso de múltiplas taxas "fisherianas", o que introduziria uma dificuldade adicional na aplicação do critério da taxa interna de retôrno.

Pelos motivos expostos passamos a dar preferência à aplicação do método do máximo valor atual a uma dada taxa mínima de atratividade. Resta-nos, portanto, procurar a determinação da taxa a ser utilizada na aplicação do critério do valor atual, o que intentaremos mais adiante.

## 5.6 - Confronto Valor Atual x Razão Benefício/Custo

Preliminarmente, investiguemos se os dois métodos são equivalentes. Isto é, verifiquemos se os dois métodos, quando aplicados a um mesmo conjunto de alternativas, conduzem aos mesmos resultados de avaliação e de seleção.

Como já vimos, considerada uma certa taxa mínima de atratividade, se a razão benefício/custo de um dado projeto fôr superior à unidade, o seu valor atual será positivo. Reciprocamente, é fácil verificar que, se o valor atual de um projeto fôr positivo, sua razão benefício/custo, calculada à mesma taxa, será superior a um, ou seja, quanto ao resultado de avaliações individuais, os dois critérios são equivalentes.

Resta-nos, portanto, verificar se o mesmo acontece em relação ao resultado de seleção entre alternativas.

Consideremos o caso de dois projetos A e B, que são mùtuamente exclusivos e que têm a mesma vida, e, para uma dada taxa i, suponhamos que:

$$R_A (i) > R_B (i) > 1$$

onde $R_A (i)$ e $R_B (i)$ representam, respectivamente, a razão benefício/custo do projeto A e do projeto B.

Então:

$$\frac{VB_A (i)}{VC_A (i)} > \frac{VB_B (i)}{VC_B (i)}$$

ou

$$\frac{VB_A (i)}{VC_A (i)} - \frac{VC_A (i)}{VC_A (i)} > \frac{VB_B (i)}{VC_B (i)} - \frac{VC_B (i)}{VC_B (i)}$$

ou

$$\frac{V_A (i)}{VC_A (i)} > \frac{V_B (i)}{VC_B (i)}$$

logo:

$$V_A (i) > \left[ \frac{VC_A (i)}{VC_B (i)} \right] V_B (i)$$

Ou seja, poderemos garantir que $V_A (i) > V_B (i)$, sendo pois a alternativa A preferível à B, sòmente se $VC_A (i) / VC_B (i) \geq 1$.

Isto é, embora do ponto de vista da avaliação individual o critério da razão benefício/custo coincida com o do valor atual, não podemos garantir que o mesmo ocorra quando estão sendo cotejadas alternativas mùtuamente exclusivas.

Torna-se, então, necessário que façamos o confronto entre os dois métodos para um caso específico. Para tanto, retomemos o exemplo das alternativas A e B visto no item 5.3, na hipótese de ausência de restrição de capital, e, para facilidade de cálculo, suponhamos que os fluxos de caixa líquidos apresentados tenham resultado, respectivamente, da composição entre as seguintes sequências de custos e de benefícios:

$$A: \begin{cases} c_0 = 10065; \quad c_j = 0; \quad j = 1, \ldots, 10 \\ b_0 = 0; \quad b_j = 1500; \quad j = 1, \ldots, 10 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} c_0 = 15100; \quad c_j = 0, \quad j = 1, \ldots, 10 \\ b_0 = 0; \quad b_j = 2200, \quad j = 1, \ldots, 10 \end{cases}$$

Nestas condições, considerada a taxa de 6% por período, teremos as seguintes razões benefício/custo:

$$R_A\,(0,06) = \frac{VB_A\,(0,06)}{VC_A\,(0,06)} = \frac{1500.\,a_{\overline{10|}6}}{10065} = \frac{11040}{10065} = 1,097$$

e

$$R_B\,(0,06) = \frac{VB_B\,(0,06)}{VC_B\,(0,06} = \frac{2200.\,a_{\overline{10|}6}}{15100} = \frac{16192}{15100} = 1,072$$

Então, como $R_A\,(0,06) > R_B\,(0,06)$, o critério da razão benefício/custo relacionaria o projeto A como sendo o preferível, o que contraria o indicado pela aplicação do método do valor atual à mesma taxa.+

Ora, como já havíamos concluído que o projeto B é, para a taxa mínima de atratividade de 6% por período, realmente o mais indicado, segue-se que, anàlogamente ao que acontece com o método da taxa interna de retôrno, o critério da razão benefício/custo não leva em consideração a diferença entre os investimentos iniciais. Por conseguinte, torna-se também necessário que façamos a análise do investimento incremental. Ou seja, devemos determinar a relação benefício/custo do "projeto" diferença e compará-la com a unidade (já que a alternativa de investimento à taxa de atratividade apresenta relação benefício/custo unitária).

---

+ Notemos que êsse resultado numérico corrobora nossa investigação analítica, já que $VC_A\,(0,06)/VC_B\,(0,06) = 10065/15100 < 1$.

No caso do nosso exemplo, devemos proceder à avaliação do seguinte "projeto":

$$B\text{-}A \begin{cases} c_0 = 5035; \; c_j = 0, \; j = 1, \ldots, 10 \\ b_0 = 0; \; b_j = 700, \; j = 1, \ldots, 10 \end{cases}$$

Temos que:

$$R_{B-A}(0,06) = \frac{700 \cdot a_{\overline{10|}6}}{5035} = 1,023 > 1$$

Resultado que nos levará a selecionar, agora corretamente e como indicado pelo critério do valor atual, a alternativa B.

### 5.7 - Conclusão Final

Visto que o critério da razão benefício/custo apresenta, também, a deficiência de não contemplar possíveis diferenças entre as parcelas de investimento inicial dos projetos em confronto, passamos a dar preferência, quanto mais não seja por questão de simplicidade de aplicação, ao método do máximo valor atual a uma dada taxa tomada como mínima de atratividade.

## 6 - DETERMINAÇÃO DA TAXA MÍNIMA DE ATRATIVIDADE

Uma vez que chegamos à conclusão de que o critério do valor atual é, preferencialmente, aquêle que deve ser adotado para proceder-se a avaliações e seleção de projetos de investimento, é como o valor atual de um empreendimento é dependente da taxa de juros, cabe-nos agora analisar a determinação da taxa a ser considerada para sua aplicação, taxa essa que chamamos de mínima de atratividade e que representamos por $\rho$ .

Para tanto, iremos supor que o agente investidor encontre-se de posse de todos os dados (sequência de fluxos de caixa) relativos às várias possíveis alternativas de investimento (projeto), incluindo-se entre elas as oportunidades de empréstimos de seu capital disponível, e que, sendo sua tarefa determinar a taxa mínima de atratividade a ser utilizada para a seleção dos projetos que serão levados avante (aceitos), esteja sujeito a uma das hipóteses que se enumeram a seguir. +

## 6.1 - Ausência de Restrição Orçamentária

Admitindo-se que não haja limitação do capital disponível para investimento, o que aconteceria se os orçamentos pudessem ser dilatados mediante a obtenção de capital adicional através de empréstimos tomados num mercado financeiro ilimitado e que cobra uma certa taxa de juros, esta taxa de juros do mercado deverá ser a utilizada para o desconto da sequência de fluxos associada a cada projeto. Ou seja, a taxa de mercado será a nossa taxa mínima de atratividade, $\rho$ .

Por conseguinte, de acôrdo com o critério de maximização do valor atual para o investidor, ou seja, da soma dos valôres atuais dos projetos, devemos aceitar os empreendimentos que apresentem valor atual positivo quando descontados (calculados) à taxa de mercado. ++

Observemos que, na hipótese em que os projetos sendo cotejados sejam todos do tipo convencional de investimento e independentes entre si, êsse procedimento conduziria à aceitação dos mesmos projetos que, segundo o critério da taxa interna de retôrno, apresentassem $\alpha > \rho$.. No caso de haver projetos que sejam econômicamente dependentes, não mais poderíamos confiar estritamente no método da taxa interna de retôrno, pois que êsse critério nos indicaria tão sòmente se os projetos são ou não econômicamente viáveis, deixando de indicar qual o preferível entre dois ou mais que sejam mùtuamente exclusivos

---

+ A discussão que se segue acompanha estreitamente a apresentada por McKean, [15], capítulo V.

++ Projetos, no sentido mais restrito da palavra, cujos fluxos de caixa, descontados à taxa $\rho$ , apresentassem valor atual nulo (na prática muito pequeno), não seriam aceitos. Para projetos tais como êsses, seria teòricamente indiferente investir nêles ou emprestar o capital necessário à taxa de mercado; òbviamente, porém, a alternativa de empréstimo seria a preferível, pois, embora violando nossa premissa de determinismo, seria a de menor risco.

(precisaríamos calcular a taxa "fisheriana" e compará-la com $\rho$ ).

Portanto, a regra mais geral seria a de aceitar os projetos que, à taxa de mercado, apresentassem valor atual positivo, tomando-se o cuidado de eliminar os projetos mùtuamente exclusivos que tivessem menor valor atual de que os seus competidores.

A escolha da taxa mínima de atratividade como sendo aquela cobrada para empréstimos tomados no mercado de capitais é justificada por dois argumentos. O primeiro dêles deriva do fato de que, admitida a eventualidade de o agente investidor colocar à venda, logo após a etapa de construção, um de seus projetos, o preço que irá obter, sendo uma função da procura no mercado, será o determinado pelo cálculo do valor atual dos futuros fluxos de caixa associados ao projeto pôsto à venda, valor atual êsse computado à taxa de juros de mercado. Um segundo argumento é o de que, afastada a hipótese de venda dos projetos, as receitas futuras podem ser admitidas como sendo reinvestidas, no mínimo, por meio de empréstimos, à taxa de mercado; assim, para o caso de dois projetos do tipo simples e de mesma duração, o total de capital que se teria acumulado no fim da vida comum seria maior para o caso de ter-se aceito o projeto que apresentasse o maior valor atual calculado à taxa de mercado (evidentemente, estamos assumindo a hipótese, algo restritiva, de que a taxa de mercado mantenha-se constante ao longo do horizonte de dados).

Segundo a terminologia empregada em [ 15 ], o critério a ser adotado na hipótese de ausência de restrição de capital, pode ser enunciado como: "se fôr possível obter-se empréstimos a uma dada taxa de mercado, aceite os projetos de modo a maximizar o valor atual total quando os fluxos de caixa são descontados à taxa marginal de retôrno", onde a taxa marginal de retôrno é a taxa interna de retôrno que seria obtida caso fôsse feito um investimento adicional.

Lògicamente, no caso de não existir uma limitação orçamentária, qualquer investimento incremental, viável, no sentido de ao menos não apresentar uma taxa interna de retôrno inferior à taxa de mercado, será tal que $\alpha$ = taxa de mercado. Isto porque, se o capital originalmente disponível no orçamento do agente investidor fôsse igual ou excedesse aos custos iniciais dos projetos que, supostos em estudo, produzem mais do que a taxa de mercado (no sentido de se ter $\alpha >$ taxa de mercado), o investidor não conseguiria fazer melhor do que aplicar o excesso, ou qualquer disponibilidade adicional, em empréstimos à taxa de mercado. Portanto, qualquer investimento adicional será feito à taxa de mercado; lembrar que no caso de empréstimo de capital a uma taxa de juros $t$, a definição de taxa interna de retôrno nos levará, para essa operação, a $\alpha = t$. Ja se o orçamento original fôsse escasso, o investidor tomaria empréstimos à taxa de mercado, alocando o capital assim obtido até esgotar os projetos que produzam mais do que a taxa de mercado; e então, anàlogamente ao caso anterior, qualquer disponibilidade adicional seria empregada em empréstimos à taxa de mercado.

## 6.2 - Restrição Orçamentária Parcial: Revenda Permissível

Admitamos agora que, por uma imposição institucional qualquer, não mais seja possível à entidade investidora obter empréstimos à taxa de mercado, t. Então, poderemos ter o caso em que o capital disponível no orçamento original não seja suficiente para cobrir os gastos de investimento em todos os projetos que apresentem taxa interna de retôrno $\alpha > t$, isto é, projetos com taxa interna superior à de mercado. Ora, nesse caso, haverá então a possibilidade de que uma disponibilidade adicional de capital seja aplicada em um projeto que apresente uma taxa interna de retôrno, $\rho_1$, superior à taxa de mercado. Ou seja, teríamos uma taxa marginal de retôrno maior do que a taxa de juros de mercado.

Como consequência, em princípio,[+] poderíamos inferir que o critério a ser adotado deveria ser o de tomar para a taxa mínima de atratividade a taxa $\rho_1 > t$; isto é, aceitar-se-iam os projetos que apresentassem valor atual positivo quando calculados à taxa $\rho_1$. Entretanto, admitindo-se que, logo após findar-se a etapa de construção de projetos implementados, seja permissível a revenda dos empreendimentos, o agente investidor poderá relaxar suas futuras restrições de capital. Mas, como já frisamos, seus projetos postos à venda terão seus valôres avaliados à taxa de juros do mercado, t. Portanto, devido ao fato de que a entidade investidora tenha de se preocupar com possíveis avaliações de seus projetos à taxa t e não à taxa $\rho_1$, a taxa a ser adotada como mínima de atratividade será a de juros do mercado, ou seja $\rho = t$.

---

[+] Evidentemente, se o orçamento de capital igualasse, ou fôsse superior, aos gastos com projetos que apresentassem $\alpha > t$, a taxa marginal de retôrno seria a do mercado.

Logo, na hipótese de restrição orçamentária parcial (revenda permissível), o critério a ser adotado será, ainda, o de aceitar aquêles projetos que, descontados à taxa de mercado, apresentarem valor atual positivo.

## 6.3 - Restrição Orçamentária

Agora, havendo limitação na disponibilidade de capital e não mais sendo considerada a possibilidade de revenda de projetos implementados, admitindo-se a hipótese de que as receitas futuras serão reinvestidas na melhor alternativa que deixar de ser aceita por insuficiência orçamentária, a taxa a ser adotada como a mínima de atratividade, $\rho$, deverá ser a taxa interna de retôrno daquele projeto marginal.

Evidentemente, a taxa marginal de retôrno e que será feita mínima de atratividade será, no mínimo, igual à taxa de juros do mercado, já que incluímos entre os projetos aquêle do empréstimo ao mercado. Êste caso sucederia se o orçamento do capital disponível igualasse ou excedesse o gasto com o investimento necessário para a execução dos projetos com taxa interna de retôrno superior à de juros de mercado, t.

Nosso problema passa a ser, portanto, o da determinação do projeto marginal e de sua respectiva taxa interna de retôrno. O procedimento aconselhado, [15] é o de descontar, a várias taxas, os fluxos de caixa associados a cada um dos projetos em estudo, até encontrar a taxa à qual o capital disponível é exaurido por investimento em empreendimentos com valôres atuais positivos. No caso de projetos simples, o valor atual é decrescente com a taxa utilizada para sua determinação, e, portanto, haverá uma taxa, $\rho \geqslant t$, para a qual a soma dos investimentos iniciais necessários à execução dos projetos com valor atual positivo igualará a restrição de fundos. Essa taxa será a taxa marginal de retôrno, pois, na hipótese de uma gama contínua de projetos, fará com que um dos empreendimentos, não aceito por insuficiência de capital, tenha valor atual nulo, ou seja, essa será a taxa interna de retôrno do projeto marginal.

Êsse procedimento, porém, é demasiado trabalhoso, sendo, usualmente, preterido pela adoção do rateio (alocação) do capital disponível nos projetos ordenados segundo o critério da taxa interna de retôrno. Isto é, inicialmente, os projetos que apresentassem $\alpha > t$ seriam listados por ordem decres cente de suas respectivas taxas internas de retôrno; a seguir, aceitar-se-iam os empreendimentos, na ordem de preferência dada pela lista segundo $\alpha$, até esgotar o orçamento de capital. No caso em que os projetos sejam todos do tipo de investimento simples e independentes entre si, êsse procedimento conduzirá à mesma seleção que a que seria obtida segundo o critério do valor atual calculado à taxa marginal de retôrno. Entretanto, na maioria dos casos, teremos projetos econômicamente dependentes, e mesmo mùtuamente exclusivos, bastando levar em conta que devemos considerar não só diferentes localizações mas ainda diversos possíveis tamanhos (escalas) para um mesmo projeto, donde o critério da ordenação pela taxa interna de retôrno nem sempre levar à mesma seleção que a dada pelo método do valor atual calculado à taxa marginal de retôrno.

Convém notar que, mesmo que se considere a seleção segundo o critério do valor atual calculado à taxa interna de retôrno do projeto marginal, poderemos ter a possibilidade de que mais de um conjunto de alternativas esgotem o orçamento de capital, para diferentes taxas de juros. Isto porque, no caso de termos projetos do tipo não convencional de investimento, é possível que o valor atual não seja decrescente com a taxa em todo o campo de variação desta última.+ Nesta eventualidade, deveremos lançar mão de critérios adicionais, como o do tempo de recuperação do capital investido, para promover o desempate.

## 6.4 - Outros Tratamentos da Restrição Orçamentária

Um dos tópicos mais controversos na literatura que versa sôbre seleção de projetos é o de limitação no capital disponível para inversão. Não só divergem os autores quanto ao procedimento a ser adotado no caso dessa eventualidade, como ainda chega-se a duvidar de que a situação de restrição orçamentária represente uma possibilidade importante na prática, [ 11 ].

Devido a êsse fato, julgamos conveniente mencionar alguns dos outros procedimentos sugeridos, sem no entanto aprofundar-nos no estudo de cada um dêles.

---

+ Vide Apêndice I para as condições em que a função valor atual é estritamente decrescente.

### 6.4.1 - O modêlo de Hirshleifer et al, [ 11 ].

As hipóteses básicas do modêlo são:

a) sòmente existe limitação de capital na época atual (instante zero);

b) mediante empréstimos tomados ou cedidos a uma certa taxa de mercado de $t$ por período, é possível a transferência monetária de fluxos de caixa a ocorrer em períodos futuros.

Verificadas essas premissas, o procedimento sugerido é o de listar, após prévia eliminação de alternativas mùtuamente exclusivas, os projetos de investimento em ordem decrescente da relação:

$$R'(t) = -\frac{V^1(t)}{a_0} = -\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j (1+t)^{-j+1}}{a_0}$$

Da mesma forma que é possível criticar-se o modêlo de McKean, apresentando-se um exemplo em que o critério prático da ordenação segundo a taxa interna de retôrno conduz a uma seleção errônea, é também possível construir um exemplo que contradiga o procedimento ora sugerido. Em particular, retomemos o caso dos projetos A e B exemplificados no item 5.3; e, admitindo-se a taxa de mercado como sendo de 6% por período, suponhamos que se dispõem exatamente de 15 100 unidades de capital para a realização do investimento.

Calculando-se a relação sugerida, teremos:

$$R'_A(0,06) = \frac{1500\,(1 + a_{\overline{9}|6})}{10065} \approx 1,16$$

$$R'_B(0,06) = \frac{2200\,(1 + a_{\overline{9}|6})}{15\,100} \approx 1,14$$

Por conseguinte, como $R'_A(0,06) > R'_B(0,06)$, os resultados obtidos nos conduziriam, errôneamente como vimos, a selecionar o projeto A, investindo-se a diferença então disponível no mercado (ou consumindo-a).

6.4.2 - O modêlo da OCDE, [ 16 ]

Adotando hipóteses algo similares à do modêlo anterior, o manual de projetos da Organização para a Cooperação Econômica e Desenvolvimento - (OCDE), preconiza que os projetos sejam ordenados de acôrdo com a seguinte relação:

$$R''(t) = \frac{B}{I}$$

onde

$$B = -I + \sum_{j=1}^{n} (R_j - D_j) \quad (1 + t)^{-j}$$

sendo $R_j$ e $D_j$, respectivamente, a receita e a despesa operacionais durante o j-ésimo período.

e

$$I = \sum_{j=0}^{n} I_j \ (1 + t)^{-j},$$

sendo $I_j$ a despesa de investimento na época j.

No caso particular de um projeto de investimento simples, tendo em vista nossa notação usual, teremos: +

$$R''(t) = - \frac{\sum_{i=0}^{n} a_j (1 + t)^{-j}}{a_0} = - \frac{V(t)}{a_0}$$

Notemos que, mais uma vez, êsse procedimento resulta falho para o caso do exemplo recém-abordado, pois como

---

+ Convém observar que o programa para cálculo da razão benefício/custo, como apresentado no Apêndice IV, pode ser utilizado para a determinação dessa relação, mesmo no caso de projetos de investimento do tipo não convencional.

$$R''_A(0,06) = \frac{V_A(0,06)}{10065} = \frac{975}{10065} \simeq 0.097$$

e

$$R''_B(0,06) = \frac{V_B(0,06)}{15100} = \frac{1092}{15100} \simeq 0,072$$

teremos

$$R''_A(0,06) > R''_B(0,06)$$

### 6.4.3 - Modelos de Programação Matemática

Lembremos que os modelos até então citados não são capazes de resolver, diretamente, o problema do cotejo entre projetos que sejam interrelacionados. Isto é, no caso de haver alternativas que, por razões técnicas ou econômicas, só possam ser levadas a efeito se determinados outros projetos forem prèviamente aceitos, o que se denomina um caso de projetos contigentes, ou concomitantemente rejeitados, ou caso de alternativas mùtuamente exclusivas, os modelos anteriores nos obrigariam a construir tantas listas de ordenação quantos fôssem os números de possibilidades de combinações de projetos. Como decorrência, no caso de termos um grande número de possibilidades de combinações de projetos, a tarefa numérica tornar-se-ia de tal forma exaustiva que desencorajaria a aplicação daqueles métodos.

Modernamente, com o advento de algoritmos eficientes e com o avanço dos sistemas de processamento de dados, tem-se voltado a atenção para os modelos de programação matemática. Tais modelos, além de contemplar o caso de projetos interrelacionados, permitem ainda que se considerem restrições de capital e de quaisquer outros insumos para qualquer número de períodos.

Sem descer a maiores detalhes,+ um modêlo simples de programa-

+ Aos interessados recomendamos [ 9 ] e a bibliografia específica aí mencionada.

ção linear inteira, para o caso em que os projetos sejam todos do tipo de investimento simples e que só haja restrição de capital na época atual, na hipótese de que o objetivo seja a maximização do valor atual dos $\underline{m}$ projetos em pauta, pode ser construído como se segue.

Seja $V_i(\rho) = \sum_{j=0}^{n_i} a_{ij}(1+\rho)^{-j}$, o valor atual, a uma dada taxa de $\rho$ por período, do projeto i; i = 1, 2, ..., m.

Sendo $X_i$ a variável de decisão relativa ao projeto i, a função objetivo pode ser escrita como:

$$Z = \sum_{i=i}^{m} X_i \cdot V_i(\rho)$$

As restrições do modêlo serão do tipo:

a) limitação de capital

Sendo B o total de capital disponível para investimento, devemos ter:

$$B + \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot a_{i0} \geqslant 0$$

b) alternativas mùtuamente exclusivas

Se os projetos $i_1, i_2, \ldots, i_\ell$ forem mùtuamente exclusivos, devemos ter:

$$\sum_{k=1}^{\ell} X_{i_k} \leqslant 1$$

c) projetos contigentes

Se o projeto $i_1$ puder ser aceito independentemente, mas com o projeto $i_2$ só podendo ser aceito se $i_1$ também o fôr, essa restrição pode ser expressa pela relação:

$$X_{i_2} - X_{i_1} \leqslant 0$$

d) variáveis de decisão

As variáveis de decisão, $X_i$, devem ser tais que só possam assumir ou o valor zero ou o valor um; sendo que:

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{o projeto } \underline{i} \text{ é rejeitado} \\ 1, & \text{o projeto } \underline{i} \text{ é aceito.} \end{cases}$$

# APÊNDICE

# APÊNDICE I

## CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS RELATIVAS AOS CRITÉRIOS DO VALOR ATUAL E DA TAXA DE RETÔRNO

### 1 - CASO DOS PROJETOS DE INVESTIMENTO SIMPLES

Teorema A

Para um projeto de investimento simples, o valor atual é uma função estritamente decrescente e convexa, para taxas no intervalo $[0, \infty)$. +

Demonstração

Temos que,

$$V(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j (1 + i)^{-j}$$

---

+Na realidade, [ 18 ], o teorema é válido para todo $i > -1$. Deixamos, porém de considerar $i \in (-1, 0)$ pois, regra geral, taxas nesse intervalo carecem de significação econômica.

Logo, derivando-se com respeito a i, vem:

$$\frac{dV(i)}{di} = \sum_{j=0}^{n} j.a_j (1+i)^{-j-1}$$

$$= 0 - a_1 (1+i)^{-2} - 2\,a_2 (1+i)^{-3} - \ldots - n.\,a_n (1+i)^{-n-1} < 0$$

pois, num projeto de investimento simples, $a_0 < 0$ e $a_j \geqslant 0$ para $j = 1,2, \ldots, n$, e, $(1+i)^{-k} > 0$ para todo o k se $i \geqslant 0$.

Então, como a derivada primeira é negativa, segue-se que a função valor atual é estritamente decrescente com a taxa, no intervalo $[0, \infty)$

Temos ainda que:

$$\frac{d^2 V(i)}{di^2} = \sum_{j=0}^{n} j(j+1)\, a_j (1+i)^{-j-2} =$$

$$= 0 + 2\,a_1 (1+i)^{-3} + 6.a_2 (1+i)^{-4} + \ldots + n(n+1)\, a_n (1+i)^{-n-2} > 0$$

Portanto, a função valor atual é, também, estritamente convexa para taxas no intervalo $[0, \infty)$

Teorema B

Se, para um projeto de investimento simples, tivermos $\sum_{j=1}^{n} a_j > -a_0$, o seu valor atual anular-se-á para um $i \in (0, \infty)$, o que se dará sòmente uma vez. Isto é, um projeto do tipo de investimento simples, no qual a soma algébrica de seus fluxos de caixa é positiva, possui uma taxa interna de retôrno que é positiva e única.

Demonstração

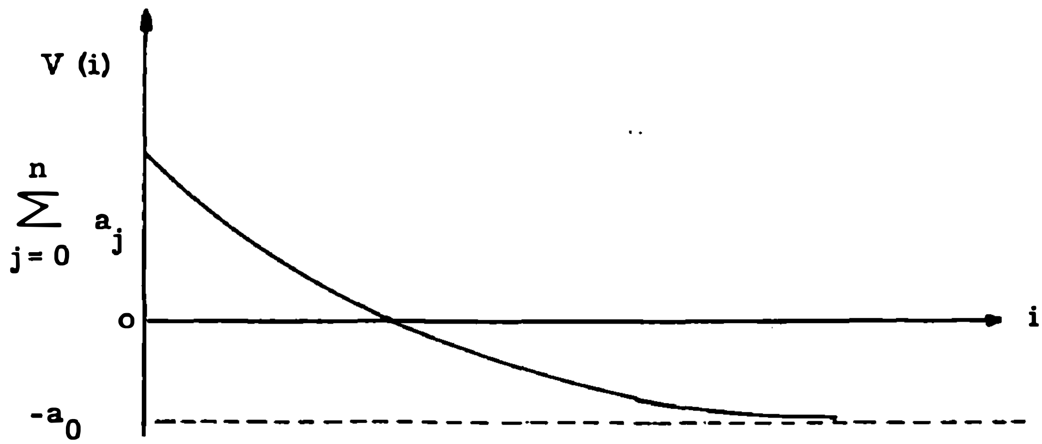
$$\text{Se} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j > -a_0 \Rightarrow V(0) = \sum_{j=0}^{n} a_j > 0$$

Por outro lado, temos que:

$$\lim_{i \to \infty} V(i) = \lim_{i \to \infty} \sum_{j=0}^{n} a_j (i + i)^{-j} = a_0 < 0$$

Ora, sendo o valor atual de um projeto uma função contínua, pois que é um polinômio em i, segue-se que esta irá anular-se ao menos uma vez para i, no intervalo $(0, \infty)$. Porém, pelo teorema A, o valor atual é estritamente decrescente; portanto, concluímos que a equação $V(i) = 0$ só será verificada para um única taxa $i \in (0, \infty)$.

Gràficamente, as condições do teorema B implicam em que;

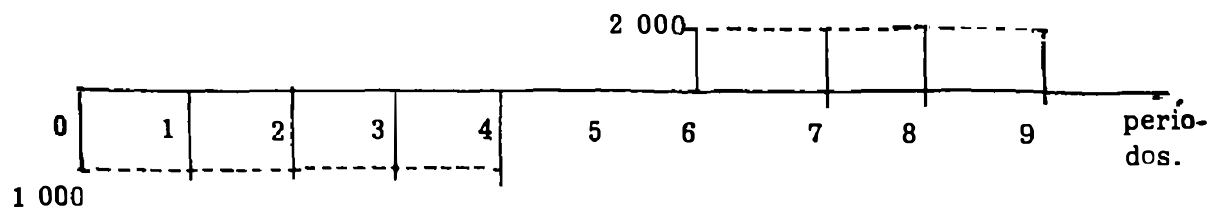



## 2 - CASO DOS PROJETOS DE INVESTIMENTO DO TIPO CONVENCIONAL

Como motivação, suponhamos que nos fôsse dado a analisar o projeto convencional caracterizado pela seguinte sequência de fluxos de caixa:

$$A: \begin{cases} a_j = -1\,000, \; j = 0, \ldots, 4; \; a_5 = 0 \\ a_j = 2\,000, \; j = 6, \ldots, 9 \end{cases}$$

Gràficamente, êsse projeto poderia ser especificado pelo diagrama abaixo:




Sendo o valor atual dêsse projeto, calculado à taxa $\underline{i}$ por período, dado por:

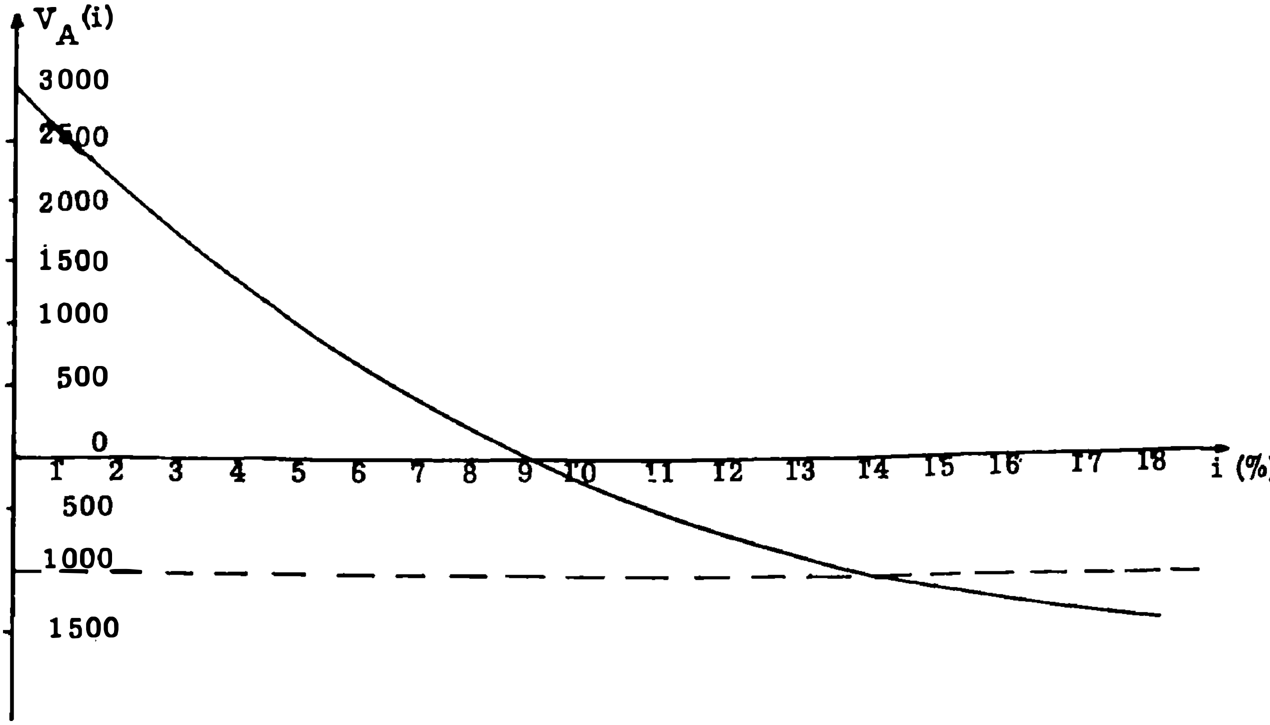
$$V_A(i) = \sum_{j=0}^{9} a_j (1+i)^{-j} = -1000\,(1 + a_{\overline{4}|i}) + 2000\,(1+i)^{-5}\, a_{\overline{4}|i}$$

vejamos seu comportamento quando se faz variar a taxa. Para tanto, calculemos o valor atual a diversas taxas, e plotemos os pontos obtidos em gráfico.

Temos:

| i (%) | $V_A$ (i) |
|---|---|
| 0 | 3 000 |
| 0,25 | 2 876 |
| 0,5 | 2 756 |
| 1 | 2 523 |
| 1,5 | 2 301 |
| 2 | 2 090 |
| 2,5 | 1 888 |
| 3 | 1 696 |
| 4 | 1 337 |
| 5 | 1 011 |
| 6 | 714 |
| 7 | 443 |

| i (%) | $V_A$ (i) |
|---|---|
| 8 | 196 |
| 8,5 | 81 |
| 9 | - 29 |
| 9,5 | - 133 |
| 10 | - 233 |
| 11 | - 420 |
| 12 | - 590 |
| 13 | - 746 |
| 14 | - 887 |
| 15 | - 1 016 |
| 18 | - 1 338 |




Já que, de uma maneira completamente geral, sendo $\lim_{i \to \infty} V(i) = \lim_{i \to \infty} \sum_{j=0}^{n} a_j (1 + i)^{-j} = a_0$, no nosso caso teremos $\lim_{i \to \infty} V_A(i) = -1\,000$. Ora, como $V_A(i) < -1\,000$ para, pelo menos, $i = 15\%$ e $i = 18\%$ por período, segue-se que, em ao menos um trecho de intervalo $(18, \infty)$, a função, valor atual do projeto A, será crescente.

Essa observação nos leva a concluir que, ao contrário do que ocorre no caso dos projetos simples, a função valor atual de um projeto de investimento do tipo convencional não é necessàriamente decrescente ao longo do intervalo $[0, \infty)$.

Tal fato nos conduz a perguntar se existe mais de uma taxa positiva para a qual $V_A(i) = 0$. Isto é, colocando a pergunta de uma forma mais geral, é possível que tenhamos projetos convencionais com mais de uma taxa interna de retôrno positiva?

Para responder esta pergunta, procuremos, inicialmente, supondo que não tivéssemos ainda visto que a função valor atual não é sempre decrescente, tentar estabelecer condições de suficiência para a existência de uma única taxa interna de retôrno no intervalo $(0, \infty)$.

Essas condições, do mesmo modo que no caso de um projeto simples são, para o caso geral de um projeto do tipo convencional:

$$\text{a)}\quad V(0) > 0 \Rightarrow \sum_{j=k+1}^{n} a_j > - \sum_{j=0}^{k} a_j$$

$$\text{b)}\quad \frac{dV(i)}{di} < 0 \Rightarrow - \sum_{j=0}^{k} j.\,a_j\,(1+i)^{-j-1} < \sum_{j=k+1}^{n} j.\,a_j\,(1+i)^{-j-1}$$

ou, multiplicando-se ambos os membros da relação b por $(1 + i)$, que é positivo para $i > 0$, esta se torna:

$$- \sum_{j=0}^{k} j.\,a_j\,(1+i)^{-j} < \sum_{j=k+1}^{n} j.\,a_j\,(1+i)^{-j}$$

Infelizmente, o estudo da condição b, mesmo para casos bastantes particulares, é demasiado trabalhoso, como constataremos com o nosso exemplo e não nos leva à nenhuma conclusão *a priori*.

Como ilustração, considerando-se o projeto A em estudo, teremos:

$$\text{a)}\quad \sum_{j=k+1}^{9} a_j = \sum_{j=6}^{9} 2000 = 8000 > - \sum_{j=0}^{k} a_j = \sum_{j=0}^{4} 1000 - 0 = 5000$$

$$\text{b)}\quad - \sum_{j=0}^{k} j.\,a_j\,(1+i)^{-j} = 1000 \sum_{j=1}^{4} j\,(1+i)^{-j}$$

e

$$\sum_{j=k+1}^{n} j.\,a_j\,(1+i)^{-j} = 2000 \sum_{j=6}^{9} j\,(1+i)^{-j}$$

Ora, como se verifica em [5] pag. 124, onde nos referimos às fórmulas de matemática financeira, temos que:

$$\sum_{j=1}^{4} j\,(1+i)^{-j} = \frac{a_{\overline{4|}i} - 4\,(1+i)^{-4}}{i}$$

e

$$\sum_{j=6}^{9} j\,(1+i)^{-j} = \sum_{j=1}^{9} j\,(1+i)^{-j} - \sum_{j=1}^{5} j\,(1+i)^{-j} =$$

$$= \frac{a_{\overline{9|}i} - 9\,(1+i)^{-9}}{i} - \frac{a_{\overline{5|}i} - 5\,(1+i)^{-5}}{i}$$

onde $a_{\overline{n|}i} = 1 + a_{\overline{n-1|}i}$

Logo:

$$- \sum_{j=0}^{k} j.\,a_j\,(1+i)^{-j} = 1000 \left[ \frac{a_{\overline{4|}i} - 4\,(1+i)^{-4}}{i} \right]$$

e

$$\sum_{j=k+1}^{n} j.\,a_j\,(1+i)^{-j} = \frac{2000}{i} \left[ a_{\overline{9|}i} - a_{\overline{5|}i} - 9\,(1+i)^{-9} + 5(1+i)^{-5} \right]$$

Portanto, no caso do nosso exemplo, a função valor atual será decrescente no intervalo $(0, \infty)$ se:

$$a_{\overline{4|}i} - 4\,(1+i)^{-4} < 2 \left[ a_{\overline{9|}i} - a_{\overline{5|}i} - 9\,(1+i)^{-9} + 5\,(1+i)^{-5} \right]$$

ou

$$a_{\overline{4|}i} - 4\,(1+i)^{-4} < 2 \left[ 1 + a_{\overline{8|}i} - 1 - a_{\overline{4|}i} - 9\,(1+i)^{-9} + 5\,(1+i)^{-5} \right]$$

ou

$$a_{\overline{4}|i} - 4\,(1+i)^{-4} < 2 \left[ a_{\overline{4}|i} + (1+i)^{-4}\, a_{\overline{4}|i} - a_{\overline{4}|i} - 9\,(1+i)^{-9} + 5\,(1+i)^{-5} \right]$$

ou

$$S_{\overline{4}|i} - 4 < 2 \left[ a_{\overline{4}|i} - 9\,(1+i)^{-5} + 5\,(1+i)^{-1} \right]$$

onde

$$S_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n}\, a_{\overline{n}|i}$$

Ora, para, por exemplo, $i = 0,5$ por período temos:

$$S_{\overline{4}|i} - 4 \doteq 8,1875 > 2 \left[ a_{\overline{4}|i} - 9\,(1+i)^{-5} + 5\,(1+i)^{-1} \right] \doteq 6.5062$$

Por conseguinte, como já tínhamos previsto, para certas taxas no intervalo $(0, \infty)$, a condição b não será satisfeita, impedindo-nos, assim, de assegurar a existência de uma única taxa interna de retôrno positiva.

Tentemos, então, uma segunda abordagem. Para tanto, seguindo [ 18 ], introduziremos o conceito de balanço de um projeto no fim do período $j$ e à taxa $i$ por período, que representaremos por $M_j\,(i)$, e que é definido através a seguinte relação:

$$M_j\,(i) = \sum_{k=0}^{j} a_k\,(1+i)^{j-k}$$

Ou seja, $M_j\,(i)$ é o montante do projeto, na época $j$ e à taxa $i$, considerando-se apenas os fluxos de caixa não posteriores à essa época.

Em particular, para $j = n$, o balanço é chamado de montante do projeto, sendo representado simplesmente por $M\,(i)$, e apresenta a seguinte relação com o valor atual dos projeto:

$$j = n \longrightarrow M_n\,(i) = M\,(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j\,(1+i)^{n-j} =$$

$$(1+i)^{n} \sum_{j=0}^{n} (1+i)^{-j} = (1+i)^{n}\; V\,(i)$$

Notemos que a função balanço pode ser definida recursivamente atra vés das relações:

$$M_0(i) = a_0$$

$$M_j(i) = (1+i)\,M_{j-1}(i) + a_j,\; j = 1, \ldots, n$$

Por definição, um projeto é dito ser do tipo <u>investimento puro</u> à taxa i se $M_j(i) < 0$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$

<u>Teorema C</u>

A função montante de um projeto que é do tipo investimento puro para todo $i \geqslant 0$, é estritamente decrescente ao longo do intervalo $[0, \infty)$.

<u>Demonstração</u>

Ainda seguindo [ 18 ], faremos a demonstração por indução.

Da definição de balanço, temos que:

$$\frac{d\,M_0(i)}{di} = \frac{d\,a_0}{di} = 0$$

$$\frac{d\,M_1(i)}{di} = \frac{d}{di}\,(1+i)\,M_0 + a_1 =$$

$$= M_0(i) + (1+i)\,\frac{d\,M_0(i)}{di} + \frac{da_1}{di} = M_0(i)$$

Logo $d\,M_1(i)/di < 0$, pois, por hipótese, o projeto é do investimento puro, e, portanto, $M_j(i) \leqslant 0$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Suponhamos agora que $d\,M_k(i)/di < 0$, então:

$$\frac{d\,M_{k+1}(i)}{di} = M_k(i) + (1+i)\,\frac{d\,M_k(i)}{di} < 0$$

já que a primeira parcela é, por hipótese, nula ou negativa, e a segunda é negativa.

Então, por indução, $d\,M_n(i)/di < 0$ e $M_n(i) = M(i)$ é estritamente decrescente ao longo do intervalo $[0, \infty)$.

NOTA

Obviamente, o único tipo de projeto que se encaixa, aprioristicamente, nas condições do teorema C é o tipo particular de projeto convencional de investimento em que $a_0 < 0$ e $a_j \leq 0$ para $j = 1, \ldots, n-1$. Ou seja, o teorema C só é válido, a priori, no caso de projetos nos quais as receitas só excedem às despesas no último período de sua vida.

Por outro lado, sendo um projeto de investimento caracterizado pelo fato de ter-se $a_0 < 0$, é fácil verificar, partindo da definição de balanço, existir uma taxa $i = i_{min} > -1$, a partir da qual o projeto será de investimento puro. Então, como extensão do teorema C, podemos afirmar que a função montante de um projeto de investimento convencional será extritamente decrescente ao longo do intervalo $[i_{min}, \infty)$; em particular, se $i_{min} \leq 0$,+ o teorema C será válido no intervalo $[0, \infty)$.

Corolário do Teorema C

Todo o projeto no qual $M(0) = V(0) = \sum_{j=0}^{n} a_j > 0$ e que fôr do tipo investimento puro para todo $i > 0$, terá uma única taxa interna de retôrno positiva.

---

+ Como exemplo de caso em que $i_{min} < 0$ temos o projeto no qual:

$a_0 = -1000$; $a_1 = -1500$; $a_2 = 2000$; $a_3 = -1000$; $a_4 = 2000$.

Pois, tomando-se $i = -0,1$, por exemplo, teremos que:
$M_0(-0,1) = a_0 = -1000 < 0$; $M_1(-0,1) = (1-0,1)\,M_0(-0,1) + a_1 = -900 - 1500 = -2400 < 0$; $M_2(-0,1) = (1-0,1)\,M_1(-0,1) + a_2 = -2160 + 2000 = -160 < 0$ e $M_3(-0,1) = (1-0,1)\,M_2(-0,1) + a_3 = -144 - 1000 = -1144 < 0$.

Demonstração

Sendo a função montante uma função contínua, pois é um polinômio em $i$, e, de acôrdo com o teorema C, estritamente decrescente no intervalo $[0, \infty)$, segue-se que, sendo

$$\lim_{i\to\infty} M(i) = \lim_{i\to\infty} (1+i)^n \sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{-j} = -\infty$$

, haverá uma taxa $i \in (0, \infty)$, e que será única, raiz da equação

$$M(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{n-j} = 0.$$

Ora, sendo $V(i) = (1+i)^{-n} M(i)$ e como $(1+i)^{-n} > 0$ para todo $i > 0$, teremos:

$$M(i) = 0 \Rightarrow V(i) = 0$$

Portanto, haverá uma única taxa interna de retôrno positiva.

## OBSERVAÇÃO

Segundo [ 18 ] o teorema C tem como consequência a afirmativa de que, também, a função valor atual seja estritamente decrescente no intervalo $[0, \infty)$, no caso de projetos do tipo investimento puro para todo o $i \geq 0$. Discordamos, porém, dessa afirmativa, pois que:

$$V(i) = (1+i)^{-n} M(i)$$

Seja $i^*$ a taxa $\in (0, \infty)$ tal que $M(i^*) = 0$. Então, sendo

$$\frac{dV(i)}{di} = -n(1+i)^{-n-1} M(i) + (1+i)^{-n} \frac{dM(i)}{di}$$

e como, por hipótese, a segunda parcela é negativa, o sinal de $dV(i)/di$ dependerá não só do sinal mas, também, do valor assumido pela primeira parcela.

Ora, para $i \in [0, i^*)$ teremos que $M(i) > 0$, e, portanto, a primeira parcela também será negativa, implicando que $V(i)$ seja monótona decrescente no intervalo $[0, i^*]$.+

Porém, para $i > i^* \Rightarrow M(i) < 0$, fazendo com que a primeira parcela passe a ser positiva. Logo, para que $dV(i)/di < 0$ para $i \in (i^*, \infty)$, é necessário que:

$$\left| (1+i)^{-n} \frac{dM(i)}{di} \right| > \left| n(1+i)^{-n-1} M(i) \right|$$

ou, multiplicando-se ambos os membros por $(1+i)^{n+1}$, que é positivo para $i > 0$:

$$\left| (1+i) \frac{dM(i)}{di} \right| > \left| n M(i) \right| \qquad \text{(I)}$$

relação que não podemos, a priori, garantir ser verdadeira para todo $i \in (i^*, \infty)$

Em particular, consideremos o projeto caracterizado por:

$a_0 = -100; \; a_1 = -200; \; a_2 = 400$

o qual, como se verifica fàcilmente, é do tipo investimento puro para todo $i \geq 0$.

Temos que:

$$M(i) = -100(1+i)^2 - 200(1+i) + 400$$
$$\therefore M(4) = -100 \times 25 - 200 \times 5 + 400 = -3100$$

$$\frac{dM(i)}{di} = -200(1+i) - 200 < 0 \text{ para todo } i \geq 0$$

$$\therefore \left.\frac{dM(1)}{di}\right]_{i=4} = -200 \times 5 - 200 = -1200$$

---

+Para $i = i^* \longrightarrow M(i) = 0 \therefore dV(i)/di < 0$.

Então, i = 4 (taxa de 400% por período), implicará que:

$$i = 4 \rightarrow \begin{cases} (1+i)\dfrac{dM(i)}{di} = 5\,(-1200) = -6000 \\ n\,M(i) = 2\,(-3100) = -6200 \end{cases}$$

Logo:

$$\left| (1+i)\frac{dM(i)}{di} \right|_{i=4} = 6\,000 < \left| n\,M(i) \right|_{i=4} = 6200$$

e, portanto, como a relação (I) não é satisfeita, segue-se que:

$$\left. \frac{dV(i)}{di} \right|_{i=4} > 0$$

Por conseguinte o fato de que o montante seja decrescente, não implica que o valor atual também o seja.

Constatamos, então, que esta segunda abordagem também, é _a priori_, inconclusiva. A não ser no caso particular apontado, precisamos determinar, para o estudo dos demais tipos de projetos convencionais, a taxa mínima a partir da qual o projeto passa a ser de investimento puro.

A determinação de $i_{min}$, além de ser trabalhosa, poderá deixar de nos dar a palavra final, pois, se a taxa mínima fôr positiva, não mais poderemos garantir a existência de uma única taxa interna de retôrno positiva.

Procuremos, então, olhar o problema sob uma nova ótica. Ora, a determinação de uma taxa interna de retôrno remonta, tão sòmente, à resolução da seguinte equação geral:

$$V(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{-j} = 0$$

ou, fazendo-se $x = (1+i)^{-1}$, esta equação pode ser escrita como:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

Mas esta última é uma equação algébrica do grau n em x (e, em virtude do teorema binominal, do grau n em i), a qual, como sabemos pelo teorema fundamental da álgebra, terá n raízes. Portanto, ao menos teòricamente, todo projeto com vida igual a n períodos, terá n taxas internas de retôrno.+ Obviamente, do ponto de vista econômico, só terão significado as raízes (taxas) positivas, carecendo pois de interêsse as raízes negativas e as complexas. Logo, se, dado o projeto, soubermos quantas raízes positivas e distintas obteremos ao igualar o seu valor atual a zero, o nosso problema estará resolvido.

Afortunadamente, no estudo da álgebra superior, é conhecido o teorema devido a Descartes, o qual é um corolário de um teorema mais geral dito de Budin - Fourier (com referência a [ 6 ], pag. 192), que diz:

> "O número de raízes positivas da equação
> $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$
> não ultrapassa o número de variações na sequência dos sinais dos coeficientes, e se fôr inferior diferirá de um número par".

Por conseguinte, projetos de investimento do tipo convencional, sendo caracterizados por sòmente uma variação na sequência dos sinais dos fluxos de caixa, apresentarão uma, e sòmente uma, raiz x positiva.

Seja $x^*$ essa raiz; como $x = (1 + i)^{-1}$, a taxa interna de retôrno, $i^*$, será $i^* = (1 - x^*)/x$ . Logo, esta taxa só terá significado econômico no sentido de ser positiva, se $x^* < 1$. Porém, como, apriorìsticamente, um projeto de investimento só será considerado se $\sum_{j=0}^{n} a_j > 0$, poderemos garantir que a condição acima será satisfeita ($x^* < 1$). Isto porque, se $V(0) = \sum_{j=0}^{n} a_j > 0$, como $\lim_{i \to \infty} V(i) = a_0 < 0$, existirá ao menos uma $i^* > 0$; então, como só existe um $x^* > 0$, concluímos que êste deve ser inferior a unidade.

---

+Incluindo-se, evidentemente, tôdas as raízes não simples.

## 3 - CASO DOS PROJETOS DE INVESTIMENTO DO TIPO NÃO CONVENCIONAL

Agora, como um projeto não convencional de investimento é caracterizado pelo fato de haver períodos em que as despesas excedem as receitas, alternando-se com períodos nos quais as receitas superam as despesas, o Teorema de Descartes permite-nos prever a possibilidade da existência de mais de uma raiz $i^* > 0$ que seja solução da equação $V(i) = 0$.

Inicialmente, procuremos a justificativa econômica da existência de projetos não convencionais e depois passemos a tentar a interpretação de múltiplas taxas internas de retôrno.

Uma primeira possibilidade de análise de um projeto de investimento do tipo não convencional pode surgir quando, ao procurarmos a determinação da taxa fisheriana, tomamos a diferença entre os fluxos de caixa de dois projetos que são mùtuamente exclusivos. Como exemplo, e a título de ilustração, consideremos os seguintes projetos, que são considerados mùtuamente exclusivos:

A: $a_0 = -1000$; $a_1 = 400$; $a_2 = 300$; $a_3 = 300$; $a_4 = 200$.

B: $b_0 = -1500$; $b_1 = 350$; $b_2 = 500$; $b_3 = 250$; $b_4 = 800$.

A taxa fisheriana será a taxa interna de retôrno associada ao "projeto" cujos fluxos de caixa são dados pelas diferenças entre os fluxos de A e de B; ou seja, do seguinte "projeto":

C: $c_0 = -500$; $c_1 = -50$; $c_2 = 200$; $c_3 = -50$; $c_4 = 600$.

O "projeto" C é do tipo de investimento não convencional, e, como apresenta 3 variações de sinal de sequência de seus fluxos de caixa, poderá ter 3 taxas internas de retôrno positivas.

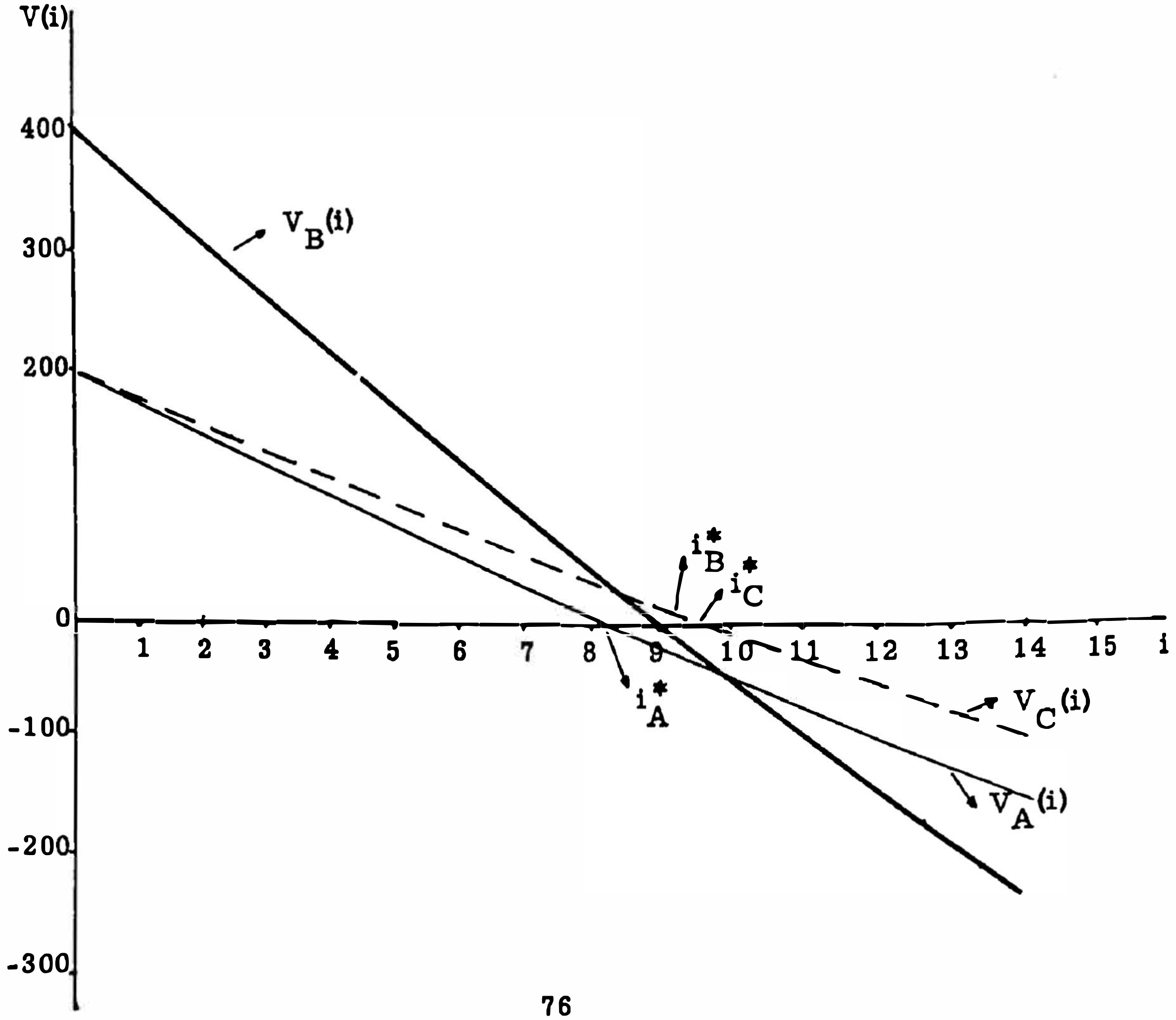
Uma segunda possibilidade de ocorrência comum como apontado em [ 13 ] pág. 65, é a análise de um investimento em mina de carvão, por exemplo. "O problema é que uma mina de carvão envolve algum investimento inicial, a seguir gera um fluxo positivo de renda durante alguns anos, e entao requer um custo positivo para que a mina seja fechada por razões de segurança".

Vejamos, agora, a interpretação de taxas múltiplas. Primeiramente, consideremos o caso do "projeto" fisheriano. Ora, como a taxa "fisheriana" é a taxa para o qual os valôres atuais dos dois projetos que estão sendo cotejados são iguais, é perfeitamente admissível, dispensando a busca de outras explicações, haver mais de uma taxa i > 0 que faça com que isso aconteça.

Convém notar que a existência de mais de uma variação de sinal é condição necessária, mas não suficiente, para a ocorrência de múltiplas soluções. Em particular, no caso do nosso exemplo, temos:

| i (%) | $V_A$ (i) | $V_B$(i) | $V_C(i)=V_B(i)-V_A(i)$ | i (%) | $V_A$ (i) | $V_B$ (i) | $V_C$ (i) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 200 | 400 | 200 | 8,5 | 2,7 | 20,3 | 17,6 |
| 1 | 173,5 | 348,1 | 174,6 | 9 | 7,2 | 1,7 | 8,9 |
| 2 | 148,0 | 298,4 | 150,4 | 9,5 | 16,9 | 16,5 | 0,4 |
| 3 | 123,4 | 250,7 | 127,3 | 10 | - 26,4 | - 34,4 | - 8,0 |
| 4 | 99,6 | 204,9 | 105,3 | 11 | - 45,1 | - 69,1 | - 24,0 |
| 5 | 76,8 | 161,0 | 84,2 | 12 | - 63,1 | -102,5 | - 39,4 |
| 6 | 54,7 | 118,8 | 64,1 | 15 | -113,7 | -195,8 | - 82,1 |
| 7 | 33,3 | 78,2 | 44,9 | 18 | -159,8 | -279,5 | -119,7 |
| 8 | 12,7 | 39,2 | 26,5 | | | | |

Gràficamente, teremos:



Vemos então que, embora o "projeto" C apresente 3 variações de sinal na sequência de seus fluxos de caixa, só tem uma taxa interna de retôrno positiva, que é de, aproximadamente, 9,5% por período. Observemos ainda que, para taxas mínimas de atratividade $\rho < i_B^* \cong 9\%$, o projeto B será o preferível, pois, teremos $V_B(\rho) > 0$ e $V_B(\rho) > V_A(\rho)$.

Caso os projetos mùtuamente exclusivos em estudo fôssem:

D: $d_0 = -800;\ d_1 = 1200;\ d_2 = 200$

e

E: $e_0 = -400;\ e_1 = 320;\ e_2 = 683$

o "projeto" fisheriano seria:

F: $f_0 = -400;\ f_1 = 880;\ f_2 = -483$

o qual apresenta duas variações de sinal.

Ora, procurar a(s) taxa(s) fisheriana(s) equivale a procurar taxa(s) $i > 0$ que satisfaça(m) à equação:

$$\sum_{j=0}^{2} f_j (1+i)^{-j} = 0$$

ou

$$-400 + 880(1+i)^{-1} - 483(1+i)^{-2} = 0$$

Fazendo-se $(1+i)^{-1} = x$, vem: $-483x^2 + 880x - 400 = 0$

$-483x^2 - 8{,}8x + 4 = 0 \longrightarrow$ que é uma simples equação de segundo grau em x.

Resolvendo-se esta última, teremos:

$$x = \frac{8{,}8 \pm \sqrt{77{,}44 - 72{,}28}}{9{,}66} = \frac{8{,}8 \pm \sqrt{0{,}16}}{9{,}66} =$$

$$= \frac{8{,}8 \pm 0{,}4}{9{,}66} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 9{,}2/9{,}66 \\ x_2 = 8{,}4/9{,}66 \end{cases}$$

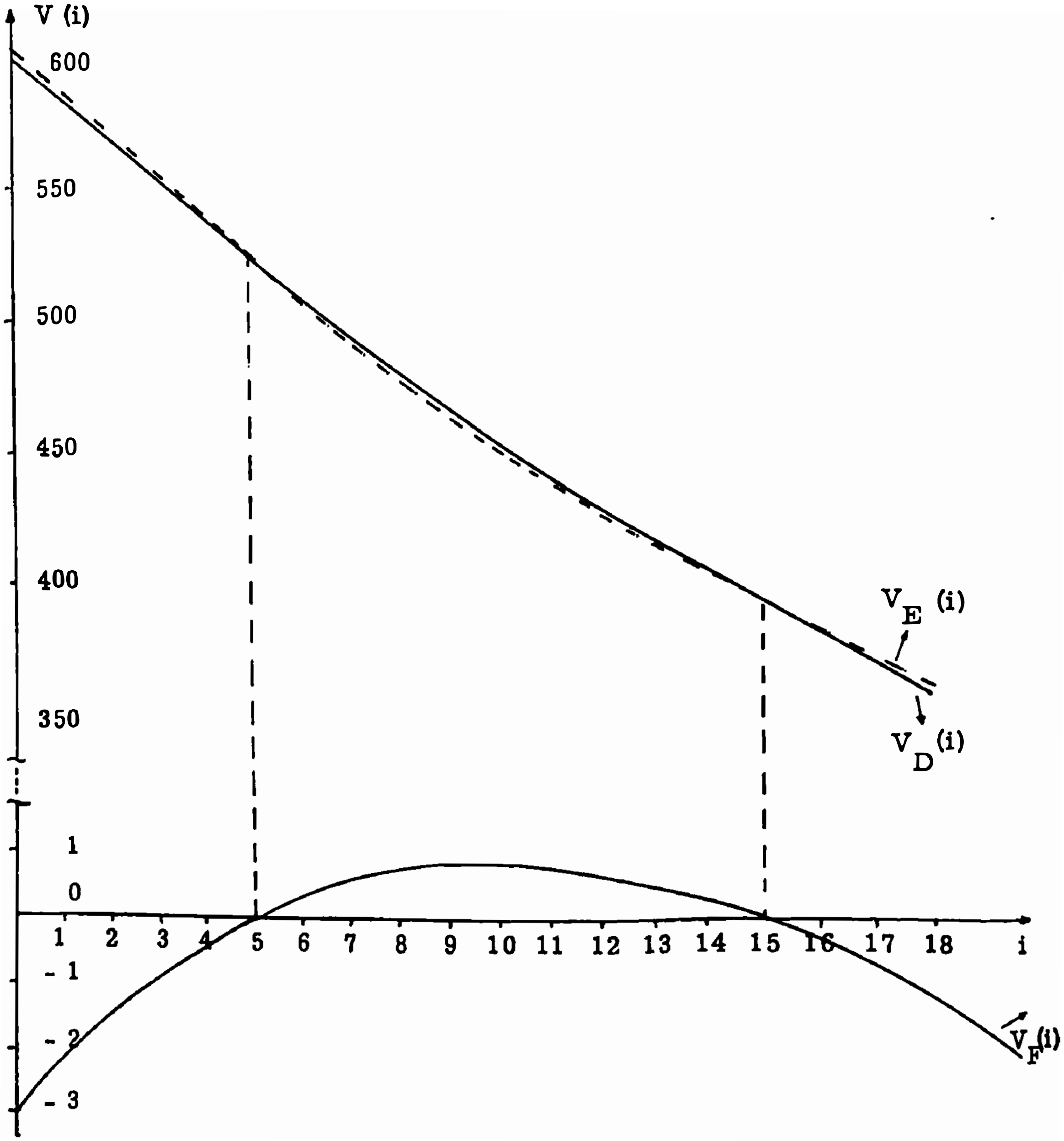
Portanto, sendo $i = x^{-1} - 1$, as taxas fisherianas serão:

$$i_1^* = \frac{9,66}{9,2} - 1 = 0,05$$

$$i_2^* = \frac{9,66}{8,4} - 1 = 0,15$$

Estas duas taxas significam tão-sòmente que os projetos D e E são equivalentes (apresentam o mesmo valor atual) se i = 5% ou se i = 15% por período.

Gràficamente, teríamos:



| i (%) | $V_D$ (i) | $V_E$ (i) | $V_F$ (i) | i (%) | $V_D$ (i) | $V_E$ (i) | $V_F$ (I) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 600,0 | 603,0 | - 3,0 | 7 | 496,2 | 495,6 | 0,6 |
| 1 | 584,2 | 586,4 | - 2,2 | 8 | 482,6 | 481,9 | 0,7 |
| 2 | 568,7 | 570,2 | - 1,5 | 9 | 469,3 | 468,5 | 0,8 |
| 3 | 553,6 | 554,5 | - 0,9 | 10 | 456,2 | 455,4 | 0,8 |
| 4 | 538,8 | 539,2 | - 0,4 | 11 | 443,4 | 442,6 | 0,8 |
| 5 | 524,3 | 524,3 | 0 | 12 | 430,9 | 430,2 | 0,7 |
| 6 | 510,1 | 509,8 | 0,3 | 15 | 394,7 | 394,7 | 0 |
| | | | | 18 | 360,6 | 361,7 | - 1,1 |

Vemos, claramente, que, para $0,05 < i < 0,15$, teremos $V_D(i) > V_E(i) > 0$; então, para taxas mínimas de atratividade $\rho \in (0,05; 0,15)$ o projeto D deverá ser o preferível. Em caso contrário, $\rho > 0,15$ ou $\rho < 0,05$, o projeto E será o mais interessante. Em particular, se $\rho = 0,05$ ou $\rho = 0,15$, ficaremos indiferentes entre os projetos D e E.

Convém frisar que as taxas $i_1^* = 0,05$ e $i_2^* = 0,15$, "taxas internas de retôrno" do "projeto" F, não têm outro significado senão o de serem tais que $V_{D(i)} = V_E(i)$.

Suponhamos agora que o projeto F fôsse não mais um projeto fisheriano, e sim uma alternativa com características próprias. Como existe inversão de sinal, podemos, realmente, caracterizar a proposta F como sendo um projeto de investimento? Até a época 1, certamente, pois, estaríamos investindo 400 unidades de capital objetivando-se um retôrno de 880. Porém, na época 2, teremos um nôvo gasto, e, então, parte da receita auferida na época 1 deverá ser reservada para o seu financiamento. Parece, assim, que a proposta F pode ser decomposta em duas partes: um investimento seguido de um financiamento.

Caracterizemos melhor o que seja uma proposta de financiamento. Um projeto de financiamento pode ser assimilado ao caso em que pedimos emprestado um certo capital, com a obrigação de restituí-lo, normalmente acrescido de juros à uma certa taxa, por meio de pagamentos efetuados tempos depois.

Um <u>projeto de financiamento</u> será dito <u>simples</u> se a êle estiver associada uma série de fluxos de caixa com as seguintes características:

$a_0 > 0;\ a_j \leqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n-1$ e $a_n < 0$

O projeto será do tipo convencional de financiamento se:

$a_0 > 0;\ a_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, k;\ a_j \leqslant 0, = k + 1, \ldots,$

$n - 1$ e $a_n < 0.$

Como um corolário imediato do teorema A, teremos que a função valor atual de um projeto de financiamento simples será estritamente crescente e côncava para taxa no intervalo $[0, \infty)$, e, como um corolário do teorema B, se $a_0 < -\sum_{j=1}^{n} a_j$ (condição normalmente exigida pelo financiador), teremos uma única taxa positiva que seja raiz da equação $V(i) = 0$. Ou seja, projetos de financiamento simples apresentarão uma única taxa interna de retôrno positiva.

Do ponto de vista econômico, esta taxa interna de retôrno poderia ser interpretada, sob a ótica do tomador, [ 3 ], como a menor taxa de atratividade para a qual o valor atual da proposta será positivo, sendo, portanto, desejável o empréstimo. Assim, se $i^* < \rho$, a proposta será interessante, pois $V(\rho) > 0$.

Também, como corolário do teorema C, um projeto do tipo convencional de financiamento que seja de financiamento puro para todo $i > 0$, isto é $M_j(i) \geqslant 0$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$, terá a função montante estritamente crescente para $i > 0$, e se $M(0) = V(0) = \sum_{j=0}^{n} a_j < 0$, haverá uma única taxa interna de retôrno positiva, a qual terá interpretação análoga ao caso de financiamento simples.

Retornando ao caso do projeto F, vemos, no gráfico, que sua função valor atual apresenta um trecho crescente, característico aos projetos de financiamento, e, outro decrescente, peculiar às propostas do investimento. Tal fato vem corroborar a nossa análise inicial, ou seja, estamos diante de uma proposta que não pode ser identificada nem como de financiamento nem como de investimento.

Então, as soluções da equação $V(i) = 0$ para um projeto não convencional carecerão da interpretação econômica usualmente associada aos projetos de investimento ou de financiamento, significando, tão sòmente, que, para estas taxas, ficaremos indiferentes entre aceitar o projeto ou investir na proposta alternativa. Por êsse motivo preferimos, ao invés de tentar discutir possíveis outras interpretações+ para as taxas múltiplas, adotar a determinação de valor atual à taxa mínima de atratividade como o critério decisivo.

---

+Aos interessados na questão da discussão de taxas múltiplas recomendamos as referências [ 19 ] e [ 13 ].

## APÊNDICE II

## NOTAS SÔBRE O USO DA CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA

### 1 - CONCEITUAÇÃO E DEDUÇÃO DE FÓRMULAS

Embora na prática esteja disseminado o uso da capitalização periódica (descontínua), o emprêgo da capitalização contínua, conduzindo a uma função exponencial cujas propriedades matemáticas, como apontado em [ 14 ], são notáveis e particularmente fáceis de serem utilizadas, traria, no mínimo, maiores vantagens no manuseio de fórmulas.

No caso em que os fluxos de caixa, como vimos supondo até então, estejam concentrados no fim de cada período de tempo, a adoção da capitalização contínua, a uma taxa periódica nominal, $\delta$, conversível instantâneamente ao longo do período, conduziria aos mesmos resultados que os obtidos mediante o emprêgo da capitalização descontínua, a uma taxa $i$ por período e tal que $\delta = \lg(1 + i)$ - (onde lg é adotado como símbolo de logarítimo neperiano). Isso porque, e nos remetemos ou a [ 5 ] ou a [ 6 ], investindo um mesmo capital, durante um mesmo prazo, segundo cada um dos dois regimes de capitalização, respectivamente, às taxas consideradas, os dois regimes serão equivalentes se conduzirem a um mesmo montante, ou seja:

$$C\,(1 + i)^n = C.e^{\delta . n}$$

Então, efetuando-se as simplificações pertinentes e tomando-se os logarítimos neperianos de ambos os membros da igualdade acima, a condição de equivalência implicará a seguinte relação entre as taxas:

$$\lg (1 + i) = \delta$$

Adotando-se capitalização contínua à taxa nominal $\delta$, o valor atual de um projeto do tipo que vimos estudando será dado por:

$$V(\delta) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot e^{-\delta \cdot j}$$

E a taxa interna de retôrno, efetiva e periódica $i^* = e^{\delta^*} - 1$, será obtida procurando-se a raiz $\delta^*$, real e não negàtiva, da equação:

$$V(\delta) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot e^{-\delta \cdot j} = 0$$

Então, desde que disponhamos de tabelas que apresentem os valôres assumidos por $e^{-\delta \cdot j}$ para vários valôres de $\delta$ e de j, a adoção da capitalização contínua à taxa $\delta$ ou descontínua à taxa $i = e^{\delta} - 1$, seria, no caso de ser válida a hipótese de fluxos de caixa concentrados em pontos no tempo, meramente uma questão de gôsto pessoal do analista.

Porém em certos casos, como apontado em [ 8 ] apêndice B, a suposição de fluxos concentrados em pontos no tempo deixa de ser válida. Nessa eventualidade, como já mencionamos, seria mais correto admitir-se que os fluxos estão uniformemente[+] distribuídos ao longo de cada período, e não concentrados no fim (início) de cada período. Nesses casos, torna-se imperativo o uso do regime de capitalização contínua, valendo, pois, abordar o assunto.

Consideremos o caso em que tenhamos uma unidade de capital uniformemente distribuída[2] ao longo do período compreendido entre as épocas 0 e 1. O seu valor atual, na época zero e à taxa nominal $\delta$, será:

---

[+] Em alguns casos a lei de distribuição dos fluxos poderá não ser uniforme, mas linear ou segundo um outro processo de formaçao. De uma maneira geral representaremos um fluxo contínuo cuja dimensão é unidade de capital por unidade de tempo, por Q (t).

[2] $Q(t) = 1$.

$$V(\delta) = \int_0^1 1 . e^{-\delta . t} \, dt = \left[ -\frac{1}{\delta} e^{-\delta . t} \right]_0^1 = \frac{e^{\delta} - 1}{\delta . e^{\delta}}$$

ou, em função da taxa periódica efetiva $i = e^{\delta} - 1$:

$$V(i) = \frac{i}{(1+i) \lg (1+i)}$$

Então, caso essa unidade de capital esteja uniformemente distribuída ao longo do período compreendido entre as épocas k e k + 1, e representando-se por $V^k(\delta)$ o seu valor atual na época k, o seu valor atual na época zero será:

$$V(\delta) = V^k(\delta) \; e^{-\delta . k} = \frac{e^{\delta} - 1}{\delta . e^{\delta}} \times e^{-\delta . k} = \frac{e^{\delta} - 1}{\delta . e^{\delta (k+1)}}$$

ou, em função da taxa efetiva i:

$$V(i) = \frac{i}{(1+i)^{k+1} \lg (1+i)}$$

No caso em que o fluxo uniforme unitário se estende ao longo do intervalo de tempo entre as épocas 0 e k, o seu valor atual, na época zero e à taxa $\delta$, será:

$$V(\delta) = \int_0^k Q(t) \, e^{-\delta . t} \, dt = \int_0^k 1 . e^{-\delta . t} \, dt = \left[ -\frac{1}{\delta} e^{-\delta . t} \right]_0^k = \frac{e^{\delta . k} - 1}{\delta . e^{\delta . k}}$$

ou, em função da taxa i:

$$V(i) = \frac{(1+i)^k - 1}{(1+i)^k \lg (1+i)} = \frac{1 - (1+i)^{-k}}{\lg (1+i)} = \bar{a}_{\overline{k|}\, i}$$

Outras possibilidades para a lei de formação do fluxo poderiam ser abordadas, mas, como não são de ocorrência frequente, estudaremos ainda sòmente o caso do fluxo crescente linearmente com o tempo, por ser a contrapartida, no caso contínuo, das chamadas séries em gradiente (vide [ 7 ] ou [ 8 ], por exemplo). Isto é, consideremos o caso onde Q (t) = a.t, fluxo contínuo cres cente linearmente à taxa a por período, para o caso particular onde a é igual a um.

Se o fluxo Q (t) = t se estender entre as épocas 0 e k, o seu valor atual, à taxa $\delta$ e na época zero, será:

$$V(\delta) = \int_0^k Q(t)\, e^{-\delta . t}\, dt = \int_0^k t . e^{-\delta . t}\, dt$$

Integrando-se por partes, fazendo-se t = u .˙. dt = du e dv = $e^{-\delta . t} dt$ .˙. $v = -\frac{1}{\delta} e^{-\delta . t}$, vem:

$$V(\delta) = \left[ -\frac{t}{\delta} . e^{-\delta . t} \right]_0^k + \int_0^k \frac{1}{\delta}\, e^{-\delta . t}\, dt =$$

$$= -\frac{k}{\delta} e^{-\delta . k} + \frac{1}{\delta} \left[ -\frac{1}{\delta} e^{-\delta . t} \right]_0^k = -\frac{k}{\delta} e^{-\delta . k} - \frac{1}{\delta} \left( \frac{e^{-\delta . k}}{\delta} - \frac{1}{\delta} \right) =$$

$$= \frac{1}{\delta} \left[ \frac{1}{\delta} - \left( \frac{1}{\delta} + k \right) e^{-\delta . k} \right]$$

ou, em função da taxa periódica efetiva i:

$$V(i) = \frac{1}{\lg(1+i)} \left[ \frac{1}{\lg(1+i)} - \left( \frac{1}{\lg(1+i)} + k \right) (1+i)^{-k} \right] =$$

$$= (\overline{I}\, \overline{a})_{\overline{k|}\, i}$$

Convém notar que êsse caso é diferente daquele em que se toma o fracionamento limite das séries crescentes em progressão aritmética de razão unitária e igual ao primeiro têrmo. Neste último caso, no limite, teremos uma unidade de capital uniformemente distribuída ao longo do primeiro período, seguida por duas unidades de capital uniformemente distribuídas ao longo do segundo período, etc., [ 6 ]. Agora, o valor atual, na época zero e à taxa nominal $\delta$, será:

$$V(\delta) = \int_0^1 1.e^{-\delta.t}\,dt + e^{-\delta}\int_1^2 2.e^{-\delta.t}\,dt + e^{-2.\delta}\int_2^3 3.e^{-\delta.t}\,dt +$$

$$+ \ldots + e^{-(k-1)\delta}\int_{k-1}^{k} k.e^{-\delta.t}\,dt =$$

$$= \frac{e^{\delta}-1}{\delta.e^{\delta}} + 2 \times \frac{e^{\delta}-1}{\delta.e^{2.\delta}} + 3 \times \frac{e^{\delta}-1}{\delta.e^{3.\delta}} + \ldots + k \times \frac{e^{\delta}-1}{\delta.e^{k.\delta}} =$$

$$= \frac{e^{\delta}-1}{\delta}\left(e^{-\delta} + 2.e^{-2.\delta} + 3.e^{-3.\delta} + \ldots + k.e^{-k.\delta}\right) =^{+}$$

$$= \frac{e^{\delta}-1}{\delta} \times \frac{e^{-\delta}}{(1-e^{-\delta})^2}\left[1 - e^{-\delta.k}(1+k-k.e^{-\delta})\right]$$

ou, em função da taxa efetiva $\underline{i}$:

$$V(i) = \frac{1}{\lg(1+i)}\left[\frac{1}{d} - \left(\frac{1}{d}+k\right)(1+i)^{-k}\right] = (I\,\bar{a})_{\overline{k|}\,i}$$

onde $d = \dfrac{i}{1+i}$

Uma vez de posse de tabelas que apresentem os valôres numéricos assumidos pelos valôres atuais estudados, para diversos prazos (n) e taxas efetivas (i) ou nominais ( $\delta$ ), estaríamos aptos a analisar, usando a mesma siste-

---

+ Fazendo-se $b = e^{-\delta}$, a soma dos têrmos entre parêntesis pode ser escrita como: $S = \sum_{k=1}^{n} k.b^k$. Então, admitindo-se $b \neq 1 \Longrightarrow \delta \neq 0$, subtraindo-se de S o produto b.S , vem: $S(1-b) = \sum_{k=1}^{n} k.b^k - \sum_{k=1}^{n} k.b^{k+1} = -n.b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} b^k$. Observando-se que $\sum_{k=1}^{n} b^k$ é a soma dos $\underline{n}$ primeiros têrmos de uma progressão geométrica de razão e primeiro têrmo iguais a b, temos que:

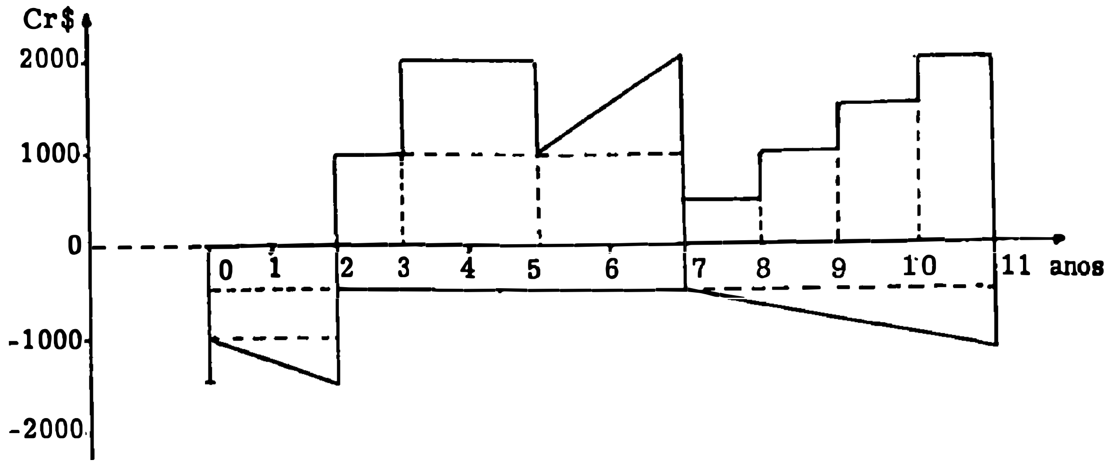
$S(1-b) = \dfrac{b - b^{n+1}}{1-b} - n.b^{n+1}$. Logo $S = \dfrac{b}{(1-b)^2}\left[1 + b^n(1+n-n.b)\right]$

mática vista para o caso descontínuo, projetos para os quais seja mais adequada a adoção da convenção de fluxos de caixa contínuos.

Devido a escassez de publicações com tais tabelas, não sendo do nosso conhecimento nenhum trabalho em língua portuguesa que as apresente, achamos por bem complementar êste apêndice com uma tabela que encerra os valôres atuais estudados, em função da taxa efetiva e periódica i, ilustrando sua utilização para o caso do seguinte exemplo, construído tão sòmente com finalidade didática.

Seja um projeto que requer um investimento inicial (instantâneo) de Cr$ 1 500,00. Durante seu período de construção, que suporemos ser de 2 anos, serão dispendidos Cr$ 1 000,00, uniformemente distribuídos ao longo dêsse período, havendo ainda despesas crescentes linearmente com o tempo, à taxa de Cr$ 250,00 por ano, durante êsse mesmo prazo. No decorrer da fase de operação, do início do 3º ano ao fim do 11º ano (fim da vida do projeto), está previsto um custo de Cr$ 500,00, uniformemente distribuído, sendo que, a partir do início do 8º ano, haverá um acréscimo de despesas com crescimento linear à taxa de Cr$ 150,00 por ano.

Essa sucessão de desembôlsos é melhor visualizada no esquema abaixo, ao qual sobrepomos uma sucessão de receitas e cuja interpretação passa a ser imediata.



a) Sendo considerada uma taxa efetiva de 12% a. a. (o que corresponde a uma taxa nominal de 11,33% a. a. com capitalização instantânea) o valor atual dêsse projeto será:

$$V(12\%) = -1500 - 500.\bar{a}_{\overline{2|}12} - 250.(\overline{I\,a})_{\overline{2|}12} - 500.\bar{a}_{\overline{11|}12}$$

$$-150.(\overline{I\,a})_{\overline{4|}12}.(1+0,12)^{-7} + 1000.\bar{a}_{\overline{5|}12}.(1+0,12)^{-2}$$

$$+1000.\bar{a}_{\overline{2|}12}.(1+0,12)^{-3} + 500.(\overline{I\,a})_{\overline{2|}12}.(1+0,12)^{-5}$$

$$+500.(I\,\bar{a})_{\overline{4|}12}.(1+0,12)^{-7}$$

Da tabela anexa, para i = 12%, tiramos os valôres correspondentes aos símbolos indicados, obtendo:

$$\begin{aligned} V(12\%) = {} & -1500 - 500 \times 1,79 - 250 \times 1,72 - 500 \times 6,29 \\ & - 150 \times 5,95\,(1+0,12)^{-7} + 1000 \times 3,82\,(1+0,12)^{-2} \\ & + 1000 \times 1,79\,(1+0,12)^{-3} + 500 \times 1,72\,(1+0,12)^{-5} \\ & + 500 \times 7,59\,(1+0,12)^{-7} \end{aligned}$$

Lançando mão de uma tabela financeira comum, para a obtenção dos valôres assumidos por $(1+0,12)^{-n}$, teremos:

$$V(12\%) \doteq 153,3$$

Como o valor atual é positivo segue-se que, para a taxa mínima de atratividade considerada, êsse projeto deve ser aceito.

b) Determinação da taxa interna de retôrno.

Como para i = 12% a. a. como vimos acima, o valor atual do projeto é positivo, vejamos seu comportamento quando se adota uma taxa superior, 15% a. a. por exemplo. Teremos:

$$V(15\%) = -1500 - 500.\,\bar{a}_{\overline{2}|15} - 250.\,(\bar{I}\,a)_{\overline{2}|15} - 500.\,\bar{a}_{\overline{11}|15}$$

$$-150\,(1+0,15)^{-7}.\,(\bar{I}\,a)_{\overline{4}|15} + 1000\,(1+0,15)^{-2}.\,\bar{a}_{\overline{5}|15}$$

$$+1000\,(1+0,15)^{-3}.\,\bar{a}_{\overline{2}|15} + 500\,(1+0,15)^{-5}.\,(\bar{I}\,a)_{\overline{2}|15}$$

$$+500\,(1+0,15)^{-7}.\,(I\,\bar{a})_{\overline{4}|15}$$

ou, lançando mão da tabela para $i = 15\%$:

$$\begin{aligned} V(15\%) = & -1500 - 500 \times 1,74 - 250 \times 1,66 - 500 \times 5,62 \\ & -150 \times 5,56\,(1+0,15)^{-7} + 1000 \times 3,60\,(1+0,15)^{-2} \\ & +1000 \times 1,74\,(1+0,15)^{-3} + 500 \times 1,66\,(1+0,15)^{-5} \\ & +500 \times 7,13\,(1+0,15)^{-7} = -414,4 \end{aligned}$$

Como houve variação de sinal, concluímos que a taxa interna de retôrno pertence ao intervalo (12%, 15%). Experimentemos, então, $i = 13\%$ a.a.; teremos:

$$V(13\%) \doteq -14,7$$

Portanto, sem necessidade de recorrer a interpolação, vemos que a taxa interna de retôrno dêste projeto será levemente inferior a 13% a.a.

## 2 - INFLUÊNCIA DA ESCOLHA DA CONVENÇÃO RELATIVA AOS FLUXOS DE CAIXA NA SELEÇÃO DE PROJETOS

Usualmente, a variação da convenção de fluxos concentrados para a de fluxos contínuos, ou vice-versa, não trará influência na ordenação de projetos. Porém, em certos casos, a variação na convenção adotada pode levar a resultados conflitantes na seleção de projetos. Conforme apontado em [ 8 ], isso ocorre, particularmente, no caso em que tenhamos dois projetos, supostos in dependentes, um dêles com vida superior a do outro.

Como ilustração,[+] consideremos os dois seguintes projetos:

A: investimento inicial de Cr$ 20 000,00 e excesso de receitas em relação as despesas de Cr$ 12 400,00 por ano, durante dois anos.

B: investimento inicial de Cr$ 20 000,00 e excesso de receitas sôbre as despesas de Cr$ 4 100,00 por ano, ao longo de 20 anos.

Considerando-se, de cada vez e para ambos os projetos, a adoção da hipótese de fluxos de caixa concentrados no fim de cada ano, e, a seguir, lançando mão da conversão de fluxos uniformes contínuos, obteremos a seguinte evolução para a função valor atual de cada um dos projetos:

| | Fluxos Concentrados | | Fluxos Contínuos | |
|---|---|---|---|---|
| i (% a.a.) | $V_A$ (i) | $V_B$ (i) | $V_A$ (i) | $V_B$ (i) |
| 0 | 4 800 | 62 000 | 4 800 | 62 000 |
| 5 | 3 057 | 31 095 | 3 638 | 32 362 |
| 10 | 1 521 | 14 906 | 2 579 | 16 623 |
| 15 | 159 | 5 663 | 1 636 | 7 543 |
| 16 | - 95 | 4 308 | 1 458 | 6 205 |
| 17 | - 343 | 3 074 | 1 283 | 4 984 |
| 18 | - 586 | 1 946 | 1 113 | 3 867 |
| 20 | - 1 056 | - 35 | 781 | 1 901 |
| 22 | - 1 505 | - 1 713 | 462 | 231 |
| 24 | - 1 935 | - 3 148 | 155 | - 1 198 |
| 25 | - 2 144 | - 3 789 | 5 | - 1 838 |

Notemos que, sendo válida a suposição de que os projetos sejam independentes, podemos lançar mão do critério da taxa interna para a seleção entre os mesmos. Ora, na hipótese de fluxos concentrados, temos:

$$\alpha_A \doteq 16\% \text{ a.a.} < \alpha_B \doteq 20\% \text{ a.a.} \implies B \text{ é preferível a } A.$$

[+] Adaptada de exemplo constante da obra citada.

Ao passo que, adotando-se o critério de fluxos uniformes contínuos, teremos:

$$\dot{\alpha}_A \cong 25\% \text{ a.a.} > \alpha_B \cong 22,5\% \text{ a.a.} \Longrightarrow \text{A é preferível a B.}$$

Observemos porém que, usando o método do valor atual, teremos B preferível a A para taxas mínimas de atratividade inferiores a 20% a.a., tanto considerando-se a convenção de fluxos concentrados como a de fluxos contínuos.

## 3 - DESCRIÇÃO E USO DAS TABELAS

Nas tabelas anexas, para diversas taxas efetivas e para prazos que vão desde um até cem períodos, são apresentados os valôres atuais assumidos pelos fluxos dos tipos estudados:

Assim, em cada página, que corresponde a uma taxa efetiva a qual é especificada no cabeçalho sob forma percentual, + é apresentado, na intersecção de cada coluna com a linha relativa ao prazo ou época considerados (o qual é indicado na primeira coluna), o valor atual na época zero de:

a) (na segunda coluna) - um fluxo unitário uniforme que se estenda entre as épocas $\underline{n}$ e $\underline{n+1}$.

Por exemplo, considerada a taxa de 5% a.a., se desejarmos saber o valor atual na época zero de um fluxo de 500 unidades de capital (u.c.) que se distribuía uniformemente entre o quinto e o sexto semestre, bastará multiplicar por 500 o número que, na página II.T-5, está situado na intersecção da linha relativa a n = 5 com a segunda coluna. Ou seja, o valor atual procurado será: 500 x 0,7647;

b) (na terceira coluna) - um fluxo unitário uniforme que se distribui da época zero até a época n; $\bar{a}_{\overline{n|}i}$

---

+ No cabeçalho é também indicada a taxa nominal de capitalização contínua ($\delta$) correspondente a taxa efetiva considerada (i), de acôrdo com a fórmula $\lg (1 + i) = \delta$ .

Considerada a taxa de 10% a. a., que corresponde a uma taxa nominal anual de capitalização instantânea de cêrca de 9, 53%, o valor atual de um fluxo de 180 u. c. por ano que se distribui uniformemente, a partir da época atual, ao longo de 15 anos, será:

$$180 \cdot \bar{a}_{\overline{15|}10} = 180 \times 7,98$$

Onde 7,98 foi retirado da página II. T-10, no encontro da linha correspondente a n = 15 com a terceira coluna.

c) (na quarta coluna) - um fluxo crescente linearmente a uma taxa unitária por período, e que se estende da época zero à época n; $(\overline{I\ a})_{\overline{n|}i}$

Assim, por exemplo, o valor atual de um fluxo que cresce linearmente, a partir de zero, à taxa de 100 u.c. por mês e durante 10 meses, será dado por:

$$100 \cdot (\overline{I\ a})_{\overline{10|}i}$$

Então, admitindo-se uma taxa de 2% a. m., tendo em vista o que consta da intersecção da linha relativa a n = 10 com a quarta coluna da página II. T-2, o valor atual procurado será:

$$100 \times 43,86$$

d) (na quinta coluna) - um fluxo unitário em gradiente que se estende entre as épocas zero e n; $(I\ \bar{a})_{\overline{n|}i}$

Dêsse modo, o valor atual à taxa de 15% a. a., de uma sucessão de fluxos uniformes em gradiente a razão de 120 u. c. por ano, e que se estende da época atual até o fim de 20 anos, será:

$$120 \cdot (I\ \bar{a})_{\overline{20|}15} = 120 \times 42,76$$

42,76 constando do encontro da linha relativa a n = 20 com a quinta coluna da página II.T-15.

NOTA: Obviamente, o caso onde os fluxos dos 3 últimos tipos são iniciados em épocas outras que não a atual, pode ser tratado como indicado no exemplo do texto.

## VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 1.00% (TAXA NOMINAL = 0.995%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.985191 | 0.995042 | 0.49676 | 0.99496 |
| 2 | 0.975437 | 1.980230 | 1.97362 | 2.96512 |
| 3 | 0.965779 | 2.955664 | 4.41121 | 5.89122 |
| 4 | 0.956217 | 3.921440 | 7.79055 | 9.75420 |
| 5 | 0.946749 | 4.877654 | 12.09259 | 14.53507 |
| 6 | 0.937375 | 5.824402 | 17.29891 | 20.21543 |
| 7 | 0.928094 | 6.761774 | 23.39091 | 26.77678 |
| 8 | 0.918905 | 7.689867 | 30.35079 | 34.20140 |
| 9 | 0.909807 | 8.608771 | 38.16070 | 42.47145 |
| 10 | 0.900799 | 9.518576 | 46.80301 | 51.56931 |
| 11 | 0.891881 | 10.419372 | 56.26047 | 61.47781 |
| 12 | 0.883050 | 11.311251 | 66.51621 | 72.18018 |
| 13 | 0.874307 | 12.194299 | 77.55355 | 83.65965 |
| 14 | 0.865651 | 13.068604 | 89.35582 | 95.89974 |
| 15 | 0.857080 | 13.934252 | 101.90692 | 108.88424 |
| 16 | 0.848594 | 14.791331 | 115.19094 | 122.59744 |
| 17 | 0.840192 | 15.639923 | 129.19196 | 137.02343 |
| 18 | 0.831873 | 16.480112 | 143.89445 | 152.14659 |
| 19 | 0.823637 | 17.311983 | 159.28329 | 167.95196 |
| 20 | 0.815482 | 18.135618 | 175.34332 | 184.42450 |
| 21 | 0.807408 | 18.951098 | 192.05997 | 201.54944 |
| 22 | 0.799414 | 19.758505 | 209.41849 | 219.31232 |
| 23 | 0.791499 | 20.557916 | 227.40439 | 237.69847 |
| 24 | 0.783662 | 21.349413 | 246.00389 | 256.69428 |
| 25 | 0.775903 | 22.133075 | 265.20299 | 276.28586 |
| 26 | 0.768221 | 22.908976 | 284.98769 | 296.45911 |
| 27 | 0.760615 | 23.677195 | 305.34476 | 317.20071 |
| 28 | 0.753084 | 24.437808 | 326.26099 | 338.49782 |
| 29 | 0.745628 | 25.190890 | 347.72315 | 360.33702 |
| 30 | 0.738246 | 25.936517 | 369.71848 | 382.70576 |
| 31 | 0.730936 | 26.674760 | 392.23415 | 405.59100 |
| 32 | 0.723699 | 27.405695 | 415.25798 | 428.98086 |
| 33 | 0.716534 | 28.129392 | 438.77751 | 452.86277 |
| 34 | 0.709440 | 28.845925 | 462.78067 | 477.22477 |
| 35 | 0.702415 | 29.555361 | 487.25547 | 502.05487 |
| 40 | 0.668324 | 32.998569 | 616.30423 | 632.82766 |
| 45 | 0.635888 | 36.274663 | 755.46996 | 773.63384 |
| 50 | 0.605025 | 39.391755 | 903.46690 | 923.19160 |
| 60 | 0.547722 | 45.179422 | 1221.30821 | 1243.93114 |
| 70 | 0.495845 | 50.418924 | 1561.44093 | 1586.68738 |
| 80 | 0.448883 | 55.162177 | 1916.79121 | 1944.41286 |
| 90 | 0.406368 | 59.456184 | 2281.42538 | 2311.19717 |
| 100 | 0.367879 | 63.343492 | 2650.39694 | 2682.11523 |

II. T-1

VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 2.00%
(TAXA NOMINAL = 1.980%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.970749 | 0.990164 | 0.49347 | 0.99018 |
| 2 | 0.951715 | 1.960913 | 1.94796 | 2.93164 |
| 3 | 0.933054 | 2.912626 | 4.32565 | 5.78674 |
| 4 | 0.914759 | 3.845680 | 7.58979 | 9.51894 |
| 5 | 0.896823 | 4.760438 | 11.70469 | 14.09270 |
| 6 | 0.879238 | 5.657259 | 16.63571 | 19.47360 |
| 7 | 0.861998 | 6.536496 | 22.34924 | 25.62822 |
| 8 | 0.845096 | 7.398493 | 28.81283 | 32.52420 |
| 9 | 0.828525 | 8.243588 | 35.99473 | 40.13005 |
| 10 | 0.812280 | 9.072113 | 43.86434 | 48.41527 |
| 11 | 0.796353 | 9.884391 | 52.39190 | 57.35031 |
| 12 | 0.780738 | 10.680743 | 61.54861 | 66.90652 |
| 13 | 0.765430 | 11.461481 | 71.30654 | 77.05607 |
| 14 | 0.750421 | 12.226909 | 81.63855 | 87.77203 |
| 15 | 0.735707 | 12.977329 | 92.51838 | 99.02832 |
| 16 | 0.721281 | 13.713036 | 103.92063 | 110.79961 |
| 17 | 0.707139 | 14.434316 | 115.82054 | 123.06137 |
| 18 | 0.693273 | 15.141454 | 128.19427 | 135.78981 |
| 19 | 0.679680 | 15.834726 | 141.01863 | 148.96194 |
| 20 | 0.666353 | 16.514405 | 154.27126 | 162.55552 |
| 21 | 0.653287 | 17.180757 | 167.93037 | 176.54891 |
| 22 | 0.640477 | 17.834043 | 181.97491 | 190.92116 |
| 23 | 0.627919 | 18.474519 | 196.38453 | 205.65208 |
| 24 | 0.615607 | 19.102437 | 211.13961 | 220.72214 |
| 25 | 0.603536 | 19.718044 | 226.22093 | 236.11228 |
| 26 | 0.591702 | 20.321579 | 241.61009 | 251.80416 |
| 27 | 0.580100 | 20.913280 | 257.28916 | 267.78007 |
| 28 | 0.568726 | 21.493379 | 273.24094 | 284.02284 |
| 29 | 0.557574 | 22.062104 | 289.44863 | 300.51585 |
| 30 | 0.546641 | 22.619677 | 305.89613 | 317.24303 |
| 31 | 0.535923 | 23.166318 | 322.56773 | 334.18888 |
| 32 | 0.525415 | 23.702240 | 339.44839 | 351.33837 |
| 33 | 0.515112 | 24.227654 | 356.52348 | 368.67702 |
| 34 | 0.505012 | 24.742766 | 373.77887 | 386.19081 |
| 35 | 0.495110 | 25.247777 | 391.20089 | 403.86617 |
| 40 | 0.448436 | 27.628128 | 480.36584 | 494.22520 |
| 45 | 0.406163 | 29.784085 | 571.90504 | 586.84593 |
| 50 | 0.367874 | 31.736802 | 664.57851 | 680.49896 |
| 60 | 0.301785 | 35.107346 | 849.40255 | 867.01379 |
| 70 | 0.247569 | 37.872367 | 1028.67284 | 1047.67111 |
| 80 | 0.203093 | 40.140647 | 1198.41974 | 1218.55588 |
| 90 | 0.166607 | 42.001427 | 1356.27913 | 1377.34872 |
| 100 | 0.136676 | 43.527915 | 1501.04372 | 1522.87904 |

II. T-2

VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 3.00%
(TAXA NOMINAL = 2.956%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.956666 | 0.985366 | 0.49027 | 0.98537 |
| 2 | 0.928802 | 1.942030 | 1.92290 | 2.89867 |
| 3 | 0.901750 | 2.870831 | 4.24259 | 5.68504 |
| 4 | 0.875485 | 3.772580 | 7.39648 | 9.29202 |
| 5 | 0.849986 | 4.648064 | 11.33400 | 13.66942 |
| 6 | 0.825229 | 5.498048 | 16.00681 | 18.76928 |
| 7 | 0.801193 | 6.323276 | 21.36875 | 24.54586 |
| 8 | 0.777857 | 7.124468 | 27.37571 | 30.95538 |
| 9 | 0.755201 | 7.902324 | 33.98556 | 37.95607 |
| 10 | 0.733205 | 8.657524 | 41.15808 | 45.50804 |
| 11 | 0.711850 | 9.390728 | 48.85492 | 53.57327 |
| 12 | 0.691116 | 10.102577 | 57.03942 | 62.11544 |
| 13 | 0.670987 | 10.793692 | 65.67665 | 71.09992 |
| 14 | 0.651443 | 11.464678 | 74.73328 | 80.49368 |
| 15 | 0.632469 | 12.116120 | 84.17759 | 90.26531 |
| 16 | 0.614048 | 12.748589 | 93.97929 | 100.38479 |
| 17 | 0.596163 | 13.362636 | 104.10955 | 110.82358 |
| 18 | 0.578799 | 13.958798 | 114.54090 | 121.55448 |
| 19 | 0.561941 | 14.537596 | 125.24724 | 132.55162 |
| 20 | 0.545574 | 15.099536 | 136.20368 | 143.79041 |
| 21 | 0.529683 | 15.645109 | 147.38657 | 155.24743 |
| 22 | 0.514256 | 16.174791 | 158.77342 | 166.90042 |
| 23 | 0.499277 | 16.689046 | 170.34289 | 178.72827 |
| 24 | 0.484735 | 17.188323 | 182.07465 | 190.71089 |
| 25 | 0.470617 | 17.673057 | 193.94944 | 202.82924 |
| 26 | 0.456910 | 18.143673 | 205.94899 | 215.06524 |
| 27 | 0.443602 | 18.600582 | 218.05594 | 227.40177 |
| 28 | 0.430681 | 19.044183 | 230.25387 | 239.82258 |
| 29 | 0.418137 | 19.474863 | 242.52719 | 252.31230 |
| 30 | 0.405958 | 19.892999 | 254.86117 | 264.85636 |
| 31 | 0.394134 | 20.298957 | 267.24186 | 277.44104 |
| 32 | 0.382655 | 20.693091 | 279.65610 | 290.05330 |
| 33 | 0.371509 | 21.075745 | 292.09141 | 302.68088 |
| 34 | 0.360689 | 21.447253 | 304.53603 | 315.31216 |
| 35 | 0.350183 | 21.807941 | 316.97888 | 327.93623 |
| 40 | 0.302071 | 23.459787 | 378.82138 | 390.60872 |
| 45 | 0.260569 | 24.884684 | 439.29178 | 451.79504 |
| 50 | 0.224770 | 26.113812 | 497.59970 | 510.72054 |
| 60 | 0.167250 | 28.088657 | 605.73038 | 619.84348 |
| 70 | 0.124450 | 29.558127 | 700.88449 | 715.73592 |
| 80 | 0.092602 | 30.651552 | 782.62234 | 798.02316 |
| 90 | 0.068905 | 31.465162 | 851.57911 | 867.38872 |
| 100 | 0.051272 | 32.070565 | 908.94344 | 925.05724 |

II.T-3

## VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 4.00% (TAXA NOMINAL = 3.922%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.942927 | 0.980644 | 0.48713 | 0.98065 |
| 2 | 0.906661 | 1.923570 | 1.89843 | 2.86650 |
| 3 | 0.871789 | 2.830230 | 4.16212 | 5.58647 |
| 4 | 0.838259 | 3.702019 | 7.21052 | 9.07361 |
| 5 | 0.806018 | 4.540277 | 10.97994 | 13.26490 |
| 6 | 0.775018 | 5.346295 | 15.41041 | 18.10100 |
| 7 | 0.745209 | 6.121311 | 20.44548 | 23.52611 |
| 8 | 0.716547 | 6.866520 | 26.03212 | 29.48777 |
| 9 | 0.688988 | 7.583067 | 32.12042 | 35.93669 |
| 10 | 0.662488 | 8.272054 | 38.66354 | 42.82655 |
| 11 | 0.637008 | 8.934541 | 45.61749 | 50.11392 |
| 12 | 0.612508 | 9.571549 | 52.94099 | 57.75800 |
| 13 | 0.588950 | 10.184056 | 60.59533 | 65.72059 |
| 14 | 0.566298 | 10.773005 | 68.54422 | 73.96587 |
| 15 | 0.544517 | 11.339302 | 76.75367 | 82.46032 |
| 16 | 0.523574 | 11.883819 | 85.19191 | 91.17259 |
| 17 | 0.503437 | 12.407393 | 93.82915 | 100.07333 |
| 18 | 0.484074 | 12.910829 | 102.63764 | 109.13519 |
| 19 | 0.465456 | 13.394902 | 111.59141 | 118.33257 |
| 20 | 0.447554 | 13.860357 | 120.66627 | 127.64167 |
| 21 | 0.430340 | 14.307910 | 129.83964 | 137.04028 |
| 22 | 0.413788 | 14.738250 | 139.09053 | 146.50774 |
| 23 | 0.397874 | 15.152037 | 148.39940 | 156.02486 |
| 24 | 0.382571 | 15.549910 | 157.74811 | 165.57381 |
| 25 | 0.367857 | 15.932480 | 167.11983 | 175.13806 |
| 26 | 0.353708 | 16.300336 | 176.49895 | 184.70231 |
| 27 | 0.340104 | 16.654044 | 185.87105 | 194.25242 |
| 28 | 0.327023 | 16.994148 | 195.22279 | 203.77531 |
| 29 | 0.314445 | 17.321170 | 204.54186 | 213.25897 |
| 30 | 0.302351 | 17.635615 | 213.81696 | 222.69231 |
| 31 | 0.290722 | 17.937966 | 223.03766 | 232.06518 |
| 32 | 0.279541 | 18.228688 | 232.19445 | 241.36828 |
| 33 | 0.268789 | 18.508228 | 241.27860 | 250.59311 |
| 34 | 0.258451 | 18.777017 | 250.28214 | 259.73192 |
| 35 | 0.248511 | 19.035467 | 259.19784 | 268.77769 |
| 40 | 0.204258 | 20.186044 | 302.25051 | 312.40941 |
| 45 | 0.167885 | 21.131734 | 342.36513 | 352.99995 |
| 50 | 0.137990 | 21.909023 | 379.22286 | 390.24887 |
| 60 | 0.093221 | 23.073006 | 442.86245 | 454.47424 |
| 70 | 0.062977 | 23.859351 | 493.71853 | 505.72606 |
| 80 | 0.042545 | 24.390578 | 533.38734 | 545.66222 |
| 90 | 0.028742 | 24.749455 | 563.77495 | 576.23045 |
| 100 | 0.019417 | 24.991900 | 586.72819 | 599.30569 |

II. T-4

VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 5.00% (TAXA NOMINAL = 4.879%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.929521 | 0.975997 | 0.48404 | 0.97600 |
| 2 | 0.885258 | 1.905518 | 1.87454 | 2.83504 |
| 3 | 0.843103 | 2.790776 | 4.08408 | 5.49081 |
| 4 | 0.802956 | 3.633879 | 7.03151 | 8.86322 |
| 5 | 0.764720 | 4.436834 | 10.64154 | 12.87799 |
| 6 | 0.728304 | 5.201553 | 14.84439 | 17.46631 |
| 7 | 0.693623 | 5.929856 | 19.57540 | 22.56443 |
| 8 | 0.660594 | 6.623479 | 24.77475 | 28.11342 |
| 9 | 0.629137 | 7.284073 | 30.38711 | 34.05875 |
| 10 | 0.599178 | 7.913209 | 36.36134 | 40.35011 |
| 11 | 0.570646 | 8.512386 | 42.65026 | 46.94106 |
| 12 | 0.543472 | 9.083031 | 49.21037 | 53.78880 |
| 13 | 0.517593 | 9.626503 | 56.00155 | 60.85393 |
| 14 | 0.492945 | 10.144095 | 62.98693 | 68.10021 |
| 15 | 0.469472 | 10.637039 | 70.13263 | 75.49438 |
| 16 | 0.447116 | 11.106511 | 77.40753 | 83.00592 |
| 17 | 0.425825 | 11.553626 | 84.78311 | 90.60688 |
| 18 | 0.405547 | 11.979450 | 92.23330 | 98.27172 |
| 19 | 0.386236 | 12.384997 | 99.73426 | 105.97710 |
| 20 | 0.367844 | 12.771232 | 107.26428 | 113.70181 |
| 21 | 0.350327 | 13.139075 | 114.80356 | 121.42651 |
| 22 | 0.333645 | 13.489402 | 122.33416 | 129.13369 |
| 23 | 0.317757 | 13.823046 | 129.83980 | 136.80751 |
| 24 | 0.302626 | 14.140803 | 137.30579 | 144.43367 |
| 25 | 0.288215 | 14.443428 | 144.71888 | 151.99931 |
| 26 | 0.274491 | 14.731643 | 152.06718 | 159.49288 |
| 27 | 0.261420 | 15.006133 | 159.34005 | 166.90411 |
| 28 | 0.248971 | 15.267552 | 166.52802 | 174.22385 |
| 29 | 0.237115 | 15.516523 | 173.62267 | 181.44400 |
| 30 | 0.225824 | 15.753638 | 180.61659 | 188.55744 |
| 31 | 0.215071 | 15.979461 | 187.50329 | 195.55797 |
| 32 | 0.204829 | 16.194532 | 194.27713 | 202.44022 |
| 33 | 0.195076 | 16.399360 | 200.93323 | 209.19957 |
| 34 | 0.185786 | 16.594435 | 207.46745 | 215.83212 |
| 35 | 0.176939 | 16.780221 | 213.87630 | 222.33462 |
| 40 | 0.138637 | 17.584576 | 243.95793 | 252.82170 |
| 45 | 0.108626 | 18.214809 | 270.67884 | 279.86028 |
| 50 | 0.085111 | 18.708613 | 294.08439 | 303.51475 |
| 60 | 0.052251 | 19.398675 | 331.75831 | 341.53650 |
| 70 | 0.032078 | 19.822313 | 359.12321 | 369.11494 |
| 80 | 0.019693 | 20.082390 | 378.52365 | 388.64647 |
| 90 | 0.012090 | 20.242054 | 392.03049 | 402.23379 |
| 100 | 0.007422 | 20.340075 | 401.30272 | 411.55543 |

II.T-5

## VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 6.00% (TAXA NOMINAL = 5.827%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.916438 | 0.971424 | 0.48100 | 0.97143 |
| 2 | 0.864564 | 1.887861 | 1.85120 | 2.80429 |
| 3 | 0.815626 | 2.752424 | 4.00841 | 5.39798 |
| 4 | 0.769459 | 3.568049 | 6.85914 | 8.66048 |
| 5 | 0.725905 | 4.337508 | 10.31796 | 12.50776 |
| 6 | 0.684816 | 5.063412 | 14.30691 | 16.86318 |
| 7 | 0.646053 | 5.748227 | 18.75488 | 21.65688 |
| 8 | 0.609484 | 6.394279 | 23.59713 | 26.82529 |
| 9 | 0.574985 | 7.003762 | 28.77477 | 32.31063 |
| 10 | 0.542438 | 7.578745 | 34.23432 | 38.06047 |
| 11 | 0.511734 | 8.121183 | 39.92729 | 44.02728 |
| 12 | 0.482768 | 8.632917 | 45.80974 | 50.16808 |
| 13 | 0.455442 | 9.115685 | 51.84199 | 56.44406 |
| 14 | 0.429662 | 9.571126 | 57.98823 | 62.82023 |
| 15 | 0.405342 | 10.000787 | 64.21624 | 69.26515 |
| 16 | 0.382398 | 10.406128 | 70.49705 | 75.75060 |
| 17 | 0.360753 | 10.788526 | 76.80475 | 82.25136 |
| 18 | 0.340333 | 11.149278 | 83.11616 | 88.74489 |
| 19 | 0.321069 | 11.489610 | 89.41065 | 95.21120 |
| 20 | 0.302895 | 11.810678 | 95.66992 | 101.63256 |
| 21 | 0.285750 | 12.113572 | 101.87778 | 107.99334 |
| 22 | 0.269576 | 12.399322 | 108.02001 | 114.27983 |
| 23 | 0.254317 | 12.668897 | 114.08414 | 120.48005 |
| 24 | 0.239921 | 12.923213 | 120.05933 | 126.58363 |
| 25 | 0.226341 | 13.163134 | 125.93622 | 132.58165 |
| 26 | 0.213529 | 13.389474 | 131.70680 | 138.46650 |
| 27 | 0.201443 | 13.603003 | 137.36427 | 144.23177 |
| 28 | 0.190040 | 13.804445 | 142.90295 | 149.87215 |
| 29 | 0.179283 | 13.994485 | 148.31816 | 155.38330 |
| 30 | 0.169135 | 14.173768 | 153.60613 | 160.76179 |
| 31 | 0.159562 | 14.342902 | 158.76392 | 166.00496 |
| 32 | 0.150530 | 14.502463 | 163.78931 | 171.11091 |
| 33 | 0.142009 | 14.652992 | 168.68078 | 176.07838 |
| 34 | 0.133971 | 14.795001 | 173.43739 | 180.90668 |
| 35 | 0.126388 | 14.928972 | 178.05872 | 185.59564 |
| 40 | 0.094444 | 15.493305 | 199.15279 | 206.97461 |
| 45 | 0.070575 | 15.915007 | 217.02401 | 225.05873 |
| 50 | 0.052738 | 16.230127 | 231.95404 | 240.14785 |
| 60 | 0.029449 | 16.641565 | 254.38447 | 262.78599 |
| 70 | 0.016444 | 16.871310 | 269.20695 | 277.72447 |
| 80 | 0.009183 | 16.999599 | 278.76664 | 287.34892 |
| 90 | 0.005128 | 17.071234 | 284.82107 | 293.43952 |
| 100 | 0.002864 | 17.111235 | 288.60184 | 297.24049 |

II.T-6

VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 7.00%
(TAXA NOMINAL = 6.766%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N+1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.903665 | 0.966921 | 0.47801 | 0.96693 |
| 2 | 0.844547 | 1.870586 | 1.82842 | 2.77425 |
| 3 | 0.789296 | 2.715132 | 3.93502 | 5.30789 |
| 4 | 0.737660 | 3.504427 | 6.60310 | 8.46507 |
| 5 | 0.689402 | 4.242087 | 10.00841 | 12.15336 |
| 6 | 0.644301 | 4.931488 | 13.79623 | 16.28977 |
| 7 | 0.602150 | 5.575788 | 17.98055 | 20.79987 |
| 8 | 0.562757 | 6.177938 | 22.49327 | 25.61706 |
| 9 | 0.525942 | 6.740694 | 27.27353 | 30.68187 |
| 10 | 0.491534 | 7.266635 | 32.26700 | 35.94128 |
| 11 | 0.459378 | 7.758169 | 37.42534 | 41.34815 |
| 12 | 0.429325 | 8.217546 | 42.70558 | 46.86067 |
| 13 | 0.401238 | 8.646871 | 48.06972 | 52.44189 |
| 14 | 0.374989 | 9.048108 | 53.48416 | 58.05922 |
| 15 | 0.350457 | 9.423097 | 58.91938 | 63.68405 |
| 16 | 0.327530 | 9.773554 | 64.34949 | 69.29135 |
| 17 | 0.306103 | 10.101083 | 69.75188 | 74.85935 |
| 18 | 0.286078 | 10.407186 | 75.10694 | 80.36919 |
| 19 | 0.267362 | 10.693263 | 80.39776 | 85.80466 |
| 20 | 0.249871 | 10.960624 | 85.60980 | 91.15189 |
| 21 | 0.233525 | 11.210495 | 90.73074 | 96.39918 |
| 22 | 0.218247 | 11.444019 | 95.75020 | 101.53671 |
| 23 | 0.203970 | 11.662266 | 100.65952 | 106.55638 |
| 24 | 0.190626 | 11.866235 | 105.45164 | 111.45164 |
| 25 | 0.178155 | 12.056860 | 110.12088 | 116.21727 |
| 26 | 0.166500 | 12.235015 | 114.66281 | 120.84928 |
| 27 | 0.155608 | 12.401514 | 119.07411 | 125.34477 |
| 28 | 0.145428 | 12.557121 | 123.35242 | 129.70176 |
| 29 | 0.135914 | 12.702548 | 127.49628 | 133.91914 |
| 30 | 0.127022 | 12.838462 | 131.50495 | 137.99654 |
| 31 | 0.118712 | 12.965483 | 135.37839 | 141.93421 |
| 32 | 0.110946 | 13.084195 | 139.11714 | 145.73299 |
| 33 | 0.103688 | 13.195141 | 142.72225 | 149.39419 |
| 34 | 0.096905 | 13.298828 | 146.19520 | 152.91957 |
| 35 | 0.090565 | 13.395732 | 149.53785 | 156.31122 |
| 40 | 0.064572 | 13.793059 | 164.38169 | 171.35596 |
| 45 | 0.046039 | 14.076347 | 176.38158 | 183.49910 |
| 50 | 0.032825 | 14.278328 | 185.94725 | 193.16689 |
| 60 | 0.016687 | 14.525014 | 199.37695 | 206.72132 |
| 70 | 0.008483 | 14.650416 | 207.45795 | 214.86573 |
| 80 | 0.004313 | 14.714165 | 212.20341 | 219.64343 |
| 90 | 0.002193 | 14.746571 | 214.93983 | 222.39623 |
| 100 | 0.001115 | 14.763045 | 216.49562 | 223.96035 |

II. T-7

VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 8.00%
(TAXA NOMINAL = 7.696%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.891193 | 0.962488 | 0.47508 | 0.96249 |
| 2 | 0.825179 | 1.853681 | 1.80615 | 2.74488 |
| 3 | 0.764054 | 2.678859 | 3.86380 | 5.22041 |
| 4 | 0.707458 | 3.442913 | 6.53309 | 8.27663 |
| 5 | 0.655054 | 4.150370 | 9.71211 | 11.81391 |
| 6 | 0.606531 | 4.805423 | 13.31070 | 15.74423 |
| 7 | 0.561603 | 5.411954 | 17.24926 | 19.98994 |
| 8 | 0.520003 | 5.973557 | 21.45768 | 24.48276 |
| 9 | 0.481484 | 6.493559 | 25.87436 | 29.16278 |
| 10 | 0.445819 | 6.975042 | 30.44537 | 33.97762 |
| 11 | 0.412795 | 7.420861 | 35.12360 | 38.88162 |
| 12 | 0.382218 | 7.833655 | 39.86809 | 43.83515 |
| 13 | 0.353905 | 8.215872 | 44.64335 | 48.80397 |
| 14 | 0.327690 | 8.569777 | 49.41879 | 53.75864 |
| 15 | 0.303417 | 8.897467 | 54.16819 | 58.67398 |
| 16 | 0.280942 | 9.200883 | 58.86920 | 63.52865 |
| 17 | 0.260131 | 9.481824 | 63.50293 | 68.30464 |
| 18 | 0.240862 | 9.741955 | 68.05354 | 72.98699 |
| 19 | 0.223021 | 9.982817 | 72.50794 | 77.56336 |
| 20 | 0.206501 | 10.205837 | 76.85540 | 82.02377 |
| 21 | 0.191204 | 10.412337 | 81.08733 | 86.36027 |
| 22 | 0.177041 | 10.603540 | 85.19698 | 90.56675 |
| 23 | 0.163927 | 10.780581 | 89.17926 | 94.63868 |
| 24 | 0.151784 | 10.944507 | 93.03048 | 98.57292 |
| 25 | 0.140541 | 11.096291 | 96.74821 | 102.36751 |
| 26 | 0.130131 | 11.236832 | 100.33109 | 106.02156 |
| 27 | 0.120491 | 11.366962 | 103.77870 | 109.53507 |
| 28 | 0.111566 | 11.487453 | 107.09142 | 112.90882 |
| 29 | 0.103302 | 11.599018 | 110.27033 | 116.14422 |
| 30 | 0.095650 | 11.702320 | 113.31706 | 119.24326 |
| 31 | 0.088565 | 11.797969 | 116.23376 | 122.20840 |
| 32 | 0.082005 | 11.886533 | 119.02296 | 125.04245 |
| 33 | 0.075930 | 11.968537 | 121.68757 | 127.74859 |
| 34 | 0.070306 | 12.044467 | 124.23073 | 130.33019 |
| 35 | 0.065098 | 12.114772 | 126.65580 | 132.79088 |
| 40 | 0.044305 | 12.395481 | 137.13747 | 143.41470 |
| 45 | 0.030153 | 12.586526 | 145.22635 | 151.60032 |
| 50 | 0.020522 | 12.716549 | 151.38161 | 157.82143 |
| 60 | 0.009506 | 12.865265 | 159.46657 | 165.98170 |
| 70 | 0.004403 | 12.934150 | 163.90032 | 170.45033 |
| 80 | 0.002040 | 12.966057 | 166.27307 | 172.83924 |
| 90 | 0.000945 | 12.980836 | 167.51990 | 174.09356 |
| 100 | 0.000438 | 12.987681 | 168.16588 | 174.74301 |

II. T-8

## VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 9.00% (TAXA NOMINAL = 8.618%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.879012 | 0.958123 | 0.47219 | 0.95813 |
| 2 | 0.806433 | 1.837135 | 1.78439 | 2.71615 |
| 3 | 0.739847 | 2.643567 | 3.79468 | 5.13544 |
| 4 | 0.678759 | 3.383414 | 6.37883 | 8.09483 |
| 5 | 0.622715 | 4.062172 | 9.42837 | 11.48862 |
| 6 | 0.571298 | 4.684886 | 12.84882 | 15.22490 |
| 7 | 0.524127 | 5.256183 | 16.55815 | 19.22398 |
| 8 | 0.480850 | 5.780309 | 20.48533 | 23.41699 |
| 9 | 0.441147 | 6.261159 | 24.56910 | 27.74463 |
| 10 | 0.404722 | 6.702305 | 28.75682 | 32.15609 |
| 11 | 0.371305 | 7.107027 | 33.00349 | 36.60803 |
| 12 | 0.340647 | 7.478331 | 37.27082 | 41.06367 |
| 13 | 0.312520 | 7.818977 | 41.52645 | 45.49207 |
| 14 | 0.286715 | 8.131496 | 45.74321 | 49.86734 |
| 15 | 0.263042 | 8.418211 | 49.89852 | 54.16806 |
| 16 | 0.241323 | 8.681252 | 53.97377 | 58.37672 |
| 17 | 0.221397 | 8.922574 | 57.95385 | 62.47919 |
| 18 | 0.203117 | 9.143971 | 61.82670 | 66.46433 |
| 19 | 0.186346 | 9.347087 | 65.58289 | 70.32353 |
| 20 | 0.170959 | 9.533432 | 69.21528 | 74.05044 |
| 21 | 0.156843 | 9.704390 | 72.71871 | 77.64057 |
| 22 | 0.143893 | 9.861233 | 76.08970 | 81.09111 |
| 23 | 0.132012 | 10.005126 | 79.32625 | 84.40064 |
| 24 | 0.121112 | 10.137137 | 82.42757 | 87.56892 |
| 25 | 0.111112 | 10.258249 | 85.39393 | 90.59670 |
| 26 | 0.101938 | 10.369360 | 88.22648 | 93.48560 |
| 27 | 0.093521 | 10.471298 | 90.92708 | 96.23790 |
| 28 | 0.085799 | 10.564818 | 93.49821 | 98.85647 |
| 29 | 0.078715 | 10.650616 | 95.94285 | 101.34462 |
| 30 | 0.072215 | 10.729330 | 98.26436 | 103.70605 |
| 31 | 0.066253 | 10.801545 | 100.46639 | 105.94471 |
| 32 | 0.060782 | 10.867797 | 102.55286 | 108.06478 |
| 33 | 0.055764 | 10.928579 | 104.52783 | 110.07057 |
| 34 | 0.051159 | 10.984342 | 106.39549 | 111.96652 |
| 35 | 0.046935 | 11.035501 | 108.16010 | 113.75708 |
| 40 | 0.030505 | 11.234491 | 115.58661 | 121.28451 |
| 45 | 0.019826 | 11.363821 | 121.05998 | 126.82347 |
| 50 | 0.012886 | 11.447876 | 125.03757 | 130.84369 |
| 60 | 0.005443 | 11.538013 | 129.93112 | 135.78296 |
| 70 | 0.002300 | 11.576087 | 132.37895 | 138.25010 |
| 80 | 0.000972 | 11.592170 | 133.57378 | 139.45308 |
| 90 | 0.000411 | 11.598964 | 134.14642 | 140.02917 |
| 100 | 0.000174 | 11.601834 | 134.41701 | 140.30122 |

II.T-9

## VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 10.00% (TAXA NOMINAL = 9.531%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.867113 | 0.953824 | 0.46934 | 0.95383 |
| 2 | 0.788284 | 1.820936 | 1.76312 | 2.68805 |
| 3 | 0.716622 | 2.609220 | 3.72757 | 5.05290 |
| 4 | 0.651475 | 3.325842 | 6.23006 | 7.91939 |
| 5 | 0.592250 | 3.977316 | 9.15652 | 11.17676 |
| 6 | 0.538409 | 4.569565 | 12.40919 | 14.73025 |
| 7 | 0.489463 | 5.107974 | 15.90456 | 18.49911 |
| 8 | 0.444966 | 5.597436 | 19.57165 | 22.41481 |
| 9 | 0.404515 | 6.042402 | 23.35032 | 26.41950 |
| 10 | 0.367741 | 6.446916 | 27.18999 | 30.46464 |
| 11 | 0.334310 | 6.814656 | 31.04834 | 34.50979 |
| 12 | 0.303918 | 7.148966 | 34.89025 | 38.52150 |
| 13 | 0.276289 | 7.452883 | 38.68680 | 42.47243 |
| 14 | 0.251172 | 7.729172 | 42.41451 | 46.34047 |
| 15 | 0.228338 | 7.980344 | 46.05450 | 50.10804 |
| 16 | 0.207580 | 8.208681 | 49.59192 | 53.76145 |
| 17 | 0.188709 | 8.416261 | 53.01534 | 57.29030 |
| 18 | 0.171554 | 8.604970 | 56.31625 | 60.68706 |
| 19 | 0.155958 | 8.776524 | 59.48863 | 63.94658 |
| 20 | 0.141780 | 8.932482 | 62.52856 | 67.06573 |
| 21 | 0.128891 | 9.074261 | 65.43392 | 70.04311 |
| 22 | 0.117174 | 9.203152 | 68.20405 | 72.87871 |
| 23 | 0.106522 | 9.320325 | 70.83952 | 75.57369 |
| 24 | 0.096838 | 9.426847 | 73.34193 | 78.13020 |
| 25 | 0.088035 | 9.523684 | 75.71368 | 80.55114 |
| 26 | 0.080032 | 9.611719 | 77.95785 | 82.84003 |
| 27 | 0.072756 | 9.691749 | 80.07803 | 85.00087 |
| 28 | 0.066142 | 9.764505 | 82.07823 | 87.03802 |
| 29 | 0.060129 | 9.830646 | 83.96273 | 88.95612 |
| 30 | 0.054663 | 9.890775 | 85.73605 | 90.75997 |
| 31 | 0.049693 | 9.945437 | 87.40281 | 92.45450 |
| 32 | 0.045176 | 9.995130 | 88.96774 | 94.04468 |
| 33 | 0.041069 | 10.040305 | 90.43559 | 95.53547 |
| 34 | 0.037336 | 10.081374 | 91.81106 | 96.93180 |
| 35 | 0.033941 | 10.118709 | 93.09882 | 98.23852 |
| 40 | 0.021075 | 10.260238 | 98.37817 | 103.58976 |
| 45 | 0.013086 | 10.348117 | 102.09563 | 107.35185 |
| 50 | 0.008126 | 10.402683 | 104.67670 | 109.96064 |
| 60 | 0.003133 | 10.457601 | 107.65424 | 112.96608 |
| 70 | 0.001208 | 10.478774 | 109.01395 | 114.33654 |
| 80 | 0.000466 | 10.486938 | 109.61980 | 114.94654 |
| 90 | 0.000180 | 10.490085 | 109.88486 | 115.21320 |
| 100 | 0.000070 | 10.491298 | 109.99919 | 115.32814 |

II.T-10

VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 11.00%
(TAXA NOMINAL = 10.436%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.855486 | 0.949589 | 0.46654 | 0.94959 |
| 2 | 0.770708 | 1.805075 | 1.74233 | 2.66056 |
| 3 | 0.694332 | 2.575782 | 3.66240 | 4.97269 |
| 4 | 0.625524 | 3.270113 | 6.08652 | 7.75001 |
| 5 | 0.563535 | 3.895637 | 8.89594 | 10.87763 |
| 6 | 0.507689 | 4.459171 | 11.99048 | 14.25884 |
| 7 | 0.457378 | 4.966860 | 15.28604 | 17.81266 |
| 8 | 0.412052 | 5.424238 | 18.71239 | 21.41768 |
| 9 | 0.371218 | 5.836290 | 22.21125 | 25.18014 |
| 10 | 0.334431 | 6.207507 | 25.73459 | 28.89232 |
| 11 | 0.301289 | 6.541938 | 29.24320 | 32.57105 |
| 12 | 0.271432 | 6.843226 | 32.70540 | 36.18652 |
| 13 | 0.244533 | 7.114658 | 36.09593 | 39.71512 |
| 14 | 0.220300 | 7.359190 | 39.39500 | 43.13858 |
| 15 | 0.198469 | 7.579490 | 42.58743 | 46.44308 |
| 16 | 0.178801 | 7.777958 | 45.66196 | 49.61857 |
| 17 | 0.161082 | 7.956758 | 48.61061 | 52.65817 |
| 18 | 0.145119 | 8.117840 | 51.42813 | 55.55763 |
| 19 | 0.130738 | 8.262958 | 54.11155 | 58.31488 |
| 20 | 0.117782 | 8.393695 | 56.65979 | 60.92962 |
| 21 | 0.106110 | 8.511476 | 59.07328 | 63.40303 |
| 22 | 0.095594 | 8.617585 | 61.35371 | 65.73743 |
| 23 | 0.086121 | 8.713179 | 63.50374 | 67.93609 |
| 24 | 0.077587 | 8.799300 | 65.52682 | 70.00298 |
| 25 | 0.069898 | 8.876886 | 67.42701 | 71.94264 |
| 26 | 0.062971 | 8.946783 | 69.20878 | 73.75997 |
| 27 | 0.056731 | 9.009754 | 70.87696 | 75.46018 |
| 28 | 0.051109 | 9.066484 | 72.43655 | 77.04862 |
| 29 | 0.046044 | 9.117593 | 73.89269 | 78.53077 |
| 30 | 0.041481 | 9.163636 | 75.25058 | 79.91208 |
| 31 | 0.037371 | 9.205117 | 76.51538 | 81.19798 |
| 32 | 0.033667 | 9.242487 | 77.69221 | 82.39382 |
| 33 | 0.030331 | 9.276154 | 78.78609 | 83.50482 |
| 34 | 0.027325 | 9.306484 | 79.80189 | 84.53605 |
| 35 | 0.024617 | 9.333809 | 80.74435 | 85.49241 |
| 40 | 0.014609 | 9.434798 | 84.50958 | 89.30902 |
| 45 | 0.008670 | 9.494730 | 88.72245 | 93.57346 |
| 50 | 0.005146 | 9.530297 | 88.72545 | 93.57346 |
| 60 | 0.001812 | 9.563930 | 90.54654 | 95.41166 |
| 70 | 0.000639 | 9.575775 | 91.30635 | 96.17750 |
| 80 | 0.000225 | 9.579947 | 91.61566 | 96.48893 |
| 90 | 0.000080 | 9.581416 | 91.73929 | 96.61331 |
| 100 | 0 .000028 | 9.581933 | 91.78800 | 96.66229 |

II.T-11

VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA = 12.00%
(TAXA NOMINAL = 11.333%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.844123 | 0.945417 | 0.46379 | 0.94542 |
| 2 | 0.753681 | 1.789540 | 1.72200 | 2.63366 |
| 3 | 0.672930 | 2.543220 | 3.59908 | 4.89471 |
| 4 | 0.600830 | 3.216149 | 5.94798 | 7.58642 |
| 5 | 0.536456 | 3.816979 | 8.64604 | 10.59057 |
| 6 | 0.478978 | 4.353434 | 11.59148 | 13.80930 |
| 7 | 0.427659 | 4.832411 | 14.70031 | 17.16214 |
| 8 | 0.381839 | 5.260070 | 17.90371 | 20.58341 |
| 9 | 0.340927 | 5.641908 | 21.14573 | 24.01995 |
| 10 | 0.304400 | 5.982835 | 24.38132 | 27.42922 |
| 11 | 0.271785 | 6.287234 | 27.57463 | 30.77761 |
| 12 | 0.242666 | 6.559019 | 30.69759 | 34.03902 |
| 13 | 0.216666 | 6.801684 | 33.72861 | 37.19367 |
| 14 | 0.193452 | 7.018349 | 36.65154 | 40.22698 |
| 15 | 0.172725 | 7.211800 | 39.45476 | 43.12875 |
| 16 | 0.154219 | 7.384524 | 42.13035 | 45.89233 |
| 17 | 0.137695 | 7.538742 | 44.67349 | 48.51404 |
| 18 | 0.122942 | 7.676437 | 47.08185 | 50.99254 |
| 19 | 0.109770 | 7.799379 | 49.35511 | 53.32843 |
| 20 | 0.098009 | 7.909148 | 51.49457 | 55.52382 |
| 21 | 0.087508 | 8.007156 | 53.50282 | 57.58200 |
| 22 | 0.078132 | 8.094664 | 55.38340 | 59.50716 |
| 23 | 0.069761 | 8.172795 | 57.14063 | 61.30419 |
| 24 | 0.062287 | 8.242556 | 58.77934 | 62.97844 |
| 25 | 0.055613 | 8.304842 | 60.30476 | 64.53559 |
| 26 | 0.049655 | 8.360454 | 61.72235 | 65.98151 |
| 27 | 0.044335 | 8.410108 | 63.03772 | 67.32217 |
| 28 | 0.039584 | 8.454442 | 64.25648 | 68.56353 |
| 29 | 0.035343 | 8.494026 | 65.38425 | 69.71146 |
| 30 | 0.031557 | 8.529369 | 66.42653 | 70.77174 |
| 31 | 0.028176 | 8.560925 | 67.38869 | 71.74998 |
| 32 | 0.025157 | 8.589100 | 68.27594 | 72.65158 |
| 33 | 0.022461 | 8.614257 | 69.09328 | 73.48174 |
| 34 | 0.020055 | 8.636718 | 69.84551 | 74.24542 |
| 35 | 0.017906 | 8.656772 | 70.53720 | 74.94732 |
| 40 | 0.010161 | 8.729064 | 73.23117 | 77.67811 |
| 45 | 0.005766 | 8.770084 | 74.96490 | 79.43274 |
| 50 | 0.003272 | 8.793360 | 76.06504 | 80.54475 |
| 60 | 0.001054 | 8.814062 | 77.18449 | 81.67474 |
| 70 | 0.000340 | 8.820727 | 77.61158 | 82.10522 |
| 80 | 0.000110 | 8.822873 | 77.77055 | 82.26529 |
| 90 | 0.000036 | 8.823564 | 77.82865 | 82.32373 |
| 100 | 0.000012 | 8.823787 | 77.84958 | 82.34478 |

II. T-12

VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 13.00%
(TAXA NOMINAL = 12.222%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.833015 | 0.941307 | 0.46107 | 0.94131 |
| 2 | 0.737182 | 1.774321 | 1.70211 | 2.60734 |
| 3 | 0.652373 | 2.511502 | 3.53756 | 4.81888 |
| 4 | 0.577321 | 3.163875 | 5.81422 | 7.42837 |
| 5 | 0.510904 | 3.741196 | 8.40629 | 10.31498 |
| 6 | 0.452127 | 4.252099 | 11.21105 | 13.38040 |
| 7 | 0.400113 | 4.704226 | 14.14527 | 16.54528 |
| 8 | 0.354082 | 5.104339 | 17.14204 | 19.74618 |
| 9 | 0.313347 | 5.458420 | 20.14813 | 22.93292 |
| 10 | 0.277298 | 5.771767 | 23.12173 | 26.06638 |
| 11 | 0.245397 | 6.049065 | 26.03054 | 29.11666 |
| 12 | 0.217165 | 6.294461 | 28.85010 | 32.06142 |
| 13 | 0.192182 | 6.511626 | 31.56245 | 34.88456 |
| 14 | 0.170073 | 6.703808 | 34.15494 | 37.57510 |
| 15 | 0.150507 | 6.873880 | 36.61925 | 40.12618 |
| 16 | 0.133192 | 7.024386 | 38.95056 | 42.53428 |
| 17 | 0.117869 | 7.157577 | 41.14687 | 44.79853 |
| 18 | 0.104309 | 7.275446 | 43.20836 | 46.92017 |
| 19 | 0.092309 | 7.379754 | 45.13700 | 48.90202 |
| 20 | 0.081689 | 7.472062 | 46.93608 | 50.74819 |
| 21 | 0.072291 | 7.553751 | 48.60986 | 52.46365 |
| 22 | 0.063975 | 7.626042 | 50.16338 | 54.05405 |
| 23 | 0.056615 | 7.690016 | 51.60215 | 55.52546 |
| 24 | 0.050102 | 7.746631 | 52.93201 | 56.88421 |
| 25 | 0.044338 | 7.796732 | 54.15898 | 58.13674 |
| 26 | 0.039237 | 7.841069 | 55.28914 | 59.28951 |
| 27 | 0.034723 | 7.880306 | 56.32851 | 60.34890 |
| 28 | 0.030729 | 7.915029 | 57.28303 | 61.32113 |
| 29 | 0.027193 | 7.945757 | 58.15846 | 62.21225 |
| 30 | 0.024065 | 7.972950 | 58.96038 | 63.02803 |
| 31 | 0.021297 | 7.997014 | 59.69410 | 63.77404 |
| 32 | 0.018847 | 8.018310 | 60.36471 | 64.45551 |
| 33 | 0.016678 | 8.037156 | 60.97702 | 65.07743 |
| 34 | 0.014760 | 8.053834 | 61.53556 | 65.64448 |
| 35 | 0.013062 | 8.068594 | 62.04460 | 66.16105 |
| 40 | 0.007090 | 8.120505 | 63.97815 | 68.12109 |
| 45 | 0.003848 | 8.148681 | 65.16849 | 69.32580 |
| 50 | 0.002089 | 8.163973 | 65.89101 | 70.05613 |
| 60 | 0.000616 | 8.176779 | 66.58257 | 70.75422 |
| 70 | 0.000182 | 8.180551 | 66.82402 | 70.99759 |
| 80 | 0.000054 | 8.181662 | 66.90626 | 71.08040 |
| 90 | 0.000016 | 8.181989 | 66.93376 | 71.10806 |
| 100 | 0.000005 | 8.182086 | 66.94283 | 71.11718 |

II.T-13

## VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 14.00% (TAXA NOMINAL = 13.103%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.822155 | 0.937256 | 0.45840 | 0.93726 |
| 2 | 0.721189 | 1.759411 | 1.68266 | 2.58157 |
| 3 | 0.632622 | 2.480599 | 3.47776 | 4.74513 |
| 4 | 0.554931 | 3.113220 | 5.68502 | 7.27561 |
| 5 | 0.486782 | 3.668151 | 8.17615 | 10.05027 |
| 6 | 0.427002 | 4.154932 | 10.84814 | 12.97096 |
| 7 | 0.374563 | 4.581933 | 13.61899 | 15.95996 |
| 8 | 0.328564 | 4.956496 | 16.42412 | 18.95646 |
| 9 | 0.288214 | 5.285059 | 19.21332 | 21.91354 |
| 10 | 0.252820 | 5.573273 | 21.94820 | 24.79567 |
| 11 | 0.221772 | 5.826092 | 24.60004 | 27.57668 |
| 12 | 0.194537 | 6.047863 | 27.14799 | 30.23793 |
| 13 | 0.170646 | 6.242399 | 29.57757 | 32.76690 |
| 14 | 0.149690 | 6.413045 | 31.87942 | 35.15594 |
| 15 | 0.131307 | 6.562734 | 34.04828 | 37.40128 |
| 16 | 0.115181 | 6.694040 | 36.08209 | 39.50218 |
| 17 | 0.101036 | 6.809221 | 37.98132 | 41.46025 |
| 18 | 0.088629 | 6.910257 | 39.74835 | 43.27890 |
| 19 | 0.077744 | 6.998885 | 41.38700 | 44.96283 |
| 20 | 0.068197 | 7.076629 | 42.90215 | 46.51771 |
| 21 | 0.059822 | 7.144825 | 44.29944 | 47.94983 |
| 22 | 0.052475 | 7.204647 | 45.58494 | 49.26590 |
| 23 | 0.046031 | 7.257122 | 46.76505 | 50.47283 |
| 24 | 0.040378 | 7.303152 | 47.84627 | 51.57756 |
| 25 | 0.035420 | 7.343530 | 48.83509 | 52.58701 |
| 26 | 0.031070 | 7.378949 | 49.73788 | 53.50790 |
| 27 | 0.027254 | 7.410019 | 50.56088 | 54.34677 |
| 28 | 0.023907 | 7.437272 | 51.31007 | 55.10988 |
| 29 | 0.020971 | 7.461179 | 51.99115 | 55.80318 |
| 30 | 0.018396 | 7.482150 | 52.60956 | 56.43231 |
| 31 | 0.016137 | 7.500546 | 53.17043 | 57.00257 |
| 32 | 0.014155 | 7.516682 | 53.67855 | 57.51894 |
| 33 | 0.012417 | 7.530837 | 54.13843 | 57.98604 |
| 34 | 0.010892 | 7.543253 | 54.55424 | 58.40820 |
| 35 | 0.009555 | 7.554145 | 54.92988 | 58.78941 |
| 40 | 0.004963 | 7.591537 | 56.32195 | 60.20058 |
| 45 | 0.002578 | 7.610957 | 57.14204 | 61.03059 |
| 50 | 0.001339 | 7.621043 | 57.61840 | 61.51211 |
| 60 | 0.000362 | 7.629003 | 58.04771 | 61.94548 |
| 70 | 0.000098 | 7.631149 | 58.18498 | 62.08385 |
| 80 | 0.000027 | 7.631729 | 58.22780 | 62.12696 |
| 90 | 0.000008 | 7.631885 | 58.24091 | 62.14015 |
| 100 | 0.000002 | 7.631927 | 58.24487 | 62.14413 |

II.T-14

VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 15.00%
(TAXA NOMINAL = 13.976%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.811534 | 0.933264 | 0.45577 | 0.93327 |
| 2 | 0.705682 | 1.744798 | 1.66362 | 2.55634 |
| 3 | 0.613637 | 2.450480 | 3.41961 | 4.67338 |
| 4 | 0.533597 | 3.064116 | 5.56019 | 7.12792 |
| 5 | 0.463998 | 3.597713 | 7.95517 | 9.79591 |
| 6 | 0.403476 | 4.061710 | 10.50175 | 12.57989 |
| 7 | 0.350849 | 4.465186 | 13.11964 | 15.40422 |
| 8 | 0.305086 | 4.816034 | 15.74692 | 18.21101 |
| 9 | 0.265292 | 5.121120 | 18.33660 | 20.95678 |
| 10 | 0.230689 | 5.386412 | 20.85378 | 23.60970 |
| 11 | 0.200599 | 5.617100 | 23.27332 | 26.14727 |
| 12 | 0.174434 | 5.817699 | 25.57788 | 28.55446 |
| 13 | 0.151682 | 5.992133 | 27.75627 | 30.82210 |
| 14 | 0.131897 | 6.143814 | 29.80220 | 32.94564 |
| 15 | 0.114694 | 6.275711 | 31.71317 | 34.92409 |
| 16 | 0.099734 | 6.390404 | 33.48958 | 36.75918 |
| 17 | 0.086725 | 6.490137 | 35.13401 | 38.45464 |
| 18 | 0.075413 | 6.576862 | 36.65068 | 40.01568 |
| 19 | 0.065577 | 6.652274 | 38.04493 | 41.44852 |
| 20 | 0.057023 | 6.717851 | 39.32290 | 42.76004 |
| 21 | 0.049585 | 6.774873 | 40.49120 | 43.95752 |
| 22 | 0.043118 | 6.824458 | 41.55670 | 45.04839 |
| 23 | 0.037494 | 6.867575 | 42.52634 | 46.04008 |
| 24 | 0.032603 | 6.905069 | 43.40700 | 46.93992 |
| 25 | 0.028351 | 6.937672 | 44.20539 | 47.75500 |
| 26 | 0.024653 | 6.966022 | 44.92799 | 48.49211 |
| 27 | 0.021437 | 6.990675 | 45.58100 | 49.15772 |
| 28 | 0.018641 | 7.012112 | 46.17026 | 49.75796 |
| 29 | 0.016210 | 7.030752 | 46.70131 | 50.29854 |
| 30 | 0.014096 | 7.046962 | 47.17930 | 50.78482 |
| 31 | 0.012257 | 7.061057 | 47.60904 | 51.22177 |
| 32 | 0.010658 | 7.073314 | 47.99498 | 51.61399 |
| 33 | 0.009268 | 7.083972 | 48.34124 | 51.96570 |
| 34 | 0.008059 | 7.093239 | 48.65160 | 52.28080 |
| 35 | 0.007008 | 7.101298 | 48.92954 | 52.56287 |
| 40 | 0.003485 | 7.128313 | 49.93479 | 53.58194 |
| 45 | 0.001733 | 7.141744 | 50.50174 | 54.15576 |
| 50 | 0.000862 | 7.148422 | 51.81700 | 54.47443 |
| 60 | 0.000213 | 7.153392 | 51.08477 | 54.74475 |
| 70 | 0.000053 | 7.154621 | 51.16325 | 54.82386 |
| 80 | 0.000014 | 7.154925 | 51.18568 | 54.84645 |
| 90 | 0.000004 | 7.155000 | 51.19198 | 54.85278 |
| 100 | 0.000001 | 7.155019 | 51.19372 | 54.85453 |

II.T-15

**VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 16%**

**(TAXA NOMINAL = 14.842%) DE UM FLUXO UNITÁRIO**

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.801146 | 0.929330 | 0.45318 | 0.92933 |
| 2 | 0.690643 | 1.730475 | 1.64499 | 2.53163 |
| 3 | 0.595382 | 2.421118 | 3.36306 | 4.60355 |
| 4 | 0.513261 | 3.016500 | 5.43954 | 6.98508 |
| 5 | 0.442466 | 3.529760 | 7.74286 | 9.55138 |
| 6 | 0.381436 | 3.972226 | 10.17095 | 12.20618 |
| 7 | 0.328825 | 4.353662 | 12.64557 | 14.87623 |
| 8 | 0.283470 | 4.682486 | 15.10768 | 17.50682 |
| 9 | 0.244370 | 4.965955 | 17.51367 | 20.05804 |
| 10 | 0.210664 | 5.210325 | 19.83216 | 22.50174 |
| 11 | 0.181607 | 5.420989 | 22.04152 | 24.81904 |
| 12 | 0.156558 | 5.602595 | 24.12775 | 26.99832 |
| 13 | 0.134964 | 5.759153 | 26.08279 | 29.03357 |
| 14 | 0.116348 | 5.894116 | 27.90312 | 30.92305 |
| 15 | 0.200300 | 6.010464 | 29.58872 | 32.66827 |
| 16 | 0.086466 | 6.110763 | 31.14213 | 34.27306 |
| 17 | 0.074540 | 6.197229 | 32.56774 | 35.74297 |
| 18 | 0.064258 | 6.271768 | 33.87125 | 37.08467 |
| 19 | 0.055395 | 6.336026 | 35.05922 | 38.30557 |
| 20 | 0.047755 | 6.391420 | 36.13873 | 39.41347 |
| 21 | 0.041168 | 6.439174 | 37.11710 | 40.41630 |
| 22 | 0.035490 | 6.480341 | 38.00169 | 41.32198 |
| 23 | 0.030594 | 6.515831 | 38.79975 | 42.13823 |
| 24 | 0.026375 | 6.546425 | 39.51833 | 42.87248 |
| 25 | 0.022737 | 6.572799 | 40.16417 | 43.53184 |
| 26 | 0.019601 | 6.595535 | 40.74367 | 44.12298 |
| 27 | 0.016897 | 6.615135 | 41.26283 | 44.65219 |
| 28 | 0.014567 | 6.632032 | 41.72728 | 45.12530 |
| 29 | 0.012558 | 6.646598 | 42.14224 | 45.54772 |
| 30 | 0.010826 | 6.659155 | 42.51252 | 45.92443 |
| 31 | 0.009332 | 6.669980 | 42.84255 | 46.26000 |
| 32 | 0.008045 | 6.679312 | 43.13639 | 46.55863 |
| 33 | 0.006936 | 6.687357 | 43.39775 | 46.82410 |
| 34 | 0.005979 | 6.694292 | 43.62999 | 47.05990 |
| 35 | 0.005154 | 6.700271 | 43.83617 | 47.26915 |
| 40 | 0.002454 | 6.719846 | 44.56426 | 48.00727 |
| 45 | 0.001169 | 6.729167 | 44.85751 | 48.40530 |
| 50 | 0.000557 | 6.733604 | 45.16694 | 48.61699 |
| 60 | 0.000127 | 6.736723 | 45.33474 | 48.78639 |
| 70 | 0.000029 | 6.737430 | 45.37985 | 48.83186 |
| 80 | 0.000007 | 6.737590 | 45.39167 | 48.84377 |
| 90 | 0.000002 | 6.737626 | 45.39472 | 48.84683 |
| 100 | 0.000001 | 6.737634 | 45.39549 | 48.84761 |

II.T-16

## VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 17.00% (TAXA NOMINAL = 15.700%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.790984 | 0.925451 | 0.45063 | 0.92545 |
| 2 | 0.676054 | 1.716434 | 1.62676 | 2.50742 |
| 3 | 0.577824 | 2.392488 | 3.30805 | 4.53558 |
| 4 | 0.493867 | 2.970311 | 5.32288 | 6.84688 |
| 5 | 0.422109 | 3.464178 | 7.53882 | 9.31621 |
| 6 | 0.360777 | 3.886286 | 9.85489 | 11.84886 |
| 7 | 0.308356 | 4.247062 | 12.19522 | 14.37429 |
| 8 | 0.263552 | 4.555418 | 14.50385 | 16.84114 |
| 9 | 0.225259 | 4.818970 | 16.74060 | 19.21310 |
| 10 | 0.192529 | 5.044228 | 18.87760 | 21.36568 |
| 11 | 0.164555 | 5.236756 | 20.89663 | 23.58349 |
| 12 | 0.140645 | 5.401310 | 22.78685 | 25.55814 |
| 13 | 0.120209 | 5.541955 | 24.54307 | 27.38652 |
| 14 | 0.102743 | 5.662164 | 26.16432 | 29.06945 |
| 15 | 0.087815 | 5.764907 | 27.65274 | 30.61059 |
| 16 | 0.075055 | 5.852721 | 29.01271 | 32.01561 |
| 17 | 0.064150 | 5.927776 | 30.25014 | 33.29155 |
| 18 | 0.054829 | 5.991925 | 31.37192 | 34.44624 |
| 19 | 0.046863 | 6.046754 | 32.38553 | 35.48799 |
| 20 | 0.040054 | 6.093616 | 33.29873 | 36.42523 |
| 21 | 0.034234 | 6.133669 | 34.11929 | 37.26634 |
| 22 | 0.029260 | 6.167903 | 34.85486 | 38.01948 |
| 23 | 0.025008 | 6.197162 | 35.51282 | 38.69244 |
| 24 | 0.021375 | 6.222170 | 36.10018 | 39.29263 |
| 25 | 0.018269 | 6.243544 | 36.62357 | 39.82699 |
| 26 | 0.015615 | 6.261813 | 37.08918 | 40.30198 |
| 27 | 0.013346 | 6.277427 | 37.50275 | 40.72356 |
| 28 | 0.011407 | 6.290773 | 37.86958 | 41.09723 |
| 29 | 0.009750 | 6.302179 | 38.19451 | 41.42802 |
| 30 | 0.008333 | 6.311928 | 38.48198 | 41.72049 |
| 31 | 0.007122 | 6.320261 | 38.73602 | 41.97880 |
| 32 | 0.006088 | 6.327382 | 38.96026 | 42.20670 |
| 33 | 0.005203 | 6.333470 | 39.15801 | 42.40757 |
| 34 | 0.004447 | 6.338672 | 39.33223 | 42.58446 |
| 35 | 0.003801 | 6.343119 | 39.48558 | 42.74009 |
| 40 | 0.001734 | 6.357345 | 40.01446 | 43.27628 |
| 45 | 0.000791 | 6.363834 | 40.28814 | 43.55328 |
| 50 | 0.000361 | 6.366794 | 40.42776 | 43.69442 |
| 60 | 0.000076 | 6.368759 | 40.53340 | 43.80107 |
| 70 | 0.000016 | 6.369168 | 40.55947 | 43.82734 |
| 80 | 0.000004 | 6.369253 | 40.56574 | 43.83366 |
| 90 | 0.000001 | 6.369271 | 40.56722 | 43.83515 |
| 100 | 0.000001 | 6.369275 | 40.56757 | 43.83550 |

II. T-17

VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 18%
(TAXA NOMINAL = 16.551%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.781039 | 0.921626 | 0.44811 | 0.92163 |
| 2 | 0.661898 | 1.702665 | 1.60890 | 2.48371 |
| 3 | 0.560930 | 2.364562 | 3.25452 | 4.46940 |
| 4 | 0.475365 | 2.925492 | 5.21004 | 6.71312 |
| 5 | 0.402852 | 3.400857 | 7.34263 | 9.08994 |
| 6 | 0.341400 | 3.803708 | 9.55275 | 11.50705 |
| 7 | 0.289322 | 4.145107 | 11.76714 | 13.89684 |
| 8 | 0.245188 | 4.434428 | 13.93306 | 16.21141 |
| 9 | 0.207787 | 4.679616 | 16.01378 | 18.41810 |
| 10 | 0.176090 | 4.887402 | 17.98488 | 20.49596 |
| 11 | 0.149229 | 5.063492 | 19.83140 | 22.43295 |
| 12 | 0.126466 | 5.212721 | 21.54547 | 24.22370 |
| 13 | 0.107174 | 5.339186 | 23.12454 | 25.86774 |
| 14 | 0.090826 | 5.446360 | 24.56991 | 27.36818 |
| 15 | 0.076971 | 5.537185 | 25.88562 | 28.73055 |
| 16 | 0.065230 | 5.614156 | 27.07761 | 29.96208 |
| 17 | 0.055280 | 5.679385 | 28.15299 | 31.07098 |
| 18 | 0.046847 | 5.734664 | 29.11961 | 32.06600 |
| 19 | 0.039701 | 5.781511 | 29.98563 | 32.95609 |
| 20 | 0.033645 | 5.821211 | 30.75924 | 33.75010 |
| 21 | 0.028513 | 5.854856 | 31.44849 | 34.45664 |
| 22 | 0.024163 | 5.883368 | 32.06111 | 35.08391 |
| 23 | 0.020478 | 5.907531 | 32.60445 | 35.63966 |
| 24 | 0.017354 | 5.928008 | 33.08538 | 36.13111 |
| 25 | 0.014707 | 5.945361 | 33.51030 | 36.56494 |
| 26 | 0.012463 | 5.960068 | 33.88511 | 36.94731 |
| 27 | 0.010562 | 5.972531 | 34.21520 | 37.28381 |
| 28 | 0.008951 | 5.983093 | 34.50551 | 37.57954 |
| 29 | 0.007586 | 5.992043 | 34.76048 | 37.83911 |
| 30 | 0.006429 | 5.999629 | 34.98415 | 38.06667 |
| 31 | 0.005448 | 6.006057 | 35.18012 | 38.26595 |
| 32 | 0.004617 | 6.011505 | 35.35165 | 38.44028 |
| 33 | 0.003913 | 6.016121 | 35.50163 | 38.59263 |
| 34 | 0.003316 | 6.020034 | 35.63264 | 38.72565 |
| 35 | 0.002810 | 6.023350 | 35.74698 | 38.84170 |
| 40 | 0.001229 | 6.033718 | 36.13227 | 39.23231 |
| 45 | 0.000537 | 6.038250 | 36.32334 | 39.42571 |
| 50 | 0.000235 | 6.038250 | 36.41677 | 39.52015 |
| 60 | 0.000045 | 6.041476 | 36.48357 | 39.58759 |
| 70 | 0.000009 | 6.041714 | 36.49871 | 39.60286 |
| 80 | 0.000002 | 6.041759 | 36.50206 | 39.60623 |
| 90 | 0.000001 | 6.041768 | 36.50278 | 39.60696 |
| 100 | 0.000001 | 6.041769 | 36.50294 | 39.60712 |

II.T-18

VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 20%
(TAXA NOMINAL = 18.232%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.761780 | 0.914136 | 0.44319 | 0.91414 |
| 2 | 0.634817 | 1.675916 | 1.57429 | 2.43770 |
| 3 | 0.529014 | 2.310733 | 3.15170 | 4.34215 |
| 4 | 0.440845 | 2.839747 | 4.99521 | 6.45820 |
| 5 | 0.367371 | 3.280591 | 6.97232 | 8.66243 |
| 6 | 0.306143 | 3.647962 | 8.98728 | 10.86665 |
| 7 | 0.255119 | 3.954104 | 10.97255 | 13.00965 |
| 8 | 0.212599 | 4.209223 | 12.88207 | 15.05060 |
| 9 | 0.177166 | 4.421822 | 14.68593 | 16.96390 |
| 10 | 0.147639 | 4.598987 | 16.36631 | 18.73564 |
| 11 | 0.123032 | 4.746625 | 17.91427 | 20.35966 |
| 12 | 0.102527 | 4.869657 | 19.32727 | 21.83604 |
| 13 | 0.085439 | 4.972184 | 20.60729 | 23.16888 |
| 14 | 0.071199 | 5.057622 | 21.75942 | 24.36503 |
| 15 | 0.059333 | 5.128821 | 22.79072 | 25.43301 |
| 16 | 0.049444 | 5.188154 | 23.70947 | 26.38233 |
| 17 | 0.041204 | 5.237597 | 24.52454 | 27.22287 |
| 18 | 0.034336 | 5.278800 | 25.24497 | 27.96453 |
| 19 | 0.028614 | 5.313136 | 25.87966 | 28.61691 |
| 20 | 0.023845 | 5.341749 | 26.43719 | 29.18917 |
| 21 | 0.019871 | 5.365594 | 26.92563 | 29.68991 |
| 22 | 0.016559 | 5.385464 | 27.35254 | 30.12705 |
| 23 | 0.013799 | 5.402023 | 27.72486 | 30.50790 |
| 24 | 0.011500 | 5.415822 | 28.04892 | 30.83907 |
| 25 | 0.009583 | 5.427321 | 28.33047 | 31.12655 |
| 26 | 0.007986 | 5.436903 | 28.57468 | 31.37569 |
| 27 | 0.006655 | 5.444889 | 28.78618 | 31.59130 |
| 28 | 0.005546 | 5.451543 | 28.96907 | 31.77763 |
| 29 | 0.004622 | 5.457089 | 29.12704 | 31.93844 |
| 30 | 0.003852 | 5.461710 | 29.26329 | 32.07708 |
| 31 | 0.003210 | 5.465561 | 29.38069 | 32.19646 |
| 32 | 0.002675 | 5.468770 | 29.48173 | 32.29915 |
| 33 | 0.002229 | 5.471444 | 29.56860 | 32.38741 |
| 34 | 0.001858 | 5.473673 | 29.64323 | 32.46318 |
| 35 | 0.001548 | 5.475530 | 29.70727 | 32.52818 |
| 40 | 0.000622 | 5.481084 | 29.91346 | 32.72724 |
| 45 | 0.000250 | 5.483316 | 30.00749 | 32.83241 |
| 50 | 0.000101 | 5.484213 | 30.04976 | 32.87514 |
| 60 | 0.000017 | 5.484718 | 30.07683 | 32.90247 |
| 70 | 0.000003 | 5.484800 | 30.08202 | 32.90770 |
| 80 | 0.000001 | 5.484813 | 30.08299 | 32.90868 |
| 90 | 0.000001 | 5.484815 | 30.08316 | 32.90886 |
| 100 | 0.000001 | 5.484816 | 30.08320 | 32.90889 |

II.T-20

## VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 22% (TAXA NOMINAL = 19.885%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.743320 | 0.906850 | 0.43841 | 0.90685 |
| 2 | 0.609279 | 1.650170 | 1.54108 | 2.39349 |
| 3 | 0.499409 | 2.259448 | 3.05419 | 4.22133 |
| 4 | 0.409352 | 2.758857 | 4.79385 | 6.21896 |
| 5 | 0.335534 | 3.168208 | 6.62915 | 8.26572 |
| 6 | 0.275028 | 3.503742 | 8.46903 | 10.27892 |
| 7 | 0.225433 | 3.778769 | 10.25215 | 12.20411 |
| 8 | 0.184781 | 4.004202 | 11.93916 | 14.00757 |
| 9 | 0.151460 | 4.188982 | 13.50674 | 15.67060 |
| 10 | 0.124148 | 4.340442 | 14.94310 | 17.18520 |
| 11 | 0.101761 | 4.464589 | 16.24459 | 18.55082 |
| 12 | 0.083410 | 4.566349 | 17.41314 | 19.77194 |
| 13 | 0.068369 | 4.649759 | 18.45439 | 20.85627 |
| 14 | 0.056040 | 4.718128 | 19.37623 | 21.81343 |
| 15 | 0.045935 | 4.774168 | 20.18788 | 22.65403 |
| 16 | 0.037652 | 4.820102 | 20.89911 | 23.38898 |
| 17 | 0.030862 | 4.857754 | 21.51973 | 24.02905 |
| 18 | 0.025297 | 4.888615 | 22.05929 | 24.58456 |
| 19 | 0.020735 | 4.913912 | 22.52686 | 25.06519 |
| 20 | 0.016996 | 4.934646 | 22.93084 | 25.47988 |
| 21 | 0.013931 | 4.951642 | 23.27897 | 25.83679 |
| 22 | 0.011419 | 4.965573 | 23.57825 | 26.14327 |
| 23 | 0.009360 | 4.976992 | 23.83499 | 26.40590 |
| 24 | 0.007672 | 4.986351 | 24.05478 | 26.63053 |
| 25 | 0.006289 | 4.994023 | 24.24262 | 26.82233 |
| 26 | 0.005155 | 5.000311 | 24.40287 | 26.98583 |
| 27 | 0.004225 | 5.005466 | 24.53937 | 27.12500 |
| 28 | 0.003464 | 5.009691 | 24.65549 | 27.24330 |
| 29 | 0.002839 | 5.013154 | 24.75413 | 27.34372 |
| 30 | 0.002327 | 5.015992 | 24.83782 | 27.42888 |
| 31 | 0.001908 | 5.018319 | 24.90875 | 27.50101 |
| 32 | 0.001564 | 5.020226 | 24.96879 | 27.56204 |
| 33 | 0.001282 | 5.021790 | 25.01957 | 27.61362 |
| 34 | 0.001051 | 5.023071 | 25.06247 | 27.65719 |
| 35 | 0.000861 | 5.024121 | 25.09869 | 27.69395 |
| 40 | 0.000319 | 5.027129 | 25.21025 | 27.80706 |
| 45 | 0.000118 | 5.028242 | 25.25709 | 27.85448 |
| 50 | 0.000044 | 5.028653 | 25.27648 | 27.87408 |
| 60 | 0.000006 | 5.028862 | 25.28763 | 27.88534 |
| 70 | 0.000001 | 5.028891 | 25.28944 | 27.88717 |
| 80 | 0.000001 | 5.028894 | 25.28973 | 27.88746 |
| 90 | 0.000001 | 5.028895 | 25.28978 | 27.88750 |
| 100 | 0.000001 | 5.028895 | 25.28978 | 27.88751 |

II. T-22

# VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 24%
## (TAXA NOMINAL = 21.511%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.725613 | 0.899759 | 0.43377 | 0.89976 |
| 2 | 0.585172 | 1.625371 | 1.50919 | 2.35099 |
| 3 | 0.471913 | 2.210542 | 2.96163 | 4.10650 |
| 4 | 0.380575 | 2.682455 | 4.60487 | 5.90415 |
| 5 | 0.306915 | 3.063029 | 6.31064 | 7.89702 |
| 6 | 0.247512 | 3.369944 | 7.99317 | 9.73851 |
| 7 | 0.199607 | 3.617456 | 9.59757 | 11.47109 |
| 8 | 0.160973 | 3.817062 | 11.09104 | 13.08794 |
| 9 | 0.129817 | 3.978035 | 12.45643 | 14.51670 |
| 10 | 0.104692 | 4.107852 | 13.68736 | 15.81487 |
| 11 | 0.084429 | 4.212543 | 14.78474 | 16.96647 |
| 12 | 0.068088 | 4.296971 | 15.75415 | 17.97961 |
| 13 | 0.054910 | 4.365058 | 16.60402 | 18.86474 |
| 14 | 0.044282 | 4.419967 | 17.34431 | 19.63347 |
| 15 | 0.035711 | 4.464249 | 17.98560 | 20.29769 |
| 16 | 0.028800 | 4.499960 | 18.53848 | 20.86907 |
| 17 | 0.023226 | 4.528759 | 19.01315 | 21.35865 |
| 18 | 0.018730 | 4.551984 | 19.41918 | 21.77670 |
| 19 | 0.015105 | 4.570714 | 19.76534 | 22.13257 |
| 20 | 0.012182 | 4.585819 | 20.05962 | 22.43467 |
| 21 | 0.009824 | 4.598000 | 20.30911 | 22.69047 |
| 22 | 0.007923 | 4.607823 | 20.52015 | 22.90659 |
| 23 | 0.006389 | 4.615746 | 20.69825 | 23.08880 |
| 24 | 0.005153 | 4.622135 | 20.84828 | 23.24214 |
| 25 | 0.004156 | 4.627287 | 20.97442 | 23.37095 |
| 26 | 0.003351 | 4.631442 | 21.08030 | 23.47898 |
| 27 | 0.002703 | 4.634793 | 21.16904 | 23.56946 |
| 28 | 0.002180 | 4.637495 | 21.24331 | 23.64512 |
| 29 | 0.001758 | 4.639675 | 21.30538 | 23.70832 |
| 30 | 0.001418 | 4.641432 | 21.35719 | 23.76105 |
| 31 | 0.001144 | 4.642850 | 21.40040 | 23.80493 |
| 32 | 0.000922 | 4.643992 | 21.43638 | 23.84156 |
| 33 | 0.000744 | 4.644914 | 21.46632 | 23.87198 |
| 34 | 0.000600 | 4.645658 | 21.49121 | 23.89725 |
| 35 | 0.000484 | 4.646257 | 21.51188 | 23.91824 |
| 40 | 0.000165 | 4.647903 | 21.57288 | 23.98009 |
| 45 | 0.000057 | 4.648464 | 21.59649 | 24.00399 |
| 50 | 0.000020 | 4.648656 | 21.60551 | 24.00399 |
| 60 | 0.000003 | 4.648744 | 21.61018 | 24.01782 |
| 70 | 0.000001 | 4.648754 | 21.61082 | 24.01847 |
| 80 | 0.000001 | 4.648755 | 21.61091 | 24.01856 |
| 90 | 0.000001 | 4.648755 | 21.61092 | 24.01857 |
| 100 | 0.000001 | 4.648755 | 21.61092 | 24.01857 |

II. T-24

VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 25%
(TAXA NOMINAL = 22.314%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.717028 | 0.896285 | 0.43149 | 0.89629 |
| 2 | 0.573622 | 1.613312 | 1.49371 | 2.33034 |
| 3 | 0.458898 | 2.186933 | 2.91711 | 4.05121 |
| 4 | 0.367118 | 2.645831 | 4.51472 | 5.88680 |
| 5 | 0.293695 | 3.012949 | 6.15993 | 7.72239 |
| 6 | 0.234956 | 3.306643 | 7.76980 | 9.48455 |
| 7 | 0.187965 | 3.541599 | 9.29264 | 11.12024 |
| 8 | 0.150372 | 3.729563 | 10.69888 | 12.63298 |
| 9 | 0.120298 | 3.879935 | 11.97425 | 13.98630 |
| 10 | 0.096238 | 4.000232 | 13.11483 | 15.18927 |
| 11 | 0.076991 | 4.096470 | 14.12354 | 16.24789 |
| 12 | 0.061593 | 4.173460 | 15.00750 | 17.17177 |
| 13 | 0.049274 | 4.235052 | 15.77626 | 17.97247 |
| 14 | 0.039419 | 4.284326 | 16.44054 | 18.66230 |
| 15 | 0.031536 | 4.323745 | 17.01138 | 19.25359 |
| 16 | 0.025229 | 4.355280 | 17.49959 | 19.75815 |
| 17 | 0.020183 | 4.380508 | 17.91538 | 20.18703 |
| 18 | 0.016147 | 4.400690 | 18.26820 | 20.55031 |
| 19 | 0.012917 | 4.416837 | 18.56660 | 20.85709 |
| 20 | 0.010334 | 4.429753 | 18.81824 | 21.11542 |
| 21 | 0.008267 | 4.440087 | 19.02989 | 21.33243 |
| 22 | 0.006614 | 4.448354 | 19.20747 | 21.51429 |
| 23 | 0.005291 | 4.454967 | 19.35615 | 21.66640 |
| 24 | 0.004233 | 4.460258 | 19.48038 | 21.79338 |
| 25 | 0.003387 | 4.464490 | 19.58400 | 21.89920 |
| 26 | 0.002709 | 4.467876 | 19.67028 | 21.98723 |
| 27 | 0.002168 | 4.470585 | 19.74202 | 22.06037 |
| 28 | 0.001734 | 4.472752 | 19.80157 | 22.12105 |
| 29 | 0.001387 | 4.474486 | 19.85095 | 22.17133 |
| 30 | 0.001110 | 4.475873 | 19.89184 | 22.21293 |
| 31 | 0.000888 | 4.476982 | 19.92566 | 22.24733 |
| 32 | 0.000711 | 4.477870 | 19.95360 | 22.27573 |
| 33 | 0.000569 | 4.478580 | 19.97667 | 22.29917 |
| 34 | 0.000455 | 4.479148 | 19.99569 | 22.31846 |
| 35 | 0.000364 | 4.479603 | 20.01136 | 22.33439 |
| 40 | 0.000120 | 4.480825 | 20.05663 | 22.38030 |
| 45 | 0.000040 | 4.481225 | 20.07347 | 22.39735 |
| 50 | 0.000013 | 4.481357 | 20.07965 | 22.40359 |
| 60 | 0.000002 | 4.481414 | 20.08269 | 22.40666 |
| 70 | 0.000001 | 4.481420 | 20.08308 | 22.40705 |
| 80 | 0.000001 | 4.481421 | 20.08312 | 22.40710 |
| 90 | 0.000001 | 4.481421 | 20.08313 | 22.40710 |
| 100 | 0.000001 | 4.481421 | 20.08313 | 22.40710 |

II.T-25

## VALOR ATUAL NA ÉPOCA ZERO E A TAXA PERIÓDICA EFETIVA I = 30.00% (TAXA NOMINAL = 26.236%) DE UM FLUXO UNITÁRIO

| Número de Períodos N | Uniforme entre as Épocas N e N + 1 | Uniforme Entre as Épocas 0 e N | Linear Entre as Épocas 0 e N | Em Gradiente Entre as Épocas 0 e N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.676597 | 0.879576 | 0.42058 | 0.87958 |
| 2 | 0.520459 | 1.556173 | 1.42070 | 2.23277 |
| 3 | 0.400354 | 2.076632 | 2.71048 | 3.79415 |
| 4 | 0.307964 | 2.476985 | 4.10298 | 5.39556 |
| 5 | 0.236896 | 2.784949 | 5.48209 | 6.93538 |
| 6 | 0.182228 | 3.021844 | 6.77984 | 8.35675 |
| 7 | 0.140175 | 3.204071 | 7.96034 | 9.63234 |
| 8 | 0.107827 | 3.344246 | 9.00859 | 10.75374 |
| 9 | 0.082944 | 3.452073 | 9.92276 | 11.72418 |
| 10 | 0.063803 | 3.535016 | 10.70891 | 12.55362 |
| 11 | 0.049080 | 3.598819 | 11.37745 | 13.25545 |
| 12 | 0.037754 | 3.647898 | 11.94079 | 13.84440 |
| 13 | 0.029041 | 3.685651 | 12.41187 | 14.33519 |
| 14 | 0.022340 | 3.714692 | 12.80329 | 14.74176 |
| 15 | 0.017184 | 3.737031 | 13.12672 | 15.07685 |
| 16 | 0.013219 | 3.754215 | 13.39270 | 15.35179 |
| 17 | 0.010169 | 3.767434 | 13.61051 | 15.57651 |
| 18 | 0.007822 | 3.777602 | 13.78823 | 15.75953 |
| 19 | 0.006017 | 3.785423 | 13.93276 | 15.90814 |
| 20 | 0.004629 | 3.791440 | 14.04995 | 16.02847 |
| 21 | 0.003561 | 3.796068 | 14.14473 | 16.12566 |
| 22 | 0.002739 | 3.799628 | 14.22119 | 16.20398 |
| 23 | 0.002107 | 3.802367 | 14.28275 | 16.26697 |
| 24 | 0.001621 | 3.804473 | 14.33221 | 16.31753 |
| 25 | 0.001247 | 3.806094 | 14.37187 | 16.35804 |
| 26 | 0.000959 | 3.807340 | 14.40363 | 16.39045 |
| 27 | 0.000738 | 3.808299 | 14.42902 | 16.41634 |
| 28 | 0.000568 | 3.809037 | 14.44929 | 16.43699 |
| 29 | 0.000437 | 3.809604 | 14.46544 | 16.45344 |
| 30 | 0.000336 | 3.810040 | 14.47831 | 16.46653 |
| 31 | 0.000259 | 3.810376 | 14.48854 | 16.47694 |
| 32 | 0.000199 | 3.810634 | 14.49667 | 16.48521 |
| 33 | 0.000153 | 3.810833 | 14.50312 | 16.49176 |
| 34 | 0.000118 | 3.810986 | 14.50824 | 16.49696 |
| 35 | 0.000091 | 3.811103 | 14.51229 | 16.50107 |
| 40 | 0.000025 | 3.811390 | 14.52287 | 16.51180 |
| 45 | 0.000007 | 3.811467 | 14.52611 | 16.51508 |
| 50 | 0.000002 | 3.811488 | 14.52708 | 16.51607 |
| 60 | 0.000001 | 3.811495 | 14.52746 | 16.51645 |
| 70 | 0.000001 | 3.811495 | 14.52749 | 16.51648 |
| 80 | 0.000001 | 3.811495 | 14.52750 | 16.51648 |
| 90 | 0.000001 | 3.811495 | 14.52750 | 16.51648 |
| 100 | 0.000001 | 3.811495 | 14.52750 | 16.51648 |

II.T-30

## APÊNDICE III

## PROGRAMA PARA DETERMINAÇÃO DA(S) TAXA(S) INTERNA(S) DE RETÔRNO DE UM PROJETO

O algoritmo que ora apresentamos consiste numa adaptação do veiculado através de um programa em FORTRAN, constante de [ 7 ] págs. 476-477. Julgamos necessária uma adaptação porquanto, na sua versão original, o programa não só recusava projetos que não fôssem do tipo investimento ($a_0 < 0$), como ainda, uma vez detectada a existência de mais de uma solução (mais de uma "taxa interna"), ficávamos também sem nenhuma indicação para a avaliação do projeto.

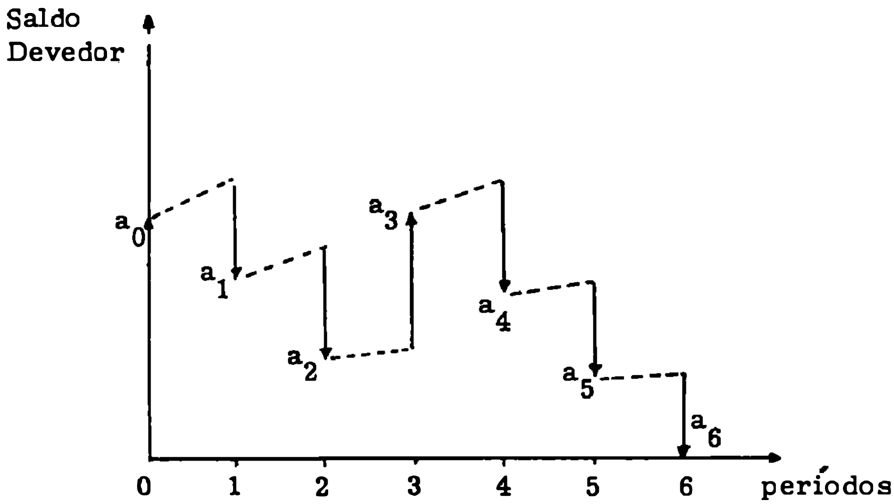
Mantivemos, porém, o contrôle do indicador de existência de soluções múltiplas, não só por poupar tempo na determinação dessas soluções, permitindo-nos eliminar a procura de "taxas internas" sem significação econômica,+ como também por ser êsse contrôle baseado em engenhosa análise financeira, como expomos a seguir.

Considerando-se um projeto do tipo investimento ($a_0 < 0$), podemos interpretar o fluxo de caixa inicial, $a_0$, como o valor de um empréstimo a ser

---

+ No programa, admitiu-se como significante, bastante arbitràriamente, taxas, sob forma unitária, no intervalo [ 0,01;5 ].

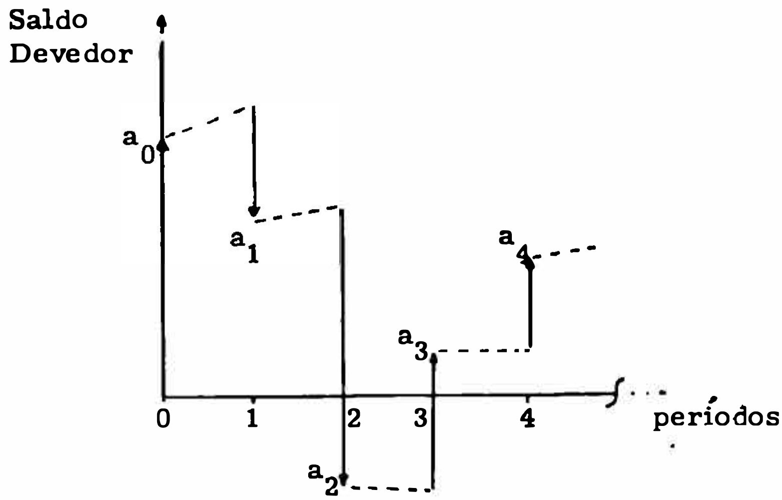
restituído, a determinada taxa de juros (que será a taxa interna de retôrno), por meio das receitas líquidas futuras. Gràficamente, invertendo-se a convenção de sinais, considerando um projeto com vida igual a 6 períodos e receitas excedendo despesas nas épocas 1, 2, 4, 5 e 6, teremos a seguinte evolução para o "saldo devedor" (onde as linhas pontilhadas indicam crescimento devido à taxa de juros i).




Êste seria um caso em que, na época 3, fôsse necessário uma nova inversão, o que seria interpretado como se mais fôsse tomado emprestado, o nôvo débito sendo somado ao valor remanescente do anterior, nessa época, e devendo ser pago à mesma taxa de juros.

A taxa interna de retôrno do projeto será a taxa tal que o "saldo devedor", no fim da vida do projeto, seja nulo, pois esta condição nada mais significa que anular o montante do projeto na época n.

Ora, para certos casos de projetos do tipo não-convencional de investimento, é possível existirem taxas $i > 0$ para as quais o "saldo devedor" evolua como no esquema a seguir:




Tal fato, "saldo devedor" não positivo antes do fim da vida do projeto, representaria, do ponto de vista financeiro, que se passou de devedor a credor, o que, via de regra, leva à consideração de uma nova taxa de juros.+

A adaptação aludida, além da correção de pequenas imperfeições, consiste em, uma vez apontada a possibilidade de existência de mais de uma "taxa interna de retôrno", $M_j(i) > 0$ para $j < n$, ou, sendo um projeto do tipo financeiro, $a_0 > 0$, construir um gráfico que mostre a evolução do valor atual do projeto para taxas no intervalo $[0,01;5]$.

Visto que o processamento do IPEA vem sendo realizado no sistema IBM-7044 do Rio Datacentro da PUCRJ, o programa foi escrito em FORTRAN - IV.++ Em anexo apresentamos as listagens do programa principal e a da subrotina GRAFIC, e ainda, para os dois exemplos abaixo especificados, o formato de perfuração dos dados, bem como parte do correspondente relatório de saída.

Para a montagem da sequência dos cartões de dados para processamento, devem ser observadas as seguintes indicações:

---

+ Verifica-se, assim, que projetos de investimento nos quais o último fluxo de caixa seja negativo (despesas maiores do que as receitas) apresentarão mais de uma "taxa interna" não negativa.

++ Veja-se, por exemplo, "A GUIDE TO FORTRAN IV PROGRAMMING" de Daniel D. McCracken, Wiley, 1968.

a) não há limitação no número de projetos a serem processados de uma só vez;

b) cada projeto só pode ter, no máximo, uma vida igual a 100 períodos; isto é, o maior número de fluxos de caixa associados a um projeto é cem;

c) cada cartão de dados se supõe dividido em oito campos, cada um dêles formado por dez colunas;

d) o primeiro campo de cada cartão de dados apresenta formato livre, isto é, o usuário pode lançar mão das dez primeiras colunas para qualquer tipo de identificação que desejar;

e) os campos numéricos, isto é, do segundo ao oitavo inclusive, devem ser preenchidos a partir da direita ("right justified");

f) cada projeto deve ser alimentado no computador por meio dos seguintes cartões, que devem ser colocados sequencialmente:

f. 1 - em um primeiro cartão será colocado, no segundo campo (colunas de 11 a 20), o inteiro, N, que represente a vida do projeto em número de períodos,

f. 2 - a partir do segundo cartão e começando-se no segundo campo, serão perfurados os N + 1 fluxos de caixa líquidos do projeto, utilizando-se os sete campos numéricos de cada cartão (notar que os fluxos de caixa ocuparão um número de cartões igual a $[N+1]/7$, onde $[N+1]$ é o menor múltiplo de 7 não inferior a N + 1).

g) após o último cartão de dados do último projeto, será colocado um cartão, identificado no exemplo como "vida final", e contendo um zero no segundo campo, que sinalizará o fim de dados.

## OBSERVAÇÕES:

1) Admite-se que os fluxos de caixa líquidos sejam representados por números do tipo real, estando implícito que o ponto decimal esteja situado logo após a última coluna de cada campo. Caso o ponto decimal seja perfurado, a pontuação implícita do campo correspondente será ignorada.

2) Fluxo de caixa nulo poderá ser indicado deixando-se em branco o campo correspondente.

Como ilustração, é apresentado no Anexo 4, após as listagens do programa principal e da subrotina GRAFIC a fôlha de pedido de perfuração para o caso de processamento dos dois seguintes projetos:

A: $a_0$ = - 50 000; $a_j$ = 10 000; $a_2$ = 20 000,00;

$a_3 = a_4$ = 15 000.

B: $b_0$ = - 400,00; $b_1$ = 880; $b_2$ = - 483.

Em seguida à fôlha de pedido de perfuração, que corresponde à entrada dos dados, é apresentado o relatório de saída correspondente.

```
C      CLOVIS DE FARO - TRABALHO IPEA NO 8787
C    DETERMINACAO DA(S) TAXA(S) INTERNA(S) DE RETORNO DE UM PROJETO DADOS
C       OS FLUXOS DE CAIXA LIQUIDOS AO LONGO DE SUA VIDA.
      DIMENSION FLUXO(100),XMONT(100),TAXA(86),VATUAL(86),TAXA1(40),TAXA
     12(46),VATUA1(40),VATUA2(46)
      EQUIVALENCE (VATUAL(1),VATUA1(1)),(VATUAL(41),VATUA2(1)),(TAXA(1),
     1TAXA1(1)),(TAXA(41),TAXA2(1))
      MENTRA = 5
      MSAI = 6
C    MENTRA DESIGNA A UNIDADE DE ENTRADA E MSAI DESIGNA A UNIDADE DE
C       SAIDA.
      NUMERO = 0
    1 READ(MENTRA,2) N
C    N,EM NO. DE PERIODOS A QUE SE REFIRIRA(O) A(S) TAXA(S),DESIGNA
C       A VIDA DO PROJETO.
    2 FORMAT(10X,I10)
      IF(N.EQ.0) STOP
C    O PROGRAMA SERA TERMINADO AO ENCONTRAR-SE VIDA NULA.
      NUMERO = NUMERO + 1
      M= N + 1
C    M DESIGNA O NO. MAXIMO POSSIVEL DE FLUXOS DE CAIXA ASSOCIADOS AO
C       PROJETO (POIS INCLUI-SE A EPOCA ZERO).
      READ(MENTRA,10) (FLUXO(J),J =1,M)
   10 FORMAT(10X,7F10.0)
      WRITE(MSAI,20) NUMERO
   20 FORMAT(1H1,21X,7HPROJETO,I5,//,10X,5HEPOCA,4X,22HFLUXO DE CAIXA LI
     1QUIDO,/)
      DO 30 J = 1,M
      IEPOCA = J - 1
      WRITE(MSAI,21) IEPOCA,IEPOCA,FLUXO(J)
   21 FORMAT(9X,I4,8X,2HA(,I4,2H)=,F12.2,/)
   30 CONTINUE
      WRITE(MSAI,40)
   40 FORMAT(/////,10X,9HINTERACAO,4X,22HTAXA PERIODICA TENTADA,/24X,20H
     1(SOB FORMA UNITARIA),//)
      ERRO = FLUXO(1) * .00001
C    TOLERANCIA DE .001 POR CENTO DO FLUXO INICIAL
      ITER = 1
      RATE = 1.
C    A PRIMEIRA TENTATIVA SERA FEITA COM UMA TAXA DE 100 POR CENTO
C       POR PERIODO.
      NFLAG = 1
C    NFLAG E UM CONTROLE.
      XMONT(1) = FLUXO(1)
C    XMONT(J) E O BALANCO DO PROJETO NA EPOCA J-1.
      IF(XMONT(1)) 41,42,42
   41 DO 50 J = 2,M
      XMONT(J) = XMONT(J-1) * (1.0 + RATE) + FLUXO(J)
      IF(XMONT(J) + ERRO) 50,50,90
   50 CONTINUE
      WRITE(MSAI,51) ITER,RATE
   51 FORMAT(12X,I4,10X,F11.5)
      ITER = ITER + 1
      IF(XMONT(M) - ERRO) 60,70,70
```

III.A-1

```
 60 NFLAG = 0
    ML = M
 80 DRATE = XMONT(1)
    M1 = ML - 1
    M2 = M1 - 1
    IF(M2) 100,120,100
100 DO 110 II = 2,M1
110 DRATE = DRATE * (1.0 + RATE) + XMONT(II)
120 TEMP = RATE
    RATE = RATE - XMONT(ML) / DRATE
    DIF = ABS(RATE - TEMP)
    IF(DIF - 0.00001) 70,70,41
 90 WRITE(MSAI,51) ITER,RATE
    ITER = ITER + 1
    IF(NFLAG) 70,140,130
130 ML = J
    GO TO 80
 42 WRITE(MSAI,131)
131 FORMAT(///10X,72HO PROJETO NAO E DO TIPO INVESTIMENTO POIS O FLUXO
   1 INICIAL NAO E NEGATIVO,/,15X,60HOLHE O GRAFICO PARA SABER A(S) TA
   2XA(S) INTERNA(S) DE RETORNO,/)
    GO TO 148
140 WRITE(MSAI,141) J
141 FORMAT(///,10X,36HNAO EXISTE SOLUCAO UNICA POIS XMONT(,I4,12H) E P
   1OSITIVO,/,15X,54HOLHE O GRAFICO PARA SABER AS TAXAS INTERNAS DE RE
   2TORNO,/)
  PREPARO DOS DADOS PARA O TRACADO DO GRAFICO ATRAVES A SUB ROTINA
     GRAFIC
148 WRITE(MSAI,149)
149 FORMAT(1H1,10X,107HGRAFICO DA FUNCAO VALOR ATUAL DO PROJETO PARA T
   1AXAS NO INTERVALO DE 1 POR CENTO A 500 POR CENTO POR PERIODO,//)
    TAXA(1) = 0.01
    DO 160 L = 2,40
160 TAXA(L) = TAXA(L-1) + 0.01
    DO 170 L = 41,86
170 TAXA(L) = TAXA(L-1) + 0.10
    DO 180 L = 1,86
    VATUAL(L) = FLUXO(M)
    DO 180 K = 2,M
    KI = M - K + 1
180 VATUAL(L) = VATUAL(L) * (1.0 + TAXA(L))**(-1) + FLUXO(KI)
    WRITE(MSAI,185)
185 FORMAT(15X,85HPRIMEIRO TRECHO - TAXAS NO INTERVALO DE 1 A 40 POR C
   1ENTO,VARIANDO DE 1 EM 1 POR CENTO,//)
    CALL GRAFIC (TAXA1,VATUA1,40)
    WRITE(MSAI,190)
190 FORMAT(1H1,15X,88HSEGUNDO TRECHO - TAXAS NO INTERVALO DE 50 A 500
   1POR CENTO,VARIANDO DE 10 EM 10 POR CENTO,//)
    CALL GRAFIC (TAXA2,VATUA2,46)
 70 WRITE(MSAI,200)
200 FORMAT(////,10X,65HNAO HAVENDO GRAFICO A TAXA INTERNA DE RETORNO S
   1ERA A TAXA TENTADA ,/,10X,65HNA ULTIMA INTERACAO , CASO CONTRARIO
   2A(S) TAXA(S) QUE ANULA(M) O  ,/,10X,53HVALOR ATUAL DO PROJETO SERA
   3(O) OBTIDA(S) DO GRAFICO. ,///,20X,15H FIM DO PROJETO )
    GO TO 1
    END
```

III.A-2

```
      SUBROUTINE GRAFIC (VARIA,FUNCAO,NPONTO)
      INTEGER LINHA,BRANCO,PONTO,MAIX
      DIMENSION VARIA(NPONTO),FUNCAO(NPONTO),LINHA(109)
      DATA BRANCO,MAIX,PONTO/1H ,1HX,1H./
C   DETERMINACAO DO MAXIMO E DO MINIMO DA FUNCAO NO CAMPO DE VARIACAO
      YMAX = FUNCAO(1)
      YMIN = FUNCAO(1)
      DO 300 IND = 2,NPONTO
      IF(FUNCAO(IND).GT.YMAX) YMAX = FUNCAO(IND)
      IF(FUNCAO(IND).LT.YMIN) YMIN = FUNCAO(IND)
  300 CONTINUE
      AMPLIT = YMAX - YMIN
C   DETERMINACAO DA POSICAO DO EIXO DAS ABCISSAS
      X = YMAX * YMIN
      IF(X)360,361,362
  360 IPONTO = ((-YMIN)/AMPLIT) * 107. + 1.5
C   O GRAFICO OCUPARA 108 COLUNAS EM CADA LINHA
      GO TO 370
  361 IF(YMAX)363,364,363
  363 IPONTO = 1
C   O EIXO SE CONFUNDIRA COM O PONTO DE MAX.
      GO TO 370
  364 IPONTO = 108
C   O EIXO SE CONFUNDIRA COM O PONTO DE MIN.
      GO TO 370
  362 IPONTO = 0
C   A FUNCAO NAO CORTA O EIXO
      WRITE(6,365)
  365 FORMAT(15X,47H A FUNCAO NAO SE ANULA NO INTERVALO CONSIDERADO,//)
C   UMA LINHA DE PONTOS SERA O EIXO VERTICAL QUANDO O PAPEL FOR VIRADO
  370 DO 371 MARCA = 1,109
  371 LINHA(MARCA) = PONTO
      WRITE(6,372) LINHA
  372 FORMAT(3X,18HTAXA VALOR ATUAL *,109A1)
C   TORNE A LINHA EM BRANCO
      DO 373 MARCA = 1,109
  373 LINHA(MARCA) = BRANCO
C   PONHA UM PONTO NA POSICAO DO EIXO
      IF(IPONTO)374,374,375
  374 MARCAP = 109
C   O EIXO ESTARA FORA DO ESPACO ALOCADO
      GO TO 380
  375 MARCAP = IPONTO
  380 LINHA(MARCAP) = PONTO
      DO 400 L = 1,NPONTO
      MARCA = (FUNCAO(L) - YMIN)/AMPLIT * 107. + 1.5
      LINHA(MARCA) = MAIX
C   PONHA O SINAL NO GRAFICO
      WRITE(6,390) VARIA(L),FUNCAO(L),LINHA
  390 FORMAT(2X,F5.2,F12.2,2H *,109A1)
C   PONHA O SINAL , QUE PODERA TER FICADO SOBRE O EIXO , EM BRANCO
      LINHA(MARCA) = BRANCO
C   REFACA A POSICAO DO EIXO POIS PODE TER-SE TORNADO EM BRANCO NO
C        COMANDO ANTERIOR
  400 LINHA(MARCAP) = PONTO
      RETURN
      END
```

III.A-3

PEDIDO DE PERFURAÇÃO

CARTÃO INTERPRETADO ☒ SIM ☐ NÃO

Nº ________

SETOR *AVALIAÇAÕ DE PRØJETØS* ASSUNTO *TAXA INTERNA*

| IDENTIFICAÇÃO (1–10) | 11–20 | 21–30 | 31–40 | 41–50 | 51–60 | 61–70 | 71–80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PRØJ1 VIDA | 4 | | | | | | |
| FLUXØS 1 | -50000 | 10000 | 20000.00 | 15000 | 15000 | | |
| PRØJ2 VIDA | 2 | | | | | | |
| FLUXØS 2 | -400.00 | 880 | -483 | | | | |
| VIDA FINAL | 0 | | | | | | |

PROJETO 1

| EPOCA | FLUXO DE CAIXA LIQUIDO | |
|---|---|---|
| 0 | A( 0)= | -50000.00 |
| 1 | A( 1)= | 10000.00 |
| 2 | A( 2)= | 20000.00 |
| 3 | A( 3)= | 15000.00 |
| | A( 4)= | 15000.00 |

| INTERACAO | TAXA PERIODICA TENTADA (SOB FORMA UNITARIA) |
|---|---|
| 1 | 1.00000 |
| 2 | 0.57040 |
| 3 | 0.28540 |
| 4 | 0.13017 |
| 5 | 0.07949 |
| 6 | 0.07432 |
| 7 | 0.07427 |

NAO HAVENDO GRAFICO A TAXA INTERNA DE RETORNO SERA A TAXA TENTADA NA ULTIMA INTERACAO , CASO CONTRARIO A(S) TAXA(S) QUE ANULA(M) O VALOR ATUAL DO PROJETO SERA(O) OBTIDA(S) DO GRAFICO.

FIM DO PROJETO

PROJETO 2

| EPOCA | FLUXO DE CAIXA LIQUIDO | |
|---|---|---|
| 0 | A( 0)= | -400.00 |
| 1 | A( 1)= | 880.00 |
| 2 | A( 2)= | -483.00 |

| INTERACAO | TAXA PERIODICA TENTADA (SOB FORMA UNITARIA) |
|---|---|
| 1 | 1.00000 |
| 2 | 1.20000 |
| 3 | 0.65114 |

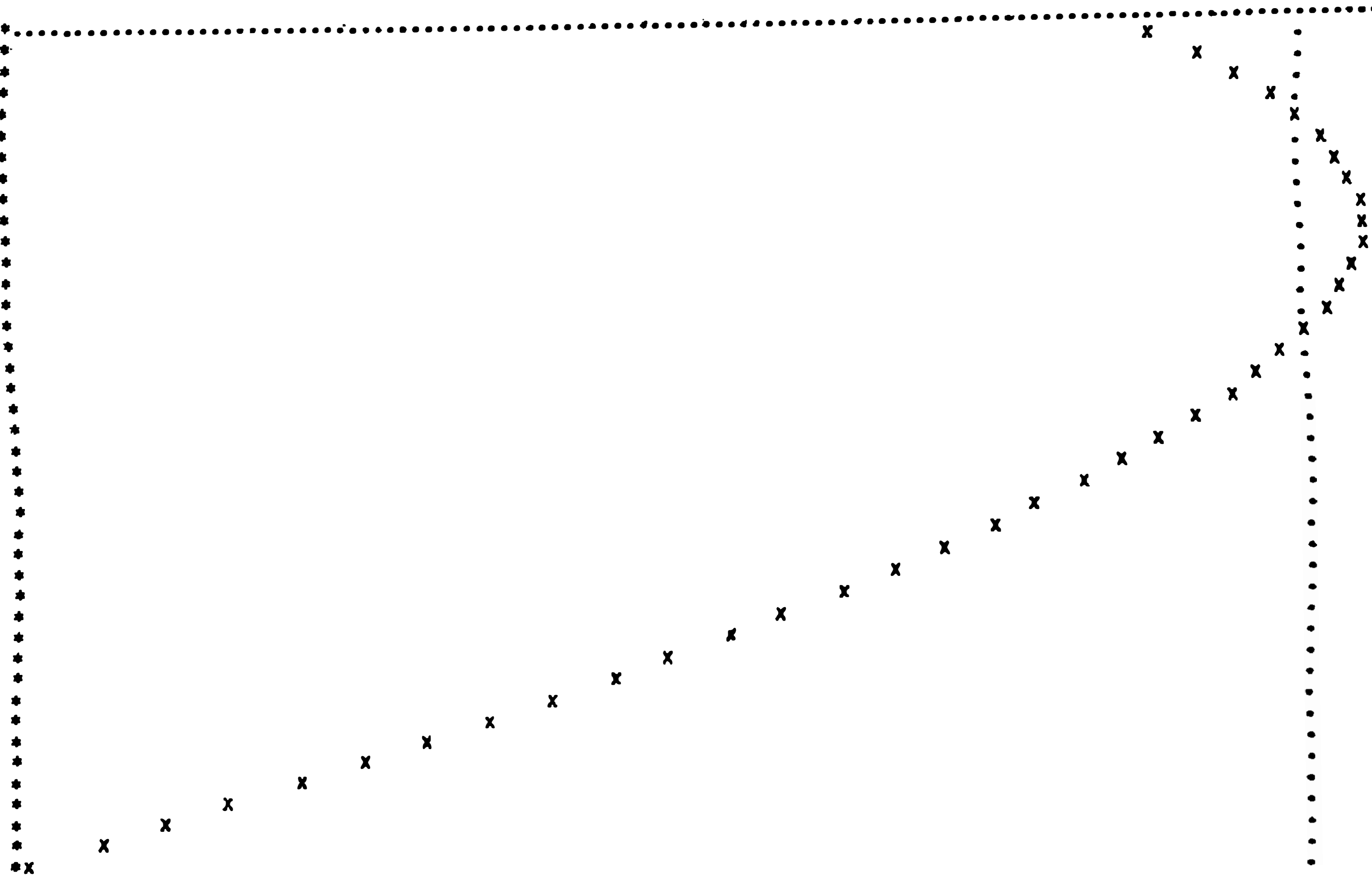
NAO EXISTE SOLUCAO UNICA POIS XMONT( 2) E POSITIVO
OLHE O GRAFICO PARA SABER AS TAXAS INTERNAS DE RETORNO

III.A-5

GRAFICO DA FUNÇAO VALOR ATUAL DO PROJETO PARA TAXAS NO INTERVALO DE 1 POR CENTO A 500 POR CENTO POR PERIODO

PRIMEIRO TRECHO - TAXAS NO INTERVALO DE 1 A 40 POR CENTO,VARIANDO DE 1 EM 1 POR CENTO

| TAXA | VALOR ATUAL |
|---|---|
| 0.01 | -2.20 |
| 0.02 | -1.50 |
| 0.03 | -0.90 |
| 0.04 | -0.41 |
| 0.05 | 0.00 |
| 0.06 | 0.32 |
| 0.07 | 0.56 |
| 0.08 | 0.72 |
| 0.09 | 0.81 |
| 0.10 | 0.83 |
| 0.11 | 0.78 |
| 0.12 | 0.67 |
| 0.13 | 0.50 |
| 0.14 | 0.28 |
| 0.15 | 0.00 |
| 0.16 | -0.33 |
| 0.17 | -0.70 |
| 0.18 | -1.12 |
| 0.19 | -1.58 |
| 0.20 | -2.08 |
| 0.21 | -2.62 |
| 0.22 | -3.20 |
| 0.23 | -3.81 |
| 0.24 | -4.45 |
| 0.25 | -5.12 |
| 0.26 | -5.82 |
| 0.27 | -6.55 |
| 0.28 | -7.30 |
| 0.29 | -8.08 |
| 0.30 | -8.88 |
| 0.31 | -9.70 |
| 0.32 | -10.54 |
| 0.33 | -11.40 |
| 0.34 | -12.27 |
| 0.35 | -13.17 |
| 0.36 | -14.08 |
| 0.37 | -15.00 |
| 0.38 | -15.94 |
| 0.39 | -16.89 |
| 0.40 | -17.86 |



## APÊNDICE IV
## PROGRAMA PARA DETERMINAÇÃO DE ALGUNS ÍNDICES DE AVALIAÇÃO

Em anexo apresentamos a listagem de um programa, escrito em FORTRAN IV, que permite, dado um projeto agora caracterizado por duas sequências de fluxos de caixa (custos e benefícios), determinar, para taxas arbitràriamente estipuladas e que são fornecidas juntamente com os fluxos de caixa, os seguintes índices de avaliação: valor atual, razão benefício/custo e, caso o projeto seja do tipo convencional de investimento, o tempo de recuperação do capital investido.

Para a utilização do programa, as seguintes indicações devem ser obedecidas na montagem da sequência dos cartões de dados:

a) não há limitação no número de projetos a serem processados de uma só vez;

b) a vida máxima de cada projeto é de cem períodos; ou seja não pode exceder a 100 o número de elementos em cada uma das duas sequências de fluxos de caixa associadas ao projeto;

c) cada projeto será alimentado por meio da seguinte sequência de cartões:

c. 1 - inicialmente um cartão que apresente o inteiro, N, que representa o número de períodos da vida útil do projeto, e que será perfurado no canto direito do campo formado pelas colunas 31-40 (as 30 primeiras colunas sendo livres para qualquer identificação do usuário).

c.2 - a seguir devem vir N + 1 cartões, nos quais as 30 primeiras colunas são de formato livre, sendo que, em cada cartão, são perfurados nos campos formados pelas colunas 31-40 e 41-50, respectivamente, os valôres absolutos do custo e do benefício relativos a cada época.

c.3 - com o mesmo formato de c.1, será colocado a seguir um cartão perfurado com o inteiro M, não superior a 100, representando o número de taxas periódicas percentuais que serão utilizadas na análise do projeto considerado.

c.4 - finalmente, utilizando-se de $[M]/7$ cartões, cada um dêles dividido em 8 campos de 10 colunas e sendo o primeiro campo de formato livre, serão perfuradas as M taxas percentuais consideradas.

d) após o último cartão de taxas relativo ao último projeto da pilha, será colocado, como indicado em anexo, um sinalizador de fim de dados;

e) tendo presente que agora taxas, custos e benefícios são números reais, são válidas as mesmas observações relativas à posição do ponto decimal e a valôres nulos que as apresentadas para a utilização do programa anterior.

Em anexo, após a listagem de programa fonte, apresentamos a fôlha de pedido de perfuração e, em seguida, o relatório de saída correspondentes aos seguintes projetos:

Projeto 1

Custos: $c_0 = 50\ 000$; $c_1 = c_2 = 0$
Benefícios: $b_0 = 0$; $b_1 = 25\ 000$; $b_2 = 25\ 000$
Taxas: 0%; 7% e 12%.

Projeto 18

Custos: $c_0 = 1\ 000$; $c_1 = 2\ 000$; $c_3 = 3\ 000$; $c_4 = 3\ 000$
$c_5 = 4\ 000$; $c_6 = c_7 = c_8 = c_9 = 2\ 000$.

Benefícios: $b_0 = 0$; $b_1 = 1\ 000$; $b_2 = b_3 = b_4 = 2\ 000$
$b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = b_9 = 4\ 000$

Taxas: 0%; 0,25%; 0,5%; 1%; 2%; 3%; 4%; 5%; 6%; 7%; 8%; 8,5%; 9% e 9,5%.

```
C   CLOVIS DE FARO - TRABALHO IPEA NO. 8647
C
C DADAS AS RECEITAS(BENEFICIOS) E DESPESAS(CUSTOS),NO FIM DE CADA
C     PERIODO E AO LONGO DA VIDA DO PROJETO,SERAO DETERMINADOS OS
C     SEGUINTES INDICES DE AVALIACAO
C       1-VALOR ATUAL DO PROJETO PARA AS TAXAS DADAS.
C       2-RAZAO BENEFICIO/CUSTO ATUALIZADO ,PARA CADA TAXA DADA.
C       3-TEMPO DE RECUPERACAO DO CAPITAL (NO CASO EM QUE O PROJETO
C         SEJA DO TIPO CONVENCIONAL).
      DIMENSION CUSTO(100),RENDA(100),XLUCRO(100),TAXA(100),VATUAL(100),
     1RAZAO(100),VCUSTO(100),VRENDA(100),TAXAE(100)
      MENTRA = 5
      MSAI = 6
      NP = 0
    1 READ(MENTRA,2) NVIDA
C   NVIDA ,EM NO. DE PERIODOS, REPRESENTA A 'VIDA' DO PROJETO.
    2 FORMAT(30X,I10)
      IF(NVIDA.EQ.0) STOP
C   O PROGRAMA SERA TERMINADO AO SE ENCONTRAR VIDA NULA.
      NP = NP + 1
C   NP  E O  CONTADOR DO NO. DE PROJETOS.
      M = NVIDA + 1
C   M DESIGNA O NO. MAXIMO POSSIVEL DE FLUXOS DE CAIXA (POIS INCLUI-SE A
C           EPOCA ZERO) NAO NULOS
      READ(MENTRA,10) (CUSTO(J),RENDA(J),J=1,M)
C PARA CADA PROJETO,ALEM DO CARTAO NVIDA,TEREMOS M CARTOES,CADA UM DELES
C     CONTENDO O CUSTO     E O BENEFICIO     NO PERIODO CONSIDERADO.
   10 FORMAT(30X,2F10.0)
      WRITE(MSAI,20)NP
   20 FORMAT(1H1,30X,12HPROJETO NO.  ,I5,//,5X,5HEPOCA,9X,5HCUSTO,13X,9HB
     1ENEFICIO,8X,21HLIQUIDO = BENF - CUST,/)
      DO 30 J = 1,M
      IEPOCA = J-1
      XLUCRO(J) = RENDA(J) - CUSTO(J)
   30 WRITE(MSAI,21)IEPOCA,IEPOCA,CUSTO(J),IEPOCA,RENDA(J), IEPOCA,XLUCRO
     1(J)
   21 FORMAT(5X,I5,2X,2HC(,I4,2H)=,F11.2,2X,2HB(,I4,2H)=,F11.2,2X,2HA(,I
     14,2H)=,F11.2)
      READ(MENTRA,31)NT
C APOS OS M+1 CARTOES QUE IDENFICAM O PROJETO TEREMOS UM CARTAO COM O
C     NO.,NT,DE TAXAS QUE SERAO CONSIDERADAS ,E MAIS TANTOS CARTOES
C     QUANTO SEJAM NECESSARIOS PARA AS TAXAS (7 TAXAS EM CADA).
   31 FORMAT(30X,I10)
      READ(MENTRA,32)(TAXA(L),L=1,NT)
   32 FORMAT(10X,7F10.0)
      WRITE(MSAI,33)NP
   33 FORMAT(1H1,10X,57HVALORE(S) ATUAL(IS) E RAZAO(S) BENEFICIO/CUSTO O
     1O PROJETO,I5,/,20X,26HPARA CADA TAXA CONSIDERADA,//)
      WRITE(MSAI,34)
   34 FORMAT(5X,14HTAXA PERIODICA,4X,11HVALOR ATUAL,4X,16HRAZAO BENF/CUS
     1TO,/,6X,12H(PERCENTUAL),/)
      DO 50 L=1,NT
      TAXAE(L)= TAXA(L)/100.
      VCUSTO(L) = CUSTO(M)
      VRENDA(L) = RENDA(M)
      DO 40 K=2,M
      KI = M - K + 1
      VCUSTO(L) = VCUSTO(L)*(1.0 +TAXAE(L))**(-1) + CUSTO(KI)
```

IV.A-1

```
   40 VRENDA(L) = VRENDA(L)*(1.0 +TAXAE(L))**(-1) + RENDA(KI)
      VATUAL(L) = VRENDA(L) - VCUSTO(L)
      RAZAO(L) = VRENDA(L)/VCUSTO(L)
      WRITE(MSAI,45)TAXA(L),VATUAL(L),RAZAO(L)
   45 FORMAT(8X,F7.2,7X,F12.2,8X,F9.2)
   50 CONTINUE
C VERIFICACAO DO TIPO DO PROJETO PARA , NO CASO DE SER DO TIPO DE
C    INVESTIMENTO CONVENCIONAL , DETERMINAR O TEMPO DE RECUPERACAO DO
C    CAPITAL INVESTIDO .
      IF(XLUCRO(1))60,80,80
   60 KSINAL = 0
C    KSINAL SERA O CONTADOR DO NO. DE INVERSOES DE SINAL NO FLUXO DE
C      CAIXA LIQUIDO
      SOMAO = XLUCRO(1)
      DO 68 L = 2,M
   68 SOMAO = SOMAO + XLUCRO(L)
      L1 = 0
      DO 70 L=2,M
      IF(XLUCRO(L))70,70,69
   69 L1 = L
      GO TO 71
   70 CONTINUE
   71 IF(L1) 82,82,72
   72 IF(SOMAO) 82,73,73
   73 KSINAL = KSINAL + 1
      DO 75 L=L1,M
      IF(XLUCRO(L))74,75,75
   74 KSINAL = KSINAL + 1
   75 CONTINUE
      IF(KSINAL - 1)85,85,80
   80 WRITE(MSAI,81)NP
   81 FORMAT(///,10X,9HO PROJETO,I5,44H NAO E DO TIPO DE INVESTIMENTO CO
     1NVENCIONAL.)
      GO TO 1
   82 WRITE(MSAI,83)
   83 FORMAT(///,10X,21HDESISTA DESSE PROJETO)
      GO TO 1
   85 WRITE(MSAI,86)NP
   86 FORMAT(///,10X,52HTEMPO DE RECUPERACAO DO CAPITAL INVESTIDO NO PRO
     1JETO,I5,//)
      CAPINV = 0.0
      L11 = L1 - 1
      DO 90 L = 1,L11
   90 CAPINV = CAPINV - XLUCRO(L)
      CAPREC = 0.0
      DO 95 L = L1,M
      TEMPO = L - 1
      CAPREC = CAPREC + XLUCRO(L)
      L2 = L
      IF(CAPREC - CAPINV)95,120,105
   95 CONTINUE
  105 FRACAO = (CAPINV - CAPREC + XLUCRO(L2))/XLUCRO(L2)
      TEMPO = TEMPO - 1. + FRACAO
  120 WRITE(MSAI,121)TEMPO
  121 FORMAT(15X,7HTEMPO =,F7.2,8HPERIODOS)
      GO TO 1
      END
```

IV. A-2

# PEDIDO DE PERFURAÇÃO

CARTÃO INTERPRETADO [X] SIM [ ] NÃO

Nº ______

SETOR AVALIACAØ DE PRØJETØS ASSUNTO INDICES DE AVALIACAØ

IDENTIFICAÇÃO

```
         1111111111222222222233333333334444444444555555555566666666667777777777
1234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890123456789
PROJETØ NØ. UM DØ TEXTØ   VIDA         2
PRØJ. UM EPØCA ZERØ-CUST.BENFC     50000         0
PRØJ. UM EPØCA    UM                   0     25000
PRØJ. UM EPØCA  DØIS                 0.0  25000.00
PRØJ. UM - NØ. DE TAXAS                3
UM-TAXA  1         0       7.0     12.00
PROJETØ NØ. 18            VIDA         9
PRØJ. 18 EPØCA ZERØ-CUST.BENFC   1000.00      0.00
PRØJ. 18 EPØCA    UM             2000.00    1000.0
PRØJ. 18        DØIS                3000      2000
PRØJ. 18        TRES                3000    2000.0
PRØJ. 18        QUAT               3000.   2000.00
PRØJ. 18        CINC               4000.      4000
PRØJ. 18        SEIS                2000      4000
PRØJ. 18        SETE                2000      4000
PRØJ. 18        ØITØ              2000.0     4000.
PRØJ. 18        NØVE               2000.    4000.0
PRØJ. 18 -NØ. DE TAXAS                14
18-TAXA  1      0.00      0.25        .5       1.0         2      3.00         4
18-TAXA  2         5         6      7.00         8      8.50       9.0       9.5
VIDA FINAL (FIM DØS DADØS)
```

PROJETO NO. 1

| EPOCA | CUSTO | | BENEFICIO | | LIQUIDO = BENF - CUST | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | Q( 0)= | 50000.00 | B( 0)= | 0.00 | A( 0)= | -50000.00 |
| 1 | Q( 1)= | 0.00 | B( 1)= | 25000.00 | A( 1)= | 25000.00 |
| 2 | Q( 2)= | 0.00 | B( 2)= | 25000.00 | A( 2)= | 25000.00 |

VALOR ATUAL E RAZAO BENEFICIO/CUSTO DO PROJETO 1
PARA CADA TAXA CONSIDERADA

| TAXA PERIODICA (PERCENTUAL) | VALOR ATUAL | RAZAO BENF/CUSTO |
|---|---|---|
| 0.00 | 0.00 | 1.0000 |
| 7.00 | -4799.54 | 0.9040 |
| 12.00 | -7748.72 | 0.8450 |

TEMPO DE RECUPERACAO DO CAPITAL INVESTIDO NO PROJETO 1

TEMPO = 2.00 PERIODOS

IV.A-4

PROJETO NO. 18

| EPOCA | | CUSTO | | BENEFICIO | | LIQUIDO = BENF - CUST | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | C( 0)= | 1000.00 | B( 0)= | -0.00 | A( 0)= | -1000.00 | |
| 1 | C( 1)= | 2000.00 | B( 1)= | 1000.00 | A( 1)= | -1000.00 | |
| 2 | C( 2)= | 3000.00 | B( 2)= | 2000.00 | A( 2)= | -1000.00 | |
| 3 | C( 3)= | 3000.00 | B( 3)= | 2000.00 | A( 3)= | -1000.00 | |
| 4 | C( 4)= | 3000.00 | B( 4)= | 2000.00 | A( 4)= | -1000.00 | |
| 5 | C( 5)= | 4000.00 | B( 5)= | 4000.00 | A( 5)= | -0.00 | |
| 6 | C( 6)= | 2000.00 | B( 6)= | 4000.00 | A( 6)= | 2000.00 | |
| 7 | C( 7)= | 2000.00 | B( 7)= | 4000.00 | A( 7)= | 2000.00 | |
| 8 | C( 8)= | 2000.00 | B( 8)= | 4000.00 | A( 8)= | 2000.00 | |
| 9 | C( 9)= | 2000.00 | B( 9)= | 4000.00 | A( 9)= | 2000.00 | |

VALORE(S) ATUAL(IS) E RAZAO(S) BENEFICIO/CUSTO DO PROJETO 18
PARA CADA TAXA CONSIDERADA

| TAXA PERIODICA (PERCENTUAL) | VALOR ATUAL | RAZAO BENF/CUSTO |
|---|---|---|
| 0.00 | 3000.00 | 1.13 |
| 0.25 | 2876.49 | 1.12 |
| 0.50 | 2755.90 | 1.12 |
| 1.00 | 2523.21 | 1.11 |
| 2.00 | 2089.83 | 1.10 |
| 3.00 | 1695.71 | 1.08 |
| 4.00 | 1337.12 | 1.07 |
| 5.00 | 1010.74 | 1.05 |
| 6.00 | 713.55 | 1.04 |
| 7.00 | 442.86 | 1.02 |
| 8.00 | 196.23 | 1.01 |
| 8.50 | 81.24 | 1.00 |
| 9.00 | -28.53 | 1.00 |
| 9.50 | -133.33 | 0.99 |

TEMPO DE RECUPERACAO DO CAPITAL INVESTIDO NO PROJETO 18

TEMPO = 7.50PERIODOS

IV.A-5

# BIBLIOGRAFIA

## BIBLIOGRAFIA


1 - ALCHIAN, ARMEN A. - "The Rate of Interest, Fisher's Rate of Return Ove Costs and Keynes Internal Rate of Return" - American Economic Review - 45, 938-4, Dec. 1955.

2 - ANTHONY, ROBERT N. - "Management Accounting-Text and Cases" - Illinois, D. Irwin, Inc. - 1956.

3 - BIERMAN, HAROLD Jr., and Smidt, Seymour - "The Capital Budgeting Decision". New York, Mac Millan, 1969.

4 - DARNA, P. - "L'Entrepeneur Face a L'Investissement", Paris, Dunod, - 1969.

5 - DE FARO, CLÓVIS - "Matemática Financeira" - Rio de Janeiro, APEC - 2ª Edição, 1970.

6 - DE FINETTI, B. - "Leçons de Mathematiques Financièrés" - Paris, Dunod, 1969.

7 - DE GARMO, E. PAUL - "Engineering Economy" - New York, Fourth Edition, The Mac Millan Company, 1969.

8 - GRANT, EUGENE L., and Ireson, W. Grant - "Principles of Engineering Economy" New York, The Ronald Press Company, 4th. ed., 1964.

9 - HANSSMAN, FRED - "Operations Research Techniques for Capital Investment", New York, John Wiley & Sons Inc., 1968.

10 - HIRSHLEIFER, J. - "Ont the Theory of Optimal Investment Decision", Journal of Political Economy, 66:329-52, Aug. 1958

11 - HIRSHLEIFER, J. et alii - "WATER SUPPLY - Economics Technology and Policy", | Chicago | The University of Chicago Press - 1960.

12 - KEMENY, J. G., et alii - "Finite Mathematics with Business Applications" N. J., Prentice - Hall, Inc. - Englewood Clifes, 1962.

13 - LERNER, EUGENE M., and Carleton, Willard T. - "A Theory of Financial Analysis", New York, Harcourt, Brace & World, Inc., 1966.

14 - MASSÉ, PIERRE - "Optimal Investment Decisions", N. J., Prentice-Hall, Inc. - Englewood Cliffs, 1962.

15 - McKEAN, ROLAND N. - "Efficiency in Government Through Systems Analysis", New York, (O. R. S. A., 3) - 1967.

16 - OCDE - "Manual of Industrial Project Analysis in Developing Countries" - Paris, 1968, V. 1

17 - PUCCINI, A., et alii - "Engenharia Econômica e Análise 'e Investimentos" Rio de Janeiro, Forum Editora, 1969.

18 - TEICHROEW, D., Robichek, A. A., and Montalbano, M. - "Mathematical Analysis of Rates of Return under Certaimty" - Management Science 11, (3), 395-403, Jan. 1965.

19 - IBID - "An Analysis of Criteria for Investment and Financing Decisions under Certainty" - Management Science 12, (3): 151-79, Nov. 1965.

20 - VAN HORNE, James C. - "Financial Management and Policy" N. J., Prentice Hall, - Enclewood Cliffs, 1968.