PROGRAMAÇÃO LINEAR: CONCEITOS E APLICAÇÕES

Edgar Augusto Lanzer

IPEA
Instituto de Planejamento Econômico e Social

PROGRAMA NACIONAL DE PESQUISA ECONÔMICA
PNPE

PROGRAMA NACIONAL DE PESQUISA ECONÔMICA (PNPE)

Criado em 1973, o PNPE tem como finalidade precípua estimular a produção científica, através da promoção da pesquisa acadêmica individual na área de Economia. As entidades promotoras do PNPE são: Instituto de Planejamento Econômico e Social — IPEA, Financiadora de Estudos e Projetos — FINEP, Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social — BNDES, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística — IBGE e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico — CNPq. A princípio, o Programa foi administrado pelo antigo BNDE e, a partir de 1975, passou a ser gerido pelo IPEA/INPES.

CONSELHO DIRETOR DO PNPE:

Presidente: *José Flávio Pécora* (Secretário-Geral da SEPLAN e Presidente do IPEA)

Gerson Edson Ferreira Filho (Presidente da FINEP)

Jessé de Souza Montello (Presidente do IBGE)

Luiz Antonio Sande de Oliveira (Presidente do BNDES)

Lynaldo Cavalcanti de Albuquerque (Presidente do CNPq)

José Augusto Arantes Savasini (Superintendente do Instituto de Planejamento — IPLAN/IPEA)

Luiz Paulo Rosenberg (Superintendente do Instituto de Pesquisas — INPES/IPEA e Secretário-Executivo do PNPE)

PROGRAMAÇÃO LINEAR: CONCEITOS E APLICAÇÕES

Edgar Augusto Lanzer

EDGAR AUGUSTO LANZER, doutor em Economia Agrícola pela Universidade da Califórnia (Davis, 1977), é professor do Centro de Estudos e Pesquisas Econômicas (IEPE), da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

INSTITUTO DE PLANEJAMENTO ECONÔMICO E SOCIAL
PROGRAMA NACIONAL DE PESQUISA ECONÔMICA

Série PNPE — 4

PROGRAMAÇÃO LINEAR: CONCEITOS E APLICAÇÕES

EDGAR AUGUSTO LANZER

Rio de Janeiro
IPEA/INPES
1982

Capa: L. C. Dias

Lanzer, Edgar Augusto

Programação linear: conceitos e aplicações. Rio de Janeiro, IPEA/INPES, 1982.

270 p. (IPEA/INPES. Série PNPE, 4).

1. Programação linear. I. Instituto de Planejamento Econômico e Social. II. Programa Nacional de Pesquisa Econômica. III. Série. IV. Título.

CDD 519.72
CDU 519.2

Este trabalho é da inteira e exclusiva responsabilidade de seu autor. As opiniões nele emitidas não exprimem, necessariamente, o ponto de vista da Secretaria de Planejamento da Presidência da República.

* INSTITUTO DE PLANEJAMENTO ECONÔMICO E SOCIAL

Serviço Editorial

Av. Pres. Antônio Carlos, 51 — 13.º andar — Rio de Janeiro (RJ) — CEP 20.001

Ao Prof. Haralambos Simeonidis

(in memoriam)

SUMÁRIO

PREFÁCIO

A Programação Linear é hoje o instrumento de Pesquisa Operacional mais comumente empregado na resolução prática de problemas decisórios objetivos e de certa complexidade. Isto se explica, por um lado, pela versatilidade do instrumento e, por outro, pelo nível relativamente pouco sofisticado dos seus fundamentos matemáticos. Estes fundamentos — Análise e Resolução de Sistemas de Equações Lineares — são objeto de estudo no Capítulo I do texto. O Capítulo II estabelece o que é um problema de Programação Linear e como se resolve um tal problema. No Capítulo III é feita uma coletânea de aplicações de Programação Linear sob a forma de exercícios propostos ao leitor. Estes exercícios englobam situações pertinentes a operações agrícolas e industriais, transportes, investimentos, política e planejamento econômico, saúde pública e outras. O Capítulo III contém, ainda, aplicações de Programação Linear em situações não-lineares e em análise de riscos. Por fim, o Capítulo IV destina-se, principalmente, embora não exclusivamente, aos estudantes e profissionais de Economia. Dualidade, Análise de Sensibilidade e Planejamento Descentralizado são apresentados nesse capítulo.

Este livro reflete o conteúdo da disciplina ministrada pelo autor nos Cursos de Mestrado em Economia e em Economia Rural do Centro de Estudos e Pesquisas Econômicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Dado que Programação Linear não é matéria obrigatória em muitos cursos de graduação em Economia no País, o texto é desenvolvido a partir do pressuposto que o leitor não tem conhecimento anterior do assunto.

O autor agradece o apoio recebido do Instituto de Planejamento Econômico e Social (IPEA), da Secretaria de Planejamento da Presidência da República, que, através do Programa Nacional de Pesquisa Econômica (PNPE), foi decisivo na materialização deste trabalho.

Agradece, ainda, sem resultar em comprometimento, ao colega Carlos Mielitz Netto, a um revisor anônimo indicado pelo IPEA e às turmas de pós-graduação do IEPE pelas críticas e sugestões e, a Solange Gonçalves, Marilda Barbosa e Márcia Barbosa pela dedicação e paciência no trabalho de datilografia.

Porto Alegre, maio de 1982

EDGAR AUGUSTO LANZER

Capítulo I

ÁLGEBRA E RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo serão discutidos aqueles conceitos básicos de sistema de equações lineares que fundamentam a resolução de problemas de Programação Linear.

I.1 — Notação Algébrica e Elementos de Álgebra Linear

Um sistema linear de m equações e n incógnitas pode ser representado por:

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{array}\right.$$

Nos casos empíricos, os coeficientes a_{ij} e os coeficientes b_i são numericamente conhecidos.

O que se entende por solução de um sistema? *Uma* solução é *um conjunto* de números $\{x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*\}$ que, substituindo o conjunto de incógnitas $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ do sistema, é capaz de satisfazer todas as equações do sistema. Em outras palavras: o conjunto $\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\}$ é uma solução do sistema se, e somente se, por substituição de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ em cada equação do sistema, gerar como resultado das operações indicadas no lado esquerdo das igualdades um valor igual ao existente no lado direito das mesmas.

Certos sistemas lineares não têm solução; outros apresentam apenas uma solução, enquanto que outros ainda possuem muitas soluções. O estudo das condições de existência e unicidade de soluções de sistemas lineares, bem como o de outras questões teóricas e práticas envolvendo tais sistemas, é parte de uma área da Matemática conhecida por Álgebra Linear. O objetivo desta seção é o de revisar alguns aspectos básicos de Álgebra Linear e, paralelamente, estabelecer uma convenção notacional que será seguida ao longo de todo o texto.

O conceito fundamental da Álgebra Linear é o de vetor.

Um *vetor* de dimensão n consiste em um conjunto ordenado de n componentes que pertencem ao conjunto de números reais. [1]

Todos os vetores usados no texto serão simbolizados por tipos em negrito. Exemplo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ \mathbf{z}_j = \begin{bmatrix} z_{1j} \\ z_{2j} \\ \vdots \\ z_{nj} \end{bmatrix}, \ etc. \ldots$$

Eventualmente um vetor poderá ser representado pelo seu elemento típico:

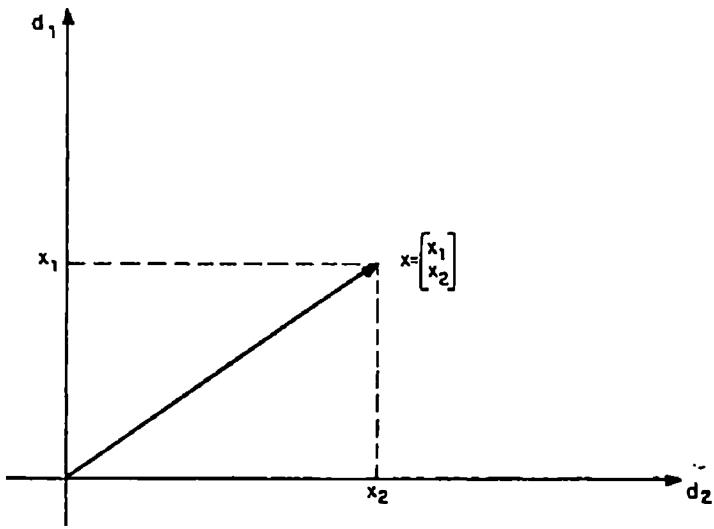
$$\mathbf{x} = (x_j) \ , \ \mathbf{b} = (b_i) \ , \ \mathbf{a}_1 \ (a_{i1}) \ , \ \mathbf{z}_j = (z_{ij}) \ , \ etc \ \ldots$$

Sob o ponto de vista geométrico, um vetor é simplesmente um ponto definido pelas suas coordenadas. Uma representação gráfica útil na interpretação de algumas operações vetoriais envolve o uso de segmentos de reta orientados com origem no ponto de coordena-

[1] Na verdade, este conceito é o de um "vetor-R". No conceito mais geral do "vetor-S" os elementos pertencem a um sistema algébrico S qualquer. Como o objeto principal do texto é desenvolvido apenas no sistema de números reais, todos os conceitos e operações usados no texto serão limitados a este sistema.

das *(0, 0)*. Entretanto, deve ficar claro que o vetor é o *ponto terminal* do segmento de reta e não o segmento propriamente dito (Figura 1.1). O ponto de coordenadas *(0, 0)* é chamado de *vetor nulo* e simbolizado por $\mathbf{0}$.

Figura 1.1
Representação Gráfica do Vetor x



A *igualdade de dois vetores* requer igualdade entre todos os elementos da mesma posição nos dois vetores. Portanto, $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ se, e somente se, $y_j = x_j$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Em decorrência desta definição, a igualdade entre dois vetores só é possível se ambos forem da mesma dimensão.

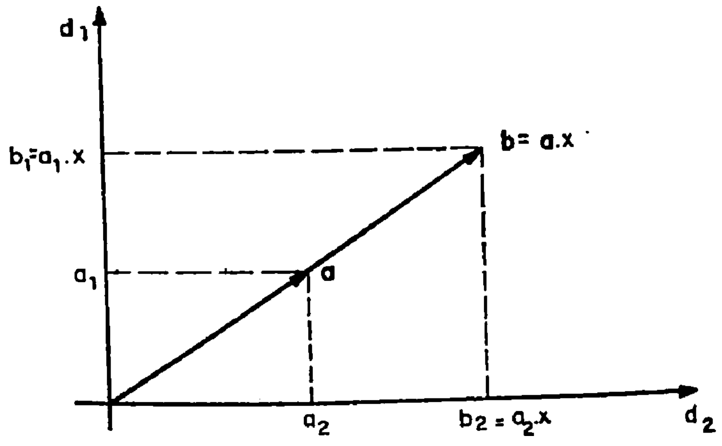
A *multiplicação de um vetor por uma constante ou escalar* é definida como se segue: ao multiplicar um vetor $\mathbf{a}$ m-dimensional por um escalar x obtém-se um vetor m-dimensional $\mathbf{b}$ cujos elementos se relacionam aos de **a** através da expressão $b_j = a_j x$. Portanto, se $\mathbf{b} = \mathbf{a}x$, então $(b_j) = (a_j x)$, isto é:

$$\mathbf{a}x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a_1 x \\ a_2 x \\ \vdots \\ a_m x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

Se $\mathbf{b} = \mathbf{a}x$, diz-se que **b** é um múltiplo de **a**, com coeficientes de multiplicidade igual a x. A Figura 1.2 apresenta uma interpretação gráfica da multiplicação de um vetor bidimensional **a** por um escalar x. O vetor resultante **b** se situa sobre a reta determinada pelos pontos **0** e **a**. A distância $\overline{\mathbf{0b}}$ é igual a x vezes a distância $\overline{\mathbf{0a}}$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{0b}} &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \quad \text{(Pitágoras)} \\ &= \sqrt{(xa_1)^2 + (xa_2)^2} \\ &= \sqrt{x^2\,(a_1^2 + a_2^2)} \\ &= x\,\overline{\mathbf{0a}} \quad c.q.d. \end{aligned}$$

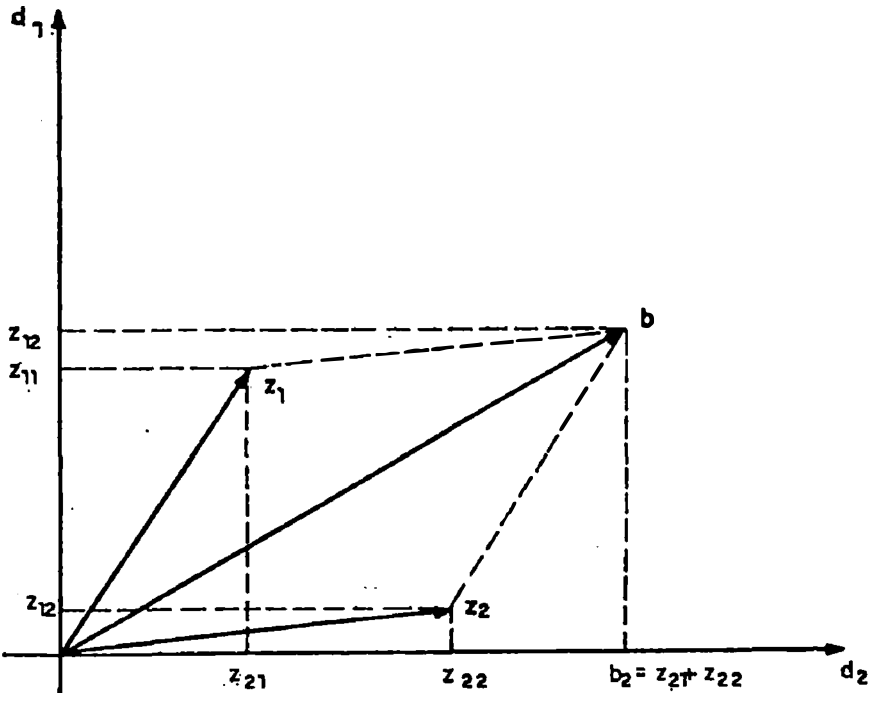
Figura 1.2
b= ax (x>1)



Exercício: Faça gráficos de $\mathbf{b} = \mathbf{a}x$, atribuindo valor numérico a $\mathbf{a}$ e localizando $\mathbf{b}$ nas seguintes situações: (*1*) $x = 0{,}5$; (*2*) $x = -2$; (*3*) $x = 2$; (*4*) $x = 1$; (*5*) $x = -1$.

A soma de dois vetores m-dimensionais dá como resultado um vetor da mesma dimensão. Mais especificamente, se $\mathbf{z}_1$ e $\mathbf{z}_2$ são vetores de dimensão m e se o vetor $\mathbf{b}$ é definido como $\mathbf{b} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$, então $(b_j) = (z_{j1} + z_{j2})$. A Figura 1.3 representa os vetores bidimensionais $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ e $\mathbf{b}$, sendo este último o vetor resultante da soma dos dois primeiros. A localização do ponto — ou vetor — $\mathbf{b}$ é dada pela extremidade da diagonal de um paralelogramo formado com base nos segmentos $\overline{0\mathbf{z}_1}$ e $\overline{0\mathbf{z}_2}$.

Figura 1.3
Representação Gráfica de
$b = z_1 + z_2$



Em vista das definições de igualdade entre vetores, multiplicação de um vetor por um escalar e de soma de vetores, podemos representar um sistema linear de m equações e n incógnitas como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou, mais sinteticamente:

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b} \quad \text{onde} \quad \mathbf{a}_j \in R^m$$

Observe que: (1.º) R^m designa o conjunto de todos os vetores m-dimensionais e (2.º) como a igualdade entre vetores só é definida para vetores da mesma dimensão, não há necessidade de explicar a dimensão de $\mathbf{b}$.

Em termos de sistemas de equações os vetores $\mathbf{a}_j$ serão chamados de "vetores de coeficientes" do sistema; o vetor $\mathbf{b}$ será chamado de "vetor de constantes" do sistema.

Na terminologia de Álgebra Linear, se um vetor $\mathbf{b}$ é definido como

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n,$$

diz-se que o vetor $\mathbf{b}$ é uma *combinação linear* dos vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$. Em outras palavras, para que $\mathbf{b}$ seja uma combinação linear dos vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$, é necessário que ele seja o resultado de uma soma de vetores que são múltiplos de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$. (Observe que $\mathbf{a}_j\ x_j$ é um vetor múltiplo do vetor $\mathbf{a}_j$ com coeficientes de multiplicidade igual a x_j.)

O conceito revisado a seguir, qual seja, o de dependência linear de um conjunto de vetores, é crucial para estabelecer-se se um sistema de equações tem ou não solução (ou soluções).

Um conjunto de vetores m-dimensionais $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$ é *linearmente dependente* se existirem escalares $k_1, k_2, \ldots, k_n$, não todos nulos, capazes de satisfazer à seguinte combinação linear:

$$\mathbf{a}_1 k_1 + \mathbf{a}_2 k_2 + \ldots + \mathbf{a}_n k_n = 0 \qquad (1.1)$$

Por outro lado, se a *única* maneira de obter o vetor nulo como resultado de uma combinação linear de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ se reduzir a $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$, diz-se que aqueles vetores formam um conjunto com *independência linear.*

Observações:

a) Vamos considerar o caso em que no conjunto $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ existam dois vetores iguais: por ex.: $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$. Neste caso, a combinação linear expressa em (1.1) poderia ser obtida fazendo $k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = k_4 = \ldots = k_n = 0$. Assim, o conjunto apresentaria dependência linear.

b) Vamos considerar o caso em que no conjunto $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ existam dois vetores que são múltiplos entre si: por ex.: $\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{a}_n$. Neste caso, a combinação linear expressa em (1.1) poderia ser obtida fazendo $k_2 = 1, k_n = -3$ e os demais k_i iguais a zero. Assim, o conjunto apresentaria dependência linear.

c) Vamos considerar o caso em que um dos vetores do conjunto $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ possa ser obtido como uma combinação linear de dois (ou mais) outros vetores do conjunto: por ex.: $\mathbf{a}_1 = 3\mathbf{a}_2 + 5\mathbf{a}_n$. Neste caso, a combinação linear expressa em (1.1) poderia ser obtida fazendo $k_1 = 1, k_2 = -3, k_n = -5$ e os demais k_i iguais a zero. Assim, o conjunto apresentaria dependência linear.

Certos conjuntos de vetores apresentam independência linear de maneira óbvia. Considere, por exemplo, o conjunto de *vetores unitários* de R^3:

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mu_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mu_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Claramente, o conjunto $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ apresenta independência linear, pois a combinação linear $\{\mu_1 k_1 + \mu_2 k_2 + \mu_3 k_3 = 0$, isto é:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} k_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} k_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} k_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

só pode ser obtida se $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

De outra parte, a presença de um vetor nulo em um conjunto de vetores qualquer determina dependência linear no conjunto (verifique porque).

Qual o número máximo de vetores de R^m que podem ser contidos em um conjunto com independência linear? A resposta a esta questão, cuja prova matemática pode ser verificada em textos de Álgebra Linear, é: m. Portanto, uma condição necessária para que um conjunto de vetores m-dimensionais tenha independência linear é que o número de vetores no conjunto seja igual ou menor que m. Qualquer conjunto de vetores de R^m contendo mais do que m vetores apresentará dependência linear. Isto leva ao seguinte corolário: dado um conjunto de m vetores m-dimensionais que possua independência linear, *qualquer outro vetor* de R^m poderá ser expresso através de uma combinação linear dos vetores pertencentes ao conjunto dado. Um conjunto de m vetores m-dimensionais que apresenta independência linear é chamado de *base* para R^m.

Vamos supor que $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ seja uma base para R^m. Considere o vetor m-dimensional $\mathbf{b}$, já sabemos que $\mathbf{b}$ pode ser expresso como uma combinação linear de vetores que compõem uma base para R^m. Vamos provar que esta combinação linear é única. A prova é feita por contradição. Suponhamos que $\mathbf{b}$ possa ser representado com duas combinações lineares diferentes dos vetores da base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, isto é:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_m x_m$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_m y_m$$

Subtraindo a primeira equação vetorial da segunda, lado a lado, obtemos:

$$\mathbf{b} - \mathbf{b} = 0 = \mathbf{a}_1 (y_1 - x_1) + \mathbf{a}_2 (y_2 - x_2) + \ldots + \mathbf{a}_m (y_m - x_m) \tag{1.2}$$

Agora, dado que partimos do pressuposto que $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ era uma base para R^m, isto é, um conjunto de m vetores m-dimensionais *com independência linear*, então, pela própria definição de independência linear, (1.2) será verdade se, e somente se, $x_j = y_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Assim, fica demonstrado que o vetor $\mathbf{b}$, pertencente à R^m, tem uma representação única a partir dos vetores que compõem uma base para R^m.[2]

Para completar esta rápida revisão de elementos de Álgebra Linear precisamos ainda falar sobre transposição e multiplicação de vetores e sobre matrizes e operações com matrizes.

Até aqui examinamos alguns aspectos da álgebra de vetores trabalhando sempre com vetores que se apresentavam em forma de uma coluna de elementos ordenados. Os vetores, todavia, podem-se apresentar em forma de uma linha de elementos ordenados. A operação através da qual um vetor-coluna é transformado num vetor-linha, e vice-versa, é denominada *transposição*. Embora a distinção entre vetores-linha e vetores-coluna não seja representável geometricamente, ela é importante para fins de operações algébricas com vetores. Assim: (1.º) a igualdade entre dois vetores só será definida se os dois vetores forem ou vetores-linha ou vetores-coluna; (2.º) a multiplicação de um vetor-coluna ou um vetor-linha por um escalar dá como resultado um vetor-coluna ou um vetor-linha, respectivamente, e (3.º) a soma de dois ou mais vetores só é definida se todos forem ou vetores-linha ou vetores-coluna. Sob o ponto de vista notacional, dis-

[2] O leitor deve observar que acabamos de estabelecer que, se as colunas de coeficientes de um sistema de m equações e m incógnitas se constituírem numa base para R^m, o sistema *terá* solução e esta solução será *única*. Os aspectos da verificação prática se um arranjo de vetores numéricos se constitui ou não em uma base serão examinados adiante, em conexão com um método de resolução de sistemas lineares.

tinguiremos o vetor x-coluna de vetor x-linha pelo uso de um apóstrofe neste último:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

O vetor $\mathbf{x}'$ é lido como x-linha ou x-transposto. De outro lado, o transposto de um escalar é o próprio escalar.

Em decorrência das regras até agora estipuladas, temos:

a) se $\mathbf{y} = k\,\mathbf{x}$, então $\mathbf{y}' = (k\mathbf{x})' = k\mathbf{x}'$

b) se $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, então $\mathbf{z}' = (\mathbf{x} + \mathbf{y})' = \mathbf{x}' + \mathbf{y}'$

c) se $\mathbf{y} = (\mathbf{x}')'$, então $\mathbf{y} = \mathbf{x}$

O *produto-interno* ou produto-escalar de dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, simbolizado por $\mathbf{a}'\mathbf{b}$, é definido como:

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = (a_1\ a_2 \ldots a_n) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$$

Observe que $\mathbf{a}'\mathbf{b}$ é um escalar. Observe, também, que, pela própria definição de produto-interno, $\mathbf{a}'\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i\, a_i = \mathbf{b}'\mathbf{a}$.

Exercício: Verifique os seguintes produtos-internos (ambos estão corretos)

$$(1, 0, 3) \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 10 \qquad\qquad (-1, 2, 1) \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1$$

Consideremos agora os vetores-linha $\mathbf{a}^1$ $\mathbf{a}^2$, . . . , $\mathbf{a}^n$ e o vetor-coluna $\mathbf{x}$ (todos ϵ R^n) :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ \mathbf{a}^2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{a}^m &= (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Em vista da definição de produto-interno temos:

$$\mathbf{a}^1 \mathbf{x} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n$$

$$\mathbf{a}^2 \mathbf{x} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{a}^m \mathbf{x} = a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n$$

É evidente que $\mathbf{a}^i \mathbf{x}$ é uma notação compacta para representar a i-ésima equação de um sistema linear. Observe que, neste caso, o vetor $\mathbf{a}^i$ seria a i-ésima linha de coeficientes do sistema, enquanto que o vetor $\mathbf{x}$ seria o vetor de incógnitas do sistema.

Uma *matriz* é um conjunto, ou arranjo, de vetores da mesma dimensão. Uma matriz de dimensão $(m \times n)$ tem m linhas e n colunas. Vamos definir uma matriz $\mathbf{A}$, de dimensão $m \times n$, através de suas linhas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix}, \quad \text{onde } \mathbf{a}^i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \; ; (i = 1, 2, \ldots, m)$$

(Observe que a_{ij} é o elemento situado na i-ésima linha e na j-ésima coluna)

A seguir, estabelecemos a regra de multiplicação de uma matriz $\mathbf{A}$, $(m \times n)$, por um vetor $\mathbf{x}$, $(n \times 1)$:

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \mathbf{x} \\ \mathbf{a}^2 \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \end{bmatrix}$$

Devemos notar que o resultado do produto de uma matriz $(m \times n)$ por um vetor $(n \times 1)$ é um vetor $(m \times 1)$. Portanto, se $\mathbf{A}$ é $(m \times n)$ e $\mathbf{x}$ é uma coluna $(n \times 1)$, então $\mathbf{Ax}$ é uma coluna $(m \times 1)$.

Exercício: Verifique as seguintes multiplicações (ambas estão corretas):

$$\underset{(2 \times 3)}{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}} \underset{(3 \times 1)}{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}} = \underset{(2 \times 1)}{\begin{bmatrix} 14 \\ 17 \end{bmatrix}}; \quad \underset{(3 \times 2)}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}} \underset{(2 \times 1)}{\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}} = \underset{(3 \times 1)}{\begin{bmatrix} 13 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}}$$

Em vista das regras revisadas até aqui, podemos representar um sistema de m equações e n incógnitas que tem o coeficiente a_{ij} na i-ésima equação multiplicando a j-ésima incógnita e que tem b_i como termo constante no lado direito do sinal de igualdade da i-ésima equação, simplesmente como: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ $(\mathbf{A}: m \times n; \mathbf{x}: n \times 1)$. Observe que não há necessidade de especificar a dimensão do vetor $\mathbf{b}$, pois pela definição de igualdade entre vetores, $\mathbf{b}$ deve ser da mesma dimensão de $\mathbf{Ax}$, isto é, $m \times 1$.

As operações de multiplicação de uma matriz por um escalar e de soma de duas (ou mais) matrizes são definidas de modo análogo às mesmas operações com vetores:

$$k\mathbf{A} = k.(a_{ij}) = (ka_{ij})$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$$

A multiplicação de duas matrizes **A** e **B** dá como resultado uma matriz **C** cujo elemento típico c_{ij} é o produto-escalar de $\mathbf{a}^i$ (a *i*-ésima linha de **A**) por $\mathbf{b}_j$ (a *j*-ésima coluna de **B**):

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix} (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n) = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}^1\ \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}^1\ \mathbf{b}_2) & \dots & (\mathbf{a}^1\ \mathbf{b}_n) \\ (\mathbf{a}^2\ \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}^2\ \mathbf{b}_2) & \dots & (\mathbf{a}^2\ \mathbf{b}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{a}^m\ \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}^m\ \mathbf{b}_2) & \dots & (\mathbf{a}^m\ \mathbf{b}_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

Observe que o número de linhas de **A** não precisa ser igual ao número de colunas de **B**. Porém, para que os produtos-internos $c_{ij} = \mathbf{a}^i\,\mathbf{b}_j$ sejam definidos, é necessário que $\mathbf{a}^i$ e $\mathbf{b}_j$ tenham o mesmo número de elementos. Conseqüentemente, se **A** é $(m \times p)$ e **B** é $(q \times n)$, o produto **AB** só será definido se $p = q$. Se esta condição se cumpre, a matriz-resultado existe e é de dimensão $(m \times n)$.

Exercício: Verifique os resultados abaixo (ambos estão corretos):

$$\underset{(2 \times 3)}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}} \underset{(3 \times 4)}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{(2 \times 4)}{\begin{bmatrix} 23 & 2 & 5 & 16 \\ 10 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{(3 \times 2)}{\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}} \underset{(2 \times 4)}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}} = \underset{(3 \times 4)}{\begin{bmatrix} -6 & 20 & 7 & 27 \\ 2 & -6 & -2 & -10 \\ -1 & 9 & 4 & -4 \end{bmatrix}}$$

Para concluirmos esta seção precisamos rever os conceitos de matriz identidade e de matriz inversa.

A *Matriz Identidade* de ordem n, simbolizada por $\mathbf{I}_n$, é um arranjo dos n vetores unitários de R^n ordenados de modo que a unidade de cada um ocupe a diagonal da matriz.

$$\mathbf{I}_n = [\mu_1\ \mu_2\ \ldots\ \mu_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz-identidade tem a propriedade de que, se pré ou pós-multiplicada por uma matriz $\mathbf{A}$ qualquer, dá como resultado a própria matriz $\mathbf{A}$. Se $\mathbf{A}$ é $(m \times n)$, então $\mathbf{I}_m \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$. Quando o subscrito de $\mathbf{I}$ for óbvio no contexto, ele não será empregado.

A *inversa* de uma matriz $\mathbf{A}$ de dimensão $(n \times n)$, *quando existe*, é uma matriz da mesma dimensão de $\mathbf{A}$ tal que, pré ou pós-multiplicada por $\mathbf{A}$, gera como resultado uma matriz-identidade. A inversa de $\mathbf{A}$, quando existe, é simbolizada por $\mathbf{A}^{-1}$. Assim: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

A inversa de uma matriz $\mathbf{A}$ de dimensão $(n \times n)$ só existe se as n colunas (ou linhas) de $\mathbf{A}$ formarem um arranjo com independência linear, isto é, se $\mathbf{A}$ for uma base para R^n.

Consideremos o sistema de n equações e n incógnitas: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Se $\mathbf{A}^{-1}$ existe, ao pré-multiplicarmos ambos os lados do sistema por $\mathbf{A}^{-1}$ obtemos:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

ou

$$\mathbf{I}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

ou

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

A última expressão é a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ quando $\mathbf{A}^{-1}$ existe. Que $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$ é a solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é facilmente demonstrado; substituindo $\mathbf{x}^*$ por $\mathbf{x}$ em $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ vem:

$$\mathbf{AA}^{-1}\,\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

ou

$$\mathbf{I}\,\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

ou

$$\mathbf{b} = \mathbf{b} \quad \text{e} \quad \therefore\ \mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \text{ satisfaz } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Nesta seção foi estabelecida a notação algébrica que será usada ao longo do texto. Foi verificado também que a condição para que um sistema $(m \times n)$ tenha uma solução única é que a matriz de coeficientes do sistema seja uma base. Não serão revisados métodos numéricos específicos para verificação de se uma matriz é uma base, ou de inversão de matrizes, pois isto não é vital para o entendimento de Programação Linear. O único método numérico de resolução de sistemas que será estudado no texto é a Redução de Gauss-Jordan. Este método nos permitirá encontrar a solução $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, de modo muito eficiente (quando $\mathbf{A}^{-1}$ existir) ou, eventualmente, nos permitirá determinar de modo bastante singelo se uma solução não existe e porque não existe. Todavia, antes de examinarmos a Redução de Gauss-Jordan, é conveniente fazermos uma análise gráfica de sistemas de equações.

I.2 — Soluções de Sistemas Lineares: Interpretação Gráfica

Nesta seção iremos examinar sistemas de equações lineares e suas soluções sob o ponto de vista gráfico. Para tanto a análise se restringirá a sistemas de duas equações e duas incógnitas. Na primeira parte a análise gráfica será desenvolvida no espaço — ou sistema de eixos — das incógnitas do sistema enquanto que na segunda parte a análise será desenvolvida no espaço a que pertencem as colunas de coeficientes do sistema (R^2). O objetivo desta seção é o de discutir condições de existência e unicidade de soluções em sistemas lineares a nível intuitivo.

Vamos iniciar com a análise gráfica do seguinte sistema ilustrativo:

$$(2.1) \quad \begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 9 & (2.1.1) \\ 1x_1 + 2x_2 = 8 & (2.1.2) \end{cases}$$

Para representarmos o sistema (2.1) no espaço das incógnitas é conveniente isolarmos x_1 e reescrevermos o sistema como:

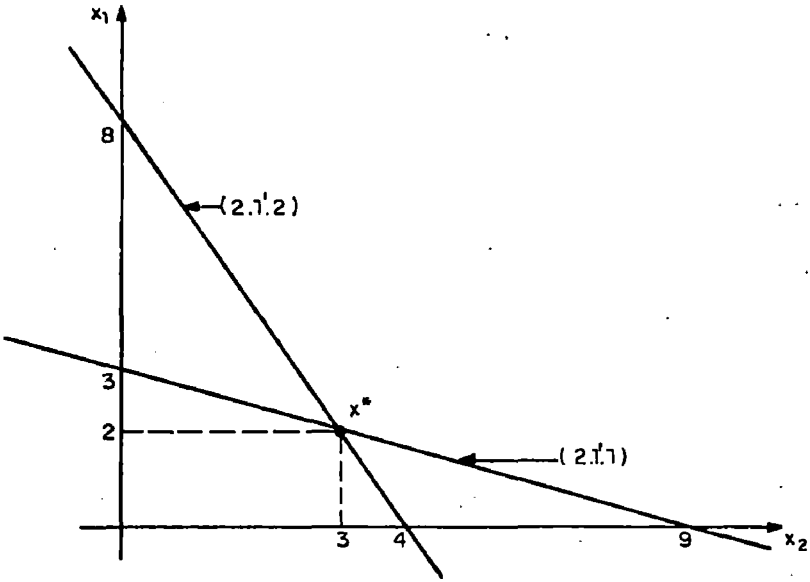
$$(2.1') \quad \begin{cases} x_1 = 3 - \dfrac{1}{3} x_2 & (2.1'.1) \\ x_1 = 8 - 2\, x_2 & (2.1'.2) \end{cases}$$

A seguir colocamos as retas $(2.1'.1)$ e $(2.1'.2)$ no sistema de eixos x_1 x_2 (Figura 2.1). O ponto de interseção das duas retas, x^*, evidentemente pertence a duas equações. Portanto, suas coordenadas $(x_1^* = 2 \; ; \; x_2^* = 3)$ se constituem na solução do sistema.

Agora, se o sistema (2.1) tivesse mais uma equação, ficando então com três equações e duas incógnitas, teríamos duas possibilidades em termos de existência de solução: (a) se a equação adicional determinar uma reta que passa pelo ponto x^*, o sistema continuará tendo a mesma solução de antes e a nova equação será *redundante*, isto é, não acrescenta nenhuma informação nova ao sistema e (b) se a equação adicional determinar uma reta que não passa pelo ponto x^*, então não existirá um ponto comum às três equações e o sistema não terá solução, isto é, o sistema se torna *inconsistente*. De modo geral, um sistema com mais equações do que incógnitas apresenta *ou* alguma redundância (informação desnecessária para determinar a solução) *ou* alguma inconsistência (informação contraditória que impede a existência de qualquer solução para o sistema).

Por outro lado, as possibilidades gráficas para um sistema de duas equações e duas incógnitas são as seguintes: (a) as equações do sistema determinam duas retas não paralelas; neste caso, o sistema tem uma solução única que é dada pela interseção das duas retas; (b) as equações do sistema determinam retas paralelas; neste caso

Figura 2.1
Resolução Gráfica do Sistema (2.1)



o sistema é inconsistente e não tem solução e (c) as equações do sistema determinam uma única reta; neste caso, uma das equações é redundante e o sistema tem uma infinidade de soluções possíveis.

Exercícios: a) O sistema abaixo não tem solução (verifique graficamente) :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 6 \\ 6x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases}$$

Observe que o lado esquerdo da segunda equação é igual ao lado esquerdo da primeira equação multiplicada por dois; no lado direito da igualdade, todavia, esta multiplicidade não existe.

b) O sistema abaixo tem uma infinidade de soluções (verifique graficamente)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 6 \\ 6x_1 + 4x_2 = 12 \end{cases}$$

Observe que a segunda equação é igual à primeira multiplicada por dois, lado a lado; arbitrando qualquer valor para x_2, por ex., x_2^*, e computando $x_1^* = 2 - (2/3) \cdot x_2^*$, obtemos uma solução para o sistema.

Vamos agora fazer uma interpretação gráfica do sistema (2.1) no espaço das colunas de coeficientes do sistema, isto é, em R^2. Para tanto escrevemos o sistema (2.1) como uma soma de dois vetores numericamente conhecidos que, multiplicados por escalares cujos valores queremos determinar, gera como resultado um vetor que também é numericamente conhecido. Assim:

$$(2.1^*) \quad \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 = \mathbf{b}, \text{ onde } \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Façamos $\mathbf{z}_j = \mathbf{a}_j x_j$ $(j = 1, 2)$. O vetor $\mathbf{z}_j$, sendo múltiplo de $\mathbf{a}_j$, se situa sobre a reta que passa pelo ponto 0 e pelo ponto $\mathbf{a}_j$. Resolver o sistema (2.1*) equivale a responder à seguinte pergunta: onde, exatamente, devem-se situar os vetores $\mathbf{z}_1$ e $\mathbf{z}_2$ para que sua soma seja o vetor **b**? Recordemos o processo gráfico da soma de dois vetores visto no início da seção anterior. Naquele caso eram dados dois vetores e, a partir daí, o vetor resultante da soma ficava determinado através da construção de um paralelogramo com base nos vetores dados. O caso presente, todavia, não é exatamente o mesmo; agora a localização do vetor resultante b é conhecida, bem como as *direções* de $\mathbf{z}_1$ e $\mathbf{z}_2$ (uma vez que $\mathbf{z}_1$ e $\mathbf{z}_2$ são múltiplos dos vetores conhecidos $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$). A Figura 2.2 (a) representa esta situação.

A resolução do sistema, que consiste em localizar os vetores $\mathbf{z}_1$ e $\mathbf{z}_2$ sobre as direções $0\mathbf{a}_1$ e $0\mathbf{a}_2$, respectivamente, é apresentada na Figura 2.2 (b): por **b** traçamos uma paralela a $0\mathbf{a}_2$ até encontrar a direção $0\mathbf{a}_1$ — localizando $\mathbf{z}_1$ no intercepto — e, novamente por **b**, traçamos uma paralela a $0\mathbf{a}_1$ até encontrar a direção $0\mathbf{a}_2$, localizando

Figura 2.2 (a)
Representação Gráfica da Informação Contida no Sistema (2.1^*)

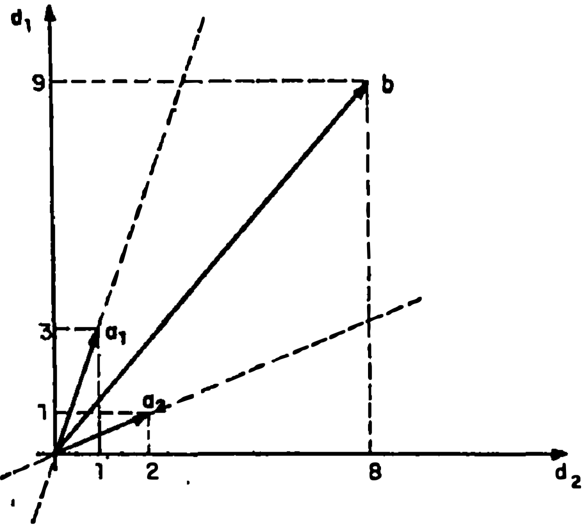
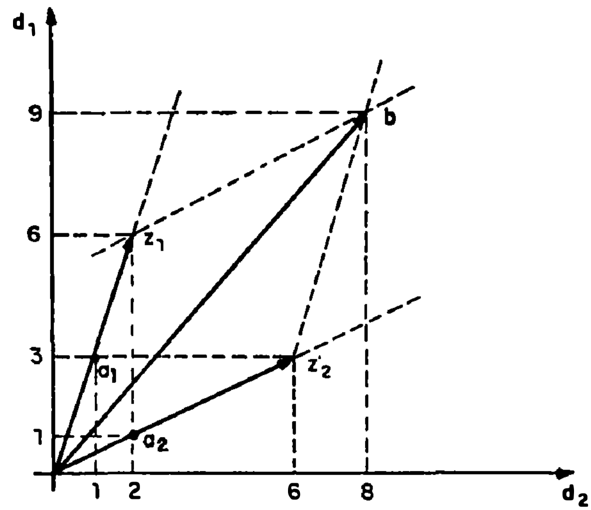


Figura 2.2 (b)
Resolução Gráfica do Sistema (2.1^*) pela Localização de z_1 e z_2



$\mathbf{z}_2$ no intercepto. Uma rápida inspeção da Figura 2.2 (b) nos permite concluir que o vetor $\mathbf{z}_1$ deve ser igual a duas vezes o vetor $\mathbf{a}_1$ (de onde: $x_1 = 2$), enquanto que o vetor $\mathbf{z}_2$ deve ser igual a três vezes o vetor $\mathbf{a}_2$ (portanto: $x_2 = 3$).

Fazemos ainda as seguintes observações conclusivas: (a) se o vetor $\mathbf{b}$ se encontra dentro do cone determinado por $\mathbf{a}_1 0 \mathbf{a}_2$, a solução do sistema $\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 = \mathbf{b}$ será não-negativa e (b) se os vetores $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ se situam sobre uma mesma direção, então o sistema pode: não ter solução (se b não se situar também sobre a direção de $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$) *ou* ter infinitas soluções (se b se situar sobre a direção de $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$). Observe que estes dois últimos casos têm correspondência, respectivamente, com os casos de inconsistência e de redundância vistos anteriormente.

Exercício: Analise os sistemas (a) e (b) do exercício anterior em R^3.

Nas próximas seções enfocaremos aspectos práticos da resolução de sistemas de equações lineares.

I.3 — Resolução de Sistemas Lineares pela Redução de Gauss-Jordan

A resolução de um Problema de Programação Linear tipicamente é obtida através da resolução seqüencial de um grande número de sistemas de equações simultâneas. Assim sendo, é útil dispor-se de um método eficiente para resolver tais sistemas. O método conhecido por Redução de Gauss-Jordan preenche este requisito, motivo pelo qual o estudaremos com certo detalhe nesta seção.

Como intróito à Redução de Gauss-Jordan, vamos revisar o conceito de operações elementares em um sistema e o conceito de equivalência de sistemas.

Uma operação elementar em um sistema de equações consiste em substituir uma equação do sistema por outra equação de tal modo que a solução do novo sistema seja a mesma que a solução do sistema original. Operações elementares de interesse para fins de resolução numérica de um sistema são: (a) a substituição de uma equação qualquer por ela mesma multiplicada por um escalar não-nulo e (b) a substituição de uma equação qualquer pela equação resultante da soma dela própria com alguma outra equação do sistema multiplicada por um escalar não-nulo. As operações elementares não alteram as raízes, ou solução, do sistema.

Se um determinado sistema é, ou pode ser, obtido de outro sistema através de operações elementares, diz-se que os dois sistemas são equivalentes. Em outras palavras, sistemas equivalentes contêm a mesma informação em termos de suas raízes.

Exemplo: Consideremos o sistema (I), abaixo:

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 = 3 \\ 0x_1 + 1x_2 = 5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

A solução (óbvia) do sistema (I) é $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$. A notação matricial introduzida ao lado do sistema explícito é chamada de "matriz expandida do sistema". Esta notação será utilizada intensivamente adiante, pelo que o leitor deve desde logo se familiarizar com a mesma.

Vamos a seguir somar a primeira equação de (I) com a segunda multiplicada por 2 (lado a lado) ;

$$1x_1 + 0x_2 + 2(0x_1 + 1x_2) = 3 + 2(5)$$

ou

$$1x_1 + 2x_2 = 13$$

e, a seguir, substituir a equação assim obtida pela primeira equação do sistema (I). O resultado é o sistema (II), abaixo:

$$(II)\quad \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 = 13 \\ 0x_1 + 1x_2 = 5 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Uma rápida verificação assegurará ao leitor que a solução de (II) é a mesma de (I), isto é, $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$.

Continuando com o exemplo, vamos agora somar a segunda equação de (II) com sua primeira equação multiplicada por 3 (lado a lado):

$$0x_1 + 1x_2 + (-3)(1x_1 + 2x_2) = 5 + (-3)(13)$$

ou

$$-3x_1 - 5x_2 = -34$$

e a seguir, substituir a equação assim obtida pela segunda equação do sistema (II). O resultado é o sistema (III), abaixo:

$$(III)\quad \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 = 13 \\ -3x_1 - 5x_2 = -34 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 13 \\ -3 & -5 & -34 \end{array}\right]$$

Mais uma vez poderá ser verificado que a solução do sistema (III) continua sendo a mesma que a dos sistemas (I) e (II), isto é, $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$.

Portanto, os sistemas (I), (II) e (III) são equivalentes.

Exercício: Procure obter o sistema (I) a partir do sistema (III) através de operações elementares, isto é, realizar o caminho inverso do realizado no exemplo.

Observação: Se desconhecêssemos o fato de que os sistemas do exemplo anterior são equivalentes e procurássemos resolvê-los independentemente, verificaríamos que o sistema (I) tem uma solução óbvia, enquanto que alguns cálculos seriam necessários para resolver os demais sistemas. Por que a solução do sistema (I) é óbvia? Simplesmente porque a matriz de coeficientes do sistema está reduzida a um arranjo de vetores unitários. O sistema (I) é uma espécie de "chapa de raios-X" dos sistemas (II) e (III). Na prática, em geral, temos que partir de sistemas como (III) e, de alguma maneira, livrarmo-nos das "superfluidades" que dificultam enxergar sua solução. Para tanto, poderíamos realizar operações elementares numa seqüência tal que, ao término da computação, obtivéssemos um sistema equivalente ao original porém com a matriz de coeficientes reduzida a um arranjo de vetores unitários. Assim, a exposição das raízes procuradas seria completa. O método de Gauss-Jordan consiste exatamente na sistematização desta seqüência de operações elementares.

Em vista da observação acima conclui-se que, para avançarmos um passo na resolução de um sistema, devemos encontrar um conjunto de operações elementares que transformem o sistema dado em um sistema equivalente no qual o número de vetores unitários presentes na matriz de coeficientes seja incrementado. A consecução deste objetivo será ilustrada a seguir com um exemplo algébrico envolvendo um sistema de três equações e três incógnitas. Consideremos, então, o seguinte sistema:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{c} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{A} \vdots \mathbf{c}) \quad \text{ou} \quad \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right]$$

Vamos admitir que **A** seja uma base para R^3 e que o coeficiente a_{22} seja diferente de zero. A seguir vamos definir uma matriz **T** como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -a_{12}/a_{22} & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32}/a_{22} & 1 \end{bmatrix}$$

Por fim, vamos pré-multiplicar ambos os lados do sistema $(A \vdots c)$ pela matriz T e obter:

$(TA)x = Tc$ ou $(TA \vdots Tc)$ ou

$$\left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} - \dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{22}} & 0 & a_{13} - \dfrac{a_{23}a_{12}}{a_{22}} & c_1 - \dfrac{c_2 a_{12}}{a_{22}} \\ a_{21}/a_{22} & 1 & a_{23}/a_{22} & c_2/a_{22} \\ a_{31} - \dfrac{a_{21}a_{32}}{a_{22}} & 0 & a_{33} - \dfrac{a_{23}a_{32}}{a_{22}} & c_3 - \dfrac{c_2 a_{32}}{a_{22}} \end{array}\right]$$

Vamos provar que os sistemas $(A \vdots c)$ e $(TA \vdots Tc)$ são equivalentes. Se assim é, a pré-multiplicação do sistema original por T deve corresponder a algumas operações elementares. De fato, a transformação de $(A \vdots c)$ em $(TA \vdots Tc)$ envolve: (a) substituição da primeira equação pela equação resultante da soma pela própria com a segunda equação multiplicada por $(-\, a_{12}/a_{22})$, (b) substituição da segunda equação por ela mesma multiplicada por $(1/a_{22})$ e (c) substituição da terceira equação pela equação resultante da soma dela própria com a segunda equação multiplicada por $(-\, a_{32}/a_{22})$. Todas estas operações são realizadas simultaneamente.

O sistema $(TA \vdots Tc)$ apresenta um vetor unitário na segunda coluna da matriz de coeficientes. Assim, em relação ao sistema inicial, o sistema $(TA \vdots Tc)$ representa *um* passo na direção desejada, qual seja, obter um sistema equivalente ao inicial com a matriz de coeficientes reduzida ao arranjo de vetores unitários.

Exercício: Dado o sistema algébrico:

$$(A \vdots c) \quad \text{ou} \quad \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right]$$

e, admitindo-se que $a_{11} \neq 0$, encontra o sistema $(\mathbf{RA} \vdots \mathbf{Rc})$, onde $\mathbf{R}$ é definido como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifique que o sistema $(\mathbf{RA} \vdots \mathbf{Rc})$ pode, alternativamente, ser obtido do sistema $(\mathbf{A} \vdots \mathbf{c})$ pela realização simultânea das seguintes operações elementares: (a) substituição da primeira equação por ela mesma multiplicada por $(1/a_{11})$, (b) substituição da segunda equação pela equação resultante da soma dela própria com a primeira equação multiplicada por $(-a_{21}/a_{11})$ e (c) substituição da terceira equação pela equação resultante da soma dela própria com a primeira equação multiplicada por $(-a_{31}/a_{11})$. Observe que a primeira coluna do sistema $(\mathbf{RA} \vdots \mathbf{Rc})$ é um vetor unitário.

Alguma reflexão sobre os resultados algébricos obtidos no exemplo e no exercício anterior permitem a elaboração de um algoritmo para resolver sistemas de equações simultâneas.

Vamos supor que, dado o sistema de n equações e n incógnitas representado por $(\mathbf{A} \vdots \mathbf{a}_{n+1})$, queremos passar a um sistema equivalente $(\mathbf{B} \vdots \mathbf{b}_{n+1})$ no qual a j-ésima coluna de $\mathbf{B}$ seja um vetor unitário contendo a unidade na sua i-ésima linha. O coeficiente a_{ij} de $\mathbf{A}$ será chamado de "pivô". O sistema $(\mathbf{B} \vdots \mathbf{b}_{n+1})$ é obtido do sistema $(\mathbf{A} \vdots \mathbf{a}_{n+1})$ pela aplicação das seguintes regras:

1.ª — Os elementos b_{ip} da matriz $(\mathbf{B} \vdots \mathbf{b}_{n+1})$, situados na linha i, *i. e.*, a linha do pivô, serão dados por:

$$b_{ip} = a_{ip}/a_{ij} \quad (p = 1, 2, \ldots, n+1)$$

2.ª — Os elementos b_{qj}, da matriz $\mathbf{B}$, situados na coluna j, *i. e.*, a coluna do pivô, são nulos (com exceção do elemento b_{ij} que é unitário).

3.ª — Os elementos b_{qp}, da matriz $(\mathrm{B} \vdots \mathrm{b}_{n+1})$, situados fora da linha i e da coluna j, serão dados por:

$$b_{qp} = a_{qp} - \frac{a_{ip}\, a_{pj}}{a_{ij}} \quad (q \neq i;\ p \neq j;\ q = 1, \ldots, n;\ p = 1, \ldots, n+1)$$

As regras acima definem uma operação chamada "pivotação". Através da pivotação de um elemento na matriz de coeficientes de um sistema qualquer obtém-se um sistema equivalente. Portanto, a pivotação não altera a relação que as variáveis do sistema mantêm entre si; seu objetivo é apenas obviar este relacionamento através da simplificação da matriz de coeficientes do sistema.

Exemplo: Pivotar o coeficiente indicado no sistema da esquerda de modo a obter um sistema equivalente.

$$(a)\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & \vdots & 9 \\ 1 & 2 & 6 & \vdots & 3 \\ 11 & 7 & 5 & \vdots & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 - \dfrac{1 \cdot 8}{2} & 0 & 0 - \dfrac{6 \cdot 8}{2} & \vdots & 9 - \dfrac{3 \cdot 8}{2} \\ 1/2 & 1 & 6/2 & \vdots & 3/2 \\ 11 - \dfrac{1 \cdot 7}{2} & 0 & 5 - \dfrac{6 \cdot 7}{2} & \vdots & 10 - \dfrac{3 \cdot 7}{2} \end{bmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -24 & \vdots & -3 \\ 1/2 & 1 & 3 & \vdots & 3/2 \\ 15/2 & 0 & -16 & \vdots & -1/2 \end{bmatrix}$$

Exercício: Verifique o resultado da pivotação indicada em cada um dos casos abaixo:

$$(b)\begin{bmatrix} 0 & 0 & -24 & \vdots & 8\ - \\ 1/2 & 1 & 3 & \vdots & 3/2 \\ 15/2 & 0 & -16 & \vdots & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -24 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 61/15 & \vdots & 23/15 \\ 1 & 0 & -32/15 & \vdots & -1/15 \end{bmatrix}$$

$$(c)\begin{bmatrix} 0 & 0 & -24 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 61/15 & \vdots & 23/15 \\ 1 & 0 & -32/15 & \vdots & -1/15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \vdots & 0{,}125 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1{,}025 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 0{,}200 \end{bmatrix}$$

Observação: Na seqüência (a), (b) e (c), do exemplo e exercícios acima, o sistema inicialmente proposto foi reduzido paulatinamente a um sistema cuja matriz de coeficientes é um arranjo de vetores unitários. Com isto, a solução do sistema inicial — ***e de todos os sistemas intermediários*** — pode ser facilmente enxergada na última matriz expandida: $x_1 = 0{,}200$; $x_2 = 1{,}025$ e $x_3 = 0{,}125$. Observe a correspondência das raízes com a posição da unidade nos vetores unitários associados a cada uma delas!

Exercício: Verifique cada passo da resolução do seguinte sistema (3×3):

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} 4\,x_1 &+& 1\,x_2 &-& 2\,x_3 &=& 14 \\ -2\,x_1 &+& 3\,x_2 &+& 5\,x_3 &=& 11 \\ 0\,x_1 &+& 2\,x_2 &-& 1\,x_3 &=& 7 \end{array}\right.$$

O sistema é resolvido em três passos:

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 4 & 1 & -2 & 14 \\ -2 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 1/4 & -1/2 & 7/2 \\ 0 & 7/2 & 4 & 18 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 1/4 & -1/2 & 7/2 \\ 0 & 7/2 & 4 & 18 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & -3/8 & 21/8 \\ 0 & 0 & 23/4 & 23/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 7/2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & -3/8 & 21/8 \\ 0 & 0 & 23/4 & 23/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 7/2 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

A última matriz expandida é composta apenas de vetores unitários. A solução encontrada é $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ e $x_3 = 1$. Observe o relacionamento da solução com a posição das unidades nos vetores unitários do sistema reduzido! Verifique que a solução encontrada satisfaz ao sistema inicial, bem como a todos os sistemas intermediários, confirmando, assim, sua equivalência.

Exercício: Resolva o mesmo sistema do exercício anterior, escolhendo uma seqüência de pivôs ao longo da diagonal principal da matriz de coeficientes do sistema: Seu resultado final deverá ser:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 1, \end{cases} \quad \text{como antes.}$$

Observação final: Como o pivô é usado como denominador nos diversos cálculos necessários para a resolução do sistema, não podemos selecionar um coeficiente nulo como pivô. Se, num determinado passo, todos os coeficientes em posição de candidatos potenciais a pivô forem nulos, então o sistema em análise ou é inconsistente ou contém redundância. Verifique, através da construção de exemplos numéricos, que: (a) quando o sistema inicial contém inconsistência, num determinado passo será obtido um sistema equivalente contendo alguma equação do tipo $0\ x_1 + 0\ x_2 + \dots + 0\ x_n = k$, onde $k \neq 0$, e (b) quando o sistema inicial contém redundância, num determinado passo será obtido um sistema equivalente contendo alguma equação do tipo $0\ x_1 + 0\ x_2 + \dots + 0\ x_n = 0$.

I.4 – Soluções Básicas de Sistemas Indeterminados

Soluções básicas desempenham um papel fundamental em Programação Linear. Assim, seu conceito e obtenção deve ser estudado com algum detalhe.

Consideremos um sistema de equações simultâneas onde o número de incógnitas (n) é maior que o número de equações (m). Vamos supor que uma base para R^m possa ser construída utilizando m colunas de coeficientes do sistema. Neste caso, podemos obter soluções numéricas condicionadas: especificando valores numéricos para $(n - m)$ incógnitas podemos resolver o sistema de m equações para as m incógnitas restantes. No caso de atribuirmos valores nulos para $(n - m)$ incógnitas e resolvermos o sistema para as m incógnitas restantes, obtemos uma *solução básica* para o sistema.

Exemplo: Considere o seguinte sistema de cinco incógnitas e três equações.

$$\begin{cases} 3\,x_1 + 2\,x_2 + 0\,x_3 + 1\,x_4 + 0\,x_5 = 4 \\ 4\,x_1 + 0\,x_2 + 1\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 = 4 \\ 1\,x_1 + 3\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 1\,x_5 = 9 \end{cases}$$

Observando que as colunas associadas com $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$ e $\mathbf{x}_5$ são vetores unitários, formando uma base óbvia para R^3, concluímos que uma solução básica para o sistema em pauta é $\mathbf{x}_1 = 0$, $\mathbf{x}_2 = 0$, $\mathbf{x}_3 = 4$, $\mathbf{x}_4 = 4$, $\mathbf{x}_5 = 9$. A evidência desta solução no sistema dado é ressaltada através de uma notação auxiliar nas margens da matriz expandida do sistema:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & & \mathbf{c} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] & \begin{array}{c} x_4 \\ x_3 \\ x_5 \end{array} \end{array}$$

Observe a relação da solução $(\mathbf{x}_4 = 4,\ \mathbf{x}_3 = 1,\ \mathbf{x}_5 = 9)$ com a posição da unidade nos vetores unitários $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ e $\mathbf{a}_5$. Fica implícito que as incógnitas associadas com vetores não-unitários assumem valores nulos $(\mathbf{x}_1 = 0$ e $\mathbf{x}_2 = 0)$.

A notação colocada às margens da matriz expandida do sistema é particularmente útil quando, dada uma solução básica, queremos obter uma outra solução básica para o sistema. Continuando com o sistema numérico do exemplo, vamos supor que quiséssemos uma nova solução básica na qual $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_5$ fossem nulos. Em relação à solução básica anterior, queremos uma nova solução na qual $\mathbf{x}_2$ "entre" (isto é, apareça explícito na posição do vetor c) e $\mathbf{x}_5$ "saia" (isto é, torne-se zero). Nosso objetivo pode ser conseguido com um simples passo da Redução de Gauss-Jordan:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & & \mathbf{c} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc:c} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} x_4 \\ x_3 \Longrightarrow \\ x_6 \rightarrow \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & & \mathbf{c} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc:c} 7/3 & 0 & 0 & 1 & -2/3 & -2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 3 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{array}
$$

A matriz expandida à direita contém uma nova solução básica para o sistema inicial: $x_4 = -2$, $x_3 = 4$, $x_2 = 3$ e, para as incógnitas associadas com vetores não-unitários: $x_1 = 0$ e $x_5 = 0$ (verifique que esta solução de fato satisfaz o sistema inicial). As setas na matriz da esquerda simbolizam a "entrada" de x_2 e a "saída" de x_6. A escolha do pivô é conseqüência deste objetivo visado.

Exercício: A partir da solução básica expressa na matriz abaixo, obtenha uma nova solução básica na qual x_1 "entre" e x_3 "saia".

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & & \mathbf{c} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc:c} 7/3 & 0 & 0 & 1 & -2/3 & -2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 3 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{array}
$$

Seu resultado deverá ser $x_4 = -13/3$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 8/3$; $x_3 = 0$ e $x_5 = 0$. Observe que o sistema em pauta é continuação do exemplo anterior de modo que a nova solução também satisfaz o sistema inicial do mesmo.

Com a finalidade de reduzir a terminologia, convencionaremos chamar aquelas incógnitas, cujo valor numérico aparece explícito na coluna **c** da matriz expandida, de incógnitas ou variáveis *básicas* (ou *na base*). Por outro lado, as incógnitas que implicitamente assumem um valor nulo serão designadas de incógnitas ou variáveis *fora da base* (ou não-básicas).

Exemplo: Em todos os diferentes sistemas numéricos apresentados abaixo, as variáveis x_3, x_4 e x_5 são básicas (ou estão na base), enquanto que as variáveis x_1 e x_2 estão fora da base (ou são não-básicas).

$$\text{a)}\quad \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{c} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] & \begin{array}{c} x_4 \\ x_3 \\ x_5 \end{array} \end{array}$$

$$\text{b)}\quad \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{c} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] & \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \end{array}$$

$$\text{c)}\quad \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{c} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right] & \begin{array}{c} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \end{array} \end{array}$$

Observe que no sistema (c) do exemplo apresentado acima, a variável x_5, embora básica, assume valor zero. Neste caso, a solução básica do sistema (c) é dita "degenerada". Apesar da conotação depreciativa do termo, nada há de errado com as soluções básicas degeneradas. Entretanto, o exemplo nos conduz a elaborar uma formulação precisa do que se entende por uma solução básica:

> "Dado um sistema de m equações e n incógnitas, onde $n > m$, uma solução básica para tal sistema é uma solução na qual ***pelo menos*** $(n - m)$ incógnitas assumem valor zero."

I.5 — Resolução Conjunta de Sistemas Lineares

Cada passo do método Simplex, empregado na resolução de problemas de Programação Linear, envolve a resolução de diversos sistemas que apresentam a mesma matriz de coeficientes e diferentes vetores de constantes. O objetivo desta seção é o de apresentar a resolução conjunta de tais sistemas através da Redução de Gauss-Jordan. Para tanto, examinaremos um exemplo numérico.

Exemplo: Resolver os seguintes sistemas:

$$\text{(I)} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -6 \\ 2x_1 - 1x_2 = 7 \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 = 16 \\ 2y_1 - 1y_2 = -4 \end{cases}$$

$$\text{(III)} \begin{cases} 3z_1 + 4z_2 = 21 \\ 2z_1 - 1z_2 = 3 \end{cases}$$

Observe que a matriz de coeficientes é a mesma nos três sistemas. Em vista disto, podemos formar uma matriz expandida que englobe os três sistemas e, a partir daí, resolvê-los conjuntamente:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 & 16 & 21 \\ 2 & -1 & 7 & -4 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -2 & 16/3 & 7 \\ 0 & -11/3 & 11 & -44/3 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -2 & 16/3 & 7 \\ 0 & -11/3 & 11 & -44/3 & -11 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Após a segunda pivotação, a matriz de coeficientes reduziu-se a um arranjo de vetores unitários. A solução dos três sistemas é lida nas colunas $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ e $\mathbf{c}_3$, isto é, nas colunas das constantes de cada sistema. Assim, a solução do sistema (I) é $x_1 = 2$ e $x_2 = -3$, a solução do sistema (II) é $y_1 = 0$ e $y_2 = 4$ e a solução do sistema (III) é $z_1 = 3$ e $z_2 = 3$.

Exercício: Resolver o mesmo problema do exemplo escolhendo os pivôs ao longo da diagonal secundária da matriz de coeficientes. O resultado final deverá ser:

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\
\end{array}
$$
$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & -3 & 4 & 3 \\
1 & 0 & 2 & 0 & 3
\end{bmatrix}
$$

Compare este resultado com o do exemplo acima e conclua que a solução encontrada é idêntica. Lembre de associar as raízes com a posição da unidade nos vetores unitários!

Neste ponto é conveniente introduzir uma notação que será empregada mais tarde no desenvolvimento do método Simplex. Com este propósito, considere a matriz abaixo e procure encontrar as soluções dos sistemas (a) $(\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_5 \vdots \mathbf{a}_1)$, (b) $(\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_5 \vdots \mathbf{a}_4)$ e (c) $(\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_5 \vdots \mathbf{a}_6)$:

$$
\begin{array}{cccccc}
\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 \\
\end{array}
$$
$$
\begin{bmatrix}
2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
5 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2
\end{bmatrix}
$$

Façamos y_{ij} a incógnita associada com a coluna $\mathbf{a}_i$ no sistema que tem $\mathbf{a}_j$ como vetor de constantes. Então, escrevendo os sistemas de interesse por completo, as soluções ficam evidentes, uma vez que $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$ e $\mathbf{a}_5$ são vetores unitários:

a) $(\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_5 \vdots \mathbf{a}_1)$ é: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_{21} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_{31} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_{51} = \begin{bmatrix} y_{51} \\ y_{31} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $(\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_5 \vdots \mathbf{a}_4)$ é: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_{24} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_{34} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_{54} = \begin{bmatrix} y_{54} \\ y_{34} \\ y_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

c) $(\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_5 \vdots \mathbf{a}_6)$ é: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_{26} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_{36} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_{56} = \begin{bmatrix} y_{56} \\ y_{36} \\ y_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Agora consideremos a mesma matriz de antes, mas supondo que tivéssemos interesse em encontrar as soluções dos sistemas:

$$\text{a}')\ (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_5 \vdots \mathbf{a}_3)\ \text{ou}\ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} y_{13} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_{23} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_{53} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b}')\ (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_5 \vdots \mathbf{a}_4)\ \text{ou}\ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} y_{14} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_{24} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_{54} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c}')\ (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_5 \vdots \mathbf{a}_6)\ \text{ou}\ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} y_{16} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_{26} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_{56} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Observando a matriz de coeficientes $(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_5)$ — que é comum aos três sistemas — notamos que, para resolver qualquer um dos sistemas, basta pivotar o segundo elemento da coluna $\mathbf{a}_1$. Com isto, a matriz $(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_5)$ será transformada num arranjo de vetores unitários com as unidades posicionadas em linhas diferentes. Então:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 0 & 17 \end{bmatrix} \end{array}$$

A matriz da direita contém as soluções dos sistemas (a'), (b') e (c'). Estas soluções são como se segue: $y_{53} = 2$, $y_{13} = -1$ e $y_{23} = 5$ (resultado lido na coluna $\mathbf{a}_3$, observando a posição da unidade nos vetores unitários $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_5$); $y_{54} = 3$, $y_{14} = 0$ e $y_{24} = -2$ (resultado lido na coluna $\mathbf{a}_4$, observando a posição da unidade nos vetores unitários $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_5$) e $y_{56} = 8$, $y_{16} = -3$ e $y_{26} = 17$ (resultado lido na coluna $\mathbf{a}_6$, observando a posição da unidade nos vetores unitários $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_5$). A visualização destes resultados fica facilitada se escrevermos os nomes dos vetores unitários na margem esquerda da matriz (segundo a posição da unidade nos vetores unitários) :

$$
\begin{array}{c} \\ \mathbf{a}_5 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 0 & 17 \end{bmatrix}
\end{array}
\quad \text{é} \quad
\begin{array}{c} \\ \mathbf{a}_5 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & y_{53} & y_{54} & 1 & y_{56} \\ 1 & 0 & y_{13} & y_{14} & 0 & y_{16} \\ 0 & 1 & y_{23} & y_{24} & 0 & y_{26} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Exercicio: Resolver os sistemas (I) $(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_5 \vdots \mathbf{a}_2)$, (II) $(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_5 \vdots \mathbf{a}_4)$ e (III) $(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_5 \vdots \mathbf{a}_6)$ na matriz abaixo:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Observe que a matriz contém um arranjo de vetores unitários formado pelas colunas $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_5$ e $\mathbf{a}_6$. Para executar a tarefa solicitada, a coluna $\mathbf{a}_6$ deve "sair" e a coluna $\mathbf{a}_3$ deve "entrar". A solução do problema é: (I) $y_{32} = 4/3$, $y_{12} = -\,22/3$ e $y_{52} = -\,26/3$, (II) $y_{34} = -\,1/3$, $y_{14} = -\,2/3$ e $y_{54} = 14/3$ e (III) $y_{36} = 1/3$, $y_{16} = -$ $-\,7/3$ e $y_{56} = -\,2/3$.

Capítulo II

FUNDAMENTOS TÉCNICOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Neste capítulo estaremos interessados na caracterização e resolução de problemas de Programação Linear. O capítulo se inicia pela formulação de alguns problemas típicos de Programação Linear para, a seguir, salientar características comuns a todos. Já em termos de resolução de problemas de Programação Linear, a discussão será restringida ao método Simplex. Este método será apresentado em detalhe, porém o leitor deve ficar alertado para a existência de métodos especializados que, explorando características matemáticas específicas de alguns tipos de problemas de Programação Linear, apresentam eficiência computacional superior à do método Simplex na resolução de problemas do tipo para o qual foram desenvolvidos. O método Simplex, por sua vez, é de uso geral, isto é, pode ser usado na resolução de *qualquer* problema de Programação Linear.

II.1 — Problemas de Programação Linear: Exemplos de Formulação

O primeiro passo no estudo de Programação Linear consiste em um treinamento básico na formulação de problemas. Formular um problema significa traduzir sua informação descritiva para um modelo matemático. Infelizmente, não existe um conjunto de regras definidas que realize o papel de dicionário nesta tradução. Conseqüentemente, a capacidade de formular problemas é uma função da experiência adquirida no assunto.

Ao final da série de exemplos de formulação de problemas que serão vistos a seguir, iremos verificar a emergência de um padrão geral nos mesmos. As características deste padrão serão discutidas para podermos definir o que se entende por um modelo de Programação Linear. Quanto aos exemplos em si, o leitor deve ter em mente que se trata de simplificações extremas da realidade e cujo único objetivo é estabelecer uma cabeça de ponte para problemas mais complexos.

Exemplo 1: Um agricultor pode produzir bois para abate e ovelhas para lã. A produção de um boi por ano requer a existência de um rebanho bovino que ocupa 11 ha de pastagens e que exige uma hora de trabalho por dia. A produção de uma tonelada de lã por ano requer a existência de um rebanho ovino que ocupa sessenta hectares de pastagens e que exige duas horas de trabalho por dia. O produtor prevê lucros de oito mil cruzeiros e de vinte e um mil cruzeiros por boi e por tonelada de lã produzidos, respectivamente. Seus recursos produtivos são limitados a quinhentos hectares de pastagens e, dado que seus dois filhos o auxiliam no trabalho, dispõe de vinte e quatro horas de trabalho diárias. O produtor desejaria seguir um plano que maximizasse seus lucros totais.

Formulação: Maximizar $L = 8\,x_1 + 21\,x_2$

sendo que:

a) $11\,x_1 + 60\,x_2 \leq 500$

b) $1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 24$

c) $x_1 \geq 0$

d) $x_2 \geq 0$

onde L é o lucro total do agricultor (em milhares de cruzeiros por ano),

x_1 é a produção de bois (em cabeças por ano) e

x_2 é a produção de lã (em toneladas por ano).

Comentários: O produtor quer decidir quantos bois (x_1) e quantas toneladas de lã (x_2) produzirá por ano. Ao atribuir valores numéricos para as variáveis de decisão x_1 e x_2, isto é, ao estabelecer qualquer plano de produção específico, o produtor simultaneamente está atribuindo valores numéricos ao lucro anual (L) e aos requerimentos do plano em termos de pastagens e em termos de mão-de-obra. Examinemos o condicionamento imposto pela inequação (a) sobre as variáveis de decisão que compõem o plano. Para produzir um boi por ano são necessários 11 ha de pastagens; portanto, para produzir x_1 bois serão necessários $(11 . x_1)$ ha de pastagens. Por analogia, a produção de x_2 toneladas de lã por ano estabelece um requerimento de $(60 . x_2)$ ha de pastagens. Assim, um plano para produzir x_1 bois e x_2 toneladas de lã por ano requer $(11\ x_1 + 60\ x_2)$ ha de pastagens. Para que o plano seja viável, seu requerimento de pastagens deve ser igual ou menor que a disponibilidade existente deste recurso produtivo (500 ha). A inequação (b), por seu turno, estabelece a condição de viabilidade do plano em termos de mão-de-obra: o requerimento diário de trabalho estabelecido pela produção de x_1 bois e x_2 toneladas de lã por ano deve ser igual ou menor que a quantidade disponível deste fator na fazenda. Os condicionamentos (c) e (d) fazem parte da lógica que um plano viável deve atender: tanto a produção de bois quanto a produção de lã devem ser não-negativas. Qualquer plano só será viável se satisfizer (a), (b), (c) e (d) *simultaneamente*. Dentre o conjunto de planos viáveis o produtor almeja descobrir aquele que está associado ao maior valor do escalar L. Finalizamos observando que o leitor não se deve preocupar, por ora, com a obtenção dos valores numéricos de x_1 e x_2 que maximizam L sob as condições (a), (b), (c) e (d); ao contrário do processo de formulação, o processo de resolução de um problema de Programação Linear *pode* ser obtido pela aplicação de um conjunto de regras bem definidas. A elaboração de tal conjunto de regras será objeto de discussão mais adiante neste capítulo. No momento é importante salientar que a formulação é pré-requisito *sine qua non* para a resolução de um problema.

Exemplo 2: Uma refinaria produz gasolina e óleo combustível. Sua matéria-prima é petróleo, que pode ser adquirido em três países diferentes: Um, Dois e Três. A partir de um barril de petróleo do país Um, que custa \$ 30, a refinaria obtém 20 litros de gasolina e 40 kg de óleo combustível. A partir de um barril de petróleo do país Dois, que custa \$ 28, a refinaria obtém 17 litros de gasolina e 43 kg de óleo combustível. A partir de um barril de petróleo do país Três, que custa \$ 34, a refinaria obtém 25 litros de gasolina e 35 kg de óleo combustível. A gerência da refinaria assinou contratos para a entrega de pelo menos 200.000 litros de gasolina e de pelo menos 380.000 kg de óleo combustível por semana, nos próximos dois meses. Que quantidade de barris deve ser adquirida de cada país de modo que a refinaria possa cumprir seus contratos ao menor custo de matéria-prima possível?

Formulação: Minimizar $C = 30\ p_1 + 28\ p_2 + 34\ p_3$

dado que:

a) $20\ p_1 + 17\ p_2 + 25\ p_3 \geqq 200.000$

b) $40\ p_1 + 43\ p_2 + 35\ p_3 \geqq 380.000$

c) $p_1 \geqq 0$

d) $p_2 \geqq 0$

e) $p_3 \geqq 0$

onde C é o custo da matéria-prima (em \$ por semana),

p_1 é a quantidade utilizada de petróleo do país Um (em barris por semana),

p_2 é a quantidade utilizada de petróleo do país Dois (em barris por semana) e

p_3 é a quantidade utilizada de petróleo do país Três (em barris por semana).

Comentários: A viabilidade de qualquer plano de aquisição de matéria-prima é condicionada pelo atendimento simultâneo das condições (a) até (e). A condição (a) é discutida a seguir. Dado que um barril de petróleo do país Um produz 20 litros de gasolina, então p_1 barris de petróleo da mesma fonte produzirão $(20p_1)$ litros de gasolina. Por outro lado, p_2 barris do país Dois e p_3 barris do país Três são capazes de produzir $(17p_2)$ e $(25p_3)$ litros de gasolina, respectivamente. Assim, se for estabelecido um plano de compra e uso de p_1, p_2 e p_3 barris por semana, originários respectivamente dos países Um, Dois e Três, a refinaria poderá produzir um total de $(20\ p_1 + 17\ p_2 + 25\ p_3)$ litros de gasolina por semana. Em vista dos contratos assumidos, esta produção total deve atingir pelo menos 200.000 litros por semana.

Exemplo 3: Uma fábrica de geradores elétricos tem três depósitos centrais nas regiões Um, Dois e Três. Estes depósitos abastecem cinco depósitos secundários mediante pedidos dirigidos a uma gerência central. Os depósitos secundários estão localizados nas regiões Quatro a Oito. A gerência tem pedidos para entrega de cinqüenta e dois geradores, assim distribuídos: (a) os depósitos Quatro e Seis solicitaram oito geradores cada um; (b) o depósito Cinco solicitou doze geradores; (c) o depósito Sete solicitou nove geradores e (d) o depósito Oito solicitou quinze geradores. Através de consulta telefônica aos depósitos centrais, a gerência foi informada da disponibilidade de um total de sessenta e dois geradores nos depósitos centrais, assim distribuídos: (a) o depósito Um dispõe de vinte e sete geradores, (b) o depósito Dois dispõe de vinte e três geradores e o depósito Três dispõe de doze geradores. A gerência observa que existe possibilidade de entrega imediata dos pedidos. Todavia, o custo de transporte de um gerador de um depósito para outro é diferente. O quadro abaixo informa estes custos.

CUSTOS DE TRANSPORTE DE GERADORES ENTRE DEPÓSITOS CENTRAIS (ORIGEM) E DEPÓSITOS SECUNDÁRIOS (DESTINOS), EM $ 1 000/GERADOR

Origem	Destino	Depósito Quatro	Depósito Cinco	Depósito Seis	Depósito Sete	Depósito Oito
Depósito Um		6	3	1	4	2
Depósito Dois		7	2	2	7	3
Depósito Três		5	4	5	5	2

O problema da gerência é determinar quantos geradores cada depósito central deve despachar para cada depósito secundário de modo a atender os pedidos com o menor volume de despesas de transporte possível.

Formulação: Minimizar $CT = 6q_{14} + 3q_{15} + 1q_{16} + 4q_{17} + 2q_{18} +$
$+ 7q_{24} + 2q_{25} + 2q_{26} + 7q_{27} + 3q_{28} +$
$+ 5q_{34} + 4q_{35} + 5q_{36} + 5q_{37} + 2q_{38}$

dado que
(a) $q_{14} + q_{15} + q_{16} + q_{17} + q_{18} \leq 27$
(b) $q_{24} + q_{25} + q_{26} + q_{27} + q_{28} \leq 23$
(c) $q_{34} + q_{35} + q_{36} + q_{37} + q_{38} \leq 12$
(d) $q_{14} + q_{24} + q_{34} = 8$
(e) $q_{15} + q_{25} + q_{35} = 12$
(f) $q_{16} + q_{26} + q_{36} = 8$
(g) $q_{17} + q_{27} + q_{37} = 9$
(h) $q_{18} + q_{28} + q_{38} = 15$
(i) $q_{ij} \geq 0;\ i = 1, 2, 3$ e $j = 4, 5, 6, 7, 8.$

onde CT é o custo de transporte dos geradores solicitados (em \$) e

q_{ij} é a quantidade de geradores transportados do depósito central i para o depósito secundário j ($i = 1, 2, 3$ e $j = 4, 5, 6, 7, 8$).

Comentários: O problema apresentado neste Exemplo 3 é conhecido como o Problema de Transporte, uma espécie de clássico na Programação Linear. As condições (a), (b) e (c) refletem limitações nas quantidades totais que cada depósito principal pode suprir. Observe que o lado esquerdo da inequação (a) é a soma das quantidades de geradores que saem do depósito Um para todos os depósitos secundários (Quatro, Cinco, Seis, Sete e Oito). Uma vez que no depósito Um estão disponíveis 27 geradores, a quantidade total despachada deste depósito deve ser igual ou menor que o número de geradores aí disponível. Observação semelhante se aplica às restrições (b) e (c). As restrições (d), (e), (f), (g) e (h), por outro lado, refletem a vontade da gerência em atender os pedidos dos depósitos Quatro, Cinco, Seis, Sete e Oito, respectivamente. O lado esquerdo da condição (g) acumula o total de geradores destinados ao depósito Sete e que vieram dos depósitos principais Um, Dois e Três. Uma vez que o depósito Sete solicitou nove geradores, a quantidade proveniente do depósito Um (q_{17}) mais a quantidade proveniente do depósito Dois (q_{27}) mais a quantidade proveniente do depósito Três (q_{37}) deve-se igualar a este número solicitado. Por fim, a condição (i) — que na realidade é um conjunto de doze restrições — estabelece de maneira formal que planos envolvendo quantidades transportadas negativas não são aceitáveis.

É conveniente, neste ponto, fazermos uma digressão sobre a transformação de inequações em equações através do uso de variáveis auxiliares não-negativas. Neste sentido, considere a inequação (a) do Exemplo 1, acima, segundo a qual o total de pastagens destinado à criação de bois e à produção de lã não deve ultrapassar 500 ha:

$$11\,x_1 + 60\,x_2 \leq 500$$

Nos comentários que se seguiram à formulação do Exemplo 1, vimos que $(11\,x_1 + 60\,x_2)$ é o número de ha de pastagens necessário para produzir x_1 bois e x_2 toneladas de lã por ano. Se agora definirmos uma variável x_3, não-negativa, que represente a área de pastagens eventualmente não utilizada no plano de produção, podemos substituir a inequação em pauta pelo conjunto:

$$\begin{cases} 11\,x_1 + 60\,x_2 + x_3 = 500 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Agora a equação nos diz que a soma da área efetivamente utilizada no plano de produção (isto é: $11\,x_1 + 60\,x_2$) com a área não utilizada (isto é: x_3) deve ser igual à área disponível (isto é: 500 ha). A área não utilizada, por sua vez, deve ser igual ou maior do que zero. Observe que se x_3 pudesse assumir valores negativos, isto seria equivalente a criar uma possibilidade de uso efetivo de pastagens maior do que o disponível na realidade (certifique-se de que entendeu esta afirmativa escrevendo $11\ x_1 + 60\ x_2 = 500 - x_3$ e atribuindo valores negativos a x_3!). Para evitar esta possibilidade, explicitamos que apenas valores não-negativos são aceitáveis para x_3.

Considere agora a inequação (b) do Exemplo 2:

$$40\ p_1 + 43\ p_2 + 35\ p_3 \geq 380.000$$

Nos comentários que se seguiram à formulação do Exemplo 2 foi visto que $(40\ p_1 + 43\ p_2 + 35\ p_3)$ era a quantidade de óleo combustível produzido semanalmente pela refinaria, dada a utilização de p_1, p_2 e p_3 barris de petróleo por semana oriundos dos países Um, Dois e Três, respectivamente. Por outro lado, o número 380.000 se referia à produção semanal mínima de óleo combustível que a refinaria deveria cumprir. Ora, em princípio não existe razão de natureza física, explícita na descrição do problema, segundo a qual a refinaria não possa produzir mais óleo combustível do que o mínimo requerido pelo contrato. Assim, vamos definir uma variável não-negativa p_4 que represente a quantidade de óleo combustível produzida em excesso ao mínimo contratual. Com isto, podemos substituir a inequação (b) do Exemplo 2 por:

$$\begin{cases} 40\ p_1 + 43\ p_2 + 35\ p_3 - p_4 = 380.000 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ p_4 \geq 0 \end{cases}$$

Observe o significado da equação: a quantidade produzida de óleo combustível $(40\ p_1 + 43\ p_2 + 35\ p_3)$ deve ser igual à quantidade requerida em contrato (380.000) mais alguma quantidade eventualmente produzida em excesso (p_4). Certifique-se de que entendeu porque agora *subtraímos* uma variável auxiliar *não-negativa* para transformar a inequação em uma equação. Note que no exemplo anterior a inequação era do tipo "igual ou menor que" e agora a inequação é do tipo "igual ou maior que".

Exercício: Refaça a formulação dos Exemplos 1, 2 e 3 eliminando todas as inequações pela utilização de tantas variáveis auxiliares não-negativas quantas forem necessárias em cada problema. Note que a transformação de cada inequação em equação requer a definição de uma variável auxiliar específica. Procure definir o significado exato de cada variável auxiliar. Para completar a formulação, inclua as variáveis auxiliares na equação a ser otimizada, associando-as com coeficientes nulos (zeros).

Em vista da possibilidade de transformar inequações em equações através do emprego de variáveis auxiliares não-negativas e, pela observação das formulações dos Exemplos 1, 2 e 3, fica evidente que um problema de Programação Linear tem três características fundamentais: (a) existência de um escalar que se busca otimizar e que é uma função linear das incógnitas do problema, (b) existência de um sistema de equações lineares que define — ou amarra — a viabilidade de qualquer plano potencial às condições específicas estabelecidas no problema e (c) condicionamento de não-negatividade sobre todas as incógnitas do problema (incluindo as variáveis auxiliares). Através de exercícios ao final deste capítulo, e de exercícios mais elaborados no capítulo seguinte, o leitor poderá ter uma idéia da gama de problemas que apresentam as características referidas. No momento é importante definirmos o modelo algébrico de Programação Linear e estabelecermos uma terminologia para referenciar seus componentes.

O modelo geral de Programação Linear é:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Otimizar} & Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \dots + c_n x_n & & & \\
\text{dado que:} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 & & & \\
 & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 & & & \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\
 & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n = b_m & & & \\
 & x_1 \geq 0 & & & \\
 & x_2 \geq 0 & & & \\
 & x_3 \geq 0 & & & \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\
 & x_n \geq 0 & & &
\end{array}
$$

ou, mais sinteticamente:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Otimizar} & Z = \mathbf{c}' x \\ \text{dado} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \text{e} & \mathbf{x} \geq 0 \\ \text{onde} & A: (mxn) \text{ e } \mathbf{x}: (nx1) \end{array}}$$

O escalar que se quer otimizar (Z) é descrito por uma função linear chamada de "função objetivo". Os coeficientes c_j são chamados de "coeficientes da função objetivo". As incógnitas x_j são chamadas de "variáveis de decisão". Os coeficientes a_{ij} são chamados de "coeficientes técnicos", enquanto que um vetor $\mathbf{a}_j$ é uma "atividade". Os coeficientes b_i são chamados de "constantes do lado direito das equações" ou, em problemas específicos, de "requerimentos" ou de "disponibilidades" conforme o caso.

Por fim, é necessário distinguir entre uma atividade e o seu nível ou valor numérico. Uma atividade pode ser descrita genericamente (por ex.: a_j significa "plantio de milho"), enquanto que o nível assumido por uma atividade designa um valor específico que quantifica a intensidade da atividade num plano (por ex.: $x_j = 10$ significa 10 ha de milho plantados).

II.2 — Resolução Gráfica em Programação Linear

Nesta seção iremos examinar como se resolvem pequenos problemas de Programação Linear, através de representações gráficas. Estas análises gráficas nos permitirão obter as características da solução ótima de tais problemas de uma maneira intuitiva.

Iniciaremos com a resolução gráfica do seguinte problema:

Problema (A): Maximizar $Z = 2\,x_1 + 3\,x_2$

dado que: a) $4\,x_1 + 2\,x_2 \leq 20$

b) $3\,x_1 + 6\,x_2 \leq 24$

c) $x_1 \geq 0$

d) $x_2 \geq 0$

As Figuras 1.a até 1.d, adiante, representam as restrições (a) até (d), respectivamente.

Nas Figuras 1.a até 1.d as áreas hachuradas representam os conjuntos de pontos (x_1, x_2) que satisfazem as inequações (a) até (d), *respectivamente*. Por exemplo, na Figura 1.c, todos os pontos situados na parte hachurada satisfazem $x_1 \geq 0$. Todavia, *um plano* (x_1, x_2) *só será viável se satisfizer todas as inequações simultanea-*

Figura 1.a
Representação Gráfica da Inequação
$4\,x_1 + 2\,x_2 \leq 20$

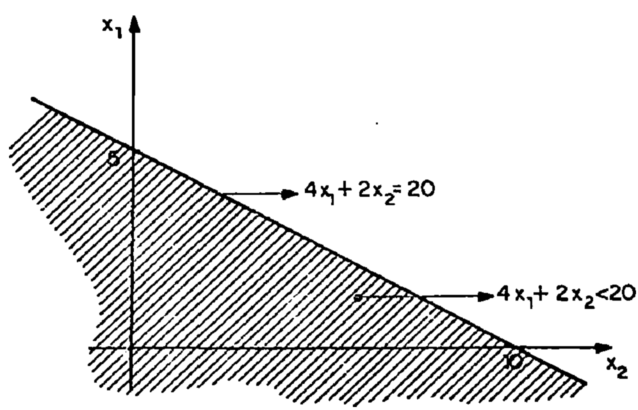


Figura 1.b
Representação Gráfica da Inequação
$3x_1 + 6x_2 \leq 24$

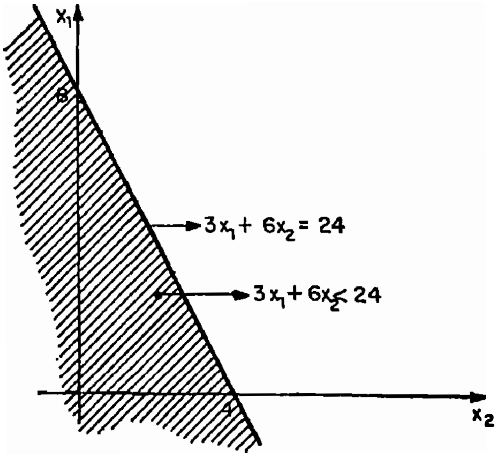


Figura 1.c
Representação Gráfica da Restrição
$X_1 \geqslant 0$

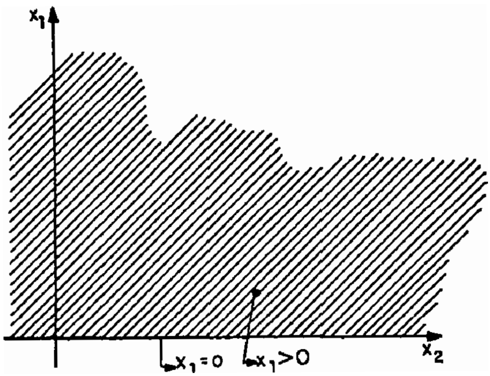


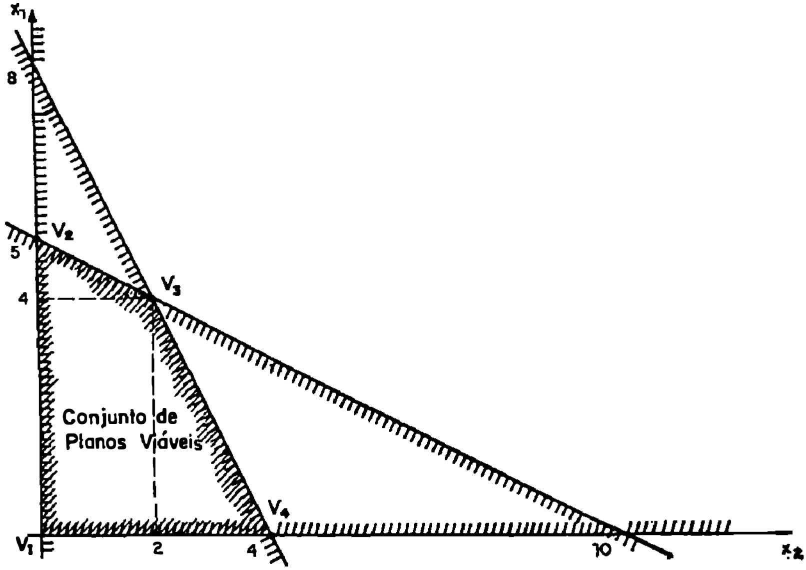
Figura 1.d
Representação Gráfica da Restrição
$x_2 \geqslant 0$

mente. A interseção dos conjuntos de pontos que satisfazem cada inequação forma um conjunto de pontos que satisfazem todas as inequações simultaneamente. A interseção dos conjuntos determinados pelas inequações (a) até (d) está representada na Figura 2, abaixo.

A Figura 2 mostra que o conjunto de planos viáveis (x_1, x_2) do Problema (A) se apresenta na forma de uma área poligonal, com vértices $v'_1 = (0,0)$, $v'_2 = (5,0)$, $v'_3 = (4,2)$ e $v'_4 = (0,4)$. Qualquer ponto (x_1, x_2) situado sobre a área poligonal referida — incluindo as linhas limítrofes desta área — satisfaz todas as inequações do problema (A). Qualquer ponto situado fora da área hachurada deixa de satisfazer pelo menos uma das condições do problema (A).

Uma vez estabelecido o conjunto de planos viáveis do problema, devemos agora selecionar um plano, dentre estes, que maximize o valor da função objetivo. A Figura 3 representa a determinação do plano ótimo dentre os planos viáveis.

Figura 2
Representação Gráfica do Conjunto de Planos Viáveis do Problema (A)



A Figura 3 mostra claramente que o maior valor que a função objetivo pode atingir, com base em planos viáveis, é $Z = 14$. O plano ao qual está associado este valor máximo da função objetivo é dado pelas coordenadas do vértice $\mathbf{v}_3$, isto é, $x_1^* = 4$ e $x_2^* = 2$.

Portanto, a *solução ótima* do problema (A) é o vetor $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

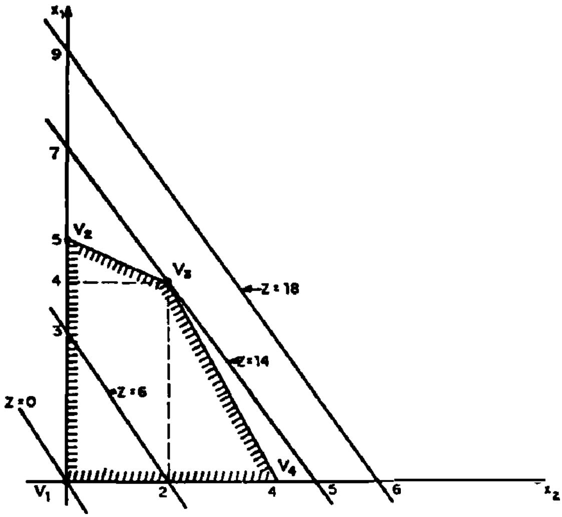
O valor da função objetivo associado ao plano ótimo é $Z^* = 14$. Este é o maior valor que Z pode atingir, com base no conjunto de planos viáveis do problema (A).

Exercício: Modifique a função objetivo do problema (A) para

$$Z = 6x_1 + 2x_2$$

e resolva novamente o problema. A solução ótima será dada agora pelas coordenadas do vértice $\mathbf{v}_2$. Qual o plano ótimo (x_1^*, x_2^*)?

Figura 3
Representação Gráfica de $Z = 2x_1 + 3x_2$ para Diversos Valores de Z



Qual o valor Z^* da função objetivo associado ao plano ótimo (x_1^*, x_2^*)?

Exercício: Resolver graficamente (Problema (B))

Maximizar $Z = 2\,x_1 + 10\,x_2$

dado que: a) $1\,x_1 + 3\,x_2 \leq 9$

b) $4\,x_1 + 2\,x_2 \leq 20$

c) $x_1 \geq 0$

d) $x_2 \geq 0$

A solução ótima é $x_1^* = 0$, $x_2^* = 3$. O valor da função objetivo associado ao plano ótimo é $Z^* = 30$.

Exercício: Resolver graficamente (Problema (C))

Maximizar $Z = 3\,x_1 + 2\,x_2$

$$\text{dado que: a)} \quad 1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 10$$

$$\text{b)} \quad 1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 6$$

$$\text{c)} \quad 0\,x_1 + 1\,x_2 \leq 4$$

$$\text{d)} \quad x_1 \geq 0$$

$$\text{e)} \quad x_2 \geq 0$$

A solução ótima é $x_1^* = 6$, $x_2^* = 2$. O valor da função objetivo associado ao plano ótimo é $Z^* = 22$.

Exercício: Resolver graficamente (Problema (D))

Maximizar $Z = 1\,x_1 + 3\,x_2$

$$\text{dado que: a)} \quad 1\,x_1 + 1\,x_2 \leq 15$$

$$\text{b)} \quad 1\,x_1 - 2\,x_2 \leq 0$$

$$\text{c)} \quad 0\,x_1 + 1\,x_2 \leq 9$$

$$\text{d)} \quad x_1 \geq 0$$

$$\text{e)} \quad x_2 \geq 0$$

A solução ótima é $x_1^* = 6$, $x_2^* = 9$. O valor da função objetivo associado ao plano ótimo é $Z^* = 33$.

Vamos agora resolver graficamente um problema de Programação Linear envolvendo minimização de função objetivo:

Problema (E): Minimizar $Z = 1\,x_1 + 2\,x_2$

$$\text{dado que: a)} \quad 2\,x_1 + 2\,x_2 \geq 14$$

b) $10\,x_1 + 4\,x_2 \geq 40$

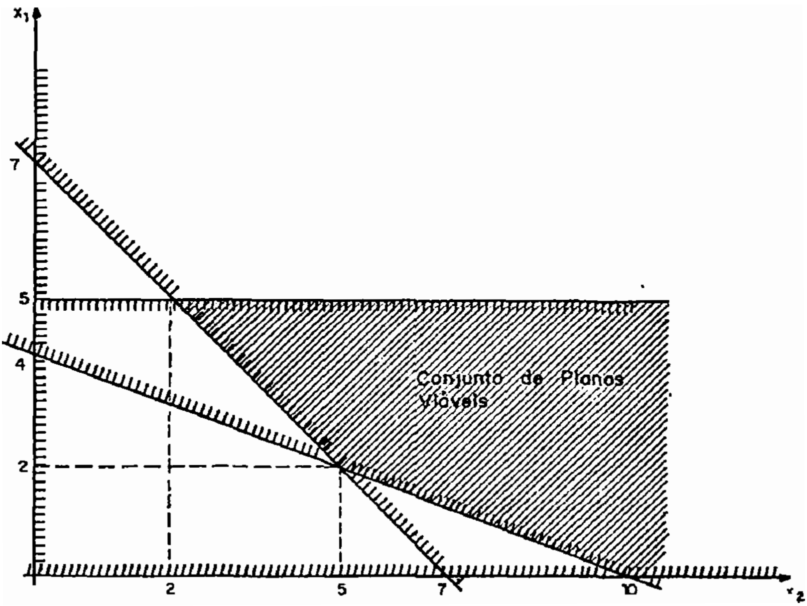
c) $1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 5$

d) $x_1 \geq 0$

e) $x_2 \geq 0$

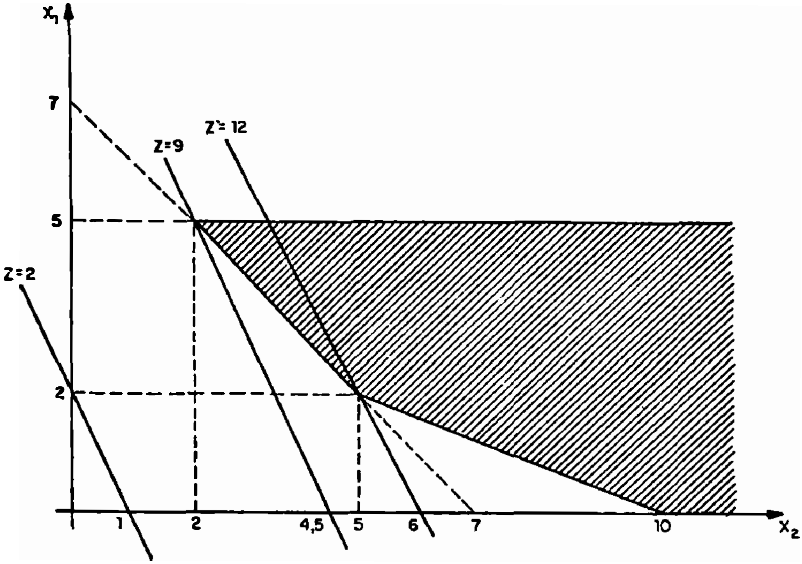
O conjunto de planos viáveis do Problema (E) é apresentado na Figura 4; os pontos (x_1, x_2) na área hachurada — incluindo suas linhas limítrofes — satisfazem todas as cinco condições do Problema (E).

Figura 4
Conjunto de Planos Viáveis do Problema (E)



O Problema (E) é a seguir resolvido pela determinação do plano viável capaz de gerar o menor valor possível para Z. A Figura 5 revela que o plano ótimo é $x_1^* = 5$, $x_2^* = 2$. Este plano determina um valor $Z^* = 9$, e nenhum outro ponto pertencente ao conjunto de planos viáveis é capaz de gerar um valor inferior para a função objetivo.

Figura 5
Representação Gráfica de $Z = 1\,x_1 + 2\,x_2$ para Diversos Valores de Z



Exercício: Resolver graficamente (Problema (F))

Minimizar $Z = 6\,x_1 + 2\,x_2$

dado que: a) $2\,x_1 + 2\,x_2 \geq 20$

b) $1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 8$

c) $0\,x_1 + 1\,x_2 \geq 6$

$$\text{d)} \quad x_1 \qquad \geq 0$$

$$\text{e)} \qquad x_2 \geq 0$$

O plano ótimo é $x_1^* = 0$, $x_2^* = 10$. O valor minimizado da função objetivo é $Z^* = 20$.

Exercício: Tente maximizar em vez de minimizar a função objetivo do Problema (F). Conclua que, como o conjunto de planos viáveis é aberto na direção em que se procede à maximização de Z, o valor deste escalar pode ser aumentado indefinidamente. Neste caso, embora o problema apresente um conjunto de planos viáveis, ele não tem uma solução ótima finita.

Exercício: Verifique que a interseção das seguintes condições é um conjunto vazio:

$$(a)\ 2\,x_1 + 2\,x_2 \geq 14$$

$$(b)\ 2\,x_1 + 2\,x_2 \leq 10$$

Conclua que nenhum plano viável pode existir na presença de tais condições. Observe que se um conjunto de planos viáveis é vazio, evidentemente uma solução ótima não pode existir.

O leitor que realizou todos os exercícios propostos nesta seção terá observado que: (a) nem sempre um problema de Programação Linear apresenta um conjunto não-vazio de planos viáveis, (b) mesmo que o conjunto de planos viáveis seja não-vazio, isto não garante a existência de uma solução ótima finita e (c) quando uma solução ótima finita existe, ela certamente será dada pelas coordenadas de um dos vértices do polígono que limita o conjunto de planos viáveis. Sobre esta última observação cabe ainda mencionar que, eventualmente, um problema poderá apresentar uma multiplicidade de soluções ótimas. Isto pode ocorrer quando a função objetivo é paralela a uma das restrições do problema. Nestes casos, o valor ótimo da função objetivo poderá ser obtido em mais de um dos vértices do polígono de planos factíveis. Em suma:

> Se um problema de Programação Linear tem uma solução ótima finita, esta solução corresponderá a pelo menos um dos vértices que limita o polígono de planos viáveis do problema.

O resultado acima, que na realidade se constitui em teorema matematicamente demonstrável, é de importância fundamental para desenvolvermos um método de resolução de problemas de Programação Linear nos casos em que uma solução ótima finita existe: para resolver tais problemas tudo o que precisaríamos fazer é computar o valor da função objetivo nos diversos vértices e, por comparação destes valores, selecionarmos um plano ótimo.

A questão natural que se segue é: como determinar os vértices do polígono de planos viáveis no caso de existirem muitas atividades no problema de modo que a análise gráfica não nos possa auxiliar? A resposta a esta questão, que consiste em outro teorema matematicamente demonstrável, é:

> Os vértices do polígono limitante do conjunto de vetores $\mathbf{x}^*$ que satisfazem as condições $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, são dados por soluções básicas não-negativas do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Com o propósito de ilustrarmos esta assertiva, vamos reescrever a formulação do Problema (A) acrescentando duas atividades auxiliares não-negativas (x_3 e x_4). Assim, transformamos o sistema de inequações em um sistema de equações com todas as incógnitas não-negativas:

Maximizar $Z = 2\,x_1 + 3\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4$

dado que: a) $4\,x_1 + 2\,x_2 + 1\,x_3 + 0\,x_4 = 20$

b) $3\,x_1 + 6\,x_2 + 0\,x_3 + 1\,x_4 = 24$

c) $x_1 \geq 0$

d) $x_2 \geq 0$

e) $x_3 \geq 0$

f) $x_4 \geq 0$

As condições (a) e (b) se constituem num sistema de duas equações e quatro incógnitas que apresenta as seguintes soluções básicas:

(1) $x_1 = 0\ ;\ x_2 = 0\ ;\ x_3 = 20\ ;\ x_4 = 24$

(2) $x_1 = 0\ ;\ x_2 = 10\ ;\ x_3 = 0\ ;\ x_4 = -36$

(3) $x_1 = 0\ ;\ x_2 = 4\ ;\ x_3 = 12\ ;\ x_4 = 0$

(4) $x_1 = 5\ ;\ x_2 = 0\ ;\ x_3 = 0\ ;\ x_4 = 9$

(5) $x_1 = 8\ ;\ x_2 = 0\ ;\ x_3 = -12\ ;\ x_4 = 0$

(6) $x_1 = 4\ ;\ x_2 = 2\ ;\ x_3 = 0\ ;\ x_4 = 0$

Examinando as soluções básicas de números (1) até (6) verifica-se que as soluções (2) e (5) apresentam alguma raiz negativa, não satisfazendo portanto as condições de não-negatividade do problema. Comparando as demais soluções básicas com o gráfico apresentado na Figura 2 iremos concluir que a solução (1) corresponde ao vértice $\mathbf{v}_1$, a solução (3) corresponde ao vértice $\mathbf{v}_4$, a solução (4) corresponde ao vértice $\mathbf{v}_2$ e a solução (6) corresponde ao vértice $\mathbf{v}_3$. Portanto, a cada vértice do polígono limitante do conjunto de planos viáveis do Problema (A) corresponde uma solução básica não-negativa do sistema formado pelas restrições (a) e (b) do problema (após a inclusão de variáveis auxiliares não-negativas). Conhecidas as coordenadas de cada vértice, podemos calcular o valor correspondente ao escalar Z nos diversos vértices através da substituição dos valores das coordenadas na função objetivo. O plano ótimo é determinado por comparação. A Tabela 1 sumaria o processo de resolução do Problema (A).

Tabela 1

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA (A) POR COMPUTAÇÃO EXAUSTIVA DE SOLUÇÕES BÁSICAS

N.º da Solução	x_1	x_2	x_3	x_4	Viabilidade	Z	Conclusão
1	0	0	20	24	sim	0	———
2	0	10	0	—36	não	—	
3	0	4	12	0	sim	12	
4	5	0	0	9	sim	10	———
5	8	0	—12	0	não	—	———
6	4	2	0	0	sim	14	plano ótimo

O leitor é convidado a resolver os Problemas (B) até (F) pela computação de soluções básicas não-negativas e comparar os resultados assim obtidos com a análise gráfica.

Observamos, ao encerrar esta seção, que o método de enumeração exaustiva de soluções básicas não-negativas não é capaz de indicar quando o conjunto de planos viáveis é aberto na direção em que se procede à otimização. O método só produz respostas corretas quando o conjunto de planos viáveis é vazio ou quando o conjunto de planos viáveis não é vazio e uma solução ótima finita existe. De qualquer maneira, também a eficiência computacional do método de enumeração exaustiva de soluções básicas deixa muito a desejar: se um problema tem uma total de m condições (equações) em n atividades não-negativas, existirão $C\left(\frac{n}{n-m}\right)$ soluções básicas a serem computadas.[1] As limitações em pauta todavia não diminuem a importância prática do teorema que nos diz que, se um problema

[1] Sem mencionar soluções básicas degeneradas, que também podem-se constituir em vértices do polígono limitante do conjunto de planos viáveis. Um vértice correspondente a uma solução básica degenerada ocorre quando um vértice é determinado por mais do que $(n - m)$ equações do sistema.

de Programação Linear tem uma solução ótima finita, então esta solução se verificará em pelo menos um dos vértices do polígono limitante do conjunto de planos viáveis do problema. As limitações citadas para o método de enumeração exaustiva de soluções básicas não-negativas são plenamente superadas através do método Simplex. Este método é o tema da próxima seção.

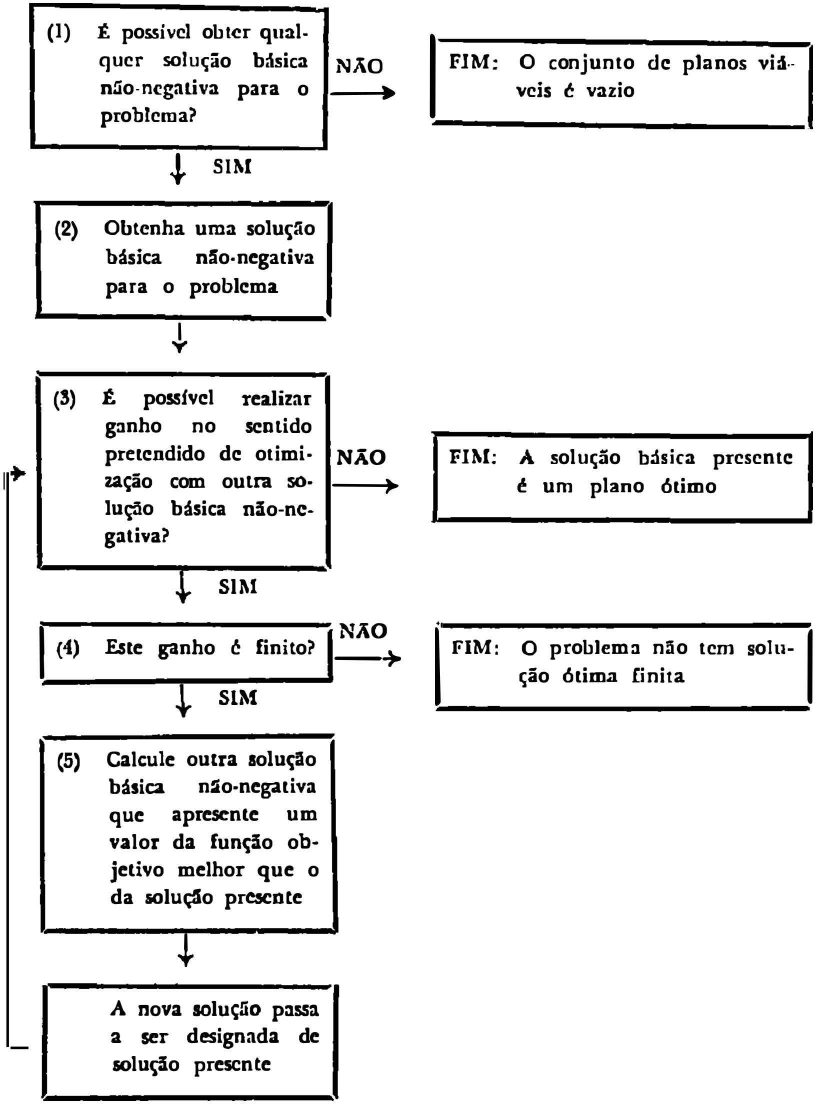
II.3 — O Algoritmo de Dantzig (Método Simplex)

O método Simplex de resolução de problemas de Programação Linear foi desenvolvido pelo matemático norte-americano G. Dantzig na década de 40. Em resumo, o método consiste num exame de soluções básicas não-negativas do problema numa seqüência tal que, a cada passo, consegue-se passar de um vértice a outro realizando um ganho no sentido pretendido de otimização. Com isto em geral evita-se calcular as raízes de um número significativo de soluções básicas, reduzindo-se apreciavelmente o esforço computacional requerido para resolver o problema. Além disto, o algoritmo prevê três possibilidades bem definidas de terminação: (a) o conjunto de planos viáveis é vazio, (b) o problema não tem solução ótima finita e (c) uma solução ótima finita para o problema existe e é encontrada no último passo. O Diagrama 1 apresenta uma descrição genérica do Método Simplex. Embora esta descrição talvez apareça, no momento, um tanto vaga ao leitor, é útil mantê-la em mente quando discutirmos os detalhes de funcionamento do método.

Razões de ordem didática tornam preferível discutir os diversos passos que compõem o Método Simplex na ordem inversa de sua seqüência normal de utilização. Assim, discutiremos inicialmente a questão (5) do Diagrama 1, depois a questão (4) e assim sucessivamente até a questão (1). Uma vez que os detalhes de cada passo estejam entendidos, não será difícil entender o procedimento todo com o auxílio do Diagrama 1.

Diagrama 1

DESCRIÇÃO GERAL DA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR ATRAVÉS DO MÉTODO SIMPLEX



II.3.1 — Escolha da Atividade a Sair da Solução Básica

Já vimos que uma solução ótima para o problema

$$\text{Otimizar } Z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

$$\text{dado que: } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\text{e} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \; (\mathbf{x}: nx1 \; ; \; \mathbf{A}: mxn)$$

será uma solução básica não-negativa para o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Nesta subseção vamos examinar como se calcula uma solução básica não-negativa a partir de outra solução básica não-negativa conhecida. Mais especificamente, o que se deseja verificar é: dado que desejamos positivar uma atividade que se encontra em nível zero na solução básica conhecida, qual a atividade que deveria ser zerada nesta última de modo a obtermos uma nova solução básica não-negativa? Mais ainda: como recalcular os níveis de todas as atividades na nova solução básica a partir dos mesmos da solução anterior?

Tornando a discussão mais formal, vamos supor que conhecemos um vetor numérico $\mathbf{x}^*$, não-negativo, que se constitui numa solução básica do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Vamos supor ainda, sem perda de generalidade, que os primeiros m elementos de $\mathbf{x}^*$ são números positivos, enquanto que os demais $(n - m)$ elementos são nulos. [2] Em outras palavras, admitimos, que se conhece um vetor numérico $\mathbf{x}^*$ com elementos $x_j^* > 0$ para $j = 1, 2, \ldots, m$ e $x_j^* = 0$ para $j = m + 1, m + 2, \ldots, n$ tal que:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1^* + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2^* + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{bmatrix} x_m^* +$$

[2] Observe que $\mathbf{x}^*$ foi definido como uma solução básica não-negativa e não degenerada. Degenerescência será comentada adiante. Por outro lado, o pressuposto de que os elementos positivos do vetor $\mathbf{x}^*$ ocupam as n primeiras posições visa apenas simplificar o aspecto algébrico da discussão.

$$+\begin{bmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{bmatrix} 0 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} 0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que os últimos $(n - m)$ elementos de $\mathbf{x}^*$ são nulos, a combinação linear $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$ se resume a:

$$\mathbf{a}_1 x_1^* + \mathbf{a}_2 x_2^* + \ldots + \mathbf{a}_m x_m^* = \mathbf{b} \tag{1}$$

O plano $\mathbf{x}^*$ pode ser interpretado como um plano contendo x_1^* unidades da coluna $\mathbf{a}_1$; x_2^* unidades da coluna $\mathbf{a}_2$, ..., x_m^* unidades da coluna $\mathbf{a}_m$. Sendo, por hipótese, um plano viável, satisfaz $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{x} \geq 0$. Por outro lado, definindo $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \ldots \ \mathbf{a}_m)$ e admitindo que $\mathbf{B}$ seja uma base para R^m, concluimos que:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_m^* \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Vamos supor, a seguir, que soubéssemos da possibilidade de realizar algum ganho na função objetivo se passarmos do plano básico presente $\mathbf{x}^*$ a um outro plano básico no qual o nível da atividade x_r — que, por hipótese, é nulo no plano $\mathbf{x}^*$ — assuma um nível positivo. Ora, se queremos que x_r "entre" no plano, alguma atividade que está em nível positivo no plano $\mathbf{x}^*$ deve "sair" (isto é, zerada). Isto é necessário para que a nova solução seja também uma solução básica e portanto candidata potencial a ser uma solução ótima. Porém, a "entrada" de x_r irá, em geral, determinar outras alterações numéricas no plano $\mathbf{x}^*$ além de, eventualmente, zerar uma das atividades positivas em $\mathbf{x}^*$. É necessário algum cuidado para que estas alterações não se cristalizem em níveis negativos para uma ou mais atividades.

A análise da obtenção de um plano básico não-negativo a partir do plano $\mathbf{x}^*$, dado que se quer positivar a atividade x_r, se inicia pela observação de que, sendo **B** uma base para R^m, podemos representar a coluna $\mathbf{a}_r$ como uma combinação linear das colunas de **B**:

$$\mathbf{a}_1 y_{1r} + \mathbf{a}_2 y_{2r} + \ldots + \mathbf{a}_m y_{mr} = \mathbf{a}_r \qquad (2)$$

Observe que as incógnitas do sistema (2) podem ser obtidas por

$$\begin{bmatrix} y_{1r} \\ y_{2r} \\ \vdots \\ y_{mr} \end{bmatrix} = B^{-1}\mathbf{a}_r$$

A expressão (2) nos diz que uma unidade da coluna $\mathbf{a}_r$ é composta pela soma de y_{1r} unidades da coluna $\mathbf{a}_1$, y_{2r} unidades da coluna $\mathbf{a}_2 \ldots$ e y_{mr} unidades da coluna $\mathbf{a}_m$. Portanto, para dar lugar à entrada de *uma* unidade de $\mathbf{a}_r$ no plano $\mathbf{x}^*$, devem ser retiradas y_{1r} unidades de $\mathbf{a}_1$, y_{2r} unidades de $\mathbf{a}_2$, ... e y_{mr} unidades de $\mathbf{a}_m$. Mais formalmente obtemos este resultado subtraindo, lado a lado, a expressão (2) da expressão (1):

$$\mathbf{a}_1 x_1^* + \mathbf{a}_2 x_2^* + \ldots + \mathbf{a}_m x_m^* - (\mathbf{a}_1 y_{1r} + \mathbf{a}_2 y_{2r} + \ldots + \mathbf{a}_m y_{mr}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}_r$$

ou, após um simples rearranjo algébrico:

$$\mathbf{a}_1 (x_1^* - y_{1r}) + \mathbf{a}_2 (x_2^* - y_{2r}) + \ldots + \mathbf{a}_m (x_m^* - y_{mr}) + \mathbf{a}_r = \mathbf{b} \qquad (3)$$

Observe que a expressão (3) reflete uma solução para o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. O primeiro elemento desta solução é $(x_1^* - y_{1r})$, ..., o m-ésimo é $(x_m^* - y_{mr})$, o r-ésimo é *um* e os demais são zeros. Todavia esta solução não é necessariamente básica, a menos que, por acaso, algum elemento $(x_i^* - y_{ir})$ seja nulo. Mais ainda, não é possível sequer garantir que tal solução seja não-negativa, pois nada estabelecemos sobre a magnitude relativa dos números x_i^* e y_{ir}. O problema aqui é que não podemos impor que o plano $\mathbf{x}^*$ seja modificado pela inclusão de exatamente uma unidade de x_r e simultaneamente esperar que esta inclusão vá zerar algum dos x_j que eram positivos, enquanto os demais se mantêm não-negativos. Para superar esta questão, voltemos à expressão (2) e vamos multiplicar ambos os lados da mesma por um escalar δ, obtendo então:

$$\mathbf{a}_1(\delta\, y_{1r}) + \mathbf{a}_2(\delta\, y_{2r}) + \dots + \mathbf{a}_m(\delta\, y_{mr}) = \mathbf{a}_r\,\delta \qquad (4)$$

Agora, subtraindo a expressão (4) novamente da expressão (1) (lado a lado), obtemos, após alguns rearranjos algébricos simples:

$$\mathbf{a}_1(x_1^* - \delta\, y_{1r}) + \mathbf{a}_2(x_2^* - \delta\, y_{2r}) + \dots + \mathbf{a}_m(x_m^* - \delta\, y_{mr}) + \mathbf{a}_r\,\delta = b \qquad (5)$$

A expressão (5) é *fundamental* para a compreensão do método Simplex. Ela nos diz que, para modificar o plano $\mathbf{x}^*$ através da inclusão de δ unidades da coluna $\mathbf{a}_r$ ao mesmo tempo em que mantemos o plano satisfazendo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, deveremos diminuir δy_{1r} unidades da coluna $\mathbf{a}_1$, δy_{2r} unidades da coluna $\mathbf{a}_2$ e assim por diante com todas as colunas da base associadas com a solução $\mathbf{x}^*$. Em suma, a relação da solução básica $\mathbf{x}^*$ com outra na qual x_r esteja no nível δ é representada por

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ r\text{-ésima linha} \;\text{--} \\ \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{c} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_m^* \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right]
\;\text{-------}\;
\left[\begin{array}{c} x_1^* - \delta y_{1r} \\ x_2^* - \delta y_{2r} \\ \vdots \\ x_m^* - \delta y_{mr} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \delta \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \text{--}\; r\text{-ésima linha} \\ \\ \\ \end{array}$$

Agora, para que o vetor da direita se constitua em solução básica não-negativa para o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, δ deve ser estabelecido de tal forma que pelo menos um dos elementos $(x_j^* - \delta y_{jr})$ se anule enquanto os demais permanecem positivos. Mais ainda, uma vez que o próprio valor δ se constituirá no nível numérico assumido pela atividade x_r, este valor deverá ser, evidentemente, positivo. Alguma reflexão sobre o problema posto nos levará à conclusão de que o valor de δ capaz de satisfazer os requisitos estabelecidos será dado pela menor razão positiva dentre as seguintes opções: x_1^*/y_{1r}, x_2^*/y_{2r}, ..., x_m^*/y_{mr}. Como os x_j^* são positivos por hipótese, uma razão x_j^*/y_{jr} só será positiva se y_{jr} também for positivo. Simbolicamente:

$$\delta = \underset{j}{Min}\left(\frac{x_j^*}{y_{jr}}\ ;\ y_{jr} > 0\right)$$

onde j se refere aos índices das colunas na base presente.

Então, dado que queremos incluir x_r na solução (ou a_r na base), sairá aquele x_j que apresente a menor razão positiva (x_j^*/y_{jr}). A nova base conterá as mesmas colunas da base anterior exceto por $\mathbf{a}_j$, que é substituída por $\mathbf{a}_r$. Os detalhes do passo (5) do Diagrama I foram resolvidos (lembre que admitimos, por hipótese, que a entrada de x_r iria melhorar o valor da função objetivo).

Exemplo: Em vista da presença de vetores unitários na matriz expandida abaixo apresentada, uma solução básica não-negativa para o sistema de três equações e cinco incógnitas aí sintetizado é: $x_1^* = 0$; $x_2^* = 5$; $x_3^* = 4$; $x_4^* = 6$ e $x_5^* = 0$. A base do sistema é $(\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4)$

$$\begin{array}{c|c}
\begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \end{array} & \mathbf{b} & \\
\left[\begin{array}{ccccc:c} -3 & 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 \end{array}\right] & \begin{array}{c} x_2^* \\ x_4^* \\ x_3^* \end{array} \\
\uparrow &
\end{array}$$

Conforme indicado pela seta sob a matriz, vamos supor que quiséssemos introduzir $\mathbf{a}_1$ na base, isto é, positivar x_1 e zerar ou x_2 ou x_3 ou x_4, mas de modo que a nova solução básica seja também não-negativa. Para tanto precisamos primeiro calcular y_{21}, y_{31} e y_{41}. Estes coeficientes são obtidos pela resolução de:

$$\mathbf{a}_2 y_{21} + \mathbf{a}_3 y_{31} + \mathbf{a}_4 y_{41} = \mathbf{a}_1$$

Observando que os vetores $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ e $\mathbf{a}_4$ são unitários, a resolução do sistema proposto evidentemente é $y_{21} = -3$, $y_{31} = 2$ e $y_{41} = 1$. Estes valores podem ser lidos diretamente no vetor $\mathbf{a}_1$ com o auxílio da interpretação discutida na Seção I.5 do Capítulo I. Agora, a interpretação dos y_{j1} é como se segue: para dar lugar à entrada de uma unidade de $\mathbf{a}_1$ $(x_1 = 1)$ na solução de referência $(x_1^* = 0;\ x_2^* = 5;\ x_3^* = 4;\ x_4^* = 6;\ x_5^* = 0)$, o nível de x_2 deve ser diminuído em 3 unidades, o nível de x_3 deve ser diminuído em 2 unidades e o nível de x_4 deve ser diminuído em 1 unidade. Verifique que, de fato, a solução $(x_1 = 1,\ x_2 = 8,\ x_3 = 2,\ x_4 = 5$ e $x_5 = 0)$ satisfaz o sistema dado. Esta solução todavia não é básica. Para que ela seja básica, x_1 deve entrar num nível δ calculado por $\underset{j}{Min}\ (x_j^*/y_{j1};\ y_{j1} > 0)$, onde $j = 2, 3, 4$.

Observamos que y_{21} é negativo. Se este elemento fosse escolhido como pivô, implicando saída de x_2 e entrada de x_1, este último entraria com um valor negativo na próxima solução básica. Resta examinar as razões x_3^*/y_{31} e x_4^*/y_{41}:

$$x_3^*/y_{31} = 4/2 = 2$$

$$x_4^*/y_{41} = 6/1 = 6$$

Como x_3^*/y_{31} é menor que x_4^*/y_{41}, concluímos que a entrada de x_1 deve deslocar x_3 da solução para que a nova solução seja básica e não-negativa. Conseqüentemente, determinamos a posição do pivô e podemos obter a nova solução básica com um passo da redução de Gauss-Jordan:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \vdots & \mathbf{b} & \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccccc} -3 & 1 & 0 & 0 & 4 & \vdots & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 6 \\ \textcircled{2} & 0 & 1 & 0 & -6 & \vdots & 4 \end{array}\right]
\begin{array}{l} x_2^* \\ x_4^* \\ x_3^* \leftarrow \end{array}\\
\uparrow
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \vdots & \mathbf{b} & \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 3/2 & 0 & -5 & \vdots & 11 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 5 & \vdots & 4 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & -3 & \vdots & 2 \end{array}\right]
\begin{array}{l} x_2^{**} \\ x_4^{**} \\ x_1^{**} \end{array}
\end{array}$$

A matriz da direita contém um sistema equivalente ao da matriz da esquerda. Obtivemos uma nova solução básica para qualquer dos dois sistemas: $x_1^{**} = 2;\ x_2^{**} = 11;\ x_3^{**} = 0;\ x_4^{**} = 4$ e $x_5^{**} = 0$. Com relação à solução básica anterior, notamos que a entrada de x_1 deslocou x_3 da solução. Observe que o cálculo das razões x_j^*/y_{j1}

$(j = 2, 3, 4)$ poderia ter sido feito diretamente na matriz da esquerda: basta dividir os coeficientes de $\mathbf{b}$ pelos coeficientes de $\mathbf{a}_1$ da mesma linha.

Exercício: Em relação à primeira solução básica do exemplo anterior, suponha que você tivesse escolhido o segundo elemento da primeira coluna como pivô e recalcule uma nova solução básica. Esta nova solução satisfaria a condição de não-negatividade?

Exercício: Com relação à primeira solução básica do exemplo anterior, suponha que fosse desejado positivar x_6 e obter uma nova solução básica não-negativa. Qual atividade deveria sair da base? Verifique que a nova solução básica seria $x_1^{**} = 0$; $x_2^{**} = 0$; $x_3^{**} = 46/4$; $x_4^{**} = 14/4$ e $x_6^{**} = 5/4$. Verifique que esta solução também satisfaz os dois sistemas equivalentes do exemplo.

Digressão: Soluções Básicas Degeneradas

Foi referido acima que, se quiséssemos incluir x_r na solução, sairia aquele x_j que apresente a menor razão positiva (x_j^*/y_{jr}). Esta conclusão provém da hipótese de que a solução de referência x^* é não-negativa e não-degenerada. Nestas circunstâncias, todos os x_j básicos seriam estritamente positivos. Porém, se a solução de referência é degenerada, pelo menos um dos x_j básicos será nulo. Então, no caso mais geral, se quisermos incluir x_r na solução sairá aquele x_j que apresente a menor razão *não-negativa* (x_j^*/y_{jr}). Por razões que ficarão claras ao final desta seção, aqueles x_j básicos associados com y_{jr} negativos não deverão ser jamais candidatos à saída. Façamos um exemplo numérico. Vamos supor que desejássemos obter uma nova solução básica não-negativa com a entrada de $\mathbf{a}_1$ no sistema abaixo:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc:c}
\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{b}
\end{array}
\\
\left[\begin{array}{ccccc:c}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
-2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5
\end{array}\right]
\\
\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
x_2^* \; (x_2^*/y_{21} \text{ é indeterminado, pois } y_{21} = 0 \therefore \text{ não sai}) \\
x_3^* \; (x_3^*/y_{31} \text{ apresenta } y_{31} < 0 \therefore \text{ não sai}) \\
x_4^* \; (x_4^*/y_{41} = 0 \therefore \text{ candidato a sair}) \\
x_5^* \; (x_5^*/y_{51} = 2{,}5 \therefore \text{ candidato a sair})
\end{array}
$$

No lado direito da matriz estão relatadas as observações relevantes para a escolha da variável a sair e conseqüente determinação do pivô. No exemplo, deveria sair x_4, pois $Min \; (x_j^*/y_{j1};\; y_{j1} > 0)$ é obtido para $j = 4$. Realize a pivotação e note que $\mathbf{a}_1$ entra na base com nível $x_1^* = 0$, obtendo-se nova solução básica degenerada e não-negativa. Verifique que a escolha de outra variável a sair (que não x_4) determinará uma nova solução na qual pelo menos um nível x_j será negativo.

Para encerrarmos esta seção vamos interpretar o caso em que todos y_{jr} se apresentam negativos (ou nulos) quando pretendemos introduzir x_r numa solução básica não-negativa. Neste caso, a introdução de uma unidade de x_r na base determina diminuições negativas — ou aumentos — em todos os x_j básicos (veja a equação (5), acima). Como, por hipótese, estes níveis eram não-negativos, conclui-se que podemos fazer x_r infinitamente grande sem deslocar outra atividade do plano. Dada a linearidade das relações envolvidas, se a positivação de x_r tivesse sido indicada para melhorar o valor da função objetivo, concluímos que esta melhoria poderia ser infinitamente grande. Portanto, se todos y_{jr} se apresentam negativos (ou nulos) no caso de termos uma indicação que x_r deveria ser positivado para melhorar o valor da função objetivo, a conclusão é que o conjunto de planos viáveis é aberto na direção em que se procede à otimização. Conseqüentemente, um plano ótimo finito não existe em tais condições. Com esta observação fica discutido também o passo (4) do Diagrama 1.

Exercício: Considere o sistema abaixo

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \vdots & \mathbf{b} & & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc} -3 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 7 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{array}$$

Verifique que ($x_1^* = \delta$, $x_2^* = 5 + 3\delta$, $x_3^* = 7 + 0\delta$ e $x_4^* = 9 + 2\delta$) é uma solução do sistema para qualquer valor positivo de δ. Conclua que o nível de x_j pode ser aumentado indefinidamente sem deslocar outra atividade do plano. Observe que, para $\mathbf{a}_1$ deslocar outra atividade da base, x_1 deveria entrar com valores negativos! Faça a pivotação de algum elemento não nulo em $\mathbf{a}_1$ e comprove esta afirmação.

II.3.2 — Escolha da Atividade a Entrar na Solução Básica

A discussão da subseção anterior foi iniciada pelos seguintes pressupostos: (a) temos em mãos uma solução básica não-negativa $\mathbf{x}^*$ para o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e (b) sabemos que a modificação desta solução através da entrada de uma atividade não-básica x_r é capaz de levar a um plano que apresenta ganho na função objetivo com relação ao plano anterior. A presente subseção visa discutir a seguinte pergunta: ao incluir uma unidade de uma atividade não-básica no plano $\mathbf{x}^*$, mantendo-se o plano modificado dentro das condições $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, qual o efeito desta mudança sobre o nível da função objetivo determinado pelo plano $\mathbf{x}^*$? Em outras palavras: considerando que a inclusão de uma unidade de uma atividade não-básica no plano $\mathbf{x}^*$ determina modificações no nível das atividades básicas deste plano, sob que condições valerá a pena fazer tal modificação?

Voltamos a enunciar formalmente o problema cuja resolução se está discutindo:

Maximizar $z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$

dado que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ onde $\mathbf{A}$ é $m \times n$ e $\mathbf{x}$ é $n \times 1$.

Observe que substituímos a expressão genérica "otimizar" pela expressão específica "maximizar". Portanto, a discussão que se segue se relaciona a um problema de maximização.[3]

Vamos supor, novamente, que dispomos de uma solução básica não-negativa $\mathbf{x}^*$ para o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Sem perda de generalidade,

[3] Por razões a serem apresentadas adiante, nenhuma perda de generalidade é determinada por esta escolha.

vamos admitir que os primeiros m elementos de $\mathbf{x}^*$ são positivos, enquanto que os restantes $(n - m)$ elementos são nulos. O nível da função objetivo associado ao plano $\mathbf{x}^*$ é:

$$z^* = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \ldots + c_m x_m^* + c_{m+1} \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0$$

ou

$$z = \mathbf{c}'\mathbf{x}^*$$

Considere agora a atividade $\mathbf{a}_r$, cujo nível é $x_r^* = 0$ no plano de referência $\mathbf{x}^*$. Se quisermos passar a um novo plano no qual, em relação ao plano de referência, x_r é aumentado para uma unidade, que efeito terá esta modificação sobre z? Já vimos, na subseção anterior, que o aumento de x_r de zero para um determina a diminuição do nível de $\mathbf{a}_1$ em y_{1r} unidades, do nível de $\mathbf{a}_2$ em y_{2r} unidades e assim por diante até a diminuição do nível de $\mathbf{a}_m$ em y_{mr} unidades. Estas mudanças são requeridas para "acomodar" a entrada de uma unidade de $\mathbf{a}_r$ mantendo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Qual o efeito destas mudanças no valor da função objetivo?

Por um lado, se x_r passa de zero para um, isto determina um ganho de c_r unidades na função objetivo (pois o termo $c_r . x_r$ está contido na soma de termos $c_i . x_i$).

De outro lado, se x_1 deve ser diminuído em y_{1r} unidades, isto causa uma perda de $c_1 . y_{1r}$ unidades na função objetivo. A isto deve-se acrescer perdas de $c_2 . y_{2r}, \ldots, c_m . y_{mr}$ causadas pelas diminuições de $y_{2r}, \ldots, y_{mr}$ unidades nos níveis das atividades $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, respectivamente. O total de perdas na função objetivo portanto é de $c_1 y_{1r} + c_2 y_{2r} + \ldots + c_m y_{mr}$.

Agora, definindo $z_r = c_1 y_{1r} + c_2 y_{2r} + \ldots + c_m y_{mr}$, notamos que:

a) Se $c_r > z_r$, então o ganho obtido pela introdução de uma unidade $\mathbf{x}^*$ mais do que compensa as perdas causadas pelas reduções nos níveis das atividades básicas de $\mathbf{x}^*$. Pela linearidade das relações envolvidas, se a introdução de uma unidade de a_r no plano for compensatória, então compensará introduzir tantas unidades de a_r quantas forem possíveis. Este limite de possibilidade é atingido quando a introdução de δ unidades de $\mathbf{a}_r$ no plano zerar uma das atividades que são básicas em $\mathbf{x}^*$. Este aspecto foi estudado na subseção anterior.

b) Se $c_r \leqq z_r$, então o ganho obtido pela introdução de uma unidade da atividade $\mathbf{a}_r$ não é suficiente para justificar uma mudança no plano $\mathbf{x}^*$ (pelo menos com relação à introdução da atividade $\mathbf{a}_r$ especificamente).

Devemos observar que na solução básica de referência há $(n - m)$ atividades associadas com níveis nulos, isto é, fora da base. Portanto, devemos examinar $(n - m)$ possibilidades diferentes de alteração do plano de referência a cada passo. No caso em que nenhuma das atividades não-básicas ofereça perspectivas de ganho sobre a solução básica de referência, esta se constitui na solução básica ótima do problema. Porém, se pelo menos uma das atividades não-básicas apresentar uma perspectiva de ganho, ela deverá ser incluída na base (o problema de qual atividade zerar quando sabemos qual atividade queremos positivar já foi discutido na seção anterior). Por outro lado, se mais de uma atividade não-básica oferecer perspectivas de ganho, adota-se a regra de fazer entrar na solução aquela atividade que apresentar maior margem de ganho líquido por unidade adicionada. Este ganho líquido é dado por $(c_r - z_r)$.

Exemplo: Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & z = 6x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 2x_4 \\ \text{dado que} \quad & 3x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 10 \\ & 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 6 \\ \text{e} \quad & x_j \geq 0 \text{ para } j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Uma solução básica não-negativa evidente para o problema é $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 10$ e $x_4^* = 6$. O nível da função objetivo associado a este plano é $z^* = 6.0 + 3.0 + 1.10 + 2.6 = 22$.

Qual o ganho líquido pela introdução de uma unidade da atividade $\mathbf{a}_1$? O ganho bruto de passar x_1 de zero para um é, evidentemente, $c_1 = 6$. Por outro lado, como $y_{31} = 3$ e $y_{41} = 1$ (note que estes valores vêm de $\mathbf{a}_3 y_{31} + \mathbf{a}_4 y_{41} = \mathbf{a}_1$), conclui-se que a entrada de uma unidade de $\mathbf{a}_1$ provocará a diminuição de três unidades em x_3 e de uma unidade em x_4. A redução de três unidades em x_3

determina uma perda de $c_3y_{31} = 1.3 = 3$ unidades na função objetivo, enquanto que a redução de uma unidade em x_4 determina uma perda de $c_4y_{41} = 2.1 = 2$ unidades na função objetivo. O custo de introduzir uma unidade de $\mathbf{a}_1$ na base é $z_1 = c_3y_{31} + c_4y_{41} = 3 + 2 = 5$ unidades. Como o ganho desta mesma mudança é $c_1 = 6$, o resultado líquido é um ganho de $c_1 - z_1 = 6 - 5 = 1$ unidade na função objetivo. Concluímos que se x_1 entrar na base, o valor da função objetivo irá aumentar.

Porém, devemos ainda examinar qual o ganho líquido pela introdução de uma unidade da atividade $\mathbf{a}_2$ na base, pois talvez este movimento apresente ganho líquido superior ao anterior.

O ganho bruto pela entrada de uma unidade de $\mathbf{a}_2$ na base de referência é $c_2 = 3$, e o custo desta modificação, em termos de perdas pela diminuição de x_3 e x_4, é:

$$z_2 = c_3 y_{32} + c_4 y_{42} = 1(-1) + 2.2 = 3.$$

Conseqüentemente, o ganho líquido da mudança em exame é $c_2 - z_2 = 3 - 3 = 0$. Se a_2 entrar na base deslocando uma atividade básica da solução de referência, o valor da função objetivo na nova solução não se irá alterar.

Exercício: Obtenha uma nova solução básica no problema do exemplo anterior de modo que o nível da função objetivo seja aumentado (a nova solução é: $x_1^{**} = 10/3$, $x_2^{**} = 0$, $x_3^{**} = 0$, $x_4^{**} = 8/3$).

Exercício: Considere o seguinte problema:

$$\begin{array}{lrl}
\text{Max} & z = & 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 0x_4 \\
\text{dado que} & & 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 0x_4 = 15 \\
 & & 2x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 10 \\
 & \text{e} & x_j \geq 0 \quad \text{para} \quad j = 1,2,3,4.
\end{array}$$

A solução básica aparente no problema é $x_1^* = 0$, $x_2^* = 15$, $x_3^* = 0$ e $x_4^* = 10$. Qual o nível de z associado com este plano? Verifique que (a) $c_1 - z_1 = 1$ e (b) $c_3 - z_3 = -1$. Obtenha uma nova solução básica que apresente um nível da função objetivo superior ao da solução de referência.

Observação: Nesta subseção discutimos como verificar se a troca de alguma atividade básica por alguma outra dentre as atividades não-básicas na solução de referência é capaz de conduzir a um aumento no nível da função objetivo ou não. Embora a análise tenha sido desenvolvida em termos de um problema de maximização, vamos demonstrar agora que ela também pode ser empregada em problemas de minimização. Para tanto utilizemos um exemplo simples. Vamos supor que um determinado problema de minimização tenha solução ótima finita a qual deve ocorrer em um de, por ex., três vértices: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ou $\mathbf{v}_3$. Vamos ainda supor que o nível da função objetivo nos três vértices seja $z(\mathbf{v}_1) = 15$ e $z(\mathbf{v}_2) = 20$ e $z(\mathbf{v}_3) = 12$. Evidentemente, a função objetivo seria mínima no vértice $\mathbf{v}_3$. Multipliquemos agora a função objetivo por (-1). O nível de z nos vértices $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ passaria a $z(\mathbf{v}_1) = -15$, $z(\mathbf{v}_2) = -20$ e $z(\mathbf{v}_3) = -12$, respectivamente. O vértice $\mathbf{v}_3$ apresenta agora o nível máximo de z. Portanto, um problema de minimização pode ser transformado num problema de maximização, e resolvido como tal, pela simples multiplicação da função objetivo por (-1)!

Com esta observação encerramos a análise relativa ao passo (3) do Diagrama 1. Na subseção seguinte examinaremos a resolução de um pequeno problema de Programação Linear através do método Simplex. A discussão dos passos (1) e (2) será postergada até a Seção II.5, mais adiante.

II.3.3 — Exemplo Numérico

Com a finalidade de ilustrar o funcionamento do método Simplex desenvolvido nas subseções anteriores, vamos resolver o problema do Exemplo 1 da Seção II.1 deste capítulo (p. 38):

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad z = {} & 8x_1 + 21x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{dado que} \quad & 11x_1 + 60x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 500 \\ & 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 24 \\ \text{e} \quad & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

onde z é o lucro total do agricultor (em Cr$ 1.000/ano)

x_1 é a produção de bois (em cabeças/ano)

x_2 é a produção de lã (em t/ano)

x_3 é uma variável auxiliar que representa pastagem não utilizada (em ha)

x_4 é uma variável auxiliar que representa trabalho não utilizado (em h/dia)

Vamos escrever a matriz expandida do sistema $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, notando a evidência de uma solução básica não-negativa nas colunas $\mathbf{a}_3$ e $\mathbf{a}_4$:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{b} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 11 & 60 & 1 & 0 & 500 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 24 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x_3^* \\ x_4^* \end{array} \end{array}$$

O primeiro plano básico é então: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 500$ e $x_4^* = 24$. O nível da função objetivo associado a este plano é $z^* = 0$.

Vamos examinar o ganho potencial de introduzir uma unidade da atividade $\mathbf{a}_1$ no plano básico de referência. Notamos que $y_{31} = 11$ e $y_{41} = 1$. Portanto: $c_1 - z_1 = c_1 - (c_3 y_{31} + c_4 y_{41}) = 8 - (0.11 + 0.1) = 8$. Concluímos que cada boi/ano (x_1) que entrar no plano de produção aumenta o valor do lucro (z) em 8 mil cruzeiros/ano. Por que isto ocorre? Porque a entrada de cada boi força uma diminuição de 11 ha no nível de pastagem não utilizada e uma diminuição de 1 h/dia no nível de trabalho não utilizado. Como o ganho bruto pela entrada da produção de 1 boi/ano é de 8 mil cruzeiros e como tanto a pastagem não utilizada quanto o trabalho não utilizado são atividades que nada rendem na função objetivo ($c_3 = c_4 = 0$), o ganho líquido é igual ao ganho bruto. Conseqüentemente, a atividade $\mathbf{a}_1$ é candidata a entrar no plano.

O que se pode dizer de uma troca de base envolvendo a inclusão da atividade $\mathbf{a}_2$? O ganho líquido pela entrada da produção de uma t de lã/ano é $c_2 - z_2 = c_2 - (c_3 \cdot y_{32} + c_4 y_{42}) = 21 - (0.60 + 0.2) = 21$. Portanto, em relação ao plano de referência, a entrada de cada unidade de $\mathbf{a}_2$ no plano é capaz de elevar o nível de lucros em 21 mil cruzeiros/ano. Conseqüentemente, a atividade $\mathbf{a}_2$, a exemplo de $\mathbf{a}_1$, é também candidata a entrar no plano.

Decidiremos pela entrada de $\mathbf{a}_2$, pois $c_2 - z_2 > c_1 - z_1$.

$$\begin{array}{ccccccl} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \vdots & \mathbf{b} & \\ 11 & 60 & 1 & 0 & \vdots & 500 & x_3^* \; (x_3^*/y_{32} = 500/60 \cong 8{,}3) \rightarrow \\ 1 & 2 & 0 & 1 & \vdots & 24 & x_4^* \; (x_4^*/y_{42} = 24/\ 2 = 12) \\ & \uparrow & & & & & \end{array}$$

Para que a entrada de x_2 leve a um novo plano básico não-negativo, x_3 deverá sair (pois $x_3^*/y_{32} < x_4^*/y_{42}$). A nova solução básica é:

$$\begin{array}{ccccccl} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \vdots & \mathbf{b} & \\ 11/60 & 1 & 1/60 & 0 & \vdots & 25/3 & x_2^{**} \\ 38/60 & 0 & -2/60 & 1 & \vdots & 22/3 & x_4^{**} \end{array}$$

O lucro anual do novo plano é $z^{**} = 175$ mil cruzeiros. Observe que a produção de 25/3 t de lã/ano utiliza toda pastagem disponível (pois $x_3^{**} = 0$), mas não toda mão-de-obra disponível (pois $x_4^{**} = 22/3$).

Consideramos o novo plano obtido como a solução de referência para mais um passo do Simplex. Assim, a solução básica não-negativa que temos em mãos no início deste segundo passo é:

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = 25/3,\ x_3^* = 0 \text{ e } x_4^* = 22/3.$$

(Verifique que esta solução satisfaz às restrições do problema). Devemos examinar se a entrada de alguma atividade não-básica nesta solução de referência é capaz de elevar o valor da função-objetivo deste plano. Para tanto precisamos computar $c_1 - z_1$ e $c_3 - z_3$, isto é, os ganhos líquidos unitários das atividades não-básicas.

Temos:

$$c_1 - z_1 = c_1 - (c_2 y_{21} + c_4 y_{41}) = 8 - \left(21 \cdot \frac{11}{60} + 0 \cdot \frac{38}{60}\right) =$$

$$= 83/20 = 4{,}15 \text{ e}$$

$$c_3 - z_3 = c_3 - (c_2 y_{23} + c_4 y_{43}) = 0 - \left(21 \cdot \frac{1}{60} + 0 \cdot \left(-\frac{2}{60}\right)\right) =$$

$$= -21/60$$

Concluímos que x_1 deve entrar na solução, pois isto resulta em ganho de 4,15 mil cruzeiros de lucro por boi adicional que for produzido por ano. De onde veio este valor? Cada boi adicional na solução produz um aumento bruto de 8 mil cruzeiros/ano no lucro. Todavia, para que esta produção adicional possa realizar-se é necessário diminuir a produção de lã em $y_{21} = 11/60$ t/ano. Isto representa uma diminuição de $\left(21 . \frac{11}{60}\right)$ mil cruzeiros no lucro anual. Além disto é necessário diminuir a mão-de-obra não utilizada à taxa de $y_{41} = 38/60$ h por dia (o que não causa perda na função-objetivo, pois $c_4 = 0$). O resultado líquido é um ganho de $c_1 - z_1 = 4{,}15$ mil cruzeiros/ano por boi adicional na solução de referência.

Qual a nova solução?

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc:c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{b} \end{array} & \\
\left[\begin{array}{cccc:c} 11/60 & 1 & 1/60 & 0 & 25/3 \\ 38/60 & 0 & -2/60 & 1 & 22/3 \end{array}\right] & \begin{array}{l} x_2^* \left(x_2^*/y_{21} = \dfrac{25/3}{11/60} \cong 45.5\right) \\ x_4^* \left(x_4^*/y_{41} = \dfrac{22/3}{38/60} \cong 11.6\right) \rightarrow \end{array} \\
\uparrow &
\end{array}$$

A atividade x_4 é a escolhida para sair porque obedecendo ao critério da menor razão $(x_j^*/y_{jr};\ y_{jr} > 0)$ garantimos a não-negatividade da nova solução básica. Após a pivotação obtemos um novo plano básico de referência:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc:c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{b} \end{array} & \\
\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 1 & 1/38 & -11/38 & 118/19 \\ 1 & 0 & -1/19 & 30/19 & 220/19 \end{array}\right] & \begin{array}{l} x_2^* \\ x_1^* \end{array}
\end{array}$$

O valor da função-objetivo associado ao novo plano é $z^* = 223{,}053$.

Mais uma vez devemos verificar se esta nova solução básica é ótima. Para tal, computamos os ganhos de mudanças marginais na solução:

$$c_3 - z_3 = c_3 - (c_1 \cdot y_{13} + c_2 \cdot y_{23}) = 0 - \left(8 \cdot \left(-\frac{1}{19}\right) + 21 \cdot \frac{1}{38}\right) = -\frac{5}{38}$$

$$c_4 - z_4 = c_4 - (c_1 \cdot y_{14} + c_2 \cdot y_{24}) = 0 - \left(8 \cdot \frac{30}{19} + 21\left(-\frac{11}{38}\right)\right) = -\frac{249}{38}$$

Observamos então que qualquer mudança na última solução obtida irá diminuir o nível alcançado pela função-objetivo. Conseqüentemente, a solução ótima do problema proposto é produzir ($x_1^* = 220/19 \cong$) 11,58 bois por ano e ($x_2^* = 118/19 \cong$) 6.21 toneladas de lã por ano. O valor da função-objetivo associado a este plano é de ($z^* =$) 223,05 mil cruzeiros por ano.

Exercício: Resolva os Problemas (A) e (B) da Seção II.2 pelo método Simplex.

II.4 — Apresentação Tabular do Simplex

A seqüência de cálculos numéricos requerida na resolução de um problema de Programação Linear é facilitada pela adoção de uma apresentação tabular. Para ilustrar o uso destas tabelas vamos recorrer ao mesmo problema que foi resolvido na Subseção II.3.3. Este problema era:

Problema (1): Maximizar $z = 8x_1 + 21x_2 + 0x_3 + 0x_4$

$$11x_1 + 60x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 500$$

dado que $1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 24$

e $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

onde z é ganho líquido (em Cr$ 1.000/ano)

x_1 é produção de bois (em cabeças/ano)

x_2 é produção de lã (em t/ano)

x_3 é pastagens não utilizadas (em ha)

x_4 é trabalho não utilizado (em h/dia)

Os elementos numéricos do problema são arranjados em uma tabela como se segue (Tabela 1).

Tabela 1

INDICAÇÃO AO PRIMEIRO PIVÔ NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA (1)

c_i \ c_j	Base	8	21	0	0	b	
		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$		
0	$\mathbf{a}_3$	11	60	1	0	500	(500/60 ≅ 8,33) →
0	$\mathbf{a}_4$	1	2	0	1	24	(24/2 = 12,0)
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j = z_j$	8	21	0	0		

O destaque dado à parte interna da Tabela 1 põe em relevo o sistema de equações que forma as restrições do Problema (1). Observa-se claramente a existência de uma solução básica não-negativa imediatamente disponível para começarmos a seqüência de pivotações. Os vetores que compõem esta base ($\mathbf{a}_3$ e $\mathbf{a}_4$) estão relacionados sob o cabeçalho "base". À esquerda da relação de vetores na base se encontram os respectivos coeficientes na função-objetivo. Esta disposição é feita de modo a facilitar o cálculo dos coeficientes z_j que, dada a presença de $\mathbf{a}_3$ e $\mathbf{a}_4$ na base, são obtidos por $z_j = c_j -$ $- (c_3 y_{3j} + c_4 y_{4j})$. Os coeficientes y_{3j} e y_{4j} são lidos diretamente na coluna $\mathbf{a}_j$ dentro do perímetro de destaque, pois refletem os resultados de $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_3 y_{3j} + \mathbf{a}_4 y_{4j}$ (e $\mathbf{a}_3$ e $\mathbf{a}_4$ são vetores unitários). A última linha contém o resultado dos ganhos líquidos decorrentes de alterações na base de referência. Os valores da coluna **b** formam a solução básica de referência propriamente dita ($x_3^* = 500$ e $x_4^* = 24$; x_1^* e x_2^* são implicitamente zero). Ainda na coluna **b**, na linha z_j, encontra-se o valor do plano de referência, isto é, $z^* = c_3 x_3^* + c_4 x_4^* = 0$.

As setas da Tabela 1 indicam que: (a) para obter um novo plano com um nível mais alto na função-objetico, $\mathbf{a}_2$ deve entrar na base e (b) para que a entrada de $\mathbf{a}_2$ gere um novo plano básico não-negativo, $\mathbf{a}_3$ deverá sair.

As Tabelas 2 e 3 completam a resolução do problema proposto. A Tabela 2 é obtida pela pivotação do sistema em destaque na Tabela 1, sendo os coeficientes das linhas z_j e $(c_j - z_j)$ calculados após a obtenção do sistema equivalente.

Tabela 2

INDICAÇÃO DO SEGUNDO PIVÔ NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA (1)

c_i \ c_j	Base	8	21	0	0	b	
		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$		
21	$\mathbf{a}_2$	11/60	1	1/60	0	25/3	$\left(\frac{25}{3} / \frac{11}{60} \cong 45.5\right)$
0	$\mathbf{a}_4$	38/60	0	— 2/60	1	22/3	$\left(\frac{22}{3} / \frac{38}{60} \cong 11.6\right)$ →
	z_j	231/60	21	21/60	0	175	
	$c_j - z_j$	83/20	0	— 21/60	0		
		↑					

Tabela 3

SOLUÇÃO ÓTIMA DO PROBLEMA (1)

c_i \ c_j	Base	8 a_1	21 a_2	0 a_3	0 a_4	b
21	a_2	0	1	1/38	— 11/38	118/19
8	a_1	1	0	—1/19	30/19	220/19
	z_j	8	21	5/38	249/38	223,053
	$c_j - z_j$	0	0	—5/38	—249/38	

A Tabela 3 contém a solução ótima do Problema (1): nenhum coeficiente é positivo na linha $(c_j - z_j)$, de onde se conclui pela impossibilidade de obter outra solução com nível maior na função-objetivo. A solução ótima lida na coluna **b**, tendo em vista as atividades da base, é $x_2^* = 118/19$ e $x_1^* = 220/19$. Os ganhos proporcionados por este plano aparecem como o coeficiente da linha z_j na coluna **b**: 223,053 milhares de cruzeiros.

Vamos, a seguir, resolver outro problema numérico com o propósito de consolidar o conhecimento da apresentação tabular. Ao final deste problema será discutido o conteúdo informativo da tabela de Simplex que apresenta a solução ótima do mesmo.

Problema (2): Uma fábrica de calçados pode produzir sapatos femininos, infantis e masculinos. A produção de uma dezena de pares de calçados femininos requer 2 horas de serviço do setor de montagem e 8 horas de serviço do setor de acabamento. A produção de uma dezena de pares de calçados infantis requer 1 hora de serviço do setor de montagem e 6 horas de serviço do setor de acabamento. A produção de uma dezena de pares de calçados masculinos requer 2 horas de serviço do setor de montagem e 4 horas de serviço do setor de acabamento. Os ganhos líquidos unitários na produção de sapatos femininos, infantis e masculinos, em centenas de cruzeiros por dezena de pares, são respectivamente 10, 8 e 10. Em cada turno de trabalho a fábrica dispõe de 300 horas de serviço no setor de montagem e de 720 horas de serviço no setor de acabamento. Determine o plano de produção que maximiza ganhos líquidos totais.

Formulação: Maximizar $z = 10x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 0x_4 + 0x_5$

dado que (a) $2x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 300$

(b) $8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 720$

e $x_j \geq 0 \; (j = 1, 2, \ldots, 5)$

onde z é ganho líquido (em centenas de cruzeiros por turno de trabalho)

x_1 é produção de calçados femininos (dezenas de pares por turno)

x_2 é produção de calçados infantis (dezenas de pares por turno)

x_3 é produção de calçados masculinos (dezenas de pares por turno)

x_4 é serviço não utilizado no setor de montagem (horas por turno)

x_5 é serviço não utilizado no setor de acabamento (horas por turno)

O problema (2) é resolvido na seqüência de Tabelas 4 a 7. Observe, na Tabela 4, o empate ocorrido nos ganhos unitários potenciais a serem realizados pela entrada ou de $\mathbf{a}_1$ ou de $\mathbf{a}_3$ $(c_1 - z_1 = c_3 - z_3 = 10)$. Em caso de ocorrência de tais empates, a escolha da atividade a entrar no plano é arbitrária. De modo semelhante pode ocorrer, eventualmente, um empate no critério de saída. Nestes casos, a escolha da variável a sair também será arbitrária.

Tabela 4

ESCOLHA DO PRIMEIRO PIVÔ NA RESOLUÇÃO
DO PROBLEMA (2)

c_i \ c_j	Base	10	8	10	0	0	b	
		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
0	a_4	2	1	2	1	0	300	(300/2 = 150)
0	a_5	8	6	4	0	1	720	(720/8 = 90) →
	z_j	0	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	10	8	10	0	0		
		↑						

Tabela 5

ESCOLHA DO SEGUNDO PIVÔ NA RESOLUÇÃO
DO PROBLEMA (2)

c_i \ c_j	Base	10	8	10	0	0	b	
		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
0	a_4	0	—1/2	1	1	—1/4	120	(120/1 = 120) →
10	a_1	1	3/4	1/2	0	1/8	90	(90/0.5 = 180)
	z_j	10	7,5	5	0	5/4	900	
	$c_j - z_j$	0	0,5	5	0	—5/4		
				↑				

Tabela 6

ESCOLHA DO TERCEIRO PIVÔ NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA (2)

c_i \ c_j	Base	10	8	10	0	0	b	
		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
10	a_3	0	—1/2	1	1	—1/4	120	($y_{32} < 0$)
10	a_1	1	1	0	—1/2	1/4	30	(30/1 = 30)→
	z_j	10	5	10	5	0	1500	
	$c_j - z_j$	0	3	0	—5	0		
			↑					

A solução ótima do problema (2) foi encontrada após três pivotações. Esta solução é um plano de produção de 135 dezenas de pares de calçados masculinos e 30 dezenas de pares de calçados infantis por turno de trabalho. O ganho líquido do plano ótimo é de 1590 centenas de cruzeiros por turno de trabalho. Os dois recursos produtivos (horas do setor de montagem e horas do setor de acabamento) são utilizados até o respectivo limite de disponibilidade, pois $\mathbf{a}_4$ e $\mathbf{a}_5$ estão fora da base na solução ótima apresentada na Tabela 7.

A Tabela 7 contém ainda certas informações que podem ser de interesse em uma análise adicional.

Qual o efeito, sobre os ganhos líquidos, de modificar a solução ótima pela introdução de produção de uma dezena de pares de calçados femininos (x_1) por turno? Os coeficientes y_{31} e y_{21}, lidos na coluna $\mathbf{a}_1$ da Tabela 7, nos informam que, para "dar lugar" à produção de uma dezena de pares de calçados femininos por turno de serviço, a produção de calçados masculinos (x_3) deve ser dimi-

Tabela 7

SOLUÇÃO ÓTIMA DO PROBLEMA (2)

c_j \ c_i	Base	10	8	10	0	0	b
		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
10	a_3	1/2	0	1	3/4	—1/8	135
8	a_2	1	1	0	—1/2	1/4	30
	z_j	13	8	10	3,5	0,75	1590
	$c_j - z_j$	—3	0	0	—3,5	—0,75	

nuída em 1/2 dezena de pares e a produção de calçados infantis (x_2) deve ser diminuída em 1 dezena de pares por turno. Como os ganhos líquidos por dezena de pares destas duas atividades são respectivamente 10 e 8 centenas de cruzeiros, a entrada de uma unidade de x_1 no plano de produção provoca uma redução de $10.\frac{1}{2} + 8.1 = 13$ centenas de cruzeiros na função-objetivo. Por outro lado, esta entrada de uma unidade de x_1 no plano de produção contribui com 10 centenas de cruzeiros para os ganhos da firma. O resultado líquido seria uma perda de 3 centenas de cruzeiros por unidade adicional de x_1 no plano de produção relatado na Tabela 7. Assim, o coeficiente da linha $c_j - z_j$ na coluna a_1 nos informa que, no plano ótimo, o *custo de oportunidade* da produção de uma unidade (= dezena de pares) de calçados femininos é de — 3 centenas de cruzeiros.

Que ganho adicional a fábrica poderia realizar se aumentasse a capacidade do seu setor de montagem de calçados em uma hora por turno? Para respondermos a esta questão lembremos que x_4 mede o serviço não utilizado (capacidade ociosa) do setor de montagem. A Tabela 7 nos informa que, no plano ótimo, a capacidade ociosa do setor de montagem é nula ($x_4 = 0$, pois $\mathbf{a}_4$ não está na base). Mais ainda, se determinássemos a entrada de uma unidade de x_4 na solução, isto iria determinar uma redução de 3,5 centenas de cruzeiros no nível da função-objetivo. Porque? Examinando a coluna $\mathbf{a}_4$ verificamos que $y_{34} = 3/4$ e $y_{24} = -1/2$, ou seja, o aumento de x_4 em uma unidade determinará uma redução de 3/4 dezenas de pares na produção de calçados masculinos (x_3) e um aumento de 1/2 dezenas de pares na produção de calçados infantis (x_2). Como os ganhos unitários das respectivas atividades são 10 e 8, conclui-se que se impusermos uma capacidade ociosa de uma hora no setor de montagem, o nível otimizado da função-objetivo será reduzido em 3,5 centenas de cruzeiros. O que aconteceria se pudéssemos tornar a capacidade ociosa negativa ($x_4 = -1$)? Neste caso o nível da função-objetivo deveria aumentar em 3,5 centenas de cruzeiros! Qual o significado de permitir que $x_4 = -1$? Com um pouco de reflexão iremos concluir que isto seria equivalente a aumentar a capacidade do setor de montagem em uma hora por turno (da mesma forma que impor uma hora positiva de ociosidade equivale a reduzir a disponibilidade existente em uma hora). Portanto, o coeficiente da linha $c_j - z_j$ na coluna $\mathbf{a}_4$ nos informa que, no plano ótimo, o *ganho marginal* de elevar a capacidade do setor de montagem é de 3,5 centenas de cruzeiros por hora adicional no turno de serviço.

Em vista das observações acima concluímos que os coeficientes $c_j - z_j$ representam: (a) custos de oportunidade, para aqueles j associados com as atividades produtivas do problema e (b) ganhos marginais, para aqueles j associados com as variáveis auxiliares do problema. Notamos que a interpretação do caso (b) se refere ao valor absoluto de $c_j - z_j$. Mais ainda, notamos que a interpretação se refere à tabela que contém a solução ótima do problema. Por fim, deve ser observado que estas interpretações são válidas para pequenas variações em torno da solução ótima.

II.5 — Obtenção de uma Solução Básica Inicial

Ao longo das Seções II.3 e II.4 utilizamos alguns exemplos numéricos de problemas de Programação Linear nos quais uma solução básica viável era imediatamente disponível através da inclusão de variáveis auxiliares nas restrições. Na verdade, sempre que *todas* as restrições de um problema forem do tipo "igual ou menor que", associadas a uma constante não-negativa no lado direito de cada inequação, poderemos obter uma solução básica viável imediata através das colunas unitárias das variáveis auxiliares do problema. Em qualquer outra circunstância porém, uma solução básica não-negativa não estará imediatamente disponível pela simples incorporação das variáveis auxiliares.

Nesta seção estudaremos o método de variáveis artificiais. Este método tem por objetivo ou gerar uma solução básica viável para um problema de Programação Linear (quando pelo menos uma tal solução existir) ou indicar a impossibilidade de realizar aquele propósito quando o conjunto de planos viáveis for vazio. Com isto, a resolução de um problema de Programação Linear geralmente será dividida em duas partes. Na primeira delas, chamada Fase I, procura-se obter uma solução básica não-negativa para o problema através do método de variáveis artificiais. Esta fase se encerra com a obtenção de uma solução básica viável ou com a conclusão de que o conjunto de soluções viáveis é vazio. Supondo que uma solução básica não-negativa existe e tenha sido obtida na Fase I, passa-se à Fase II. A Fase II compreende o uso do método Simplex para obter uma solução ótima para o problema a partir da solução básica viável obtida na Fase I.

Para examinar a essência do método de variáveis artificiais vamos utilizar um exemplo numérico. Incidentalmente, o leitor deve notar que o método de variáveis artificiais irá responder às questões (1) e (2) do Diagrama 1 da Seção II.3 (p. 60).

Exemplo: Resolver o seguinte problema

Problema (1) Maximizar $z = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3$

dado que:

a) $2x_1 + 1x_2 + 3x_3 \geq 12$

b) $4x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 24$

c) $1x_1 + 0x_2 - 1x_3 = 3$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Após a inclusão das variáveis auxiliares x_4 e x_5 o problema é modificado para:

Problema (1') Maximizar $z = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5$

dado que:

a') $2x_1 + 1x_2 + 3x_3 - 1x_4 + 0x_5 = 12$

b') $4x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 24$

c') $1x_1 + 0x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 3$

$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 5)$

Notamos que, no sistema formado pelas equações (a'), (b') e (c'), não existem três vetores unitários com as unidades posicionadas em linhas diferentes. Conseqüentemente, não temos uma solução básica viável imediata para iniciar a resolução do problema através do método Simplex. Notamos, todavia, que a coluna $\mathbf{a}_5$ é um vetor unitário com a unidade posicionada na segunda linha do problema. Precisaríamos ainda de dois outros vetores unitários com as unidades posicionadas, respectivamente, na primeira e na terceira linhas para dispormos de uma solução básica imediata. Considere, então, o seguinte problema:

Problema (1")

Maximizar $V = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1x_6 - 1x_7$

dado que:

a") $2x_1 + 1x_2 + 3x_3 - 1x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 = 12$

b") $4x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 24$

c") $1x_1 + 0x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 = 3$

$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 7)$

Fase I

Tabela 8

INDICAÇÃO DO PRIMEIRO PIVÔ NA FASE I
DA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA (1')

c_j \ c_j	Base	a_1 (0)	a_2 (0)	a_3 (0)	a_4 (0)	a_5 (0)	a_6 (—1)	a_7 (—1)	b	
—1	a_6	2	1	3	—1	0	1	0	12	(12/2 = 6)
0	a_5	4	2	1	0	1	0	0	24	(24/426)
—1	a_7	1	0	—1	0	0	0	1	3	(3/1 = 3) →
	z_j	—3	—1	—2	1	0	—1	—1	—15	
	$c_j = z_j$	3	1	2	—1	0	0	0		
		↑								

Tabela 9

INDICAÇÃO DO SEGUNDO PIVÔ NA FASE I
DA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA (1')

c_j \ c_j	Base	a_1 (0)	a_2 (0)	a_3 (0)	a_4 (0)	a_5 (0)	a_6 (—1)	a_7 (—1)	b	
—1	a_6	0	1	5	—1	0	1	—2	6	(6/5 = 17) →
0	a_5	0	2	5	0	1	0	—4	12	(12/5 = 2,4)
0	a_1	1	0	—1	0	0	0	1	3	(y_{13} < 0)
	z_j	0	—1	—5	1	0	—1	2	—6	
	$c_j = z_j$	0	1	5	—1	0	0	—3		
				↑						

Antes de comparar o Problema (1') com o Problema (1"), notamos que, neste último, uma solução básica viável é disponível de imediato: $x_5 = 24$, $x_6 = 12$ e $x_7 = 3$ (os demais $x_j = 0$). Mais ainda, como as variáveis x_6 e x_7 apresentam coeficientes negativos na função-objetivo que se pretende maximizar, é evidente que, na resolução de (1"), haverá uma tendência à saída de x_6 e x_7 para dar lugar à entrada de um par de variáveis que estejam associadas com coeficientes nulos na função V.

Comparando agora os Problemas (1') e (1"), nota-se que, *em termos das restrições,* a única diferença entre ambos é a inclusão dos vetores unitários associados com x_6 e x_7 no Problema (1"). Portanto, qualquer solução básica viável para as equações (a'), (b') e (c') será também uma solução básica viável para (a"), (b") e (c"). Da mesma forma, qualquer solução básica viável para (a"), (b") e (c") que tenha x_6 e x_7 fora da base será também uma solução básica viável para (a'), (b') e (c'). Mas, é exatamente uma solução básica com tais características que tende a ocorrer como solução ótima do Problema (1")! Portanto, ao resolver o Problema (1") teremos encontrado uma solução básica viável para o Problema (1'). Uma exceção, todavia, pode ocorrer: no caso da solução ótima do Problema (1") apresentar ou x_6 ou x_7 ou ambos na base, então é porque uma solução básica viável envolvendo apenas as colunas $\mathbf{a}_1$ até $\mathbf{a}_5$ não existe. Neste caso, o conjunto de soluções viáveis para o Problema (1') seria vazio.

As variáveis x_6 e x_7 são chamadas de variáveis artificiais. A solução do Problema (1") é chamada da Fase I da resolução do Problema (1'). Vamos então resolver o problema numérico proposto neste exemplo (Tabelas 8, 9 e 10).

A Tabela 10 apresenta o resultado da aplicação do método de variáveis artificiais ao Problema (1'). O destaque nessa tabela é para um sistema equivalente ao formado pelas equações (a'), (b') e (c'). Todavia, agora uma solução básica viável está disponível de imediato, pois as colunas $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$ e $\mathbf{a}_5$ se apresentam como vetores unitários. O leitor poderá verificar que, de fato, a solução $x_3 = 6/5$, $x_5 = 6$ e $x_1 = 21/5$ (e $x_2 = x_4 = 0$) satisfaz o sistema (a'), (b')

Tabela 10

SOLUÇÃO ÓTIMA DA FASE I DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA (1')

c_j \ c_i	Base	0 a_1	0 a_2	0 a_3	0 a_4	0 a_5	—1 a_6	—1 a_7	b
0	a_3	0	1/5	1	—1/5	0	1/5	—2/5	6/5
0	a_5	0	1	0	1	1	—1	—2	6
0	a_1	0	1/5	0	—1/5	0	1/5	3/5	21/5
	z_j	0	0	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	0	0	0	0	0	—1	—1	

e (c'). Podemos então dar início à Fase II, aproveitando a solução básica destacada na Tabela 10, colocando os coeficientes da função-objetivo do Problema (1') na linha c_i e coluna c_j e recalculando as linhas z_j e $c_j - z_j$ a partir daí.

Fase II

Tabela 11

ESCOLHA DO PRIMEIRO PIVÔ NA FASE II DA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA (1')

c_j \ c_i	Base	5 a_1	3 a_2	6 a_3	0 a_4	0 a_5	b		
6	a_3	0	1/5	1	—1/5	0	6/5	($y_{34} < 0$)	
0	a_5	0	1	0	1	1	6	(6/1 = 6)	→
5	a_1	1	1/5	0	—1/5	0	21/5	($y_{14} < 0$)	
	z_j	5	11/5	6	—6/5	0	141/5		
	$c_j - z_j$	0	4/5	0	6/5	0			
					↑				

Tabela 12

SOLUÇÃO ÓTIMA DO PROBLEMA (1')

c_j \ c_i	Base	5 a_1	3 a_2	6 a_3	0 a_4	0 a_5	b
6	a_3	0	2/5	1	0	1/5	12/5
0	a_4	0	1	0	1	1	6
5	a_1	1	2/5	0	0	1/5	27/5
	z_j	5	22/5	6	0	11/5	207/5
	$c_j - z_j$	0	$-7/5$	0	0	$-11/5$	

A Tabela 12 mostra que a solução ótima do Problema (1') é $x_1^* = 27/5$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 12/5$, $x_4^* = 6$ e $x_5^* = 0$.

Exercício: Resolver o seguinte problema (Problema (E) da seção 2)

$$\text{Minimizar} \quad z = 1x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{dado que:} \quad & \text{a)} \quad 2x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ & \text{b)} \quad 10x_1 + 4x_2 \geq 40 \\ & \text{c)} \quad 1x_1 + 0x_2 \leq 5 \\ & \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(lembre, para a Fase II, que minimizamos z fazendo a maximização de $-z$; alternativamente poderíamos proceder à minimização direta pela mudança do critério de entrada na base, escolhendo como candidato à entrada aquele a_j associado com o $c_j - z_j$ mais negativo em vez daquele mais positivo como no caso de maximização).

Para encerrar este capítulo devemos ainda fazer algumas observações sobre casos especiais de enquadramento de problemas no modelo geral de Programação Linear estudado neste capítulo. O modelo geral cuja resolução estudamos é:

$$\begin{aligned} \text{Otimizar} \quad & Z = \mathbf{c}' \mathbf{x} \\ \text{dado} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Em alguns problemas é possível que:

a) o nível x_i da atividade $\mathbf{a}_i$ seja livre, isto é, podendo ser positivo ou negativo e

b) o nível de x_j da atividade $\mathbf{a}_j$ deva ser igual ou maior que uma constante $k > 0$.

Sob qualquer destas circunstâncias temos o que se apresenta como uma dificuldade de enquadramento no modelo geral. Estas dificuldades podem ser superadas, entretanto, pelo uso dos seguintes artifícios:

a) Se o nivel x_i é livre, substitua x_i por $(x_i' - x_i'')$ onde $x_i' \geq 0$ e $x_i'' \geq 0$; este artifício se origina no fato de que qualquer número pode ser escrito como uma diferença de dois números não-negativos;

b) se x_j deve satisfazer um limite inferior positivo $x_j \geq k$ $(k > 0)$, represente esta restrição como $\frac{1}{k} x_j \geq 1$, subtraia uma variável auxiliar não-negativa para obter uma equação e incorpore esta equação ao sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Por fim uma observação sobre soluções degeneradas. Soluções básicas não-negativas e degeneradas têm certa importância teórica para o estudo do método Simplex porque podem causar ciclos intermináveis (*loop*) no processo de resolução de um problema. Embora soluções degeneradas não sejam raras em problemas práticos, a probabilidade de ocorrência de um *loop* é baixíssima. De qualquer modo a dificuldade pode ser superada por uma modificação marginal nos coeficientes das atividades que estão em ciclo. O leitor interessado em maiores detalhes pode consultar, por exemplo, Hadley (1961).

Capítulo III

APLICAÇÕES DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Neste capítulo procurou-se reunir uma variedade de problemas passíveis de resolução através do modelo de Programação Linear estudado no capítulo anterior. Espera-se, com isto, demonstrar a flexibilidade do instrumento na análise de problemas pertinentes a diversas áreas de ciência aplicada. Por outro lado, é mister reconhecer que a capacidade de verter problemas descritivos em um modelo formal é função da experiência prática acumulada no assunto. Neste particular, não existem alternativas capazes de substituir o requerimento de usar generosamente o lápis, a borracha e as células cinzentas até obter um quadro de referências suficientemente amplo para resolver situações novas com imaginação e segurança. Os problemas propostos neste capítulo são, em sua totalidade, numéricos. Isto permite que, além do exercício de formulação, os problemas sejam efetivamente resolvidos sempre que um computador estiver disponível. Embora o aspecto de resolução numérica dos problemas não seja imprescindível para acumulação de conhecimentos em formulação, ele certamente pode contribuir para aumentar a velocidade com que esta acumulação se realiza num caso qualquer.

Os problemas serão apresentados numa ordem aproximadamente crescente de dificuldade na formulação. Esta seqüência parece mais adequada que a tentativa de isolar problemas por áreas de conhecimento. Em cada problema são sugeridas pelo menos algumas variáveis de decisão para encaminhar o trabalho de formulação. Deve-se notar, todavia, que em geral existe mais de uma maneira de formular um problema de Programação Linear a partir de sua apresentação descritiva. Os exercícios assinalados com um asterisco têm sua formulação discutida no Apêndice II. Entretanto, é pouco produtivo examinar a resposta de um exercício sem antes tentar obtê-la por esforço próprio.

Na segunda parte do capítulo são discutidas algumas formulações especiais de Programação Linear em problemas com situações não-lineares e em problemas com situações de conhecimento não-determinístico.

III.1 — Situações para Formulação com Programação Linear

*1.1 — Uma empresa dispõe de três fábricas, localizadas nas regiões A, B e C. As fábricas A e B produzem circuitos impressos para calculadoras, enquanto que a fábrica C produz visores de cristal líquido para o mesmo fim. A montagem das calculadoras pode ser feita nas fábricas B e C. Uma calculadora requer 2 circuitos e 1 visor.

A fábrica A pode produzir no máximo 200 circuitos/dia.

A fábrica B pode produzir até 150 circuitos/dia. Entretanto, cada calculadora montada nesta fábrica reduz sua capacidade de produção de circuitos em 1,3 unidades/dia.

A fábrica C pode produzir até 180 visores/dia. Todavia, cada calculadora que for montada nesta fábrica reduz aquela capacidade em 0,8 unidades/dia.

O objetivo da empresa é maximizar a produção diária de máquinas calculadoras.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

C_{ij} : circuitos produzidos na fábrica i e destinados à fábrica j (unid./dia)

V_{ij} : visores produzidos na fábrica i e destinados à fábrica j (unid./dia)

M_j : calculadoras montadas (= produzidas) na fábrica j (unid./dia).

1.2 — Os requerimentos unitários de uma ração para engorda de porcos são como seguem:

Proteína: pelo menos 0,14 kg/kg de ração

Cálcio (Ca): pelo menos 5 g/kg de ração

Fósforo (P): pelo menos 4 g/kg de ração

Metionina: pelo menos 4,4 g/kg de ração

Cistina: pelo menos 1,0 g/kg de ração

Observações: (a) Até 50% do requerimento de metionina pode ser satisfeito por Cistina em excesso de seu próprio requerimento mínimo e (b) a relação Ca: P deverá ser de 1,5 a 2:1 ou seja 1,5 a 2 partes de Ca para uma de P.

Os alimentos usados para fazer a ração, bem como seus preços e conteúdos de nutrientes, são os seguintes:

Item \ Alimento	Milho	Sorgo	Farelo de soja	Farinha de sangue	Farinha de ossos
Preço (Cr$/kg)	12,00	9,60	23,00	43,00	18,30
Proteína (kg/kg)	0,10	0,09	0,26	0,93	—
Metionina (g/kg)	10,0	13,0	20,0	10,6	—
Cistina (g/kg)	1,5	1,6	6,5	11,5	—
Ca (g/kg)	1,0	0,3	2,9	0,7	308,5
P (g/kg)	2,5	3,0	10,5	11,2	141,3

Formule o problema de forma a encontrar a ração de custo unitário mínimo.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

x_j : kg de j-ésimo alimento por kg de ração

e : excesso de cistina destinada a substituir metionina.

1.3 — Uma fábrica de derivados de petróleo pode utilizar diversos processos.

Uma unidade do processo 1 é definida pela utilização de 2 m³ de matéria-prima A e 0,3 t de matéria-prima B, gerando como produto 0,13 t de produto P e 0,25 t de produto Y. O lucro, por unidade do processo 1, é $ 300.

Uma unidade do processo 2 é definida pela utilização de 1 m³ de matéria-prima A, 0,6 t de matéria-prima B e 0,2 t de matéria-prima C, gerando como produto 0,1 t de produto P e 0,7 de produto Z. O lucro, por unidade do processo 2, é $ 400.

Uma unidade do processo 3 é definida pela utilização de 3 m³ de matéria-prima A e 0,5 t de matéria-prima C, gerando como produto 0,4 t de produto P, 0,15 t de produto Y e 0,05 t de produto Z. O lucro, por unidade do processo 3, é $ 250.

Para o mês seguinte a fábrica dispõe de 1.700 m³ de matéria-prima A, 450 t de matéria-prima B e 380 t de matéria-prima C. Por outro lado, devido a contratos já realizados, a fábrica deverá produzir pelo menos 150 t de cada produto (P, Y e Z). Toda quantidade produzida em excesso dos contratos pode ser comercializada sem dificuldades pela fábrica.

O objetivo da gerência é maximizar lucros.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

X_j : unidades do processo j a realizar no mês seguinte.

1.4 — Uma firma que produz televisores tem duas fábricas (localizadas nas cidades A e B) nas quais são produzidos tubos de imagem e duas outras fábricas (localizadas nas cidades C e D) nas quais são produzidos chassis e realizadas as montagens dos televisores. Cada televisor é composto de um tubo e um chassi.

A fábrica A pode produzir um máximo de 900 tubos por mês a um custo médio de $ 2 mil por tubo. A fábrica B pode produzir um máximo de 1.200 tubos por mês a um custo médio de $ 1,8 mil por tubo.

A fábrica C dispõe de 2.500 h/mês de mão-de-obra. Nesta fábrica a produção de um chassi requer 1,2 h de trabalho e a montagem de um aparelho requer 0,6 h de trabalho. O custo de produção de um chassi na fábrica C é $ 5,6 mil e o custo da montagem de um aparelho é $ 0,9 mil.

A fábrica D dispõe de 1.800 h/mês de mão-de-obra. Nesta fábrica a produção de um chassi requer 1,0 h de trabalho e a montagem de um aparelho requer 0,7 h de trabalho. O custo de produção de um chassi na fábrica é $ 5,9 mil e o custo da montagem de um aparelho é $ 0,8 mil.

Os custos de transporte de tubos de imagem, em $ mil/tudo, são como segue:

de \ para	C	D
A	0,34	0,41
B	0,26	0,37

O custo de transporte de um chassi, de C para D (ou vice-versa) é $ 0,23.

Após a montagem os aparelhos são levados para venda nos locais E e F. A cada um destes locais devem ser destinados 800 unidades no próximo mês. Os custos de transporte dos locais de montagem aos locais de venda, em $ mil/aparelho, são como segue:

de \ para	E	F
C	0,60	0,50
D	0,90	0,70

O problema consiste em cumprir os compromissos de venda ao menor custo de produção e transporte possível.

T_{ij} : tubos produzidos em i e transportados para j $(i = A, B;$ $j = C, D)$

C_{ij} : chassis produzidos em i e transportados para j $(i = C, D;$ $j = C, D)$

A_{ij} : aparelhos montados em i e transportados para j $(i = C, D;$ $j = E, F)$

* 1.5 — No próximo verão um agricultor pode produzir milho, soja e bois.

Para produzir 1 t de milho são requeridos 0,6 ha de terra e \$ 3.500 em gastos diversos. Por outro lado, 1 t de milho gera uma receita bruta de \$ 6.000.

Para produzir 1 t de soja são necessários 0,8 ha de terra e \$ 4.200 em gastos diversos. Por outro lado, 1 t de soja gera uma receita bruta de 6.500.

Para produzir 1 t de boi são necessários 2,5 ha de terra e \$ 16.000 em gastos diversos. Por outro lado, 1 t de boi gera uma receita bruta de \$ 29.000.

O agricultor dispõe de 500 ha de terra e de Cr\$ 600.000 em caixa para gastos da produção. Ele pode aumentar sua disponibilidade de caixa de dois modos. Em primeiro lugar, ele pode arrendar até 150 ha de terra para um vizinho que se dispõe a pagar \$ 1.400 por ha (no entanto, apenas 50% do valor do arrendamento será pago adiantado e poderá ser usado para aumentar a disponibilidade de caixa).

Em segundo lugar, o agricultor pode conseguir crédito bancário. Para produzir milho o agricultor consegue um financiamento de até \$ 3.000 por ha de milho; para produzir soja o agricultor consegue um financiamento de até \$ 3.400 por ha de soja e, para produzir bois, o agricultor consegue um financiamento de até \$ 2.500 por ha dedicado a esta atividade. O limite total de crédito do agricultor é \$ 1.100.000. O juro do crédito de lavoura é de 20% e o juro de crédito à pecuária é de 35%.

O agricultor deseja maximizar sua disponibilidade de caixa no fim do verão (após comercializar sua produção, pagar empréstimos eventuais e receber o restante do valor do arrendamento, se houver).

Obs.: Devido à fiscalização, o crédito obtido para uma atividade qualquer não poderá ser desviado para outra.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

C_j : crédito tomado para a atividade j (em $)

P_j : dinheiro próprio usado na atividade j (em $)

X_j : produção obtida na j-ésima atividade (em t)

A : arrendamento de terras para o vizinho (em ha)

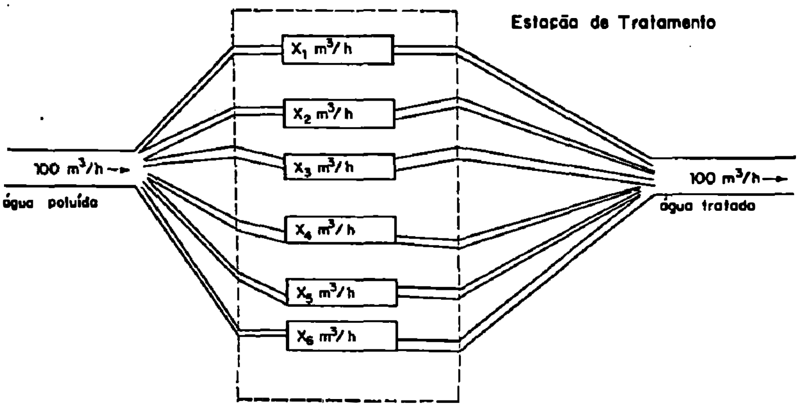
S : saldo de dinheiro próprio não utilizado para produção.

1.6 — O prefeito de um certo município bastante industrializado recebeu uma incumbência da Câmara de Vereadores local no sentido de mandar instalar uma estação de tratamento para despoluir o arroio da cidade. O grupo técnico constituído para exame do assunto chegou à conclusão de que o arroio apresentava quatro índices em desacordo com o recomendado pela Organização Mundial da Saúde (OMS):

Índice	Valor Observado (g/m³)	Valor Recomendado (g/m³)
A	26	20 (máx)
B	72	13 (máx)
C	54	10 (máx)
D	8	25 (mín)

A seguir, o prefeito determinou abertura de concorrência pública para a construção da estação de tratamento com capacidade para 100 m^3/h.

A firma Lutz & Berger Ltda. resolveu participar da concorrência. Seu responsável técnico concluiu que a estação de tratamento poderia utilizar até cinco processos em combinação. As unidades de processo são definidas por m^3/h. Façamos x_j o volume de água poluída que é destinada a tratamento pelo processo j. O diagrama geral do problema é como se segue:



Obs.: X_6 é a quantidade de água que não recebe tratamento algum.

A qualidade da água obtida nos diversos processos é como se segue (os índices estão em g/m^3).

Índice	Processos				
	1	2	3	4	5
A	10	8	19	21	20
B	16	6	14	13	45
C	12	15	7	9	16
D	29	20	26	24	30
Custo do Tratamento ($\$/m^3$)	5,50	6,10	7,90	7,01	4,82

A água tratada pelos diversos processos é reunida formando um produto cuja qualidade depende linearmente dos índices obtidos nos diversos tratamentos possíveis (inclusive de uma eventual fração não tratada que mantém os índices originais).

Para elaborar sua proposta, o primeiro passo da firma é determinar os fluxos destinados aos diversos processos de modo a obter um produto final em acordo com o padrão da OMS e pelo menor custo possível.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

X_j : volume de água poluída, em m^3/h, destinado a tratamento pelo processo j.

* 1.7 — Uma firma exportadora de cereais foi solicitada a fazer propostas de preço com relação aos seguintes pedidos para fornecimento de milho:

Número de Ordem	Quantidade (t)	Umidade (%;Max)	Impurezas (%;Max)	Peso Específico (kg/l; Min)
1	1.350	14	3	0,83
2	4.600	16	4	0,75
3	3.200	13	2	0,80
4	8.100	15	5	0,85

A pedido da gerência, o controle de estoques forneceu a seguinte lista de disponibilidade de milho no armazém da firma:

Lote n.º	Quantidade (t)	Custo de Aquisição (Cr$/t)	Umidade (%)	Impurezas (%)	Peso Específico (kg/l)
1	2.350	9.700	13	6	0,77
2	1.900	10.500	12	4	0,88
3	6.000	8.200	17	1	0,86
4	3.300	11.105	15	2	0,80
5	4.500	9.400	12	5	0,76
6	7.300	12.800	11	2	0,89
7	9.100	8.500	18	3	0,78

Obviamente que, para prestar a informação solicitada, o primeiro passo deve ser o cálculo do custo da matéria-prima (milho) para a firma exportadora. Qual o custo mínimo de matéria-prima para atender todas as solicitações? Qual o custo de cada ordem neste caso?

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

X_{ij} : quantidade de milho do lote i destinada à composição do pedido j, em toneladas

1.8 – Uma firma tem três fábricas que distribuem sua produção para quatro depósitos.

A capacidade da Fábrica 1 é de 2,2 mil unidades de produto por semana, produção esta que é obtida a um custo médio de $ 83 mil por mil unidades.

A capacidade da Fábrica 2 é de 3,4 mil unidades de produto por semana, sendo $ 78 mil por mil unidades o custo médio de produção nesta fábrica.

A capacidade da Fábrica 3 é de 1,8 mil unidades de produto por semana, a um custo médio de $ 94 mil por mil unidades de produto.

A gerência central tem os seguintes pedidos de entrega de produto nos diversos depósitos para a próxima semana: (a) o depósito 1 solicitou um total 0,85 mil unidades, (b) o depósito 2 solicitou um total de 0,75 mil unidades, (c) o depósito 3 solicitou um total de 1,34 mil unidades e (d) o depósito 4 solicitou um total de 1,60 mil unidades.

Os custos de transporte entre as diversas fábricas e depósitos é como se segue (em $ mil/mil unidades de produto):

Fábricas \ Depósito	1	2	3	4
1	26	30	54	43
2	45	35	30	52
3	53	32	41	20

O problema da gerência é estabelecer a produção e a distribuição da próxima semana de modo a minimizar o custo total de atender às solicitações dos depósitos.

Obs.: Supõe-se que a produção da semana pode ser toda entregue aos depósitos na mesma semana.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

X_{ij} : quantidade produzida na fábrica i que é destinada ao depósito j (em 1.000 unidades)

* 1.9 — Um fabricante produz ração para aves e ração para porcos. O primeiro tipo é vendido a Cr$ 17/kg e o segundo a Cr$ 19/kg. Os requerimentos mínimos são os seguintes:

Item	Ração para Aves	Ração para Porcos
Energia (cal/kg)	2.800	2.500
Proteína (g/kg)	200	250
Metionina (mg/kg)	14	16

Para produzir as rações, o fabricante pode utilizar milho, soja e farelo de arroz. Os preços e conteúdos nutritivos destes ingredientes são como se segue:

Item	Milho	Soja	Farelo de Arroz
Energia (cal/kg)	2.900	2.700	2.500
Proteína (g/kg)	180	300	160
Metionina (mg/kg)	18	16	13
Custo (Cr$/kg)	9,00	15,00	6,00

O fabricante pode produzir até 2.000 kg de ração por semana, devendo produzir pelo menos 600 kg de cada tipo na próxima semana.

Faça um plano de produção para a próxima semana que maximize a diferença entre receitas totais e gastos com matérias-primas.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

X_{ij} = quantidade do insumo i destinado à ração j (em kg)

1.10 — (Em continuação ao problema anterior) Suponha que, ao invés de preços fixos e quantidades ilimitadas no caso dos insumos, o fabricante tivesse diversas propostas ("ofertas") para sua aquisição de matérias-primas:

Número da Oferta	Tipo de Insumo	Preço (Cr$/kg)	Quantidade Máximo (kg)
1	Milho	9,50	700
2	Milho	10,50	750
3	Soja	16,00	650
4	Soja	18,00	500
5	Farelo de Arroz	5,30	400
6	Farelo de Arroz	6,80	950

Reformule o plano para refletir a nova situação.

Variáveis de decisão adicionais sugeridas para a formulação:

X_j : quantidade produzida da ração j

a_{ik} : quantidade adquirida do insumo i na "oferta" k (em kg)

1.11 — Uma cooperativa vinícola recebe dois tipos de uva para processamento: Americana (A) e Européia (E). As uvas são esmagadas separadamente para formar dois tipos de mosto segundo o tipo de uva que lhe deu origem: cada t de uva americana produz 0,75 t de mosto A e cada t de uva européia produz 0,8 t de mosto E. A disponibilidade de uva E é limitada em 180 t.

A partir dos mostos, três tipos de produto podem ser obtidos:

a) suco de uva (com pelo menos 80% de mosto A)

b) vinho popular (com no máximo 45% de mosto A)

c) vinho especial (com pelo menos 85% de mosto E)

A capacidade de produção da cooperativa é descrita como se segue: se produzir apenas suco de uva seu limite de processamento é de 600 t produto/safra; se produzir apenas vinho popular seu limite de processamento é de 500 t produto/safra; e se produzir apenas vinho especial seu limite de processamento se reduz a 300 t produto/safra. A cooperativa pode produzir os três produtos simultaneamente; neste caso seu limite de processamento será uma combinação linear das capacidades específicas.

Cada t de uva americana custa Cr$ 60 mil e cada t de uva européia custa Cr$ 75 mil. Os custos de processamento (excluída a matéria-prima) de cada produto são: (a) Cr$ 11 mil por t de suco, (b) Cr$ 34 mil por t de vinho popular e (c) Cr$ 57 mil por t de vinho especial. Os preços de venda dos produtos são: (a) Cr$ 120 mil por t de suco, (b) Cr$ 200 mil por t de vinho popular e (c) Cr$ 315 mil por t de vinho especial.

A cooperativa pretende um plano de produção que maximize sua receita líquida.

Para evitar excessiva dependência em uma linha de produção qualquer, nenhum produto deverá responder isoladamente por mais de 50% do faturamento bruto da cooperativa.

A cooperativa já se comprometeu a adquirir pelo menos 100 t de uva americana e 50 t de uva européia de seus associados.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

U_j : quantidade adquirida de uva do tipo j (em t)

M_{ji} : mosto do tipo j destinado ao produto i (em t)

P_i : quantidade produzida do produto i (em t)

1.12 — O governo desapropriou um latifúndio de 5.000 ha para assentamento de famílias rurais. Destinou, outrossim, uma verba de Cr$ 180 milhões para cobrir as seguintes despesas do projeto:

a) aquisição de tratores equipados para uso em condomínio: cada trator equipado custa Cr$ 0,5 milhão e pode, em condições médias de clima, trabalhar até 200 h por mês;

b) auxílio inicial às famílias assentadas: cada família incluída no projeto necessita de Cr$ 0,06 milhão para a cobertura de despesas iniciais (até a obtenção da primeira safra);

c) construção de infra-estrutura para irrigação: cada ha viabilizado para irrigação custa Cr$ 0,3 milhão (a disponibilidade de água para irrigação é limitada em 300 mil m^3/ano e a área total com possibilidade de irrigação é de 2.600 ha).

Cada família assentada na área requer 700 kg de feijão e 2.400 kg de arroz por ano, necessitando outrossim de uma renda líquida mínima em dinheiro de Cr$ 70.000 por ano. Por outro lado, cada família dispõe de 250 h de trabalho por mês. Qualquer plano deve levar em conta estes aspectos.

Existem quatro alternativas básicas de produção agrícola viáveis na área em estudo: feijão, arroz, milho e soja. As duas primeiras são cultivos de subsistência, enquanto as duas últimas são cultivos comerciais. Todos os cultivos podem ser produzidos em condições de sequeiro ou em condições de irrigação e ainda manualmente ou com tração mecânica.

Os coeficientes para plantio de *sequeiro* são os seguintes:

a) Feijão com cultivo manual (rendimento: 650 kg/ha)

— requer 10 h/ha de mão-de-obra e Cr$ 1.000/ha de gastos com insumos

b) Feijão com cultivo mecânico (rendimento: 580 kg/ha)

— requer 5 h/ha de mão-de-obra, 3 h/ha de trator e Cr$ 1.300/ha de gastos com insumos

c) Arroz com cultivo manual (rendimento: 1.500 kg/ha)

requer 20 h/ha de mão-de-obra e Cr$ 800/ha de gastos com insumos

d) Arroz com cultivo mecânico (rendimento: 1.300 kg/ha)

— requer 6 h/ha de mão-de-obra, 5 h/ha de trator e Cr$ 1.100/ha de gastos com insumos

e) Soja com cultivo manual (contribuição à renda líquida: Cr$ 3.000/ha)

— requer 15 h/ha de mão-de-obra

f) Soja com cultivo mecânico (contribuição à renda líquida: Cr$ 2.500/ha)

— requer 7 h/ha de mão-de-obra e 4 h/ha de trator

g) Milho com cultivo manual (contribuição à renda líquida: Cr$ 2.600/ha)

— requer 10 h/ha de mão-de-obra

h) Milho com cultivo mecânico (contribuição à renda líquida: Cr$ 2.000/ha)

— requer 6 h/ha de mão-de-obra e 3 h/ha de trator

Os coeficientes de mão-de-obra e de horas-trator por ha de cultivo irrigado são os mesmos que para cultivo de sequeiro. *Além disto,* os seguintes coeficientes se aplicam aos cultivos *irrigados*:

a) Feijão com cultivo manual (rendimento: 800 kg/ha)

— requer 60 m³ de água por ha e Cr$ 1.200 de gastos com insumos/ha)

b) Feijão com cultivo mecânico (rendimento: 750 kg/ha)

— requer 60 m³ de água por ha e Cr$ 1.500 de gastos com insumos/ha)

c) Arroz com cultivo manual (rendimento: 3.800 kg/ha)

— requer 200 m³ de água por ha e Cr$ 1.600 de gastos com insumos/ha)

d) Arroz com cultivo mecânico (rendimento: 3.500 kg/ha)

— requer 200 m³ de água por ha e Cr$ 1.900 de gastos com insumos/ha)

e) Soja com cultivo manual (contribuição à renda líquida: Cr$ 3.400/ha)

— requer 85 m³ de água por ha

f) Soja com cultivo mecânico (contribuição à renda líquida: Cr$ 3.100/ha)

— requer 85 m³ de água por ha

g) Milho com cultivo manual (contribuição à renda líquida: Cr$ 4.900/ha)

— requer 105 m³ de água por ha

h) Milho com cultivo mecânico (contribuição à renda líquida: Cr$ 4.200/ha)

— requer 105 m³ de água por ha

O objetivo é maximizar o número de famílias que podem ser assentadas na gleba dentro das condições acima estabelecidas.

Observação: O assentamento do problema pressupõe uma organização social baseada na utilização comunitária das terras e das máquinas.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

F : n.º de famílias a assentar na gleba desapropriada

T : n.º de tratores adquiridos

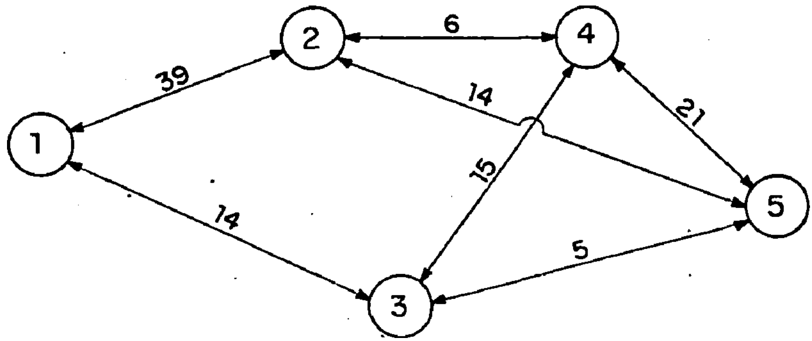
I : ha de terra irrigados

X_{ijk} : ha plantados com o produto i usando energia do tipo j e em solo do tipo k

• 1.13 — (Problema de Transporte com Transbordo) Uma firma distribuidora de motores elétricos tem depósitos localizados em diversas cidades de um certo estado. Numa certa semana a gerência verifica que em alguns depósitos existe excesso de estoque de motores, enquanto que em outros depósitos existe falta de produto para as entregas previstas. A situação é como se segue:

Depósito	Excesso de Estoques (Unidades)	Falta de Estoques (Unidades)
1	—	25
2	42	—
3	—	33
4	56	—
5	—	29

O diagrama a seguir retrata os custos de transporte, em $ por motor, entre as diversas cidades de interesse:



Observe, por exemplo, que é possível realizar transporte da cidade 2 para a cidade 5 diretamente ou passando pela cidade 4 ou pelas cidades 1 e 3 (entre outras alternativas).

O problema é suprir os depósitos 1, 3 e 5 com as quantidades requeridas a partir dos estoques em excesso existentes nos depósitos 2 e 4 ao menor custo de transporte possível.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

X_{ij} : motores transportados da cidade i para a cidade j (em unidades)

1.14 — (Em continuação ao problema anterior) Suponha que o quadro de excessos e faltas do produto fosse modificado para:

Depósito	Excesso de Estoque (Unidades)	Falta de Estoque (Unidades)
1	—	35
2	42	—
3	—	45
4	56	—
5	—	40
Σ	98	120

Agora existe uma impossibilidade de suprir as faltas de estoque observadas nos depósitos 1, 3 e 5. Suponha então que a gerência decida homogeneizar a escassez do produto entre as diversas regiões, determinando que deverá ser feita uma redistribuição de estoques (a custo mínimo de transportes) de modo que em nenhum depósito esta escassez ultrapasse 6 unidades. Note que esta política atinge também os depósitos 2 e 4.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

X_{ij} : motores transportados da cidade i para a cidade j (em unidades)

e_k : escassez de estoque resultante na cidade k (em unidades)

• 1.15 — Uma Central Telefônica tem os seguintes requerimentos mínimos de telefonistas em dias normais de trabalho para manter um padrão razoável de atendimento aos usuários:

Período	Hora do Dia	N.º Mínimo de Telefonistas
1	0:00 — 4:00	28
2	4:00 — 8:00	35
3	8:00 — 12:00	129
4	12:00 — 16:00	151
5	16:00 — 20:00	116
6	20:00 — 0:00	73

Cada telefonista tem um turno de 8 h de trabalho consecutivas. O salário varia de acordo com a hora de início do turno de trabalho:

Hora de Início do Turno	Salário (Cr$/mês)
0:00	18.900,00
4:00	17.800,00
8:00	15.100,00
12:00	15.100,00
16:00	16.800,00
20:00	18.100,00

A Central Telefônica deseja saber quantas telefonistas contratar de modo a manter o padrão desejado de atendimento ao menor custo possível.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

X_t : n.º de telefonistas que iniciem o turno no período t

1.16 — Na Ilha de Pamonhas pode-se produzir cana-de-açúcar, soja e milho, sendo este último produto a base alimentar da população local. No momento, o governo de Pamonhas está empenhado em ordenar a produção agrícola de modo a maximizar o saldo do balanço comercial do setor.

A ilha dispõe de 12.000 ha de terras cultiváveis. Para o ano vindouro prevê-se necessidades mínimas de disponibilidades para consumo interno de 8.000 t de milho, 1.500.000 l de combustível líquido, (além do necessário para a produção agrícola), 1.000 t de açúcar e 2.800 t de soja. O crédito rural é o instrumento básico de controle do plantio.

Para o próximo ano, o conselho monetário da ilha decidiu destinar P$ 100.000.000,00 para o financiamento das atividades agrícolas.

Os perfis médios das atividades agrícolas na ilha são os seguintes.

Para obter uma tonelada de cana-de-açúcar são necessários 14 l de combustível líquido, 6 kg de fertilizante, 0,02 ha de terra e P$ 1.300 de crédito. A partir de 1 t de cana pode-se obter 0,09 t de açúcar *ou* 70 l de combustível líquido.

Para obter uma tonelada de soja são necessários 23 l de combustível líquido, 52 kg de fertilizante, 0,6 ha de terra e P$ 6.000 de crédito.

Para obter uma tonelada de milho são necessários 18 l de combustível líquido, 65 kg de fertilizante, 0,5 ha de terra e P$ 4.000 de crédito.

O açúcar, o combustível líquido, a soja e o milho podem ser exportados ou importados pelos seguintes preços:

Item	Preço	
	Export. (FOB)	Import. (CIF)
Açúcar (US$/t)	300,00	350,00
Combustível Líquido (US$/t)	0,50	0,60
Soja (US$/t)	480,00	512,00
Milho (US$/t)	370,00	420,00

O fertilizante, por sua vez, é importado ao custo de US$ 0,7/kg.

Formule o problema enfrentado pelo governo local: que quantidades de cada produto devem ser produzidas, exportadas e importadas de modo a maximizar o saldo do balanço comercial, em US$, satisfazendo os requerimentos mínimos de disponibilidades para consumo interno.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

P_j : produção interna do produto j (j = açúcar, combustível. soja, milho), em toneladas

E_j : exportação do produto j, em toneladas

I_j : importação do produto j, em toneladas

F : importação de fertilizantes, em kg

• 1.17 — Uma fábrica produz quatro produtos diferentes. A produção de qualquer deles exige uma operação de processamento e uma operação de embalagem. A firma dispõe de três modelos diferentes de máquinas para processamento: MP_1, MP_2 e MP_3 e de dois modelos diferentes de máquinas para embalagem: ME_1 e ME_2.

O produto A pode ser processado na máquina MP_1 ou na máquina MP_2 e deve ser embalado na máquina ME_2.

O produto B pode ser processado na máquina MP_1 ou na máquina MP_3 e pode ser embalado com ME_1 ou com ME_2.

O produto C pode ser processado com MP_1 ou com MP_2 ou com MP_3 e pode ser embalado com ME_1 ou com ME_2.

Os requerimentos, em minutos-máquina por unidade de produto, são os seguintes:

Máquina \ Produto	A	B	C	D
MP_1	8	5	7	—
MP_2	4	—	12	7
MP_3	—	6	10	9
ME_1	—	2	6	5
ME_2	3	4	4	—

Independentemente do tipo, qualquer máquina pode trabalhar até 2.200 minutos por semana.

A receita líquida por unidade produzida de A é \$ 10, por unidade produzida de B é \$ 8, por unidade produzida de C é \$ 15 e por unidade produzida de D é \$ 13.

A gerência de comercialização fez as seguintes estimativas para cada produto para a próxima semana (em unidades).

Produto	Mínimo Requerido	Máximo Aceitável
A	120	210
B	50	150
C	50	100
D	20	60

Obtenha o plano de produção que maximize a receita líquida da próxima semana.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

P_{ij} : unidades de produto i a processar na máquina j na semana vindoura

E_{ij} : unidades do produto i a embalar na máquina j na semana vindoura

Obs.: as unidades embaladas podem ser consideradas como comercializadas.

• 1.18 – (Ver Jacobs, 1954) O ecônomo de um clube tem encomendas de jantares em grupos para os próximos sete dias. A previsão de convivas em cada jantar é como se segue:

Dia	Freqüência Prevista
1	56 pessoas
2	38 pessoas
3	110 pessoas
4	72 pessoas
5	84 pessoas
6	42 pessoas
7	94 pessoas

Em cada dia o ecônomo necessita de um certo número de guardanapos limpos, que é dado pela previsão de freqüência e mais dez guardanapos de reserva (pelo menos). No dia 1 o ecônomo dispõe de 50 guardanapos limpos. Os guardanapos usados vão para a lavanderia, imediatamente após o jantar. A lavanderia tem dois tipos de serviço: (a) normal, no qual os guardanapos recebidos após a janta do dia j são devolvidos para uso na janta do dia $j + 2$ ao custo de Cr$ 5,00 por guardanapos e (b) especial, no qual os guardanapos recebidos após a janta do dia j são devolvidos para uso na janta do dia $j + 1$ ao custo de Cr$ 7,50 por guardanapo. Na falta de guardanapos limpos para uso no dia j, o ecônomo deve comprá-los ao preço de Cr$ 35,00 por unidade.

Como o ecônomo deve proceder para dispor dos guardanapos necessários em cada dia minimizando seus gastos neste particular?

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

x_j : guardanapos limpos disponíveis no dia j ($j = 1, 2, \ldots, 7$)

n_j : guardanapos enviados para lavanderia, serviço normal, no dia j ($j = 1, 2, \ldots, 7$)

e_j : guardanapos enviados para lavanderia, serviço especial, no dia j ($j = 1, 2, \ldots, 7$)

a_j : guardanapos novos, adquiridos no dia j ($j = 1, 2, \ldots, 7$)

I_j : guardanapos limpos disponíveis e não utilizados no dia j

1.19 — Uma empresa de engenharia precisa decidir quantos técnicos contratar nos próximos meses. De acordo com seus planos de obras serão necessárias as seguintes horas-homem de trabalho técnico nos próximos trimestres:

Trimestre	Horas/Homem Requeridas
1	5.400
2	7.300
3	7.500
4	12.000
5	12.000
6	10.800

Um técnico contratado no início do trimestre t pode executar 250 h de serviço profissional no mesmo trimestre, passando a trabalhar 450 h por trimestre em $t + 1$, $t + 2$, etc... (a diferença deve-se à necessidade de treinamento inicial). No seu primeiro trimestre de trabalho um técnico recém-contratado deve receber 80 h de supervisão de um técnico experiente (ao final do trimestre o recém-contratado passa à categoria de técnico experiente). Um técnico recém-contratado custa $ 120 mil por trimestre à empresa, enquanto que um técnico experiente custa $ 160 mil por trimestre. Em média a empresa perde cerca de 1/5 de seus técnicos experientes em cada trimestre, que saem para empregos melhor remunerados. A empresa pode também demitir técnicos, ao custo médio de $ 250 mil por técnico demitido (as demissões voluntárias não têm custo direto para a empresa; nenhum técnico em treinamento é demitido ou se demite).

No início do trimestre 1 a firma conta com 22 técnicos experientes.

Estabeleça a política de contratações e demissões que minimize o custo total de pessoal técnico da empresa durante os próximos seis trimestres.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

C_t n.º de técnicos contratados no início do trimestre t

e_t n.º de técnicos experientes existentes no início do trimestre

d_t n.º de técnicos experientes demitidos no fim do trimestre t

S_t n.º de técnicos experientes que se demitem no fim do trimestre t

* 1.20 — Uma Empresa Estatal de Mineração opera uma mina com quatro túneis principais. O minério é transportado dos túneis para uma usina de moagem e extração de estanho e enxofre.

	Túnel 1	Túnel 2	Túnel 3	Túnel 4
Produção Máxima de Minério (t/mês)	650	1.430	1.670	980
Grau de Fósforo (%)	52	37	61	12
Grau de Enxofre (%)	8	29	4	47
Custo de Extração ($/t minério)	460	340	390	430

A capacidade de moagem da usina depende do grau de finura em que o minério é moído. Se o minério é moído "grosso", a capacidade de moagem da usina é de 4.800 t/mês. Neste caso os índices de extração de fósforo e enxofre em processos posteriores são de 91 e 73%, respectivamente. Se o minério é moído "fino", a capacidade de moagem cai para 3.600 t/mês, mas os índices de extração de fósforo e enxofre aumentam para 96 e 88%, respectivamente. O custo de moagem depende da textura obtida: $ 250 por tonelada de minério moído "grosso" e $ 405 por tonelada de minério moído "fino". A empresa pode moer parte do minério de uma maneira e parte de outra.

A empresa tem o compromisso de produzir pelo menos 800 t de fósforo e 600 t de enxofre por mês para o mercado interno. O restante da produção pode ser colocada no mercado externo. Em qualquer caso os preços FOB são $ 2.400/t de fósforo e $ 1.900/t de enxofre. Respeitados os limites mínimos de produção para o mercado interno, a empresa atua com o objetivo de maximizar sua receita líquida.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

X_{ij} produção de minério do túnel i que é destinado à moagem do tipo j, em toneladas por mês

P_k produção de fósforo destinada ao mercado k, em toneladas por mês

S_k produção de enxofre destinada ao mercado k, em toneladas por mês

1.21 – (Ver Eisemann, 1957, pp. 279-284) Os produtos básicos de uma fábrica de papel são dois tamanhos de rolos de papel: um tem 1,60 m de largura e o outro tem 1,00 m de largura. Os clientes da fábrica, todavia, solicitam rolos de larguras variadas. A fábrica possui duas máquinas capazes de cortar os rolos em "fatias" de largura ajustável. A máquina A corta rolos de 1,60 m e a máquina B corta rolos de 1,00 m de largura.

Para a próxima semana a fábrica tem as seguintes encomendas: 16.850 rolos de 0,25 m de largura; 22.520 rolos de 0,40 m; 12.070 rolos de 0,65 m de largura; 8.100 rolos de 1,10 m e 2.150 rolos de 1,30 m de largura.

A gerência da fábrica pretende cumprir as encomendas minimizando as perdas nos cortes dos rolos básicos: qualquer rolo resultante de corte que apresente menos que 0,25 m de largura é considerado como perda; para $k < 0,25$ temos que n rolos de k m de largura compõem uma perda no valor de $n.k$ metros. Por outro lado, rolos com as larguras especificadas nos pedidos e produzidos em excesso sobre as encomendas podem ser estocados para venda futura e não se constituem em perda.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

a_j : n.º de rolos básicos de 1,60 m de largura cortados pela máquina A de acordo com a j-ésima possibilidade de regulagem das lâminas de corte ($j = 1, 2, \ldots, 12$)

b_i : n.º de rolos básicos de 1,00 m de largura cortados pela máquina B de acordo com a i-ésima possibilidade de regulagem das lâminas de corte ($i = 1, 2, 3$)

Obs.: $j = 2$ poderia ser, por exemplo, uma regulagem da máquina A de modo que de um rolo de 1,60 m fossem obtidos quatro rolos de 0,25 m e um rolo de 0,40 m, com uma perda de um rolo de 0,20 m.

1.22 – (Ver Robicheck *et alii*, 1965) A gerência financeira de uma loja de departamentos deve planejar suas decisões para os próximos meses. As previsões do Departamento de Contabilidade quanto às variáveis de interesse para o problema são as seguintes (em $):

Variáveis \ Meses	Set.	Out.	Nov.	Dez.	Jan.	Fev.
Realizável a Curto Prazo*	10	9	12	48	23	20
Pagamento de Fornecedores**	12	18	20	17	13	10
Déficit de Capital de Giro	5	—	6	9	—	—
Superávit de Capital de Giro	—	3	—	—	10	11

* balanço no início do mês
** supondo pagamentos em dia

O problema da gerência é financiar os déficits previstos de capital de giro ao menor volume de juros possível. Três alternativas de financiamento podem ser utilizadas (em conjunto ou separadamente):

a) Atrasar o pagamento dos fornecedores: ao atrasar o pagamento devido aos seus fornecedores no mês t, a loja diminui sua necessidade de capital de giro no mesmo mês; todavia, o pagamento deve ser realizado no mês seguinte com um acréscimo de 3%; além disto é política da loja limitar o uso desta alternativa a, no máximo, 15% do total devido a cada mês.

b) Tomar empréstimos bancários mensais com base no realizável a curto prazo: no início de qualquer mês t o banco se dispõe a emprestar até 30% do realizável a curto prazo do mês; o empréstimo deve ser pago no mês $t + 1$, com um juro de 4%; e

c) Empréstimo de 180 dias: no início de setembro a loja pode tomar um empréstimo de até \$ 10 para ser integralmente pago em fevereiro com um juro de 32%.

Por outro lado, no início de qualquer mês a loja pode investir eventuais excessos de capital de giro previstos para o mês em operações financeiras de 30 dias, recebendo então um juro de 2%.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

A_t : volume de pagamentos de fornecedores devido no mês t que é colocado em atraso (em \$)

B_t : empréstimo de curto prazo tomado no início do mês t (em \$)

C : empréstimo tomado no início de setembro para pagamento em fevereiro (em \$)

I_t : investimento financeiro realizado pela loja no início do mês t (em \$)

Obs.: supõe-se que no mês de fevereiro a loja pretenda não atrasar qualquer pagamento, nem fazer empréstimo ou investir no mercado financeiro.

1.23 — Uma fábrica de móveis pretende expandir sua capacidade de produção. Ela produz dois tipos básicos de produto: conjuntos A (para sala) e conjuntos B (para dormitório). A produção de um conjunto do tipo B requer 1,2 vezes mais capacidade de produção do que um conjunto do tipo A. No momento a capacidade de produção da fábrica é de 60 unidades do tipo A por mês. A fábrica pode produzir ambos os produtos num mês qualquer. Cada unidade do tipo A produzida num mês qualquer requer \$ 19 mil, enquanto que cada unidade do tipo B requer \$ 25 mil (para pagamento de materiais e mão-de-obra). Cada unidade do tipo A produzida no mês t gera uma receita de \$ 36 mil no início do mês $t + 1$, enquanto que cada unidade do tipo B produzida no mês t gera uma receita de \$ 44 mil no início do mês $t + 1$.

A cada mês a fábrica pode contratar obras para sua expansão, podendo realizar estas obras de modo intensivo, extensivo ou ambos. No modo intensivo, um contrato realizado no mês t aumenta a capacidade de produção já no mês $t + 1$. Neste caso o custo é de \$ 240 mil por unidade expandida na capacidade da firma, despesa esta que deve ser paga no mês t. No modo extensivo, um contrato realizado no mês t aumenta a capacidade de produção do mês $t + 2$. Neste caso o custo é de \$ 100 mil no mês t e de \$ 150 mil no mês $t + 1$, por unidade expandida na capacidade da firma.

No início do mês 1 a fábrica dispõe de \$ 950 mil para financiar a produção e as obras de expansão. Toda produção e expansão devem ser auto-financiáveis, isto é, a fábrica não deseja tomar empréstimos. Seu objetivo é maximizar a capacidade produtiva existente no sexto mês. Em nenhum mês a produção de qualquer tipo de produto deverá ser inferior a 10 unidades.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

A_t : unidade do tipo (A) produzida no mês t

B_t : unidades do tipo (B) produzidas no mês t

I_t : unidades de expansão de capacidade contratadas no mês t para construção intensiva

E_t : unidades de expansão da capacidade contratadas no mês t para construção extensiva

C_t : capacidade de produção da fábrica no período t

D_t : sobra de caixa no período t (em \$ mil)

1.24 — (Em continuação ao problema anterior) Suponha que em vez de receber \$ 36 mil e \$ 44 mil por unidade produzida de A e B no início do mês consecutivo ao mês em que as unidades foram produzidas, a fábrica faturasse da seguinte maneira:

a) por unidade produzida de A no mês t

a.1) \$ 18 mil no início do mês $t + 1$
a.2) \$ 22 mil no início do mês $t + 2$

b) por unidade produzida de B no mês t

b.1) \$ 23 mil no início do mês $t + 1$
b.2) \$ 25 mil no início do mês $t + 2$

Suponha, além disso, que a firma possa recorrer a financiamento externo nas seguintes condições: tomar um empréstimo de \$ F ($F \leqslant 500.000$) no início do mês *1* com juros de 5% ao mês sobre o saldo devedor do mês, com amortizações mensais – pagas no início de cada mês – não inferiores a $\frac{1}{8}$ do montante do financiamento total e ainda com a condição de liquidar a dívida no início de sexto mês.

Variáveis de decisão adicionais sugeridas para a formulação:

S_t : saldo devedor no início do mês t, em \$ (*NB:* $S_1 = F$)

P_t : amortização realizada no início do mês t, em \$

Obs.: $S_t = 1{,}03\ (S_{t-1} - P_{t-1})$

Finalmente, suponha ainda que a firma necessite dispor de pelo menos \$ 350.000 em caixa no início do mês 7.

Reformule o problema de maximizar a capacidade produtiva existente no sexto mês de acordo com as novas condições.

• 1.25 — Uma fábrica tem o seguinte cronograma de encomendas para cumprir:

Mês	Encomendas (Unidades)
1	5.300
2	7.750
3	8.300
4	6.800
5	8.250

A flutuação no nível mensal de encomendas causa problemas para a firma. Ela poderia, em princípio, ter uma produção variável com as encomendas e com baixos níveis de estoque, mas tal estratégia determina custos relativamente altos de demissão ou de admissão e treinamento de pessoal. Por outro lado, uma produção muito estável pode determinar custos elevados de estocagem. Através de uma série de dados de custos e de produção anteriores, estimou-se que cada acréscimo unitário na produção de um mês qualquer em relação à produção do mês anterior custa Cr$ 1.000. Por outro lado, cada decréscimo unitário na produção de um mês qualquer em relação à produção do mês anterior custa Cr$ 1.300. Além disto, estimou-se também que o custo mensal por unidade estocada é de Cr$ 800.

A capacidade de produção da fábrica é de 7.800 unidades/mês.

A capacidade de estocagem da fábrica é de 3.500 unidades.

A fábrica deseja um plano de produção que minimize o custo de variações na produção e de estocagem. Deseja também que o estoque existente no final do mês *5* seja de pelo menos 500 unidades. Seu estoque no início do mês *1* é de 200 unidades.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

P_t : unidades produzidas no mês t

e_t : unidades disponíveis em estoque no início do mês t (ou no fim do mês $t - 1$)

a_t : aumento na produção do mês t em relação à produção do mês $t - 1$ (em unidades)

d_t : diminuição na produção do mês t em relação à produção do mês $t - 1$ (em unidades)

Obs.: o custo de estocagem incide sobre o estoque *médio* do mês:

$$m_t = \frac{1}{2} e_t + \frac{1}{2} e_{t+1}$$

onde m_t é o estoque médio do mês t (em unidades).

* 1.26 — Num certo país a escassez da oferta agrícola tem exercido forte pressão inflacionária. Técnicos do governo estimaram as seguintes necessidades de produção (em centenas de toneladas) para eliminar esta pressão no ano vindouro:

a) Feijão	48.300	e) Carne de Frango	25.000
b) Arroz	93.500	f) Batata	45.060
c) Carne de Gado	135.000	g) Leite	212.200
d) Carne de Porco	39.800	h) Soja	84.500

A escassez (ou o excesso) de cada alimento em relação a sua necessidade estimada contribui para o aumento (ou diminuição) da taxa inflacionária. Um estudo econométrico, com projeções para o ano vindouro, indicou que:

a) cada ponto percentual de escassez (excesso) na produção de feijão acresce (decresce) a taxa inflacionária total em 0,081 pontos percentuais, isto é, a elasticidade-inflação da escassez de feijão é 0,081;

b) a elasticidade-inflação da escassez de arroz é 0,053;

c) a elasticidade-inflação da escassez de carne de gado é 0,092;

d) a elasticidade-inflação da escassez de carne de porco é 0,039;

e) a elasticidade-inflação da escassez de carne de frango é 0,059;

f) a elasticidade-inflação da escassez de batata é 0,038;

g) a elasticidade-inflação da escassez de leite é 0,075; e

h) a elasticidade-inflação da escassez de soja é 0,046.

A partir de outro estudo econométrico foram estimadas as seguintes funções de oferta para os diversos produtos agrícolas para o ano vindouro:

(a) $Q_a = 37.200 + 430\ P_a - 108\ P_f - 95\ P_h + 305\ C_a$

(b) $Q_b = 86.100 + 750\ P_b - 228\ P_c + 517\ C_b$

(c) $Q_c = 114.200 + 1050\ P_c - 300\ P_h - 220\ P_b + 530\ C_c$

(d) $Q_d = 37.060 + 197\ P_d - 110\ P_h - 250\ P_g - 190\ P_e + 426\ C_d$

(e) $Q_e = 16.460 + 246\, P_e - 67\, P_h - 41\, P_d - 13\, P_b + 524\, C_e$

(f) $Q_f = 21.150 + 820\, P_f - 215\, P_a - 106\, P_g + 615\, C_f$

(g) $Q_g = 168.912 + 1310\, P_g - 412\, P_c + 720\, C_g$

(h) $Q_h = 98.350 + 1280\, P_h - 243\, P_b - 277\, P_c + 1410\, C_h$

onde: Q_a : previsão da safra de feijão (em centenas de toneladas)
Q_b : previsão da safra de arroz (em centenas de toneladas)
Q_c : previsão da safra de gado (em centenas de toneladas)
etc...

e P_a : mudança do preço mínimo do feijão (em %)
P_b : mudança do preço mínimo do arroz (em %)
P_c : mudança do preço mínimo do gado (em %)
etc...

e C_a : mudança do montante de crédito destinado ao plantio de feijão (em %)
C_b : mudança do montante de crédito destinado ao plantio de arroz (em %)
C_c : mudança do montante de crédito destinado à pecuária de corte (em %)
etc...

Para evitar maiores pressões inflacionárias por seus próprios instrumentos de controle, o governo estabeleceu que nenhum produto deverá ter seu preço mínimo elevado em mais que 10%, devendo a média aritmética das variações nos preços mínimos ser igual ou menor que 4%. Admite-se, outrossim, mudanças nos preços mínimos até o limite inferior de —5%. Também o crédito deverá ser relativamente restrito. A mudança percentual do crédito total é uma média ponderada das mudanças percentuais dos montantes destinados às diferentes atividades agrícolas:

$$C = \frac{1}{20} C_a + \frac{4}{20} C_b + \frac{2}{20} C_c + \frac{1}{20} C_d + \frac{1}{20} C_e + \frac{1}{20} C_f + \frac{2}{20} C_g + \frac{8}{20} C_h$$

onde C é a mudança percentual no crédito total destinado ao agricultor. Os juros do crédito agrícola são subsidiados e isto também exerce pressão inflacionária. Para o ano vindouro estima-se que cada ponto percentual de C acima de -10 (%) adiciona 0,2 pontos percentuais à inflação total. De outro lado, para evitar a geração de muitas incertezas no setor rural, foi determinado que a variação no crédito destinado a cada atividade isoladamente se situasse entre -10 e 20 por cento.

Estabeleça as mudanças percentuais nos preços mínimos e nos volumes de crédito que minimizam a pressão inflacionária total.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

P_j : mudança no preço mínimo do produto agrícola j

C_j : mudança no montante de crédito destinado ao produto agrícola j

e_j : escassez (ou excesso) percentual do produto agrícola j em relação a sua necessidade estimada

1.27 — A estrutura econômica de um certo país, dada pelo seu quadro de transações intersetoriais no ano passado, é como se segue:

Setores	Destino da Produção Setorial (Em $ Bilhões)				
	Consumo Intermediário				Consumo Final*
	Setor 1	Setor 2	Setor 3	Setor 4	
1	16	12	10	20	240
2	34	26	18	30	440
3	8	38	4	16	220
4	10	14	12	22	380

* Inclui consumo doméstico final e exportações

Além das informações da tabela anterior, tem-se ainda mais os seguintes valores para o ano passado:

Setores	Valor das Importações (\$ milhões)	Pessoal Empregado (1.000 pessoas)
1	80	150
2	90	280
3	40	120
4	180	250

Observamos que o valor total da produção do Setor 1 é dado pela soma de suas vendas para consumo intermediário (16 + 12 + 10 + 20) com as vendas para consumo final (240). Conseqüentemente, a produção total do Setor 1 no ano passado foi de \$ 298 bilhões. Para produzir este volume o setor em pauta necessitou gastar \$ 16 bilhões (na compra de bens produzidos no próprio setor), mais \$ 34 bilhões (na compra de bens produzidos pelo Setor 2), mais 8 bilhões (na compra de bens produzidos pelo Setor 3), mais \$ 10 bilhões (na compra de bens produzidos pelo Setor 4) e mais \$ 80 bilhões (em insumos importados). Além disto o Setor 1 empregou 150 mil trabalhadores. Conclui-se que, para produzir \$ 1 bilhão por ano, o Setor 1 requer: (a) $\$\ \frac{16}{298}$ bilhão em bens produzidos no próprio setor; (b) $\$\ \frac{34}{298}$ bilhão em bens produzidos no Setor 2; (c) $\$\ \frac{8}{298}$ bilhão em bens produzidos no Setor 3; (d) $\$\ \frac{10}{298}$ bilhão em bens produzidos no Setor 4; (e) $\$\ \frac{80}{298}$ bilhão em bens importados e $\frac{150}{298}$ mil trabalhadores. Relações análogas podem ser estabelecidas para os outros setores.

Para o próximo ano estimaram-se as seguintes restrições de mão-de-obra: (a) o número de trabalhadores qualificados para emprego nos setores 1 e 2, somados, é limitado a um máximo de 470 mil, (b) o número de trabalhadores qualificados para emprego no setor 3 é limitado a um máximo de 180 mil e (c) o número total de trabalhadores existentes no país é 900 mil.

Estimou-se, além disto, que os Setores 1 e 3 podem expandir sua produção total em 20%, enquanto que o Setor 4 pode expandi-la em 10% e o Setor 2 pode expandi-la em 5% (em relação aos valores do ano passado).

O consumo final da produção dos diversos setores no ano passado foi como se segue:

Setor	Consumo Final ($ Bilhões)		
	Doméstico	Exportação	Total
1	210	30	240
2	360	90	440
3	160	60	220
4	280	100	380

Observa-se então que o país exportou um total de $ 280 bilhões e importou um total de $ 310 bilhões, ficando um déficit de $ 30 bilhões no balanço comercial.

Para o próximo ano, o governo desejaria reorganizar a produção de modo a minimizar o déficit (ou maximizar o saldo) do balanço comercial ao mesmo tempo em que os níveis de consumo doméstico final se mantivessem pelo menos no nível do ano passado.

P_j : produção total do setor j (em $ bilhões/ano)

I_j : importações realizadas pelo setor j (em $ bilhões/ano)

E_j : exportações realizadas pelo setor j (em $ bilhões/ano)

1.28 — (Em continuação ao problema anterior) Façamos D o número total de trabalhadores desempregados no país. Suponha ainda que os níveis de consumo doméstico final dos diversos setores fosse dado por:

$$CD_1 = 250 - 0,27\,D$$
$$CD_2 = 420 - 0,44\,D$$
$$CD_3 = 180 - 0,15\,D$$
$$CD_4 = 320 - 0,09\,D$$

(onde CD_j é o consumo doméstico final de bens produzidos no setor j em \$ bilhões/ano; $CD_j \geqslant 0$).

Suponha, por fim, que o objetivo do governo fosse minimizar o número total de desempregados subordinados à condição de que o balanço comercial fique em equilíbrio ou seja superavitário. Formule.

1.29 — Uma certa região é assolada por dois tipos de doenças (I e II). Para combatê-las, três tipos de medicamentos bivalentes foram desenvolvidos (A, B e C). Médicos pesquisadores forneceram a seguinte tabela de probabilidade de falha na cura para o emprego de um comprimido de cada medicamento, bem como o custo dos mesmos:

Tipo de Medicamento	Probabilidade de Insucesso (Um Comprimido)		Custo de Um Comprimido (Cr$)
	Na Cura da Doença I	Na Cura da Doença II	
A	0,35	0,13	14,00
B	0,16	0,71	10,00
C	0,75	0,00	12,00

Observação: Se uma pessoa toma três comprimidos do medicamento A, a probabilidade de insucesso na cura da doença I é $0,35^3$, a probabilidade de insucesso na cura da doença II é $0,13^3$ e a probabilidade de insucesso total na cura de pelo menos uma doença é $(0,35 \times 0,13)^3$. Se, além disso, a pessoa tomar mais dois comprimidos do medicamento C, a probabilidade de insucesso na cura da doença I se reduz a $0{,}35^3 \times 0{,}75^2$, a probabilidade de insucesso na cura da doença II se reduz a $0{,}13^3 \times 0{,}09^2$ e a probabilidade de insucesso total na cura de pelo menos uma doença a $(0{,}35 \times 0{,}13)^3 (0{,}75 \times 0{,}09)^2$.

O governo determinou uma verba máxima de Cr$ 60,00 por pessoa existente na região à superintendência regional da saúde para minimizar a incidência das doenças I e II. Cada pessoa deverá receber um pacote contendo no máximo cinco comprimidos, sendo que o número de comprimidos de cada tipo isoladamente não deve exceder a três (estes limites são por razões médicas).

Determine a composição do pacote de comprimidos que uma pessoa totalmente doente deve receber de modo a minimizar a probabilidade de insucesso total na cura (por "totalmente doente" entende-se aquela pessoa que tem a doença *I* e a doença *II*; como ambas doenças são muito comuns na região, adota-se o pressuposto de que todos os habitantes da região estão totalmente doentes). Deseja-se, outrossim, que a probabilidade de insucesso na cura de cada doença isoladamente seja igual ou menor que 0,003.

Obs.: A formulação deste problema é linearizada por transformações logarítmicas.

Variáveis de decisão sugeridas na formulação do problema:

X_j : n.º de comprimidos do tipo j a colocar no pacote

• 1.30 — Um pequeno agricultor pretende plantar feijão para sua subsistência. O plantio do feijão requer três operações seqüenciadas: (1.º) lavrar o solo, (2.º) gradear o solo e (3.º) fazer a semeadura. Estas operações podem ser realizadas dentro de um período total de quatro semanas. Uma fração de terra semeada na semana t deve ter sido gradeada anteriormente (o que pode ter ocorrido na mesma semana ou em semanas anteriores). Uma fração de terra gradeada na semana t deve ter sido lavrada anteriormente (o que pode ter ocorrido na mesma semana ou em semanas anteriores).

O processo de lavração requer 14 h de trabalho por hectare (ha). O processo de gradeação requer 8 h de trabalho por ha e o processo de semeadura requer 5 h de trabalho por ha. Considerando as necessidades de trabalho do agricultor nas diversas atividades que ele precisa realizar na sua propriedade, ele pode dedicar ao plantio de feijão os seguintes montantes de seu tempo de trabalho: 36 horas na semana 1, 40 horas na semana 2, 48 horas na semana 3 e 40 horas na semana 4.

A produtividade esperada do feijão varia segundo a semana em que for realizada a semeadura:

Semana da semeadura	Produtividade esperada do feijão (kg/ha)
1	930
2	980
3	950
4	860

A área total disponível para o plantio de feijão é de 6 ha.

O objetivo do agricultor é maximizar a produção total de feijão.

Variáveis de decisão sugeridas para a formulação:

l_t : área lavrada na semana t (ha)

g_t : área gradeada na semana t (ha)

s_t : área semeada na semana t (ha)

• 1.31 — A partir de diversos experimentos, nos quais apenas um fator era variável (e os demais mantidos em níveis não-limitantes ao aumento de produtividade), os técnicos de um centro de pesquisa agrícola estimaram as seguintes curvas de resposta do rendimento físico do milho:

(a) $Y_P = Min\ \{30.P;\ 500 + 20.P;\ 3500\}$

(b) $Y_N = Min\ \{50.N;\ 800 + 30.N;\ 3500\}$

(c) $Y_K = Min\ \{35.K;\ 1200 + 20.K;\ 3500\}$

(d) $Y_C = Min \{2.500 . C;\ 1000 + 1500 . C;\ 3500\}$

(e) $Y_S = Min \{150 . S;\ 1400 + 80 . S;\ 3500\}$

(f) $Y_I = Min \{2000 + 15 . I;\ 3500\}$

onde Y_j é a produtividade (kg/ha) de milho em resposta ao nível de emprego do fator j (supondo que os demais fatores estejam em nível não limitante). Os fatores, e seus preços, são os seguintes:

P : adubação fosfatada (kg P_2O_5/ha/ano); Cr\$ 20,00/kg P_2O_5

N : adubação nitrogenada (kg N/ha/ano); Cr\$ 23,00/kg N

K : adubação potássica (kg K_2O/ha/ano); Cr\$ 14,00/kg K_2O

C : adubação cálcica (t $CaCO_3$/ha/ano); Cr\$ 1.100,00/t $CaCO_3$

S : sementes (kg/ha/ano); Cr\$ 35,00/kg sementes

I : inseticida (l de piretrina/ha); Cr\$ 40,00/l piretrina

Admitindo-se um princípio agronômico conhecido como "lei do mínimo", a produtividade do milho seria dada por:

$$Y = Min \{Y_P, Y_N, Y_K, Y_C, Y_S, Y_I\}$$

ou, alternativamente, por:

$$Y = Max \{Z : Z \leq Y_j;\ j = P, N, K, C, S, I\}$$

Que quantidade de cada insumo deveria ser recomendada a um agricultor que tem uma limitação de Cr\$ 8.000/ha para a aquisição dos mesmos? Que produtividade este agricultor poderia esperar obter?

1.32 — (Ver Dantzig e Fulkerson, 1954, pp. 217-222) Uma companhia petrolífera estatal produz e exporta petróleo de um certo tipo e importa petróleo de outros tipos. O petróleo manuseado pela companhia é movimentado entre seis portos, sendo três de embarque (campos petrolíferos de origem) e três de recebimento (refinaria de destino). Cada refinaria estabeleceu seu cronograma de recebimento de navios-tanque de acordo com as necessidades de seus planos de produção. O cronograma geral de recebimentos é o estabelecido a seguir:

Origens \ Destinos	Refinaria 1		Refinaria 2		Refinaria 3	
	Data*	N.º de Navios**	Data*	N.º de Navios**	Data*	N.º de Navios**
Campo A	21 63 142	3 3 2	36 88 200	2 5 2	60 180	1 3
Campo B	44 220	1 4	77 153 258	1 3 2	30 160 350	1 2 4
Campo C	90 340	2 5	100 210	2 2	35 230	2 3

* n.º do dia do ano, em numeração seqüencial de 1 a 365.

** n.º de navios-tanque esperados no porto de destino, segundo as diversas datas e origens.

O tempo de viagem entre os diversos portos de origem e destino é como se segue (em dias):

Origens \ Destino	Referência 1	Referência 2	Referência 3
Campo A	15	12	25
Campo B	13	7	16
Campo C	21	16	9

Obs.: O tempo requerido para operações de carga e descarga já está incluído no tempo de viagem.

O problema da gerência da companhia é o de cumprir os requerimentos das refinarias utilizando o menor número de navios-tanque possível.

Sugestão: Faça uma lista cronológica dos recebimentos requeridos (independente de origens e destinos); a seguir, deduzindo os tempos de viagem, faça uma lista cronológica dos embarques necessários (independente de origens e destinos). A partir destas listas, será possível definir as seguintes variáveis de decisão:

X_{aj} : quantidade de navios cuja primeira tarefa é participar no atendimento da j-ésima ordem cronológica.

X_{ij} : quantidade de navios que após cumprirem a i-ésima entrega (numeração das entregas em ordem cronológica) são encaminhados a participar no atendimento da j-ésima ordem de embarque (numeração dos embarques em ordem cronológica).

Para simplificar supõe-se que qualquer navio pode executar sua primeira tarefa em qualquer data e em qualquer porto de embarque. Supõe-se também que, se um navio for enviado para um porto qualquer para cumprir uma nova tarefa com folga no seu tempo de viagem, ele poderá ficar ancorado ao largo do porto pelo tempo que for necessário até iniciar a nova tarefa.

Observação: Os dois exercícios que se seguem (1.33 e 1.34) demandam uma certa familiaridade com o problema estatístico de ajustar uma equação a um conjunto de observações empíricas de duas ou mais variáveis de interesse do analista (análise de regressão).

* 1.33 — Em uma pesquisa realizada numa certa região urbana obtiveram-se as seguintes informações sobre a renda mensal e o nível educacional em uma amostra consistindo de sete observações (pessoas):

Número da Observação	Escolaridade (anos)	Renda Mensal (Cr$)
1	5	6.700,00
2	8	23.900,00
3	4	7.600,00
4	12	33.400,00
5	16	65.200,00
6	10	25.800,00
7	7	12.100,00

Fazendo: Y_j = renda mensal da j-ésima observação
(ex.: $Y_3 = 7600$)

e X_j = escolaridade da j-ésima observação
(ex.: $Y_5 = 16$)

e admitindo-se a existência de uma relação linear:

$$Y_j = a + b\ X_j + e_j$$

onde e_j: erro ou desvio da j-ésima observação, encontre valores a e b que minimizam o somatório dos desvios absolutos:

$$Min\ SDA = \sum_{j=1}^{7} |Y_j - a - bX_j|$$

Variáveis sugeridas para a formulação:

e_j^+ : desvio positivo na j-ésima observação

e_j^- : desvio negativo na j-ésima observação

1.34 — Utilizando os mesmos dados empíricos do problema anterior, encontre os valores de a e b que minimizam o valor absoluto do maior desvio.

Observação: embora os estimadores com base em minimização de desvios absolutos tendam a ser mais robustos que os estimadores de mínimos quadrados, a garantia de inexistência de viés demanda procedimentos especiais (ver Sielken Jr. e Hartley, 1973).

1.35 — (Designação) Uma firma de processamento de dados dispõe de cinco computadores: *C1, C2 C3, C4* e *C5*. Num determinado dia existem cinco trabalhos a serem processados (T_1 a T_5). O custo de processamento de cada um destes trabalhos é diferente em cada um dos computadores. O quadro a seguir resume os custos de execução de cada trabalho segundo a máquina que eventualmente for designada a executá-lo:

Computador \ Trabalho	T1	T2	T3	T4	T5
C1	43	75	26	66	35
C2	52	78	36	69	39
C3	37	63	24	62	22
C4	58	70	39	73	41
C5	66	81	57	79	58

O problema da gerência consiste em designar um computador para cada trabalho de modo a minimizar o *custo total* de execução dos mesmos.

$$X_{ij} \begin{cases} = 0 \rightarrow \text{o computador } i \text{ não é designado para executar o trabalho } j \\ = 1 \rightarrow \text{o computador } i \text{ é designado para executar o trabalho } j \end{cases}$$

Dica: as restrições devem garantir que cada computador receba um trabalho e que cada trabalho seja entregue a um computador.

Comentário: O problema em pauta apresenta variáveis de decisão que pertencem ao conjunto dos números inteiros. Em princípio este problema não se caracteriza como um problema de programação linear, pois as soluções destes pertencem ao conjunto de números reais. Entretanto, para os problemas que obedecem explícita ou implicitamente a formulação:

$$\text{Otimizar} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

$$\text{dado que:} \quad \sum_{j=1}^{n} X_{kj} - \sum_{i=1}^{n} X_{ik} = T_k \; (k = 1, 2, \ldots, n)$$

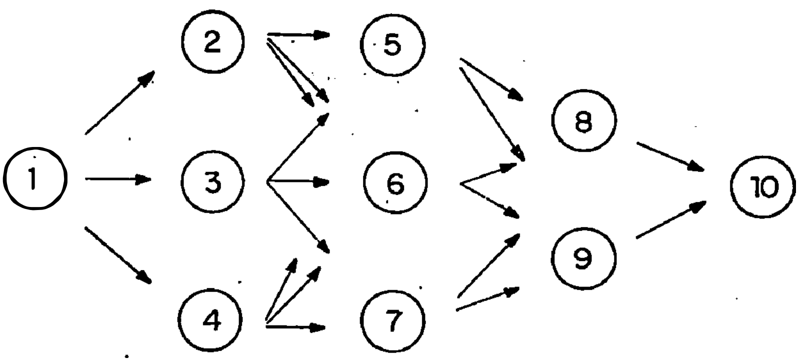
$$\text{e} \quad 0 \leq X_{ij} \leq u_{ij} \; (todos\ i, j)$$

onde T_k e u_{ij} são números inteiros, é possível demonstrar que a solução ótima de tal formulação ocorre para valores inteiros de X_{ij} (Ver Wagner, 1969, pp. 169 e 225-6). A formulação geral apresentada acima caracteriza uma classe de problemas de programação linear da qual fazem parte os problemas de transporte, de transbordo, de designação, de caminho crítico, de fluxo máximo e outros. Em geral tais problemas podem ser resolvidos por algoritmos especializados com eficiência bem superior à obtida pelo simplex.

1.36 — (Em continuação ao problema anterior) Suponha que ao invés de cinco computadores, a firma só dispusesse de quatro destas máquinas: *C1, C2, C3* e *C4*. Conseqüentemente, numa primeira designação, apenas quatro trabalhos poderiam ser executados, devendo o remanescente ir para uma fila de espera. Neste caso esta fila de espera pode ser interpretada como um fictício quinto computador (*C5*) e os custos de processamento deveriam ser substituídos por custos de espera (que podem ou não diferir entre os diversos trabalhos encomendados). Suponha que os custos de espera não sejam diferentes e possam ser considerados nulos. Reformule o problema.

1.37 — (Em continuação ao problema 1.35) Suponha agora que a firma dispõe de cinco computadores mas tem apenas quatro trabalhos a executar. Reformule o problema.

• 1.38 — Uma Companhia de Transportes Aéreos está em vias de estabelecer uma linha regular entre as cidades 1 e 10. Para tanto, diversas rotas alternativas se oferecem a custos que, na prática, podem ser considerados como idênticos. Entretanto, as rotas diferem bastante em suas condições de segurança (um item importante na determinação da segurança é o número de aeroportos existentes em cada etapa). Um diagrama representativo do problema é como se segue:



O número de aeroportos que podem ser usados em caso de emergência em cada etapa é dado a seguir:

De \ Para	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	4	2	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	6	7	5	—	—	—
3	—	—	—	3	4	7	—	—	—
4	—	—	—	1	6	5	—	—	—
5	—	—	—	—	—	—	5	2	—
6	—	—	—	—	—	—	2	1	—
7	—	—	—	—	—	—	1	2	—
8	—	—	—	—	—	—	—	—	0
9	—	—	—	—	—	—	—	—	1

O problema se resume em selecionar a rota de 1 até 10 que apresente o maior número possível de aeroportos utilizáveis em emergências.

$$X_{ij} \begin{cases} = 0 \rightarrow \text{o segmento entre os pontos } i \text{ e } j \text{ não é incluído na rota} \\ = 1 \rightarrow \text{o segmento entre os pontos } i \text{ e } j \text{ é incluído na rota} \end{cases}$$

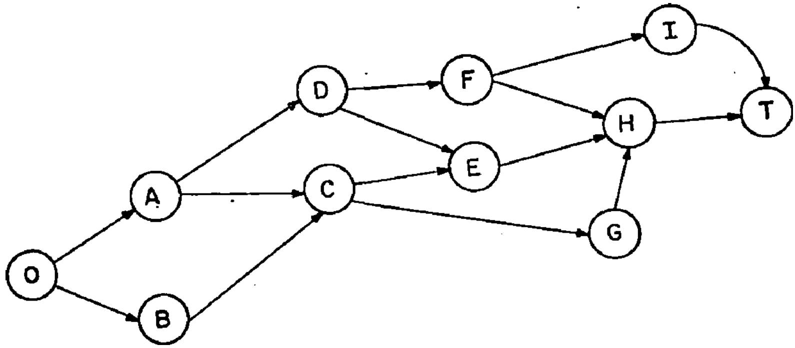
Dica: As restrições devem garantir que uma unidade "saia" da origem (1) e uma unidade "chegue" no destino (10); para os pontos intermediários é necessário garantir o fluxo de conservação, isto é, se uma unidade "entrar", ela deve "sair" e, se nenhuma unidade "entrar", então nenhuma deve "sair".

1.39 — Na execução de certas obras de engenharia e em planos de desenvolvimento regional é preciso realizar diversas tarefas. Geralmente algumas tarefas são pré-requisitos para outras de modo que, em pelo menos algumas delas, é importante concentrar esforços para evitar atrasos (pois estes acabarão se refletindo no cronograma global de execução do projeto). Identificar as tarefas nesta situação corresponde a determinar o *caminho crítico* do cronograma global.

Vamos supor que a execução de um certo projeto envolva diversas tarefas com tempo de duração variável e com as seguintes relações de pré-requisitos:

Tarefa	Duração (dias)	Pré-Requisitos
A	35	—
B	60	—
C	30	A,B
D	60	A
E	30	C,D
F	25	D
G	25	C
H	35	E,F,G
I	30	F

O fluxograma a seguir repete a informação do quadro, tendo-se acrescentado duas tarefas fictícias — *0* para origem e *T* para término — que não demandam tempo para sua execução.



A seguir definimos as variáveis X_j como o dia de início da tarefa j (dias em numeração corrida). Observe, por exemplo, que:

$X_E \geqslant X_C + 30$ (a tarefa E só pode ser iniciada após a conclusão da tarefa C)

$X_E \geqslant X_D + 60$ (a tarefa E só pode ser iniciada após a conclusão da tarefa D)

O problema consiste em minimizar X_T subordinado a restrições que simulem as condições de pré-requisitos.

Uma formulação alternativa consiste em escolher a rota de maior duração entre 0 e T. Tal rota é o caminho crítico do fluxograma: um atraso de um dia na execução de qualquer tarefa pertencente ao caminho crítico determina um atraso de um dia no cronograma global.

Elabore as duas formulações para o problema apresentado.

1.40 — Uma empresa de transportes urbanos está considerando a determinação de uma política de substituição de sua frota para os próximos seis anos. Já foi tomada a decisão que no início do próximo ano — o primeiro do horizonte referido — a frota será totalmente renovada pela aquisição de ônibus novos.

Os dados do problema são os seguintes:

a) Custo de um ônibus novo: $ 1.500 (prevê-se que este custo será constante nos próximos seis anos).

b) Custo anual da operação de:

b1) um ônibus no seu primeiro ano de uso: $ 200
b2) um ônibus no seu segundo ano de uso: $ 350
b3) um ônibus no seu terceiro ano de uso: $ 550
b4) um ônibus no seu quarto ano de uso: $ 750
b5) um ônibus no seu quinto ano de uso: $ 780
b6) um ônibus no seu sexto ano de uso: $ 800

c) Receita da revenda de:

c1) um ônibus com um ano completo de uso: $ 1.100
c2) um ônibus com dois anos completos de uso: $ 900

c3) um ônibus com três anos completos de uso: \$ 700
c4) um ônibus com quatro anos completos de uso: \$ 650
c5) um ônibus com cinco anos completos de uso: \$ 600
c6) um ônibus com seis anos completos de uso: \$ 590

Por hipótese supõe-se que eventuais substituições de frota ocorram em inícios de ano.

Façamos C_{ij} o custo total da opção de comprar um ônibus no início do ano i e vendê-lo no início do ano j $(i = 1, 2, \ldots, 6;$ $j = 1, 2, \ldots, 7;$ $i \; j)$. Estes valores podem ser calculados a partir das informações anteriores. Façamos ainda:

$$\mathbf{X}_{ij} \begin{cases} = 0 \rightarrow \text{a opção de manter um ônibus adquirido no início do ano } i \text{ até o início do ano } j \text{ não é utilizada} \\ = 1 \rightarrow \text{a opção de manter um ônibus adquirido no início do ano } i \text{ até o início do ano } j \text{ é utilizada} \end{cases}$$

O problema se resume em encontrar a "rota" de menor custo entre o ponto inicial (1) e o ponto terminal (7): uma unidade deve "sair" do ponto inicial e uma unidade deve "chegar" no ponto terminal; para os pontos intermediários deve valer o princípio de conservação, isto é, se uma (nenhuma) unidade "chegar", então uma (nenhuma) unidade deve "sair".

1.41 — (Programação Fracional ou Hiperbólica) Em problemas econômicos freqüentemente o objetivo é maximizar alguma razão benefício/custo na qual tanto o numerador quanto o denominador se apresentam na forma de funções lineares. Tais problemas, pertencentes à classe de problemas de programação fracional, podem ser resolvidos por técnicas de programação linear, através de um artifício algébrico relativamente simples.

Considere o problema de programação fracional:

$$Max. \quad Z = \frac{C_0 + \sum_{j=1}^{n} C_j X_j}{V_0 + \sum^{n} V_j X_j}$$

Subordinado a: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_j \; (i = 1, 2, \ldots, m)$

e $X_j \geq 0$

(onde C_o, C_j, V_o, V_j, a_{ij} e b_j são parâmetros numéricos conhecidos).

Vamos definir uma variável d como se segue:

$$d = \left(V_o + \sum_{j=1}^{n} V_j X_j \right)^{-1} \tag{1}$$

de modo que:

$$Z = C_o d + \sum_{j=1}^{n} C_j X_j d \tag{2}$$

Definimos, a seguir, variáveis t_j como se segue:

$$t_j = X_j d \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

de modo que:

$$Z = C_o d + \sum_{j=1}^{n} C_j t_j \tag{4}$$

Em vista da definição (1):

$$d \left(V_o + \sum_{j=1}^{n} V_j X_j \right) = 1$$

ou

$$V_o d + \sum_{j=1}^{n} V_j X_j d = 1$$

ou

$$V_o d + \sum_{j=1}^{n} V_j t_j = 1 \tag{5}$$

Observe que estamos procedendo a uma troca nas variáveis originais do problema (X_j por d e t_j). A função objetivo (4) foi linearizada, mas ela só tem validade sob o condicionamento expresso pela equação (5). A equação (5) amarra a definição da variável d estabelecida em (1) com as definições das variáveis t_j estabelecidas em (3).

Por fim, multiplicando ambos os lados das restrições do problema original $(\sum_j a_{ij}X_j \leqslant b_i)$ por d obtemos:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, t_j - b_i\, d \leq 0$$

Então, para resolver o problema de programação fracional, resolvemos o seguinte problema de programação linear:

$$Max. \quad Z = C_o\, d + \sum_{j=1}^{n} C_j\, t_j$$

$$\text{dado que:} \quad V_o\, d + \sum_{j=1}^{n} V_j\, t_j = 1$$

$$-b_i\, d + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, t_j \leq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$t_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Uma vez conhecida a solução ótima do problema acima, digamos d^* e t_j^* $(j = 1, 2, \ldots, n)$, podemos calcular as raízes ótimas do problema original $X_j^* = t_j^*/d^*$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Teste seu entendimento formulando o problema descrito na seqüência.

Uma empresa pode produzir três produtos: A, B e C. Os preços recebidos pelos produtos são $P_A = \$\ 100$, $P_B = \$\ 120$ e $P_C = \$\ 240$. O custo variável médio de cada produto é: $C_A = \$\ 60$, $C_B = \$\ 70$ e $C_C = \$\ 160$. A produção de uma unidade de A requer 1 h de montagem e 0,4 h de teste. A produção de uma unidade de B requer 1,3 h de montagem e 0,3 h de teste. A produção de uma unidade de C requer 1,5 h de montagem e 0,2 h de teste. O departamento de montagem pode trabalhar até 2.000 h/semana e o departamento de testes pode trabalhar até 700 h/semana. O custo fixo da firma é \$ 70.000/semana. A gerência pretende manter uma linha diversificada: o volume produzido de cada produto deve representar pelo menos 15% da produção total. O objetivo é maximizar a razão entre receitas totais e custos totais.

III.2 — Formulações Especiais de Programação Linear

O cenário típico de um problema de Programação Linear é composto por relações lineares envolvendo parâmetros conhecidos deterministicamente e variáveis que assumem valores pertencentes ao conjunto de números reais. Sob um ponto de vista estritamente matemático a Programação Linear de fato é um modelo que pressupõe proporcionalidade, aditividade, divisibilidade e ausência de aleatoriedade. Entretanto, pelo menos em certos casos, é possível reformular um problema cujas características originais não correspondem ao modelo básico de Programação Linear de modo a obter as condições requeridas. Um exemplo neste sentido é o problema de Programação Fracional examinado na seção anterior (*vide* I.41). Problemas de designação, por outro lado, mesmo não atendendo o pressuposto de divisibilidade também podem ser resolvidos pelo método Simplex (*vide* I.35, acima).

Na presente seção examinaremos aplicações de Programação Linear em problemas cujo cenário envolve uma certa classe de funções não-lineares e em problemas cujo cenário apresenta elementos probabilísticos.

III.2.1 — Programação Separável

Programação Separável se refere a uma técnica de resolução aproximada de certos problemas de Programação Não-Linear através do método Simplex ou de métodos dele derivados. O domínio desta técnica requer o entendimento de alguns conceitos matemáticos relativamente simples e que serão discutidos a seguir.

Um conceito básico em Programação Separável é o de *combinação convexa* de dois vetores: dados dois vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, diz-se que o vetor $\mathbf{v}_3$, definido como

$$\mathbf{v}_3 = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 \; ; \; k_1 + k_2 = 1 \; ; \; k_1, k_2 \geq 0,$$

é uma combinação convexa dos vetores dados.

Observamos que o conceito de combinação convexa de dois vetores é um caso particular do conceito de combinação linear examinado no primeiro capítulo deste texto. Notamos ainda que uma combinação convexa de dois vetores é um vetor obtido como uma média ponderada — com pesos k_1 e k_2 — dos vetores dados.

Por exemplo, dados:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \end{bmatrix}$$

definimos uma combinação convexa dos pontos — ou vetores — $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ como:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} k_1 + \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \end{bmatrix} k_2 = \begin{bmatrix} 5k_1 + 10k_2 \\ 4k_1 + (-6)\, k_2 \end{bmatrix}; k_1 + k_2 = 1; k_1, k_2 \geq 0$$

e:

a) se $k_1 = k_2 = 0{,}5$, então $\mathbf{v}_3' = [7{,}5 \, ; -1]$

b) se $k_1 = 0{,}4$ e $k_2 = 0{,}6$, então $\mathbf{v}_3' = [8 \, ; -2]$

c) se $k_1 = 0$ e $k_2 = 1$, então $\mathbf{v}_3' = [10 \, ; -6]$

d) se $k_1 = 0{,}7$ e $k_2 = 0{,}3$, então $\mathbf{v}_3' = [6{,}5 \, ; 1]$

etc.

O lugar geométrico das combinações convexas de dois vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ é o segmento de reta que une os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ (verifique esta afirmativa graficamente com vetores bidimensionais).

Utilizando o conceito de combinação convexa podemos aproximar funções não-lineares contínuas por segmentos de retas. Este ponto é ilustrado a seguir através de um exemplo.

Considere a função $y = 5\sqrt{x}$. Os seguintes pontos $(x, y)'$ pertencem à função dada:

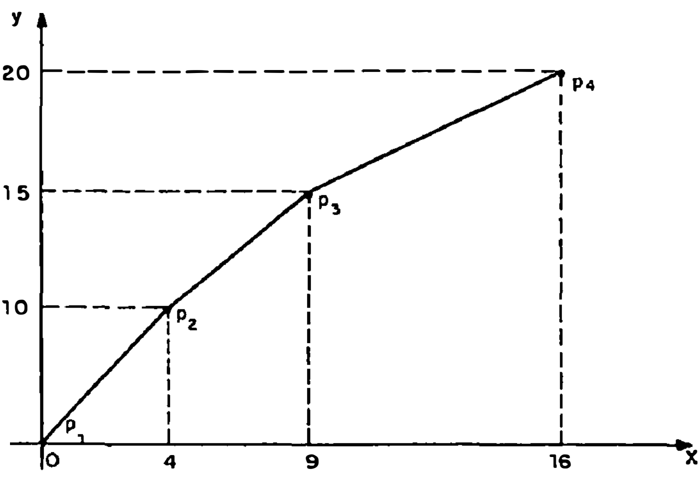
$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

A Figura 1 mostra a função $y = 5\sqrt{x}$ e os pontos $\mathbf{p}_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$. As coordenadas dos segmentos de reta que unem dois P_j consecutivos podem ser obtidas por combinações convexas dos mesmos. Ao conjunto de pontos arbitrados para estabelecer as referências de segmentação dá-se o nome de *grade*.

Figura 1

Representação Gráfica da Aproximação de $y = 5\sqrt{x}$ por Segmentos Lineares no Intervalo $0 \leq x \leq 16$ com o Uso da Grade (p_1, p_2, p_3, p_4)



Estabelecemos agora a seguinte proposição: para $0 \leqslant x \leqslant 16$ a função $y = 5\sqrt{x}$ é aproximadamente equivalente a:

$$\left| \begin{array}{l} x = 0\,k_1 + 4\,k_2 + 9\,k_3 + 16\,k_4 \\ y = 0\,k_1 + 10\,k_2 + 15\,k_3 + 20\,k_4 \\ 1 = k_1 + k_2 + k_3 = k_4 \\ k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 0 \\ \text{Requisito de adjacência: no máximo dois } k_j > 0 \text{ e, se} \\ k_j > 0 \text{ e } k_{j+n} > 0\text{, então } n = 1 \text{ ou } n = -1 \end{array} \right.$$

Vamos observar o significado da expressão anterior arbitrando valores para os k_j que satisfaçam o requisito de adjacência e as condições para que sejam ponderações ($\Sigma k_j = 1$ e $k_j \geqslant 0$). Tomemos, por exemplo, $k_1 = 0$, $k_2 = 0{,}4$, $k_3 = 0{,}6$ e $k_4 = 0$. Com estes valores obtém-se $x = 7$ e $y = 13$. Por outro lado, o ponto de abscissa $x = 7$ e que de fato pertence à função $y = 5\sqrt{x}$ tem por ordenada $y = 5\sqrt{7} = 13{,}22876$. Façamos outro exemplo, arbitrando $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0{,}2$ e $k_4 = 0{,}8$. Com estes valores obtém-se $x = 14{,}6$ e $y = 19$. O ponto de abscissa $x = 14{,}6$, e que de fato pertence à função $y = 5\sqrt{x}$ tem por ordenada $y = 5\sqrt{14{,}6} = 19{,}10497$. Portanto, observa-se nos dois exemplos uma estreita aproximação entre os valores de y obtidos por combinações convexas e os valores "verdadeiros" de y dados pela função $y = 5\sqrt{x}$. De modo mais geral a aproximação será tanto melhor quanto mais pontos formam a grade de referência e quanto menos acentuada for a curvatura da função que se pretende aproximar.

Exercício: Estabeleça um conjunto de relações baseadas em combinações convexas de pontos pertencentes a uma grade de seu arbítrio e que represente a função $y = 5 + 10x - x^2$ para $0 \leqslant x \leqslant 8$ (use uma grade composta de pelo menos quatro pontos). A seguir examine a aproximação conseguida em pelo menos dois pontos diferentes.

Por vezes será necessário segmentar mais de uma função da mesma variável. Nestes casos podem ser utilizadas grades que apresentem as mesmas abscissas. Por exemplo, vamos supor que fosse necessário segmentar as seguintes funções de x:

a) $y = 100\sqrt{x} - 20x$

b) $z = 10 + x(2 + x)$

Vamos supor ainda que, por alguma razão, soubéssemos que $0 \leqslant x \leqslant 25$. Precisamos agora de uma grade tridimensional (x, y, z). Arbitramos então os seguintes pontos para compor a grade:

j	x	y_j	z_j
1	0	0,00	10,00
2	6	124,95	58,00
3	9	120,00	109,00
4	16	80,00	298,00
5	25	0,00	685,00

Obs.: $y_j = 100\sqrt{x_j} - 20x_j$

$z_j = 10 + x_j(2 + x_j)$

A partir da grade estabelecida podemos representar as funções dadas pela seguinte aproximação:

$$
\left|\begin{array}{l}
x = 0\,k_1 + 6\,k_2 + 9\,k_3 + 16\,k_4 + 25\,k_5 \\
y = 0\,k_1 + 124{,}95\,k_2 + 120\,k_3 + 80\,k_4 + 0\,k_5 \\
z = 10\,k_1 + 58\,k_2 + 109\,k_3 + 298\,k_4 + 685\,k_5 \\
1 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 \\
k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 \geq 0
\end{array}\right.
$$

Requerimento de adjacência: no máximo dois $k_j > 0$ e, se $k_j > 0$ e $k_{j+n} > 0$ então $n = 1$ ou $n = -1$.

Tomando, para exemplificar, $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 0{,}4$, $k_4 = 0{,}6$ e $k_5 = 0$, obtemos $x = 13{,}2$; $y = 96$ e $z = 222{,}4$. Observamos, entretanto, que para $x = 13{,}2$, as "verdadeiras" coordenadas y e z, computadas através das funções (a) e (b), são, respectivamente, *99,32* e *210,64*. Repetimos a observação feita anteriormente: de modo geral a aproximação obtida na segmentação será tanto melhor quanto mais pontos forem utilizados na grade de referência e quanto menor for a curvatura da função (ou das funções) que se pretende aproximar. Por outro lado, conforme veremos adiante, o uso de um número de pontos muito grande na definição de grades de referência pode inviabilizar a resolução prática de um problema por excesso de dimensionamento.

Passamos agora a outro conceito básico em Programação Separável, qual seja, o de função separável. A função $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é dita separável se puder ser escrita como $f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n)$. Funções polinomiais sem termos interativos são claramente separáveis. Por exemplo:

$$y = 100 + 3x_1 + 2x_1^2 + 5x_2 - 6x_2^3 = \underbrace{(100 + 3x_1 + 2x_1^2)}_{f_1(x_1)} + \underbrace{(5x_2 - 6x_2^3)}_{f_2(x_2)}$$

Entretanto, por vezes, separabilidade pode ser obtida também através do uso de logaritmos e/ou de certos desenvolvimentos algébricos que serão examinados adiante.

Exemplo: Obtenha uma formulação linear para a resolução aproximada do seguinte problema de programação não-linear:

$$Max \quad R = 3x + 2x^2 + 50\sqrt{y}$$

$$\text{dado que: } 6\sqrt{x} + 3y \leq 18$$

$$x, y \geq 0$$

Observa-se que tanto a função objetivo quanto a restrição são não-lineares e separáveis. Um rápido exame das restrições mostra que a solução ótima ocorrerá para $0 \leqslant x \leqslant 9$ e $0 \leqslant y \leqslant 6$. Vamos então definir:

$$R_1 = 3x + 2x^2$$

$$R_2 = 50\sqrt{y}$$

e $$R_3 = 6\sqrt{x}$$

Podemos agora arbitrar uma grade para as funções em x:

j	x_j	R_{1j}	R_{3j}
1	0	0	0
2	3	27	10,4
3	6	90	14,7
4	9	189	18,0

Obs.: $R_{1j} = 3x_j + 2x_j^2$

$R_{3j} = 6\sqrt{x_j}$

e outra grade para a função não-linear em y:

j	y_j	R_{2j}
1	0	0
2	4	100,0
3	6	122,5

Obs.: $R_{2j} = 50\sqrt{y_j}$

O problema original é (aproximadamente) equivalente à seguinte formulação linear:

$$\text{Max} \quad R = R_1 + R_2$$

dado que:

$$x = 0\,k_1 + 3\,k_2 + 6\,k_3 + 9\,k_4$$

$$R_1 = 0\,k_1 + 27\,k_2 + 90\,k_3 + 189\,k_4$$

$$R_3 = 0\,k_1 + 10{,}4\,k_2 + 14{,}7\,k_3 + 18{,}0\,k_4$$

$$1 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4\,;\ k_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

no máximo dois k_j, adjacentes, estritamente positivos

$$y = 0\,v_1 + 4\,v_2 + 6\,v_3$$

$$R_2 = 0\,v_1 + 100\,v_2 + 122{,}5\,v_3$$

$$1 = v_1 + v_2 + v_3\,;\ v_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

no máximo dois v_j, adjacentes, estritamente positivos

$$R_3 + 3\,y \leq 18$$

Note que, como o problema apresenta duas variáveis de decisão (x e y) atreladas a funções não-lineares, são necessários dois conjuntos de ponderações (k_j e v_j). Abstraindo os requerimentos de adjacência, observa-se que o problema acima é um problema de programação linear. Na verdade, se tentarmos resolver este problema pelo método Simplex, observaremos que, ao final, será obtida uma solução que satisfaz os requerimentos de adjacência. Entretanto, nem sempre a aplicação do Simplex convencional a uma formulação de programação separável produz uma solução que automaticamente obedece aos requerimentos em pauta. Para que tal aconteça é necessário que o problema não apresente ótimos locais, mas apenas um ótimo global.[1] Por outro lado, na ausência de tal condição, o método Simplex deve ser modificado pela inclusão de uma regra adicional que garanta adjacência: "se uma ponderação k_j estiver na base corrente, então as ponderações k_{j+n} só se constituem em atividades à entrada na base seguinte se $n = 1$ ou $n = -1$". Com a introdução desta regra torna-se possível que no *tableau* final de Simplex de um problema de programação separável existam atividades para as quais os valores da linha de ganhos marginais ($c_j - z_j$) sejam positivos (num problema de maximização). Se estas atividades se constituírem em ponderações não-adjacentes

[1] Uma condição suficiente para tal é que a função a ser maximizada seja côncava e o conjunto de soluções viáveis seja convexo. Estes conceitos são discutidos no Apêndice I.

às ponderações presentes na base final, a resolução de fato estará encerrada. Nestes casos teremos atingido um ótimo local e, com os dados do *tableau*, apenas, não é possível determinar se a solução em pauta é também o ótimo global do problema.

Ao introduzirmos o conceito de funções separáveis, anteriormente, foi mencionado que por vezes é possível obter separabilidade através do uso de logaritmos e/ou de certos desenvolvimentos algébricos. Vamos então examinar um exemplo nesta direção.

Exemplo: Obtenha uma formulação linear para a resolução aproximada do problema de programação não-linear abaixo.

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & R = 6\,x\,y \\ \text{dado} & 8x^2 + 160\,y^{1/2} \leq 800 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

Observe que a função objetivo não é diretamente separável. Entretanto, notamos que $xy = \frac{1}{2}\,[x^2 + y^2 - (x - y)^2]$. A partir daí podemos definir uma nova variável $z = x - y$ e, conseqüentemente, obter uma formulação equivalente onde a existência de separabilidade é óbvia:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & R = 3x^2 + 3y^2 - 3z^2 \\ \text{dado} & 8x^2 + 160y^{1/2} \leq 800 \\ \text{e} & x - y - z = 0 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

Um exame da primeira restrição do problema indica que $x \leqslant 10$ e $y \leqslant 25$. A partir daí, e dado que $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, concluímos, pelo exame da segunda restrição, que $-25 \leqslant z \leqslant 10$. O problema transformado tem três variáveis independentes — x, y e z — envolvendo funções não-lineares de todas elas. Assim, arbitramos três grades para reformular o problema para Programação Separável:

j	x_j	F_j	V_j
1	0	0	0
2	3	27	72
3	7	147	392
4	10	300	800

Obs.: $F_j = 3\,x_j^2$

$V_j = 8\,x_j^2$

j	y_j	S_j	T_j
1	0	0	0
2	4	48	320
3	9	243	480
4	16	768	640
5	25	1875	800

Obs.: $S_j = 3\,y_j^2$

$T_j = 160\,y_j^{1/2}$

j	z_j	U_j
1	—25	1875
2	—15	675
3	— 5	75
4	0	0
5	5	75
6	10	300

Obs.: $U_j = 3\,z_j^2$

e podemos, agora, estabelecer uma formulação linear para a resolução aproximada do problema proposto:

$$\text{Max} \quad R = F + S - U$$

$$\text{dado:} \quad x = 0\, k_1 + 3\, k_2 + 7\, k_3 + 10\, k_4$$

$$F = 0\, k_1 + 27\, k_2 + 147\, k_3 + 300\, k_4$$

$$V = 0\, k_1 + 72\, k_2 + 392\, k_3 + 800\, k_4$$

$$1 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4\,;\; k_j \geq 0 \;(j = 1, 2, 3, 4)$$

No máximo dois k_j, adjacentes, estritamente positivos

$$y = 0\, p_1 + 4\, p_2 + 9\, p_3 + 16\, p_4 + 25\, p_5$$

$$S = 0\, p_1 + 48\, p_2 + 243\, p_3 + 768\, p_4 + 1875\, p_5$$

$$T = 0\, p_1 + 320\, p_2 + 480\, p_3 + 640\, p_4 + 800\, p_5$$

$$1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5\,;\; p_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 5)$$

No máximo dois p_j, adjacentes, estritamente positivos

$$z = -25\, q_1 - 15\, q_2 - 5\, q_3 + 0\, q_4 + 5\, q_5 + 10\, q_6$$

$$U = 1875\, q_1 + 675\, q_2 + 75\, q_3 + 0\, q_4 + 75\, q_5 + 300\, q_6$$

$$1 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6\,;\; q_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 6)$$

No máximo dois q_j, adjacentes, estritamente positivos

$$V + T \leqslant 800$$

$$x - y - z = 0$$

O problema do exemplo anterior ilustra bem a principal dificuldade da Programação Separável: a partir de um problema envolvendo apenas duas variáveis e duas relações não-lineares (uma função-objetivo e uma restrição) chegamos a uma formulação linear aproximada do mesmo caso envolvendo quatorze relações e vinte e três variáveis.[2] É portanto, evidente, que o aspecto de dimensionamento deve merecer atenção especial ao reformular-se um problema para emprego da técnica de Programação Separável.

Exercício: Obtenha uma formulação linear para a resolução aproximada do problema proposto no exemplo anterior fazendo uso da observação que $log\ (xy) = log\ x + log\ y$.

Exercício: Construa um problema no qual apareça uma relação do tipo $f(x, y) \cdot g(u, v) = k$, onde tanto $f(x, y)$ quanto $g(u, v)$ sejam separáveis. Defina $F = f(x, y)$, $G = g(u, v)$ e $Z = F.G$. Obtenha, a partir daí, uma formulação linear aproximada para o problema original.

III:2.2 — Programação Linear Probabilística

A solução ótima de um problema de Programação Linear depende dos parâmetros do mesmo. No Capítulo IV veremos que uma determinada solução ótima pode permanecer ótima mesmo que alguns dos parâmetros do problema sejam um tanto modificados. Isto, todavia, é insuficiente para garantir que uma solução ótima a partir de um determinado conjunto de números permaneça inalterada caso estes números, por qualquer razão, se modifiquem após a solução ter sido adotada. Tais modificações não se constituem em eventos raros; ao contrário, freqüentemente somos obrigados a planejar e resolver problemas nos quais os elementos numéricos são estimativas mais, ou menos, confiáveis de valores que se caracterizam por uma distribuição de probabilidade. Se estas distribuições apresentam uma dispersão pequena em torno das estimativas adotadas, possivelmente a solução ótima computada no modelo determinístico apresentará um desempenho comparável à verdadeira solução ótima (isto é, aquela solução ótima que só pode

[2] Na verdade a formulação apresentada é por demais prolixa devido à inclusão de equações definicionais como restrições. É possível reduzir o problema a quinze variáveis (k_j, $j = 1, \ldots, 4$; p_i, $i = 1, \ldots, 5$ e q_r, $r = 1, \ldots, 6$) e seis equações. Ainda assim permanece a observação de que a linearização por combinações convexas aumenta sensivelmente a dimensão de um problema de programação não-linear.

ser computada *a posteriori*, quando os elementos probabilísticos já tiverem assumido a característica de evento ocorrido).

Em outros problemas, entretanto, a simples substituição de elementos probabilísticos do modelo por estimativas numéricas dos mesmos pode levar a uma seleção de decisões cujo desempenho sob eventos alternativos é simplesmente medíocre. Nestes casos o emprego de modelos mais elaborados, com consideração explícita por fatores de risco, pode justificar-se sob o ponto de vista econômico. Um conceito importante para esta avaliação é o de "expectância do custo da incerteza". Para motivarmos a discussão deste conceito, vejamos um exemplo de programação em condições probabilísticas.

Considere o problema:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ \text{dado} \quad & 3 x_1 + 5 x_2 + 2 x_3 \leq 96 \\ & 4 x_1 + 6 x_2 + 4 x_3 \leq 100 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

onde o vetor $c' = (c_1 \; c_2 \; c_3)$ é conhecido apenas através de sua distribuição de probabilidades:

Evento 1: $c_1' = (15 \quad 8 \quad 6)$ com probabilidade de ocorrência $P_1 = 2/5$

Evento 2: $c_2' = (5 \quad 7 \quad 5)$ com probabilidade de ocorrência $P_2 = 1/5$

Evento 3: $c_3' = (-2 \quad 1 \quad 5)$ com probabilidade de ocorrência $P_3 = 1/5$

Evento 4: $c_4' = (0 \quad -2 \quad 4)$ com probabilidade de ocorrência $P_4 = 1/5$

O vetor expectância do vetor c, simbolizado por $E(c)$, é dado por:

$$E(c) = \begin{bmatrix} E(c_1) \\ E(c_2) \\ E(c_3) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} P_j c_j = \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,6 \\ 4,4 \\ 5,2 \end{bmatrix}$$

Agora, se decidirmos adotar a maximização da expectância de Z como critério para nortear a tomada de decisão sobre x_1, x_2 e x_3, o problema probabilístico original se reduz ao seguinte *problema determinístico equivalente:*

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & E(Z) = 6{,}6\ x_1 + 4{,}4\ x_2 + 5{,}2\ x_3 \\ \text{dado} \quad & 3\ x_1 + 5\ x_2 + 2\ x_3 \leq 96 \\ & 4\ x_1 + 5\ x_2 + 4\ x_3 \leq 100 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

A solução ótima deste problema é $x_1^* = 25$, $x_2^* = 0$ e $x_3^* = 0$. A esta solução corresponde *Max* $E(Z) = E(Z)^* = 165$. Qual a *performance* desta solução quando comparada, por exemplo, a outras soluções básicas para o conjunto de restrições? Listemos, em primeiro lugar, as diversas soluções básicas não-negativas do problema.

Solução	x_1	x_2	x_3
A	4	16,8	0
B	0	18,4	2
C	25	0	0
D	0	19,2	0
E	0	0	25

A questão seguinte é: qual o valor que atingiria a função objetivo para cada uma destas soluções nos diversos eventos possíveis para o vetor c? A Tabela 13 sumaria as respostas desta questão.

Um exame da Tabela 13 nos mostra que não existe uma solução única que seja ótima para todos os eventos. A solução C, que maximiza $E(Z)$, não é a melhor solução para os eventos 2, 3 e 4.

Tabela 13

VALORES DE Z PARA AS SOLUÇÕES BÁSICAS A, B, C, D, E REFERIDAS NO TEXTO

Evento		Soluções Básicas				
j	P_j	A	B	C	D	E
1	2/5	194,4	134,6	375,0*	179,2	150,0
2	1/5	136,8*	116,4	125,0	136,8*	125,0
3	1/5	8,8	25,2	—50,0	42,4	125,0*
4	1/5	—33,6	—22,4	0,0	—44,8	100,0*
E(Z)		100,32	77,7	165,0*	98,6	130,0

*O asterisco indica que se trata de uma solução ótima para a linha em questão.

Um agente decisório que se caracterizasse por grande cautela — no sentido de evitar prejuízos — possivelmente consideraria a solução E como a alternativa mais atraente entre as listadas na tabela. Talvez um tal agente desejasse maximizar $E(Z)$ com a condição acessória de manter uma probabilidade muito pequena, ou mesmo nula, de incorrer em prejuízos. Entretanto, mesmo um agente decisório bastante cauteloso poderia ainda considerar a alternativa C como a melhor, dependendo das circunstâncias do problema. Por exemplo: suponha que o problema examinado representasse um esforço no sentido de definir decisões em circunstâncias que se prevê serem repetidas diariamente por um longo período de tempo (2-3 anos). Neste caso, pela lei dos Grandes Números, é praticamente certo que a solução C renderia dividendos acumulados sensivelmente maiores do que a solução E ao cabo do horizonte de tempo referido. Por outro lado, se o problema representar uma tomada de decisão única cujo reflexo anual está incorporado nos coeficientes da função-objetivo, a escolha da decisão C carrega consigo uma possibilidade de retornos negativos que talvez signifique a ruína econômica do agente decisório.[3] Neste caso, a superioridade da solução C, indicada como solução ótima num modelo em que se substituíram os valores aleatórios pelas suas expectâncias, deixa de ser evidente.

A Tabela 13 proporciona ainda elementos para o exame do conceito de "expectância do custo de incerteza". Para discutir este conceito vamos primeiro imaginar que o problema fosse de natureza repetitiva, sendo que no início de cada dia as decisões sobre x_1, x_2 e x_3 devessem ser tomadas apenas para o dia em curso. Vamos supor que o vetor de coeficientes da função objetivo pode variar dia a dia segundo a distribuição de probabilidades antes referida. Mas, vamos supor que, de algum modo, ao iniciar o dia dispuséssemos da informação exata sobre qual dos eventos iria se verificar no dia em curso. Neste caso, cada vez que recebessemos a informação de que no dia em curso iria acontecer o evento 1 evidentemente adotaríamos a decisão C e lucraríamos $Z = 375$. Esta circunstância tem probabilidade de ocorrência igual a 2/5. Se recebêssemos a informação de que no dia em curso iria acontecer o evento 2, nossa decisão seria A, com um retorno $Z = 136{,}8$. Dias como este têm probabilidade de ocorrência igual a 1/5. Prosseguindo em raciocínio análogo para os eventos 3 e 4, concluiremos que a expectância de retorno nas condições referidas é:

$$E(Z^*) = \frac{2}{5}(375) + \frac{1}{5}(136{,}8) + \frac{1}{5}(125) + \frac{1}{5}(100) = 222{,}36$$

$E(Z^*)$ é a expectância de retorno em condições de informação perfeita. Por outro lado já vimos que, na ausência de qualquer informação adicional, a melhor decisão sob condições de repetição diária por um longo período de tempo é dada pela maximização de $E(Z)$. Já vimos que $Max\ E(Z) = [E(Z)]^* = 165{,}0$, correspondente à adoção da solução C. A diferença $E(Z^*) - [E(Z)]^*$ é chamada de *expectância do custo da incerteza*, pois reflete o que se deixa de ganhar quando não se dispõe de informação precisa sobre qual evento irá ocorrer. Quando a expectância do custo de incerteza é

3 Discussões aprofundadas sobre as atitudes de agentes econômicos em face a incertezas podem ser encontradas em Arrow, 1970.

relativamente grande, como no exemplo numérico em andamento,[4] geralmente vale a pena investigar algum sistema que contribua para a redução do grau desta incerteza. Este sistema poderá se constituir, por exemplo, em alguma forma de amostragem no início do período de validade para as decisões. Uma elaboração maior deste aspecto foge ao escopo deste texto. Entretanto, fica aqui registrado o elo de ligação com a chamada teoria bayesiana da decisão (Ver Raiffa, 1977).

O restante desta seção será devotado à discussão de três modelos alternativos de Programação Linear Probabilística: (a) programação linear em dois estágios, (b) programação linear com riscos limitados e (c) minimização de desvio absoluto médio. Cada caso será desenvolvido através de um exemplo. Além disto, também examinaremos o emprego de programação linear no estabelecimento de estratégias mistas em problemas da Teoria de Jogos.

III.2.2.1 — Programação Linear em Dois Estágios

Freqüentemente um agente econômico precisa tomar decisões em um ambiente probabilístico para, posteriormente, tomar novas decisões que dependem não apenas das decisões anteriores mas também de valores aleatórios que se tornam determinados entre aqueles dois pontos no tempo. Nestes casos pode ser interessante computar simultaneamente decisões para o primeiro estágio e uma estratégia (conjunto de decisões alternativas) para o segundo estágio.

Exemplo: Uma fábrica de equipamentos elétricos produz motores e geradores. No início da semana a gerência precisa decidir quantos motores (x_1) e quantos geradores (x_2) deverão ser montados durante a semana. Um motor elétrico requer 3 horas de montagem e, subseqüentemente, a_1 horas de teste e revisão. Um gerador elétrico requer 2 horas de montagem e, subseqüentemente, a_2 horas de teste e revisão. Os coeficientes a_1 e a_2 são aleatórios. A disponibilidade semanal de trabalho no setor de montagem é de

[4] No exemplo numérico em pauta: $E(Z^*) - [E(Z)]^* = 222{,}36 - 165{,}0 = 57{,}36$. Sem dúvida esta é uma margem apreciável, pois representa mais de 30% de $[E(Z)]^*$, isto é, o retorno máximo esperado em condições de incerteza.

400 horas, enquanto que o setor de teste e revisão pode trabalhar até 600 horas/semana. O lucro esperado por motor montado é 15 mil cruzeiros, enquanto que cada gerador montado tem uma expectância de lucro igual a 20 mil cruzeiros. A demanda semanal por motores é M unidades e por geradores é G unidades. Estes coeficientes também são aleatórios e só serão conhecidos ao final da semana. Cada motor montado, testado, revisado e não vendido na mesma semana tem um custo de imobilização de 3 mil cruzeiros, enquanto que o mesmo custo para um gerador é de 5 mil cruzeiros. Por outro lado, a eventual falta de produto para venda tem um custo igual ao lucro que deixa de ser efetuado.

A distribuição de probabilidades do vetor

$$\mathbf{v}' = (a_1 \; a_2 \; M \; G) \quad \text{é}$$

$\mathbf{v}'_1 = (4 \; 6 \; 70 \; 50)$ com probabilidade $P_1 = 1/7$ (evento 1)

$\mathbf{v}'_2 = (5 \; 6 \; 60 \; 60)$ com probabilidade $P_2 = 3/7$ (evento 2)

$\mathbf{v}'_3 = (3 \; 8 \; 90 \; 50)$ com probabilidade $P_3 = 2/7$ (evento 3)

$\mathbf{v}'_4 = (4 \; 6 \; 50 \; 60)$ com probabilidade $P_4 = 1/7$ (evento 4)

No início da semana a gerência precisa decidir quantos motores (x_1) e quantos geradores (x_2) deverão ser montados durante a semana. Ao final da semana, dependendo de qual evento é observado, ficarão determinadas as decisões sobre excessos ou faltas de produção em relação à demanda. Façamos e_{1j} o excesso de produção de motores na hipótese de ocorrência do evento j (da mesma forma: e_{2j} para geradores). Façamos ainda f_{1j} a falta de produção de motores na hipótese de ocorrência do evento j (da mesma forma: f_{2j} para geradores). Vamos admitir que a gerência pretendesse obter um plano que maximize a expectância de lucros em termos das decisões de montagem menos a expectância de custos decorrentes de faltas ou excessos de produção:

$$\text{Max } E(L) = 15\,x_1 + 20\,x_2 - \frac{1}{7}\,(3\,e_{11} + 5\,e_{21} + 15\,f_{11} + 20\,f_{21}) -$$

$$- \frac{3}{7}\,(3\,e_{12} + 5\,e_{22} + 15\,f_{12} + 20\,f_{22}) - \frac{2}{7}\,(3\,e_{13} +$$

$$+ 5\, e_{23} + 15\, f_{13} + 20\, f_{23}) - \frac{1}{7}\,(3\, e_{14} + 5\, e_{24} + 15\, f_{14} +$$

$$+ 20\, f_{24}).$$

As restrições devem refletir todas as ocorrências possíveis da semana, estabelecendo, outrossim, as relações entre as variáveis de 1.º estágio (x_j) e as variáveis de 2.º estágio (e_{ij} e f_{ij}):

$$3\, x_1 + 2\, x_2 \le 400 \quad \text{(montagem)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 4\, x_1 + 6\, x_2 \le 600 & \text{(teste e revisão)} \\ x_1 - e_{11} + f_{11} = 70 & \text{(demanda por motores)} \\ x_2 - e_{21} + f_{21} = 50 & \text{(demanda por geradores)} \end{array}\right\} \text{condições do evento 1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 5\, x_1 + 6\, x_2 \le 600 & \text{(teste e revisão)} \\ x_1 - e_{12} + f_{12} = 60 & \text{(demanda por motores)} \\ x_2 - e_{22} + f_{22} = 60 & \text{(demanda por geradores)} \end{array}\right\} \text{condições do evento 2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3\, x_1 + 8\, x_2 \le 600 & \text{(teste e revisão)} \\ x_1 - e_{13} + f_{13} = 90 & \text{(demanda por motores)} \\ x_2 - e_{23} + f_{23} = 50 & \text{(demanda por geradores)} \end{array}\right\} \text{condições do evento 3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 4\, x_1 + 6\, x_2 \le 600 & \text{(teste e revisão)} \\ x_1 - e_{14} + f_{14} = 50 & \text{(demanda por motores)} \\ x_2 - e_{24} + f_{24} = 60 & \text{(demanda por geradores)} \end{array}\right\} \text{condições do evento 4}$$

$$x_i,\ e_{ij},\ f_{ij} \ge 0 \qquad \text{(para } i = 1, 2 \text{ e } j = 1, 2, 3, 4\text{)}$$

Observe que, devido à presença de todas as possibilidades da restrição "teste e revisão", qualquer plano viável em termos da montagem também será viável em termos de teste e revisão. Suponha, entretanto, que o setor de teste e revisão pudesse trabalhar horas-extra adicionais ao custo de 3 mil cruzeiros por hora. Defina h_j como o número de horas adicionais utilizadas na hipótese de ocorrência do evento j. Reformule o problema de modo a incorporar esta nova variável de decisão. Esta é uma variável de 1.º ou de 2.º estágio?

A partir do exemplo examinado é fácil concluir que o enfoque de programação linear em dois estágios é limitado a casos em que o número de eventos alternativos não seja muito grande. A questão de dimensionamento é, na verdade, o ponto fraco do enfoque examinado nesta seção.

Exercício: Um grupo econômico está planejando a expansão de suas atividades. O problema consiste em decidir sobre a expansão da capacidade de produção de quatro produtos alternativos: 1, 2, 3 e 4. Definimos x_j como a decisão de expansão da produção do j-ésimo produto (em t/mês). Para expandir a produção do produto 1 em uma t/mês é necessário um investimento de 2 milhões de cruzeiros. Os investimentos necessários para expandir a produção dos produtos 2, 3 e 4 são, respectivamente, 3, 4 e 3 milhões de cruzeiros por t adicional por mês. O capital de que o grupo dispõe para aplicação nestas alternativas é de 500 milhões. A demanda mensal futura para cada um dos produtos é descrita pela seguinte distribuição de probabilidades:

Evento (j)	P_j	Demanda (t/mês)			
		Produto 1	Produto 2	Produto 3	Produto 4
1	1/10	30	50	80	40
2	2/10	30	25	70	45
3	1/10	20	25	70	40
4	1/10	20	30	50	45
5	3/10	20	30	50	40
6	2/10	40	30	30	45

A expectativa de lucro por tonelada mensal acrescida na capacidade de produção do produto 1 é de 20 mil cruzeiros. O mesmo coeficiente para os produtos 2, 3 e 4 é igual a 25, 32 e 18 mil cruzeiros, respectivamente. Cada tonelada de produto 1 que o grupo instalar e resultar em capacidade ociosa determina uma perda mensal de 6 mil cruzeiros. O mesmo coeficiente para os produtos 2, 3 e 4 é de 5, 4 e 2 mil cruzeiros, respectivamente. Por outro lado, cada tonelada de produto 1 que o grupo não tiver capacidade de produzir para satisfazer à demanda determina uma perda mensal de 16 mil cruzeiros. O mesmo coeficiente para os produtos 2, 3 e 4 é, de 18, 23 e 5 mil cruzeiros, respectivamente. Admitindo que o objetivo seja maximizar a expectância de lucros decorrente das decisões de expansão menos a expectância de custos determinados por eventuais ociosidades ou incapacidades de atender à demanda, formule o problema proposto com o enfoque de programação linear em dois estágios.

III.2.2.2 — Programação Linear com Riscos Limitados

O enfoque de Programação Linear com Riscos Limitados reflete a idéia de expandir o conjunto de soluções deterministicamente factíveis pela incorporação de alternativas cuja viabilidade oferece algum risco de eventualmente não se confirmar. Na verdade, a probabilidade máxima admissível para um tal evento é explicitamente incluída no modelo, ainda que de maneira exógena. Um exemplo simples é o problema abaixo:

$$\text{Max} \quad Z = 5\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3$$

$$\text{dado que} \quad 2\,x_1 + 1\,x_2 + 4\,x_3 \leq 140$$

$$6\,x_1 + 5\,x_2 + 5\,x_3 \leq b_2$$

$$x_1,\; x_2,\; x_3 \geq 0$$

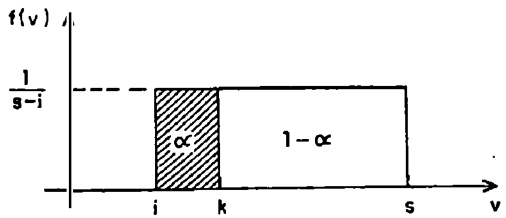
onde b_2 é uma variável aleatória subordinada a, por exemplo, uma distribuição uniforme U (100, 200)[5]. No problema em questão é evidente que o conjunto de soluções deterministicamente factíveis é obtido substituindo b_2 pelo limite inferior de sua distribuição de probabilidades:

$$2\ x_1 + 1\ x_2 + 4\ x_3 \leq 140$$
$$6\ x_1 + 5\ x_2 + 5\ x_3 \leq 100$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

Qualquer solução que seja viável para as condições acima, também será viável se $b_2 > 100$. Entretanto, não é necessariamente verdade que a solução ótima obtida para $b_2 = 100$ seja ótima para outros valores que b_2 eventualmente assuma. Vamos supor que o agente econômico estivesse disposto a correr um certo risco de que uma vez em dez a solução ótima não se mostrasse viável. Colocado de outra forma, vamos incorporar ao conjunto de soluções factíveis àquelas soluções cuja probabilidade de satisfazer a segunda restrição seja de, por exemplo, pelo menos 0.9 (ou 90%). Nestas condições, ficamos com o seguinte problema de Programação Linear com Riscos Limitados para resolver:

$$\text{Max} \quad Z = 5\ x_1 + 3\ x_2 + 5\ x_3$$
$$\text{dado} \quad 2\ x_1 + 1\ x_2 + 4\ x_3 \leq 140$$
$$F(6\ x_1 + 5\ x_2 + 5\ x_3 \leq b_2) \geq 0.9$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

5 Se uma variável aleatória v tem distribuição uniforme U (i, s) então ela pode assumir qualquer valor no intervalo (i, s) com equiprobabilidade. A distribuição uniforme também é por vezes denominada de distribuição retangular. O gráfico da função densidade da distribuição uniforme é o seguinte:



$P(v \leq k) = \alpha$
$P(v \geq k) = 1 - \alpha$

Ora, uma vez que fizemos o pressuposto que $b_2 \sim U\ (100,\ 200)$ e, como temos interesse em ampliar o conjunto de soluções viáveis o máximo possível (desde que a solução obtida mantenha uma probabilidade de ser factível de pelo menos 90%), o maior valor numérico que podemos escolher para limite superior da segunda restrição é 110. Isto é explicado da seguinte maneira: uma solução $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ que satisfaça

$$6\ x_1 + 5\ x_2 + 5\ x_3 \leq 110$$

irá satisfazer a restrição

$$6\ x_1 + 5\ x_2 + 5\ x_3 \leq b_2 \qquad (b_2 \sim U\,(100{,}200))$$

com uma probabilidade de 90%, pois esta é a probabilidade de b_2 ser igual ou maior que *110*; ora, se uma solução $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ satisfaz a restrição para $b_2 = 110$, também irá satisfazê-la para $b_2 \geqslant 110$. Uma eventual inviabilidade de tal solução poderá ocorrer se o valor que b_2 assumir for menor que *110*. A probabilidade deste evento é de 10%. Assim a representação determinística equivalente à condição

$$P(6\ x_1 + 5\ x_2 + 5\ x_3 \leq b_2) \geq 0{,}9, \quad \text{dado que:}$$
$$b_2 \sim U\,(100{,}200),$$

é simplesmente:

$$6\ x_1 + 5\ x_2 + 5\ x_3 \leq 110.$$

O problema de programação linear determinística equivalente ao problema de programação linear probabilística com limitação de riscos visto acima é:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = 5\ x_1 + 3\ x_2 + 5\ x_3 \\
\text{dado} \quad & 2\ x_1 + 1\ x_2 + 4\ x_3 \leq 140 \\
& 6\ x_1 + 5\ x_2 + 5\ x_3 \leq 110 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

A solução ótima do problema acima é $x_1 = x_2 = 0$ e $x_3 = 22$. Note que se o valor que b_2 assumir for menor que 110 — o que pode ocorrer com uma probabilidade de 10% — a solução indicada não será viável. Este é o risco que se admitiu na formulação desenvolvida.

Por outro lado, se num problema de Programação Linear com Limitação de Riscos existirem duas restrições do tipo $P\{\sum_i a_{ij} \leqslant b_j\} \geqslant \alpha_j$ $(j = 1, 2)$ a probabilidade de que a solução ótima encontrada no problema determinístico equivalente seja viável reduz-se, no mínimo, ao produto $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ (supondo que b_1 e b_2 sejam estocasticamente independentes).

Exercício: Considere o seguinte problema de programação linear com limitação de riscos:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = 5\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 \\
\text{dado} \quad & 2\,x_1 + 1\,x_2 + 4\,x_3 \leq 15 \\
& P\{6\,x_1 + 5\,x_2 + 5\,x_3 \leq b_2\} \geq 0{,}8; \\
& b_2 \sim U\,(80;\ 100) \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Formule o problema de programação linear determinístico equivalente e resolva-o. Depois responda: qual a probabilidade de a solução ótima encontrada não ser viável?

Observações: Restrições determinísticas equivalentes a restrições probabilísticas têm sido estudadas por diversos autores. Um resultado freqüentemente utilizado é a equivalência entre $P\left\{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leqslant b_j\right\} \geqslant \alpha$ — onde b_j tem uma distribuição normal com expectância β_j e variância σ_j^2 — é: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leqslant \beta_j + Z\,\alpha$.

onde Z_α é um número tal que $P\{Z_\alpha \leqslant Z\} = \alpha$ e Z tem uma distribuição normal padronizada (média: zero; variância: um). Também restrições probabilísticas envolvendo os coeficientes c_j da função-objetivo e/ou os coeficientes a_{ij} das restrições têm sido relatadas na literatura. Infelizmente, nestes últimos casos, a transformação para equivalência determinística geralmente se dá ao custo da perda da linearidade (Ver Charnes e Cooper, 1963, pp. 18-39). Por fim, um enfoque englobando simultaneamente riscos restritos *a priori* e o estabelecimento de regras para as decisões posteriores à realização dos eventos aleatórios pode ser encontrado em Sengupta, 1969, pp. 112-132).

III.2.2.3 — Minimização do Desvio Absoluto Médio

Considere o caso do agricultor que pode plantar milho e/ou soja no próximo ano. O resultado econômico destas atividades depende do clima e está sumariado na Tabela 14.

Tabela 14

LUCROS ESPERADOS PARA SOJA E MILHO SOB DIFERENTES CONDIÇÕES CLIMÁTICAS (EM $/HA)

Clima / Atividade	Seco	Normal	Úmido	Expectância de Lucro
Milho	22	27	37	27,0
Soja	25	37	28	30,4
Probabilidade de Ocorrência	2/5	2/5	1/5	—

A partir dos dados da Tabela 14 é possível calcular os desvios dos lucros unitários em torno de sua expectância para cada atividade e cada circunstância climática. Estes desvios são apresentados na Tabela 15.

A Tabela 15 nos diz que para cada ha de milho que o agricultor plantar, se o clima for seco (o que pode ocorrer com proba-

Tabela 15

DESVIOS DOS LUCROS UNITÁRIOS EM TORNO DE SUAS EXPECTÂNCIAS (EM \$/HA)

Atividade \ Clima	Seco	Normal	Úmido
Milho	—5,0	0,0	10,0
Soja	— 5,4	6,6	— 2,4
Probabilidade	2/5	2/5	1/5

bilidade de 2/5), o lucro se situará \$ 5,0 abaixo da média esperada. Entretanto, se o clima for úmido, o agricultor receberá \$ 10,0/ha além da média esperada.

Por outro lado, se o agricultor plantar 10 ha de milho e 20 ha de soja, sua expectância de lucros totais é de $10 \cdot (27{,}0) + 20(30{,}4) = \$\ 878$. Entretanto, se o clima for seco, ele receberá $10 \cdot (-5{,}0) + 20(-5{,}4) = -\ \$\ 158$ em relação ao lucro total esperado.

Vamos supor que o agricultor pretenda plantar os 100 ha de terra de que dispõe com o seguinte propósito: ele deseja um plano com uma expectância total de lucros de pelo menos \$ 2.700 mas de modo a minimizar a média de desvios negativos em torno daquela expectância. Para formular o problema definimos:

x_m : ha destinados ao plantio de milho

x_s : ha destinados ao plantio de soja

y_1 : valor absoluto do desvio negativo em relação ao lucro total esperado na hipótese de ocorrência de clima seco

y_2 : valor absoluto do desvio negativo em relação ao lucro total esperado na hipótese de ocorrência de clima normal

y_3 : valor absoluto do desvio negativo em relação ao lucro total esperado na hipótese de ocorrência de clima úmido

Então, o problema do agricultor é representado por:

$$\text{Min} \quad Z = \frac{2}{5} y_1 + \frac{2}{5} y_2 + \frac{1}{5} y_3$$

$$\begin{aligned} \text{dado} \quad -5{,}0\, x_m - 5{,}4\, x_s + y_1 &\geq 0 \\ 0{,}0\, x_m + 6{,}6\, x_s + y_2 &\geq 0 \\ 10{,}0\, x_m - 2{,}4\, x_s + y_3 &\geq 0 \\ 26{,}6\, x_m + 29{,}4\, x_s &\geq 2700 \\ 1\, x_m + 1\, x_s &= 100 \\ x_m,\ x_s,\ y_1,\ y_2,\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Observe que as três primeiras restrições definem o valor absoluto dos desvios negativos totais em relação à expectância de lucro total para os eventos "clima seco", "clima normal" e "clima úmido", respectivamente. A quarta restrição reflete o limite mínimo para a expectância do lucro total. A quinta restrição reflete a intenção do agricultor de efetivamente plantar todos os 100 ha de terra que ele dispõe. Observe ainda que a variável y_2 certamente será zero na solução ótima, pois tal valor sempre satisfaz a segunda restrição (dado que $x_m \geqslant 0$ e $x_s \geqslant 0$) e a função objetivo deve ser minimizada. É evidente que $y_2 = 0$ é um resultado consistente: na hipótese de clima normal, tanto milho quanto soja apresentam um desvio positivo em relação ao esperado (e y_2 mede o valor absoluto do desvio negativo sob condições de clima normal). Por fim, a função objetivo é a Expectância do Valor Absoluto dos Desvios Negativos do plano de produção com relação à expectância de lucros do mesmo. O valor desta função presumivelmente mantém uma correlação direta com o grau de risco econômico do plano produção. Uma aplicação prática deste enfoque de programação linear probabilística pode ser encontrado em Holanda e Sanders, 1977, Tomo I — pp. 281-304.

III.2.2.4 – Programação Linear e Teoria dos Jogos [6]

Considere a matriz de benefícios econômicos de um jogo de soma nula entre dois oponentes abaixo:

		Ações do Oponente II				
		1	2	3	....	n
Ações do Oponente I	1	b_{11}	b_{12}	b_{13}	....	b_{1n}
	2	b_{21}	b_{22}	b_{23}	....	b_{2n}
	3	b_{31}	b_{32}	b_{33}	....	b_{3n}
	.	...	...	...	...	...
	m	b_{m1}	b_{m2}	b_{m3}	....	b_{mn}

onde b_{ij} é o benefício do oponente I caso ele escolha a ação i e o oponente II escolha a ação j. Vamos supor que o oponente I desejasse seguir uma estratégia mista, com probabilidade p_i de empregar a ação i, de modo a maximizar a expectância de seu menor benefício (Critério de Wald). Vamos definir Z como a expectância do menor benefício (EMB) do oponente I. A estratégia ótima deste oponente é dada por:

$$\text{Max} \quad EMB = Z$$

$$\begin{aligned}
\text{dado} \quad & b_{11}\, p_1 + b_{21}\, p_2 + \ldots + b_{m1}\, p_m - Z \geq 0 \\
& b_{12}\, p_1 + b_{21}\, p_2 + \ldots + b_{m2}\, p_m - Z \geq 0 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& b_{1n}\, p_1 + b_{21}\, p_2 + \ldots + b_{mn}\, p_m - Z \geq 0 \\
& \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1 \\
& \qquad p_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned}$$

Observe o significado da primeira restrição: ela expressa que a expectância do benefício do Oponente I sob a hipótese da ação 1 pelo oponente II deve ser igual ou maior do que Z. A segunda

[6] A discussão deste tópico pressupõe um conhecimento elementar de Teoria de Jogos tal como é discutida em, por exemplo, Mansfield, 1978, Cap. II.

restrição diz que a expectância do benefício do oponente I sob a hipótese da escolha da ação 2 pelo oponente II deve ser igual ou maior do que Z. E assim por diante. Conseqüentemente, Z reflete um limite inferior para a expectância de benefícios do opositor I. Sob o critério de Wald, este opositor buscaria elevar ao máximo tal limite inferior ou mínimo. As últimas restrições ($\Sigma p_i = 1$ e $p_i \geqslant 0$) garantem a interpretação de probabilidades que se pretende dar às variáveis de decisão.

O dual [7] do problema acima reflete o problema de otimização de estratégia do opositor II sob o mesmo critério (note que os benefícios do opositor II são dados por $-\ b_{ij}$).

[7] O conceito de dualidade é discutido no Capítulo IV.

Capítulo IV

ANÁLISE ECONÔMICA E PROGRAMAÇÃO LINEAR

Este capítulo, de modo geral, é destinado ao leitor que conhece conceitos básicos de Análise Microeconômica. Sem embargo, a Seção IV.4 — Análise da Sensibilidade, Oferta e Procura — se constitui em tema de interesse também para o leitor voltado aos temas da Programação Linear aplicada.

IV.1 — Interpretações Econômicas Preliminares

IV.1.1 — Funções de Produção de Proporções Fixas

Uma função de produção de proporções fixas é representada por:

$$Y = Min\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}\right)$$

onde y é a quantidade de produto obtida por unidade de tempo,

b_j é a quantidade empregada do j-ésimo insumo e

a_j é a quantidade necessária do j-ésimo insumo para produzir uma unidade de produto.

Exemplo: Para produzir um aparelho de barbear descartável são necessários: (a) 0,003 kg de polietileno, (b) 0,06 m de lâmina de aço e (c) 0,015 h de confecção em uma máquina produtora. Supondo que a fábrica dispusesse de 42 kg de polietileno, de 720 m de lâmina de aço e de 225 horas-máquina disponíveis na próxima semana, qual poderia ser a produção de aparelhos de barbear no período em pauta?

Fazendo y = n.º de aparelhos de barbear produzidos por semana:

$$Y = \text{Min}\left(\frac{42}{0{,}003};\ \frac{720}{0{,}06};\ \frac{225}{0{,}015}\right)$$

ou

$$Y = \text{Min} \quad (14.000;\ 12.000;\ 15.000)$$

ou

$$Y = 12.000 \quad \text{(aparelhos descartáveis/semana)}.$$

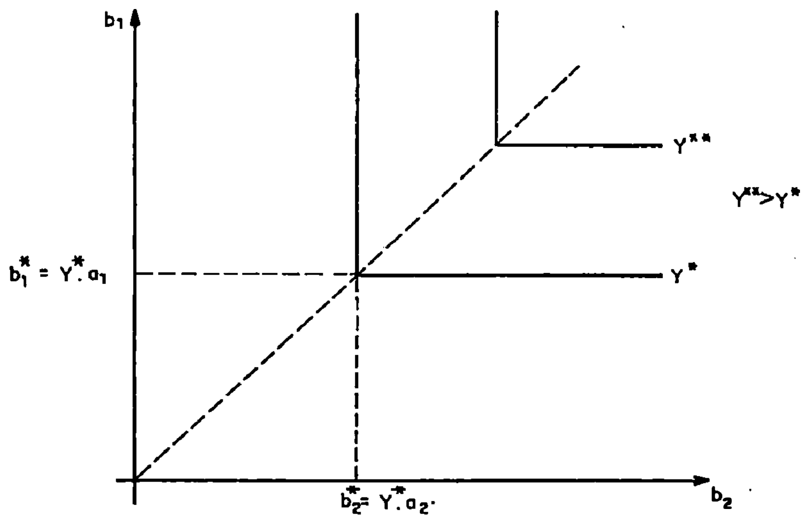
Observe que a disponibilidade de polietileno, *per se,* permitiria uma produção de 14.000 unidades. Observe ainda que a disponibilidade de horas-máquina, *per se,* permitiria uma produção de 15.000 unidades. Entretanto, devido à impossibilidade de substituição entre os insumos (característica de uma função de proporções fixas), a firma não poderá produzir mais do que 12.000 aparelhos descartáveis na próxima semana, pois tal é o limite na produção imposta pela disponibilidade da lâmina de aço. Calcule o total de horas-máquina que ficarão ociosas na semana e faça uma estimativa do estoque remanescente de polietileno no final de semana.

Uma apresentação gráfica das isoquantas[1] de uma função de produção de proporções fixas com dois fatores (ou insumos) é apresentada na Figura 1, abaixo. Observe que a linha de expansão OA representa as quantidades mínimas dos dois fatores para obter um determinado nível de produto. Para que uma determinada combi-

[1] Isoquanta é definida como o lugar geométrico das combinações de emprego de insumos que geram o mesmo nível de produto.

nação de emprego dos dois fatores — b_1^* e b_2^* — seja eficiente, isto é, se situe sobre a linha de expansão, é necessário que $b_1^*/b_2^* = a_1/a_2$. Observe também que a possibilidade de manter um determinado nível de produção através de uma diminuição no nível de emprego de um fator compensada pelo aumento no nível de emprego do outro não existe para as funções de produção de proporções fixas.

Figura 1
Isoquantas da Função $Y = Min\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\right)$



Por fim, deve-se ainda observar que as funções de produção de proporções fixas pertencem à classe de funções linearmente homogêneas: se, em relação a qualquer nível de emprego de fatores dado, o nível de emprego de *todos* os fatores for alterado numa determinada proporção, então o nível de produto resultante também é alterado na mesma proporção. Em outras palavras, funções de produção de proporções fixas apresentam retornos de escala constantes.

IV.1.2 — A Produtividade Marginal em Programação Linear

Uma hipótese da Teoria Neoclássica da Produção é o chamado Princípio dos Rendimentos Marginais Decrescentes: "Com o aumento da quantidade de insumo variável, mantendo constante a quantidade do outro insumo (fixo), obtém-se um ponto, para além do qual o produto marginal cai" (cf. Ferguson, 1974, p. 156). O objetivo desta seção é o de examinar a validade deste princípio para uma firma que produz um único produto e cuja tecnologia possa ser descrita por um modelo envolvendo relações de proporções fixas. Aqui é necessário distinguir inicialmente entre os conceitos de "função de produção" e de "processos de produção". O primeiro reflete a relação entre o nível *máximo* de produto e as quantidades de insumo empregadas para sua obtenção. Um processo de produção, por outro lado, reflete a relação entre o nível de produto e as quantidades de insumo necessárias para obtê-las mantendo constante a técnica de produção. Portanto, a função de produção é obtida a partir de uma otimização envolvendo processos de produção alternativos. No caso daqueles produtos que só podem ser obtidos através de um único processo de produção, este se confunde com a própria função de produção.

Tendo em mente os elementos da discussão anterior, podemos voltar agora ao exame da validade do Princípio dos Rendimentos Decrescentes para uma firma que produz um único produto mas que pode empregar diferentes processos na sua produção. Este exame será conduzido através de um exemplo.

Vamos supor que uma fábrica pode empregar dois processos para produzir um determinado produto, sendo um intensivo em mão-de-obra e outro intensivo em capital. Definimos X_j como a quantidade de produto obtida através do processo j (por unidade de tempo). Para obter uma unidade de produto através do processo 1 são necessárias 3 unidades de mão-de-obra e 2 unidades de capital. Para obter uma unidade de produto através do processo 2 são necessárias 2 unidades de mão-de-obra e 5 unidades de capital. A fábrica dispõe de 120 unidades de capital e de b unidades de mão-de-obra. Qual o máximo de produto (Y max) que pode ser obtido para os diferentes valores de b? Em outras palavras, qual a função de produção da fábrica com relação ao fator trabalho dado que a disponibilidade do fator capital é mantida constante no nível referido? Para responder a esta questão devemos resolver o problema de programação linear abaixo para diversos valores de b:

$$\text{Max} \quad Y = x_1 + x_2$$

$$\text{dado} \qquad 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 120 \quad \text{(restrição de capital)}$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = b \quad \text{(restrição de trabalho)}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$$

As variáveis x_3 e x_4 representam as capacidades ociosas do capital e do trabalho respectivamente.

O exame da relação entre b e Y_{max} parte da observação de que, para disponibilidades relativamente pequenas de trabalho, é mais interessante empregar aquele processo que utiliza este fator com maior produtividade, isto é, o processo 2. Do mesmo modo, para disponibilidades relativamente grandes de trabalho, é mais interessante empregar um processo que utilize o capital com maior produtividade (já que, neste caso, o capital seria o fator relativamente mais escasso). Entre os dois extremos existe um intervalo de b no qual é mais interessante utilizar ambos os processos. A relação entre b e Y_{max} para o exemplo em questão está sumariada na Figura 2. (Exercício: explique detalhadamente a construção da Figura 2 sem recorrer a tabelas de Simplex).

A função de produção da Figura 2 tem o comportamento geral prescrito pelo Princípio dos Rendimentos Decrescentes. A Figura 3, a seguir, mostra a produtividade marginal do trabalho nas condições estabelecidas no exemplo.

A Figura 3 mostra que a produtividade marginal do trabalho é decrescente (dado que a disponibilidade de capital é mantida fixa). A observação de que os decréscimos ocorrem de modo descontínuo, isto é, em saltos, não é suficiente para invalidar a presença do princípio geral. Na verdade, o número de "degraus" da curva de produtividade marginal depende do número de processos alternativos de que a firma dispõe para realizar sua produção. Assim, uma função

Figura 2
Função de Produção da Fábrica Hipotética do Texto com Relação ao Emprego de Mão-de-Obra (Dada a Disponibilidade de 120 Unidades de Capital)

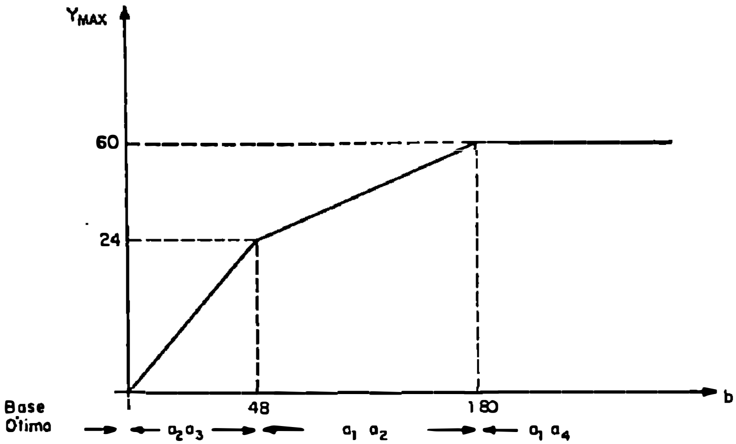
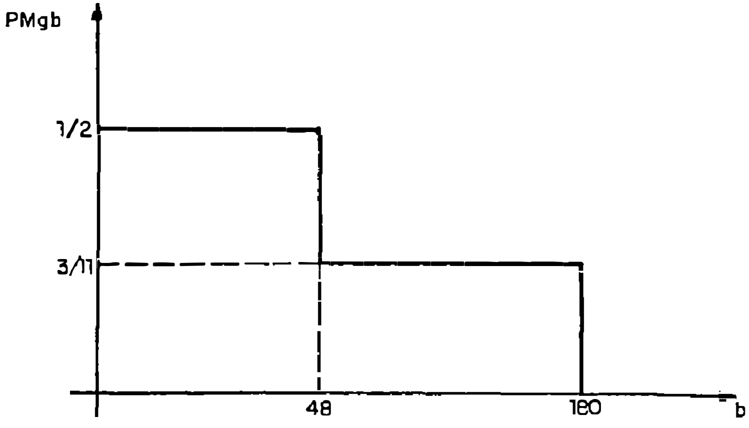


Figura 3
Produtividade Marginal do Trabalho para a Fábrica Hipotética do Exemplo no Texto



de produção diferenciável do tipo convencionalmente adotado na teoria microeconômica neoclássica pode ser vista como um caso limite de um modelo de programação linear no qual o número de processos alternativos tende a infinito.

Observação: As últimas sentenças do parágrafo anterior precisam ser qualificadas. O simples aumento no número de processos que uma firma pode empregar não é condição suficiente para garantir o aumento no número de "degraus" da curva de produtividade marginal. É preciso também que os processos sejam de fato alternativos ou competitivos. Um processo de um conjunto tem esta característica se, para pelo menos uma certa combinação de disponibilidade de fatores, ele se apresentar isoladamente como o mais eficiente. Note que se um processo i requer a mesma quantidade de capital por unidade de produto que um processo j e maior quantidade de mão-de-obra para o mesmo fim, então o processo de i jamais poderá ser mais eficiente que o processo j. Neste caso se diz que o processo i é dominado pelo processo j.

IV.1.3 — Isoquantas e Substitutibilidade entre Fatores

Outra hipótese adotada na Teoria Neoclássica da Produção é a de substitutibilidade entre os fatores de produção. Esta hipótese se reflete no Princípio da Taxa Marginal de Substituição Técnica Decrescente (*vide*, por exemplo, Ferguson, 1974, cap. 6). Esta hipótese não é validada para funções de produção de proporções fixas conforme já foi visto na Subseção IV.1.1. Entretanto, se a tecnologia da firma pode ser representada por um modelo de programação linear envolvendo processos de produção alternativos, a função de produção resultante geralmente apresentará possibilidades de substituição entre os fatores. Este ponto será demonstrado, a seguir, através de um exemplo.

Vamos supor que para produzir um certo produto uma firma pode utilizar dois processos (em conjunto e/ou separadamente). Para obter uma unidade de produto pelo processo 1 são necessárias 3 unidades de trabalho (T) e 2 unidades de capital (C). Para obter uma unidade de produto pelo processo 2 são necessárias 2 unidades de trabalho e 5 unidades de capital. Imaginemos que, por qualquer razão, a firma desejasse produzir 60 unidades de produto $(\overline{Y} = 60)$. Para obter esta produção empregando apenas o processo 1 são necessárias 60 $\times$ 3 = 180 unidades de trabalho e 60 $\times$ 2 = 120 unidades de capital. Esta alternativa pode ser apresentada pelo vetor $\mathbf{a}_1' = (60\ 180\ 120)$, onde o primeiro elemento é o nível de produção predeterminado, o segundo elemento é o nível de trabalho requerido para obter aquele nível de produção quando se emprega apenas o processo 1 e o terceiro elemento é o nível de capital *idem*. Por outro lado, a mesma quantidade de produto $\overline{Y} = 60$ pode ser obtida através do processo 2 empregando 60 $\times$ 2 = 120 unidades de trabalho e 60 $\times$ 5 = 300 unidades de capital. Esta alternativa pode ser representada pelo vetor $\mathbf{a}_2' = (60\ 120\ 300)$, onde o primeiro elemento é o nível de produção predeterminado, o segundo elemento é o nível de trabalho requerido para obter aquele nível de produção quando se emprega o processo 2 e o terceiro elemento é o nível de capital *idem*.

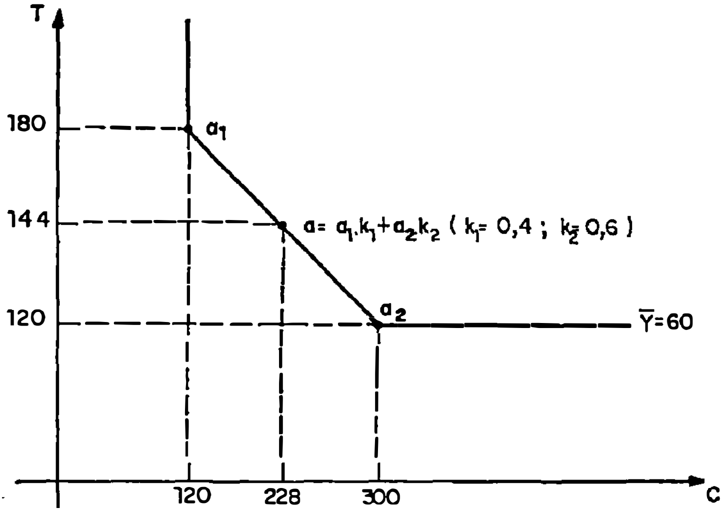
Vimos então que $\overline{Y} = 60$ pode ser obtido de duas maneiras diferentes, representadas pelos pontos — ou vetores — $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$. Além disso, qualquer vetor $\mathbf{a}' = (\overline{Y}\ T\ C)$ que seja resultante de uma combinação convexa de $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ representa uma possibilidade de obter o mesmo nível de produção $\overline{Y} = 60$ empregando os dois processos alternativos simultaneamente:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \overline{Y} \\ T \\ C \end{bmatrix} = \mathbf{a}_1 k_1 + \mathbf{a}_2 k_2 = \begin{bmatrix} 60 \\ 180 \\ 120 \end{bmatrix} k_1 + \begin{bmatrix} 60 \\ 120 \\ 300 \end{bmatrix} k_2, \text{ onde } k_1 + k_2 = 1$$

$$\text{e } k_1,\ k_2 \geq 0$$

Façamos, por exemplo $k_1 = 0{,}4$ e $k_2 = 0{,}6$. Neste caso $\mathbf{a}_1' k_1 = (24\ 72\ 48)$, $\mathbf{a}_2' k_2 = (36\ 72\ 180)$ e $\mathbf{a} = (60\ 144\ 228)$. Portanto, se a firma objetivar 60 unidades de produto, ela poderá fazê-lo produzindo 24 unidades pelo processo 1 — o que requer 72 unidades de trabalho e 48 unidades de capital — e 36 unidades de produto pelo processo 2, o que requer 72 unidades de trabalho e 180 unidades de capital. A isoquanta $\overline{Y} = 60$ está representada na Figura 4, a seguir.

Figura 4
Isoquanta $\bar{Y}=60$ da Firma Hipotética
Descrita no Texto



Através de teoremas elementares sobre equivalência de triângulos demonstra-se que $k_1 = \overline{a_2 a} / \overline{a_1 a_2}$ e $k_2 = \overline{a_1 a} / \overline{a_1 a_2}$.

Observe que, acima do ponto $\mathbf{a}_1$, a isoquanta segue paralela ao eixo *T*. Dado $C = 120$, para qualquer $T \geqq 180$, o processo mais eficiente que a firma pode empregar é o processo 1, isto é, aquele que emprega o capital de modo relativamente mais eficiente. Entretanto, com o capital limitado a 120 unidades, mesmo empregando o processo mais eficiente em capital, a firma só pode produzir um máximo de 60 unidades de produto.

Exercício: Suponha que cada unidade de mão-de-obra custa $ 4 e que cada unidade de capital custa $ 2. Supondo, em adição, que a firma do exemplo do texto dispõe de um orçamento limitado em $ 64, qual a produção máxima que ela pode obter? Resolva este problema graficamente no espaço dos fatores, traçando a linha de orçamento e verificando a isoquanta mais alta que pode ser atingida com esta restrição. Interprete a solução obtida (qual o volume de produção a ser realizada com cada processo?). "Dica": inicie o gráfico traçando a linha de orçamento e duas isoquantas quaisquer, por ex.: $Y_1 = 2$ e $Y_2 = 5$; observe que, se você passar uma reta pela origem dos eixos e por uma "esquina" de uma das isoquantas, esta reta passará também pela "esquina" equivalente da outra isoquanta. Após resolver este problema acrescente uma nova restrição: suponha que a disponibilidade máxima de mão-de-obra é de 10 unidades. Resolva o novo problema.

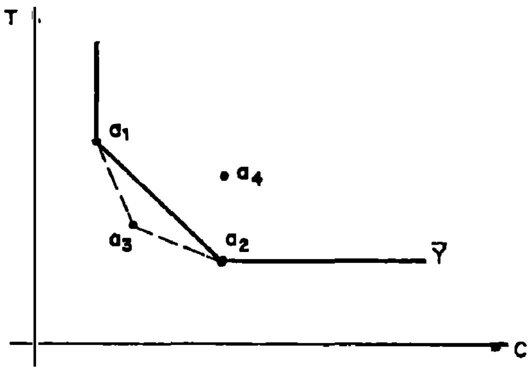
A Figura 4 mostra claramente que, se a tecnologia de uma firma puder ser representada por um modelo de programação linear com processos de produção alternativos, então o princípio de substitutibilidade adotado pela Teoria Neoclássica da Produção permanece válido. O fato de a isoquanta agora não se apresentar totalmente diferenciável, não tem maiores implicações para a validade da hipótese como um princípio geral. Além disto, se o número de processos alternativos for aumentado, a isoquanta torna-se mais segmentada, aproximando-se, no limite, do formato convencionalmente mostrado nos livros-texto de microeconomia.

Observação: A última sentença do parágrafo acima, está sujeita à mesma qualificação feita na observação ao fim da seção anterior. Para que a inclusão de mais um processo em um conjunto dado provoque uma nova segmentação da isoquanta é necessário que este processo não seja dominado por processos já existentes no conjunto. Na Figura 5, a inclusão do processo apresentado pelo ponto $\mathbf{a}_3$ no conjunto $\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\}$ desloca a isoquanta $\overline{Y}$ de $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ para $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_2$. Porém o processo representado pelo ponto $\mathbf{a}_4$ — ao qual está associado o mesmo nível $\overline{Y}$ de produto — é ineficiente em relação aos processos do conjunto $\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\}$ (explique por quê!). Assim, a inclusão do processo representado por $\mathbf{a}_4$ no conjunto em questão não altera a isoquanta original.

IV.1.4 — Curvas de Custo em Programação Linear

Para discutir a forma das curvas de custo quando a tecnologia da firma pode ser representada por um modelo de programação linear

Figura 5
Modificação de Uma Isoquanta Dada pela Inclusão de Novos Processos de Produção



com processos alternativos, vamos analisar um exemplo numérico relativamente simples.

Da mesma forma que nas seções anteriores, vamos supor que a firma produz um produto qualquer X. Para tanto ela pode empregar dois processos alternativos, isolada ou simultaneamente. Definimos x_j como a quantidade de produto obtida pelo processo j $(j = 1,2)$. Para obter uma unidade de X através do processo 1 são necessárias 2 unidades de capital e 3 unidades de trabalho. Para obter uma unidade de X através do processo 2 são necessárias 5 unidades de capital e 2 unidades de trabalho. A firma dispõe de 120 unidades de capital e de 90 unidades de mão-de-obra. Vamos ainda supor que uma unidade de X produzida pelo processo 1 custa \$ 15 à firma enquanto que uma unidade de X produzida pelo processo 2 custa \$ 10. Qual o custo total mínimo que a firma precisa realizar para produzir um total de $\bar{Y}$ *unidades de produto*?

Para responder à questão colocada no fim do parágrafo anterior, começamos por formalizar o problema da firma:

Min $\quad CT = 15x_1 + 10x_2$

dado $\quad 2x_1 + 5x_2 \leq 120$ (restrição de capital)

$$3x_1 + 2x_2 \leq 90 \quad \text{(restrição de trabalho)}$$
$$1x_1 + 1x_2 = \overline{Y} \quad \text{(definição da produção total)}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Uma observação pode ser feita de imediato: é óbvio que, dado o objetivo de minimizar custos, a firma irá empregar apenas o processo 2 sempre que o nível estabelecido para a produção total seja inferior à produção máxima que se pode obter utilizando apenas o processo 2. Qual é este máximo? Esta resposta depende dos requerimentos de capital e trabalho por unidade produzida através do processo 2 e das disponibilidades totais daqueles fatores. A disponibilidade existente de capital é suficiente para produzir até 120/5 = 24 unidades de produto através do processo 2. Por outro lado, a disponibilidade existente de trabalho não permite que a firma possa obter além de 90/2 = 45 unidades de produto pelo processo 2. Fica claro que, considerando agora a simultaneidade das restrições, qualquer plano de produção da firma só será viável se $x_2 \leq 24$. Portanto, para níveis de produção $\overline{Y} \leq 24$, a firma irá utilizar apenas o processo 2, isto é, aquele processo com o menor custo unitário. Como este custo é $ 10, concluímos que o custo marginal da firma para $0 \leq \overline{Y} \leq 24$ é igual a este valor.

E para $\overline{Y} > 24$? Bem, antes de mais nada é preciso verificar se a firma tem condições de atingir níveis de produção maiores do que 24 unidades. Para tanto basta examinar as soluções básicas do sistema formado pelas duas primeiras restrições. Ao fazer isto verificaremos que o maior valor viável para $\overline{Y}$ é aproximadamente 35,5 unidades, resultante da solução básica: $x_1 \cong 19,1$ e $x_2 \cong 16,4$. Portanto, a firma pode expandir uma produção além de 24 unidades. Como fazê-lo de modo que os incrementos no custo total por unidade adicional de produto sejam os menores possíveis? Observamos que, como o produto obtido pelo processo 2 é menos oneroso do que o mesmo obtido pelo processo 1, vale a pena procurar sempre manter o maior nível de x_2 possível. Na solução $x_2 = 24$, $x_1 = 0$ toda a disponibilidade de capital está sendo utilizada. Este é o fator limitante. Então, para que o nível de produto total possa passar de $\overline{Y} = 24$ para $\overline{Y} = 25$, é necessário diminuir o nível de $x_2 = 24$ para $x_2 = 24 - \Delta$

de tal modo que, destinando o capital liberado pelo processo 2 ao processo 1, possamos passar de $x_1 = 0$ para $x_1 = \Delta + 1$. Note que o acréscimo em x_1 deve compensar a diminuição de x_2 *mais* a unidade que se pretende acrescer ao produto total. Como uma unidade de produto obtida pelo processo 2 requer 5 unidades de capital, a diminuição do nível de x_2 em Δ unidades libera $5 . \Delta$ unidades de capital. Por outro lado, cada unidade de produto obtida pelo processo 1 requer 2 unidades de capital. Então, para acrescer o nível de x_1 em $(\Delta + 1)$ unidades, são requeridas $2 . (\Delta + 1)$ unidades de capital. Igualando a disponibilidade de capital gerada pela redução de x_2 em Δ unidades com o requerimento deste fator gerado pelo aumento de x_1 em $(\Delta + 1)$ unidades vem:

$$5 . \Delta = 2 . (\Delta + 1)$$

de onde

$$\Delta = \frac{2}{3} = 0{,}666 \ldots$$

Portanto, para cada 0,666... unidades que reduzirmos no nível de produção obtido pelo processo 2 (a partir de $x_2 = 24$), poderemos aumentar o nível de produção obtido pelo processo 1 em $(0{,}666\ldots + 1) = 1{,}666\ldots$ unidades. Note que o efeito líquido desta mudança é:

a) zero em termos de nível de utilização do capital, que permanece como fator limitante;

b) aumento de uma unidade no nível de produção total;

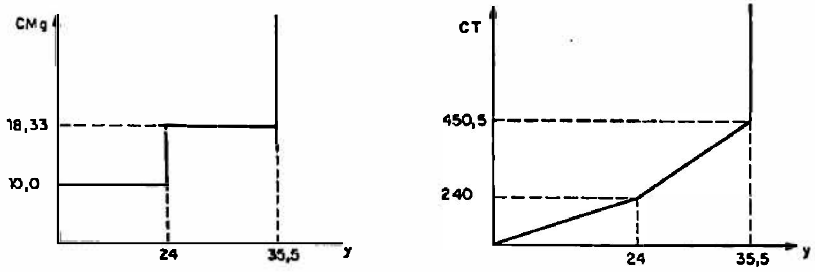
c) aumento de $(1{,}666\ldots) . (\$ 15) + (- 0{,}666\ldots) . (\$ 10) = \$ 18{,}33\ldots$ no nível dos custos totais e

d) aumento de $(1{,}666\ldots) . (3) + (- 0{,}666\ldots) . (2) = 3{,}666\ldots$ unidades no nível de emprego do fator trabalho.

Em vista de (b) e (c) concluímos que o custo marginal passa a ser \$ 18,33... quando $\overline{Y} = 24$. Em vista de (d) concluímos que a possibilidade de diminuir x_2 e aumentar x_1 só pode prosseguir enquanto houver ociosidade do fator trabalho. De fato, o limite desta possibilidade é alcançado na solução básica anteriormente referida: $x_1 \cong 19{,}1$ e $x_2 \cong 16{,}4$ (de onde $\overline{Y} \cong 35{,}5$).

A Figura 6, abaixo, sumaria os resultados obtidos até aqui.

Figura 6
(a) Custo Marginal do Firma Hipotética Referida no Texto e
(b) Custo Total da Mesma Firma



Observe, na Figura 6, que o Custo Marginal é crescente, ainda que este crescimento se observe em forma de degraus. Da mesma forma que nos casos das seções anteriores, a inclusão de mais processos alternativos de produção no conjunto de técnicas à disposição da firma tende a tornar os "dregaus" da curva de custo marginal menos extensos e os "saltos" menos pronunciados. Com o número de processos não dominados tendendo a infinito, a curva de *CMg* tende a se tornar diferenciável em todos os seus pontos. Por outro lado, como o nível máximo de produto que a firma pode atingir é 35,5 unidades, podemos considerar que, neste ponto, o Custo Marginal se torna infinitamente grande (*vide* Figura 6).

Por fim, vamos examinar o Custo Médio. É evidente que até o nível $\overline{Y} = 24$ o Custo Médio é \$ 10, pois tais níveis de produção são mais eficientemente obtidos utilizando apenas o processo 2. Porém para $\overline{Y} \geq 24$ o Custo Médio será dado por:

$$CMe = \frac{CT}{\overline{Y}} = \frac{240 + (\overline{Y} - 24) \cdot 18,33}{\overline{Y}} = 18,33 - \frac{200}{\overline{Y}}$$

(note que o custo total para $\overline{Y} > 24$ foi definido como o custo total de produzir 24 unidades mais o número de unidades adicionais a $\overline{Y} = 24$ vezes o custo adicional de cada unidade adicional).

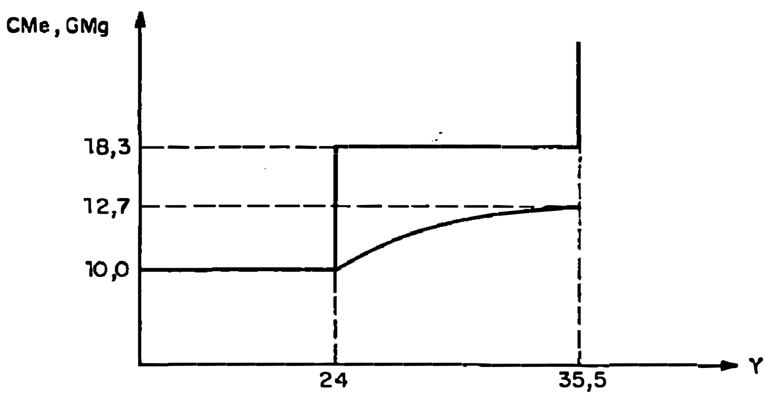
Portanto, o custo médio da produção da firma do exemplo estudado é:

$$CMe \begin{cases} = 10 \quad \text{para} \quad \overline{Y} \leq 24 \\ = 18{,}33 - \dfrac{200}{\overline{Y}} \quad \text{para} \quad 24 \leq \overline{Y} \leq 35{,}5 \end{cases}$$

É interessante observar que o custo médio é a única função que não se apresenta na forma de segmentos lineares em toda a análise desde a Seção IV.1.1.

O gráfico do Custo Médio está representado na Figura 7, onde foi incluído também o gráfico do Custo Marginal para fins de referência visual.

Figura 7
Custo Médio e Custo Marginal da Firma Hipotética Referida no Texto



Exercício: Reduza a disponibilidade de trabalho da firma do exemplo estudado para 60 unidades, troque os custos dos dois processos e obtenha as curvas de custo nas novas condições.

IV.1.5 — Oferta e Procura

Na Teoria Microeconômica neoclássica, a existência das funções de oferta de bens e de procura por fatores é explicada a partir da hipótese de que as firmas procuram maximizar lucros. O equilíbrio da firma em concorrência perfeita é caracterizado pela igualdade entre Custo Marginal e o preço do produto ou pela igualdade entre Valor do Produto Marginal e o preço do fator variável. Explicitando-se a quantidade em função dos preços obtém-se, no primeiro caso, a oferta da firma e, no segundo, a procura pelo fator variável. A inclinação positiva daquela e a inclinação negativa desta são uma conseqüência matemática da "lei" da produtividade marginal decrescente.

A análise das seções anteriores — em particular a das Subseções IV.1.2 e IV.1.4 — pode sugerir que os mesmos resultados, em linhas gerais, são também válidos para a firma que procura maximizar lucros subordinada a uma tecnologia descrita por processos alternativos de proporções fixas. Entretanto, até aqui apenas foi determinado que, num tal modelo, a produtividade marginal de um fator de produção tende a decrescer com o aumento no seu nível de disponibilidade,[2] enquanto que o custo marginal tende a aumentar para níveis mais altos de produção. Para que tais funções se caracterizem como funções de procura e oferta, respectivamente, é ainda necessário caracterizar o equilíbrio da firma nas condições de tecnologia acima descritas.

Vamos então examinar o caso de uma firma que pode produzir um produto qualquer utilizando dois processos diferentes, os quais, por sua vez, demandam dois fatores de produção distintos. Por analogia à situação clássica de curto prazo adotada na Teoria Microeconômica elementar, vamos considerar um dos fatores como fixo e o outro como variável.

Definindo:

p : preço do produto

x_j : quantidade de produto obtida através do processo j $(j = 1, 2)$

[2] Admitindo-se condições de concorrência perfeita é óbvio que uma produtividade física marginal decrescente determina um *valor* da produtividade marginal também crescente.

c : preço do fator variável

b_1 : quantidade adquirida do fator variável

b_2 : quantidade disponível do fator fixo

a_{ij} : quantidade necessária do i-ésimo fator para obter uma unidade de produto através do processo j (supomos $a_{ij} > 0$), o problema de maximização de lucros da firma é descrito como:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & L = p \cdot x_1 + p \cdot x_2 - c\, b_1 \\ \text{dado} & \quad a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 - b_1 \leq 0 \quad (\lambda_1) \\ & \quad a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \leq b_2 \ (\lambda_2) \\ & \quad x_1,\ x_2,\ b_1 \geq 0 \end{array}$$

onde λ_i é o multiplicador de Lagrange associado com a i-ésima restrição. (Observe que L difere da definição de lucro por uma constante que é o custo fixo da firma; é evidente que a inclusão de uma constante na função-objetivo não altera as condições marginais associadas à solução ótima).

A função de Lagrange do problema é:

$$\phi = p \cdot x_1 + p \cdot x_2 - c \cdot b_1 + \lambda_1 \cdot (-a_{11}\, x_1 - a_{12} \cdot x_2 + b_1) + \lambda_2 \cdot (b_2 - a_{21} \cdot x_1 - a_{22} \cdot x_2)$$

A solução ótima do problema deve satisfazer suas condições de Kuhn-Tucker.[3] Iniciamos nossa análise pelo exame da seguinte condição:

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_1} = -c + \lambda_1 \leq 0 \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial b_1} \cdot b_1 = 0 \quad \text{e} \quad b_1 \geq 0$$

Não é difícil concluir que a firma só irá empregar o fator b_1 (isto é, escolher algum $b_1 > 0$) se $\lambda_1 = c$. Por outro lado, λ_1 mede a variação na função-objetivo para o acréscimo de uma unidade à constante do lado direito da primeira restrição. Mas este acréscimo unitário é interpretado como um aumento na disponibilidade do fator variável *sem custos* para a firma. Portanto, λ_1 mede o acréscimo

[3] Condições de Kuhn-Tucker são discutidas no Apêndice I.

à receita bruta que pode ser obtido pelo incremento de uma unidade no emprego do fator variável. Conseqüentemente, λ_1 é o valor do produto marginal do fator variável. Na solução ótima, caso $b_1 > 0$, é necessário que o valor do produto marginal do fator variável seja igual ao seu preço de mercado. Repete-se aqui, portanto, o mesmo resultado da teoria neoclássica. Por outro lado, $\lambda_1 < c$ determina $b_1 = 0$, isto é, a firma não irá adquirir o fator variável se o valor de seu produto marginal for inferior ao seu preço de mercado.

Outra condição de Kuhn-Tucker relevante para a análise desta seção é:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = p - \lambda_1 a_{1j} - \lambda_2 \cdot a_{2j} \leq 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \cdot x_j = 0 \text{ e } x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2)$$

Vamos supor que, na solução ótima, $x_j > 0$. Neste caso devemos ter também $p - \lambda_1 . a_{1j} - \lambda_2 . a_{2j} = 0$. Por outro lado, é claro que para haver produção positiva deverá ser adquirida uma quantidade positiva do fator variável $(b_1 > 0)$. Neste caso, já vimos anteriormente que $\lambda_1 = c$. Portanto, $x_j > 0$ requer $p = c . a_{1j} + \lambda_2 . a_{2j}$. Notando que, por outra das condições de Kuhn-Tucker, devemos ter $\lambda_2 \geq 0$, e que, por hipótese inicial, temos $a_{2j} > 0$, concluímos que $x_j > 0$ requer:

$$p \geq c \cdot a_{1j}$$

Observe que o termo à direita da desigualdade reflete o custo adicional que deve ser realizado para adquirir a_{1j} unidades de fator variável de modo a permitir a produção de uma unidade adicional de produto (usando o j-ésimo processo). Na teoria neoclássica, o aumento no custo variável necessário para produzir uma unidade adicional de produto é denominado custo marginal. O equilíbrio da firma é caracterizado pela igualdade entre o custo marginal e o preço do produto. Agora, no modelo de programação linear da firma, obtemos que, em equilíbrio, o preço do produto deve ser igual ou maior do que o custo marginal. A diferença de resultados é causada pela diferença no tipo de função de produção estabelecida em cada caso. Com funções de produção totalmente diferenciáveis, qualquer acréscimo no nível de uso do fator variável — e, por extensão, nos custos variáveis — determina uma variação no nível de produto obtido. Assim, existe flexibilidade para igualar o custo marginal ao preço de mercado do produto através de uma escolha apropriada do nível de produção. No modelo de programação linear da firma, entretanto, esta flexibilidade é restrita: existindo um ou mais fatores fixos que são limitantes à expansão do nível da produção, o acréscimo na disponibilidade do fator variável pode simplesmente resultar em capacidade ociosa do fator. Assim, justifica-se que o equilíbrio da firma pode ocorrer com um nível de custo marginal inferior ao preço do produto.

Por fim, deve ser observado que, através das condições marginais de equilíbrio da firma, é possível estabelecer funções algébricas de oferta e procura quando a função de produção é totalmente diferenciável e algebricamente especificada. Em programação linear, a especificação dos resultados (níveis ótimos de produção e de empregos de fatores) em termos dos parâmetros do problema (preços, coeficientes técnicos e disponibilidade de fatores fixos) é uma tarefa complexa. Neste texto este assunto será abordado apenas de modo parcial (Seção IV.4, adiante).

IV.1.6 — Síntese

Se o problema da firma é, tipicamente, um problema de Programação Linear, a teoria neoclássica leva a conclusões errôneas? A resposta a esta pergunta é definitivamente negativa. Na verdade os pressupostos essenciais da teoria neoclássica da produção e de custos são observados como resultados de um modelo da firma calcado em programação linear. Curvas de produtividade marginal decrescentes, isoquantas convexas em relação à origem dos eixos dos fatores e curvas de custo marginal crescentes, imprescindíveis na análise de formação de preços via oferta e procura, aparecem como resultados transparentes do modelo de tecnologia em proporções fixas com processos alternativos.

Não obstante, o modelo de programação linear oferece pelo menos duas grandes vantagens em relação à abordagem convencional da teoria neoclássica. Em primeiro lugar o chamado problema "técnico" de estipular a função de produção como o limite superior da produção que pode ser obtida a partir de um determinado vetor de insumos não é dado como resolvido antes de se iniciar a análise econômica. No modelo de programação linear o aspecto "técnico" e o econômico são examinados simultaneamente. Isto, sem dúvida confere uma característica de praticidade ao instrumento que o conceito restrito de função de produção está longe de oferecer. Em segundo lugar a abordagem da programação linear coloca em destaque a limitação de recursos existentes no curto prazo. Com isto, questões de ociosidade nos recursos disponíveis encontram uma justificativa econômica que inexiste na abordagem neoclássica convencional do curto prazo.

Conseqüentemente, a teoria da firma de concorrência perfeita é enriquecida, e não descartada, pela Programação Linear.

IV.2 — Digressão Matemática: Dualidade

Consideremos o seguinte problema de programação linear.

Problema A: Max $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

$$\text{dado} \quad \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &\leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &\leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &\leq b_m \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) & \end{aligned}$$

A função de Lagrange associada a este problema é:

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 - \ldots - a_{in} x_n)$$

As condições de Kuhn-Tucker do Problema A são como se segue:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \leq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \cdot x_j = \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij}\right) \cdot x_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (A.2)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (A.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} = b_i - a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 - \ldots - a_{in} x_n \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (A.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} \cdot = \lambda_i (b_i - a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 - \ldots - a_{in} x_n) \cdot \lambda_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (A.5)$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (A.6)$$

Vamos definir $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ como o vetor de valores que, assumidos pelas variáveis x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ e λ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, satisfazem as condições $(A.1)$ até $(A.6)$. Em outras palavras, o vetor $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ está sendo definido como a solução ótima do problema A.[4] O valor máximo do programa deste problema é:

$$Z_{max} = Z^* = \mathbf{c}' \mathbf{x}^* = \mathbf{c}'' \mathbf{x}^* + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - a_{i1} x_1^* - a_{i2} x_2^* - \ldots - a_{in} x_n) = \phi^*$$

onde a terceira igualdade é assegurada em vista da própria definição de $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ (estes valores devem satisfazer às condições $(A.1)$ até $(A.6)$; ver $(A.5)$ em particular).

Para utilização em seções posteriores, é conveniente atentar para a condição $(A.5)$. Observe que, definindo $s_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, isto é, definindo s_i como variável de folga da i-ésima restrição, temos que a solução ótima deve satisfazer $s_i \cdot \lambda_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. A condição $(A.5)$ é denominada de condição "complementariedade da folga".

Utilizando agora o mesmo conjunto de parâmetros do problema A, isto é, c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n\ ;\ j = 1, 2, \ldots, m)$ e b_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, vamos estabelecer um novo problema que, em princípio, não mantém nenhuma relação com o problema

[4] Para evitar complicações desnecessárias ao ponto que se quer demonstrar nesta seção, adotamos a hipótese de que o vetor $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ existe e é único.

anterior a não ser pelo emprego do mesmo conjunto total de parâmetros.[5] Assim:

Problema B: Min $Y = b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + \ldots + b_m \lambda_m$

dado
$$\begin{array}{l} a_{11} \lambda_1 + a_{21} \lambda_2 + \ldots + a_{m1} \lambda_m \geq c_1 \\ a_{12} \lambda_1 + a_{22} \lambda_2 + \ldots + a_{m2} \lambda_m \geq c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} \lambda_1 + a_{2n} \lambda_2 + \ldots + a_{mn} \lambda_m \geq c_n \\ \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{array}$$

Observe que usamos λ_i para representar as variáveis de decisão. Como poderíamos ter escolhido outra letra qualquer para tanto, ainda devemos pensar no Problema *B* como alguma coisa independente do Problema *A*. Neste último o símbolo λ_i foi usado para representar o multiplicador de Lagrange associado com a *i*-ésima restrição. Agora, o símbolo λ_i está sendo usado para representar a *i*-ésima variável de decisão.

A função de Lagrange associada ao Problema *B* é:

$$\psi = \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i + \sum_{j=1}^{n} x_j (c_j - a_{1j} \lambda_1 - a_{2j} \lambda_2 - \ldots - a_{mn} \lambda_m)$$

onde o símbolo x_j representa o multiplicador de Lagrange associado à *j*-ésima restrição do Problema *B* (note que a escolha deste símbolo também é arbitrária).

As condições de Kuhn-Tucker do Problema *B* são como se segue:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i} = b_i - a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 - \ldots - a_{in} x_n \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (B.1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i (b_i - a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 - \ldots - a_{in} x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (B.2)$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (B.3)$$

[5] Observe, entretanto, a *forma* com que os parâmetros serão rearranjados para definir o Problema *B*. Os resultados obtidos no final *não* são válidos para *qualquer* novo Problema que use o mesmo conjunto total de parâmetros, mas apenas para o rearranjo especificamente empregado na definição do Problema *B*.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \leq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (B.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \cdot x_j = \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij}\right) \cdot x_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (B.5)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (B.6)$$

Vamos definir (x^{**}, λ^{**}) como o vetor de valores que assumidos pelas variáveis x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ e λ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ satisfazem às condições $(B.1)$ até $(B.6)$. Em outras palavras, o vetor (x^{**}, λ^{**}) está sendo definido como a solução ótima do Problema B. Conseqüentemente, o valor mínimo do programa deste problema é:

$$Y_{min} = Y^* = b' \lambda^{**} = b' \lambda^{**} + \sum_{j=1}^{n} x_j^{**} (c_j - a_{1j} \lambda_1^{**} - a_{2j} \lambda_2^{**} - \\ - \ldots - a_{mn} \lambda_m^{**}) = \psi^*$$

Agora vamos comparar alguns dos resultados obtidos em cada problema.

Em primeiro lugar o leitor é convidado a exercitar sua álgebra e demonstrar que:

$$\phi = \psi$$

isto é, a função de Lagrange dos dois problemas é idêntica!

Em segundo lugar, observando as condições de Kuhn-Tucker dos dois problemas nota-se que $(A.1) = (B.4)$, que $(A.2) = (B.5)$, que $(A.3) = (B.6)$, que $(A.4) = (B.1)$, que $(A.5) = (B.2)$ e que $(A.6) = (B.1)$. Portanto, evidentemente:

$$(x^*, \lambda^*) = (x^{**}, \lambda^{**})$$

isto é, a solução do Problema A é idêntica à solução do Problema B.

Em terceiro lugar, dados os resultados acima e dado que $Z^* = \phi^*$ e que $Y^* = \psi^*$, obviamente:

$$Z^* = Y^*$$

Isto é, o valor otimizado dos dois programas é o mesmo.

Por fim, dado que $Z^* = Z_{max}$ e que $Y^* = Y_{min}$ e, tendo em vista o resultado anterior, observa-se que, para um vetor *viável* do problema A (por ex.: $\bar{\mathbf{x}}$) e um vetor viável do Problema B (por ex.: $\bar{\lambda}$) :

$$\bar{Z} = \mathbf{c}' \bar{\mathbf{x}} \leq Z^* = Y^* \leq \mathbf{b}' \bar{\lambda} = \bar{Y}$$

isto é, o ponto ótimo dos dois problemas é um ponto de sela.

Os problemas A e B são chamados problemas duais. Ao resolvermos qualquer um deles, estaremos automaticamente resolvendo o outro. Um deles é chamado de primal e o outro é chamado de dual. Qual é o primal e qual é o dual é uma questão totalmente arbitrária: é facilmente demonstrável que o dual do problema arbitrado inicialmente como dual é o próprio problema que foi arbitrado como sendo o primal.

As relações entre os parâmetros de problemas duais ficam claras quando empregamos notação matricial:

Max	$Z = \mathbf{c}' \mathbf{x}$	Min	$Y = \mathbf{b}' \lambda$
dado	$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	dado	$\mathbf{A}' \lambda \geq \mathbf{c}$
	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$		$\lambda \geq \mathbf{0}$

Ao passar de um lado — qualquer lado — para o outro, note que:

a) o vetor de coeficientes da função-objetivo é transposto e deslocado para a posição de vetor de constantes do conjunto de restrições (e vice-versa) ;

b) a matriz de coeficientes do conjunto de restrições é transposta e

c) as desigualdades têm sua direção revertida.

Além disto, conforme foi visto anteriormente, as variáveis de decisão passam a ser multiplicadores de Lagrange (e vice-versa) .

Observação: Ao especificar o dual de um problema qualquer de programação linear é conveniente adotar as formas padronizadas que foram estabelecidas acima. Por exemplo, se num problema de maximização existir um condicionamento do tipo $\geq$, é conveniente multiplicar tal restrição por — 1 antes de usar as regras de passagem do primal para o dual. Por outro lado, uma restrição do tipo $=$ pode ser desdobrada em duas desigualdades com sentido diferente (que podem ter o mesmo sentido após a multiplicação de uma delas por — 1). Na verdade, a uma restrição do tipo $=$, que é o caso da otimização clássica, corresponde um multiplicador cujo sinal é livre ($\gtreqless 0$). Por simetria, uma variável livre do primal estará associada com uma restrição do tipo $=$ no dual.

Para completar o trabalho desta seção é interessante examinar a correspondência entre as tabelas de Simplex de um problema numérico qualquer e do seu dual. Para tanto vamos utilizar o Problema (2) da Seção II.4 do Capítulo II:

Primal: Max $Z_p = 10\, x_1 + 8\, x_2 + 10\, x_3$

$$2\, x_1 + 1\, x_2 + 2\, x_3 \leq 300$$

$$8\, x_1 + 6\, x_2 + 4\, x_3 \leq 720$$

$$x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0$$

A tabela final de Simplex deste problema é dada abaixo (Tabela 16). Observe que S_1 e S_2 são as variáveis de folga da primeira e segunda restrições respectivamente.

Dual: Min $Z_d = 300\, \lambda_1 + 720\, \lambda_2$

dado

$$2\, \lambda_1 + 8\, \lambda_2 \geq 10$$

$$1\, \lambda_1 + 6\, \lambda_2 \geq 8$$

$$2\, \lambda_1 + 4\, \lambda_2 \geq 10$$

$$\lambda_1,\, \lambda_2 \geq 0$$

A tabela final de Simplex deste problema é dada abaixo (Tabela 17). Note que a função-objetivo do dual foi multiplicada por (— 1) para posterior aplicação das regras de maximização. Observe que v_1, v_2 e v_3 são as variáveis de folga da primeira, segunda e terceira restrições respectivamente.

Tabela 16

SOLUÇÃO ÓTIMA DO PROBLEMA PRIMAL DO EXEMPLO NO TEXTO

c_i \ c_j	Base	10	8	10	0	0	b
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
10	x_3	1/2	0	1	3/4	— 1/8	135
8	x_2	1	1	0	—1/2	1/4	30
	z_j	13	8	10	3,5	0,75	1590
	$c_j - z_j$	—3	0	0	—3,5	—0,75	

Tabela 17

SOLUÇÃO ÓTIMA DO PROBLEMA DUAL DO EXEMPLO NO TEXTO

c_i \ c_j	Base	—300	—720	0	0	0	b
		λ_1	λ_2	v_1	v_2	v_3	
0	v_1	0	0	1	—1	—1/2	3
—300	λ_1	1	0	0	1/2	—3/4	3,5
—720	λ_2	0	1	0	—1/4	1/8	0,75
	z_j	—300	—720	0	30	135	—1590
	$c_j = z_j$	0	0	0	—30	—135	

Comparando as "margens" das Tabelas 16 e 17, isto é, a coluna b e a linha $c_j - Z_j$, e tomando apenas o *valor absoluto* dos coeficientes numéricos dos valores aí existentes, concluímos que:

a) o valor de $c_j - Z_j$ associado a x_j, isto é, à j-ésima variável de decisão da Tabela 1 (primal), corresponde ao valor de v_j, isto é, à j-ésima variável de folga da Tabela 2 (dual);

b) o valor de $c_j - Z_j$ associado a s_j, isto é, à j-ésima variável de folga da Tabela 1 (primal), corresponde ao valor de λ_j, isto é, à j-ésima variável de decisão da Tabela 2 (dual) e,

c) o valor do plano ótimo, linha Z_j com coluna b, é o mesmo nas duas tabelas.

Portanto, toda a informação referente à solução ótima do problema dual pode ser encontrada na tabela de Simplex que especifica a solução ótima do problema primal (e vice-versa).

IV.3 — Interpretação Econômica de Problemas Duais

A questão de dualidade em Programação Linear representa bem mais do que uma simples "curiosidade" matemática. De um lado as relações duais têm sido empregadas na elaboração de algoritmos cuja eficiência é superior à do Simplex em determinados tipos de problemas (teremos a oportunidade de usar o método chamado dual-simplex na Seção IV.5). Por outro lado, os problemas duais têm uma importante interpretação em termos de teoria econômica. Nesta seção interpretaremos o dual de alguns problemas típicos de programação linear.

IV.3.1 — Dualidade e Distribuição do Produto Econômico

O aspecto de remuneração dos fatores de produção tem merecido a atenção dos cientistas sociais desde Ricardo e Marx até os nossos dias. A contribuição que o modelo de programação linear da firma em concorrência perfeita pode oferecer para esta discussão será o objeto da análise a seguir. Novamente, a discussão será realizada através de um exemplo numérico relativamente simples.

Vamos supor que uma certa firma pode produzir três produtos diferentes, sendo X_j a quantidade produzida por mês do j-ésimo deles $(j = 1, 2, 3)$. Para produzir estes produtos a firma dispõe de 300 horas-máquina por mês e tem um estoque de 720 unidades de matéria-prima já adquirida. Estas disponibilidades são, portanto, consideradas como fatores fixos. Além disto a firma necessita contratar mão-de-obra para a produção, sendo que cada unidade deste fator variável custa $ 7 por mês. Uma unidade do produto 1 é vendida por $ 15 e sua produção requer 2 horas-máquina, 8 unidades de matéria-prima e 2 unidades de mão-de-obra. Uma unidade do produto 2 é vendida por $ 25 e sua produção requer 1 hora-máquina, 6 unidades de matéria-prima e 3 unidades de mão-de-obra. Uma unidade do produto 3 é vendida por $ 18 e sua produção requer 2 horas-máquina, 4 unidades de matéria-prima e 2 unidades de mão-de-obra.

Uma vez que horas-máquina e matéria-prima se constituem em fatores fixos, o seu custo independe do plano de produção eventualmente adotado. Assim, o objetivo da firma é maximizar a diferença entre a receita bruta gerada pela venda dos três produtos, e os gastos variáveis que, no caso, se reduzem à mão-de-obra. Esta diferença é denominada de Margem Bruta. O problema da firma é, portanto:

$$\text{Max} \quad MB = 15\,x_1 + 25\,x_2 + 18\,x_3 - 7\,x_4$$

$$\begin{array}{lll}
\text{dado} & 2\,x_1 + 1\,x_2 + 2\,x_3 + 0\,x_4 \leq 300 & \text{(horas-máquina)} \\
& 8\,x_1 + 6\,x_2 + 4\,x_3 + 0\,x_4 \leq 720 & \text{(matéria-prima)} \\
& 2\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 - 1\,x_4 \leq 0 & \text{(mão-de-obra)} \\
& x_j \geq 0 \;\; (j = 1, 2, 3, 4) &
\end{array}$$

onde x_4 é a decisão sobre contratação de mão-de-obra, em unidades por mês.

Vamos ainda definir s_j e λ_j como a capacidade ociosa $(s_j \geq 0)$ e o multiplicador de Lagrange da j-ésima restrição respectivamente. Em particular, note que s_3 seria o número de unidades contratadas de mão-de-obra e não utilizadas na produção.

O problema dual do caso da firma é:

$$\text{Min} \quad CF = 300\,\lambda_1 + 720\,\lambda_2 + 0\,\lambda_3$$

$$\begin{array}{lll} \text{dado} & 2\,\lambda_1 + 8\,\lambda_2 + 2\,\lambda_3 \geq 15 & (x_1) \\ & 1\,\lambda_1 + 6\,\lambda_2 + 3\,\lambda_3 \geq 25 & (x_2) \\ & 2\,\lambda_1 + 4_2\,\lambda + 2\,\lambda_3 \geq 18 & (x_3) \\ & 0\,\lambda_1 + 0\,\lambda_2 - 1\,\lambda_2 \geq -7 & (x_4) \end{array}$$

$$\lambda_i \geq 0 \; (i = 1, 2, 3)$$

Ao lado de cada restrição do dual, entre parênteses, foi colocado seu multiplicador. Vamos ainda definir v_j como a variável de folga da j-ésima restrição do problema dual $(v_j \geq 0)$.

Que interpretação pode ser feita do problema dual? Vamos supor que a gerência da firma precisasse atribuir preços, para fins internos, aos fatores de produção fixos para o mês a que se refere o problema anteriormente formalizado. Estes preços poderiam servir, por exemplo, de indicadores para um rateio contábil da margem bruta obtida com o plano de produção eventualmente adotado. Mais especificamente, vamos supor que a gerência procurasse atribuir preços aos seus fatores fixos de forma a minimizar o custo fixo e de modo que nenhuma atividade gerasse lucros puros. Este, na verdade, é o problema descrito pelo dual. Senão, vejamos.

As variáveis λ_1 e λ_2 podem ser interpretadas como preços internos, atribuídos respectivamente à hora-máquina e à unidade de matéria-prima. A variável λ_3, que não comparece na função-objetivo do dual, pode ser interpretada como o preço interno atribuído ao fator variável (mão-de-obra). Estes preços internos se constituem no valor do produto marginal de cada fator recebendo a denominação de "preço- sombra". [6] A função-objetivo do dual é, sob esta interpretação, o custo fixo da firma pois se reduz ao somatório dos produtos do preço de cada fator pela disponibilidade respectiva.

[6] Esta interpretação já foi realizada no final da Seção II.4 do Capítulo II; apenas que, naquela oportunidade, não foi mencionado o fato de que o valor absoluto do coeficiente $c_j - Z_j$ associado à j-ésima variável de folga é o próprio multiplicador λ_j da j-ésima restrição.

Ainda sob a interpretação das variáveis λ_j estabelecidas no parágrafo anterior, a primeira restrição do dual diz que o custo unitário atribuído internamente ao produto 1 deve ser igual ou maior que o preço recebido por este produto: cada unidade produzida do produto 1 requer 2 horas-máquina (custo interno: $2.\lambda_1$), 8 unidades de matéria-prima (custo interno: $8\lambda_2$) e 2 unidades de mão-de-obra (custo interno: $2.\lambda_3$), enquanto que o preço do produto 1 é \$ 15. A variável de folga da primeira restrição do dual (v_1) é então interpretada como o prejuízo unitário na produção do produto 1. Observando que o multiplicador desta restrição é x_1 e que, pela condição de complementariedade de folga devemos ter $x_1.v_1 = 0$ na solução ótima, concluímos que x_1 não comparecerá no plano ótimo ($x_1 = 0$) caso o produto 1 seja deficitário ($v_1 > 0$) aos preços atribuídos para os fatores de produção. Por outro lado, a ausência de prejuízos ($v_1 = 0$) é condição necessária para que x_1 compareça no plano ótimo.

A interpretação da segunda e da terceira restrição é análoga à interpretação da primeira restrição estabelecida acima. Por fim, a quarta restrição estabelece que $\lambda_3 \leq 7$, isto é, o valor do produto marginal do fator trabalho para a firma deve ser igual ou menor que o preço de mercado deste fator variável. Entretanto, dado que o multiplicador desta restrição é a própria quantidade empregada de trabalho, fica claro que, pela condição de complementariedade da folga ($v_4.x_4 = 0$), nenhuma quantidade do fator será empregada se o valor do seu produto marginal para a firma for inferior ao seu preço de mercado.

A Tabela 18 é obtida no último passo da resolução do problema primal pelo método Simplex.

A tabela nos dá as seguintes informações:

a) solução do primal

$x_1 = 0$ (x_1 não está na base)

$x_2 = 30$ (*vide* coluna b)

$x_3 = 135$ (*vide* coluna b)

$x_4 = 360$ (*vide* coluna b)

$s_1 = 0$ (s_1 não está na base)

$s_2 = 0$ (s_2 não está na base)

$s_3 = 0$ (s_3 não está na base)

b) solução do dual (valores absolutos na linha $c_j - Z_j$)

$v_1 = 5$

$v_2 = 0$

$v_3 = 0$

$v_4 = 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 0{,}5$

$\lambda_3 = 7$

Tabela 18

SOLUÇÃO ÓTIMA DO PROBLEMA PRIMAL DA FIRMA HIPOTÉTICA DO TEXTO

c_j \ c_i	Base	x_1 (15)	x_2 (25)	x_3 (18)	x_4 (—7)	s_1 (0)	s_2 (0)	s_3 (0)	b
25	x_2	1	1	0	0	—1/2	1/4	0	30
18	x_3	1/2	0	1	0	3/4	—1/8	0	135
—7	x_4	2	0	0	1	0	1/2	—1	360
	z_j	20	25	18	—7	1	0,5	7	660
	$c_j = z_j$	—5	0	0	0	—1	—0,5	—7	

O produto 1 não comparece no plano ótimo ($x_1 = 0$). Conseqüentemente seu custo a preços-sombra deve ser maior do que o seu preço de mercado. De fato, dado que a produção de uma unidade do produto 1 requer 2 horas-máquina, 8 unidades de matéria-prima e 2 unidades de trabalho, seu custo unitário a preços-sombra é:

$$2 \cdot \lambda_1 + 8 \cdot \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_3 = 2 \cdot 1 + 8 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 7 = 20$$

superior, portanto, ao seu preço de mercado que é \$ 15. O prejuízo por unidade do produto 1 que a firma eventualmente decida ainda incluir no seu plano de produção é, evidente, $v_1 = \$\ 5$. Verifique que os custos unitários dos produtos 2 e 3 a preços-sombra são exatamente iguais aos respectivos preços de mercado.

A margem bruta associada ao plano ótimo é \$ 660 por mês. Conceitualmente esta é a remuneração total dos fatores fixos, já que sob a interpretação atribuída às restrições do dual as possibilidades *teóricas* de obtenção de lucros puros ficam descartadas. Assim, deveriam ser destinadas $300 . \lambda_1 = 300 . (1) = \$\ 300$ por mês ao "fundo de horas-máquina" e $720 . \lambda_2 = 720 . (0{,}5) = \$\ 360$ por mês ao "fundo de matéria-prima". Presumivelmente estes fundos seriam formados para financiar o funcionamento contínuo da firma (aquisição periódica de máquinas e de matéria-prima). Se, dados os preços de máquinas e de matéria-prima no mercado, ambos os fundos foram exatamente suficientes para cumprir o propósito a que se destinam, teremos a conclusão de que a firma encontra-se numa posição de equilíbrio de concorrência perfeita de longo prazo. Se, ao contrário, ambos os fundos se mostrarem mais do que suficientes para cumprir o propósito a que se destinam, então a firma estará obtendo lucros puros. Se ambos os fundos forem insuficientes para cumprir o propósito a que se destinam, então a firma está acumulando prejuízos. Neste caso, se a firma em questão for um concorrente perfeito típico, é de se esperar que um certo número de produtores saia do mercado. Com isto o preço do produto (ou produtos) tenderia a se elevar e, conseqüentemente, melhorar a situação dos fundos de reserva das firmas remanescentes no mercado. Por fim, existe a possibilidade de que um dos fundos se revele superdimensionado e o outro subdimensionado. Este caso pode estar combinado com uma situação global de lucros puros positivos, nulos ou negativos. Basicamente trata-se de desequilíbrio na razão de disponibilidade dos fatores fixos (intensidade relativa dos fatores) *vis-à-vis* seus preços de mercado.

Para concluir, observamos que uma teoria de distribuição do produto econômico calcada em modelos de programação linear da firma não difere substancialmente do resultado neoclássico da concorrência perfeita: cada fator tende a ser remunerado de acordo com o valor de sua produtividade marginal.

IV.3.2 — Dualidade e Viabilidade Econômica de Empreendimentos

A interpretação econômica dos problemas duais pode também ser útil para a análise de viabilidade econômica de novos empreendimentos. Dois exemplos ilustrativos deste aspecto serão examinados nesta seção.

Na seção anterior realizamos a análise de uma firma que poderia produzir três produtos (1, 2, 3) utilizando maquinaria e matéria-prima como fatores fixos e mão-de-obra como fator variável. Vamos supor agora que o setor de desenvolvimento da firma tivesse criado um novo produto — produto 4 — cuja viabilidade econômica deve ser agora examinada pela gerência. A produção de cada unidade do produto 4 requer 5 horas-máquina, 6 unidades de matéria-prima e 1 unidade de trabalho. O departamento de comercialização, após alguns testes de mercado, concluiu que o produto 4 pode ser vendido ao preço máximo de $ 14. A questão é: esta nova linha de produção é economicamente viável para a firma?

Uma maneira de responder à pergunta formulada no final do parágrafo anterior seria recomputar o plano ótimo incluindo a nova atividade no problema original da firma. Ao cabo deste processo, a presença ou a ausência da nova atividade no plano ótimo indicaria, sua viabilidade ou não em termos econômicos. Entretanto, esta análise pode ser abreviada através do emprego de relações duais. Pelos resultados da seção anterior já sabemos que o preço-sombra da hora-máquina é $ 1, o preço-sombra da matéria-prima é $ 0,5 e o preço-sombra do trabalho é igual ao seu preço de mercado, isto é, $ 7. Portanto, o custo unitário do novo produto, a preços-sombra, é:

$$5 \cdot (1) + 6 \cdot (0{,}5) + 1 \cdot (7) = \$\ 15$$

Como o departamento de comercialização avaliou que este produto só poderia ser vendido ao preço máximo de $ 14, é evidente que a nova atividade não compete com as atividades existentes no plano ótimo anteriormente calculado. Com esta conclusão fica dispensada a necessidade de recomputar o problema da firma. Tal procedimento só será necessário quando a nova atividade for competitiva nos termos acima estabelecidos.

Passemos a outro exemplo. Vamos supor que um empresário esteja considerando a possibilidade de produzir metionina sintética para venda aos fabricantes de ração. O empresário já estudou os custos de produção do sintético mas, para sua decisão de investimento, precisa ter uma idéia do preço ao qual poderia induzir os clientes potenciais a dar preferência ao seu produto sobre outras alternativas. Entre os consumidores potenciais de metionina sintética estão os produtores de ração para suínos. Vamos supor que os fabricantes podem produzir ração para suínos utilizando milho, farelo de soja, farelo de arroz e feno moídos. Vamos supor ainda que estes fabricantes obtêm seu produto minimizando os custos necessários para atender aos requerimentos nutricionais estabelecidos por kg de ração. A Tabela 19 sumaria os dados do problema do fabricante de rações. Estes elementos são conhecidos pelo empresário que pretende produzir metionina sintética.

Tabela 19

PREÇOS E CONTEÚDOS NUTRITIVOS (HIPOTÉTICOS) DE DIVERSOS ALIMENTOS E REQUERIMENTOS NUTRITIVOS MÍNIMOS (HIPOTÉTICOS) DE SUÍNOS

Item	Milho	F. Soja	F. Arroz	Feno	Requerimento mínimo
Preço ($/kg)	20,00	30,00	18,00	15,00	—
Metionina (dg/kg)	6,00	12,00	3,0	1,0	8,4
Energia (hcal/kg)	32,00	30,00	25,00	20,00	31,00

Em vista das informações contidas na Tabela 19, podemos representar o problema do fabricante de rações para suínos como:

$$\text{Min} \quad C = 20\,x_1 + 30\,x_2 + 18\,x_3 + 15\,x_4 + 0\,s_m - 0\,s_e$$

$$\begin{array}{lll} \text{dado} & 6\,x_1 + 12\,x_2 + 3\,x_3 + 1\,x_4 - 1\,s_m + 0\,s_e = 8{,}4 & \text{(metionina)} \\ & 32\,x_1 + 30\,x_2 + 25\,x_3 + 20\,x_4 + 0\,s_m - 1\,s_e = 31{,}0 & \text{(energia)} \\ & 1\,x_1 + 1\,x_2 + 1\,x_3 + 1\,x_4 + 0\,s_m + 0\,s_e = 1 & \text{(volume)} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, s_m, s_e, \geq 0 & \end{array}$$

onde C: custo unitário da ração ($/kg)

x_1: quantidade de milho na ração (kg milho/kg de ração)

x_2: quantidade de farelo de soja na ração (kg f. soja/kg de ração)

x_3: quantidade de farelo de arroz na ração (kg f. arroz/kg de ração)

x_4: quantidade de feno moído na ração (kg feno/kg de ração)

s_m: excesso de metionina sobre requerimento mínimo (dg metionina/kg de ração)

x_e: excesso de energia sobre requerimento mínimo (hcal energia/kg de ração)

A solução deste problema é apresentada na Tabela 20, a seguir (observe que foram usadas regras de Simplex para minimização).

Entre as diversas informações contidas na Tabela 20, a mais relevante para o empresário que pretende investir na produção de metionina sintética é o valor do multiplicador de Lagrange da restrição de metionina. Este multiplicador aparece na linha $c_j - z_j$ associado à variável s_m (excesso de metionina). O multiplicador é 1,7. Qual o significado deste número? Ele nos diz que, em relação à solução ótima da Tabela 5, se quisermos passar s_m de zero para uma unidade, isto é, elevar o requerimento mínimo de metionina em uma unidade, então o custo unitário da ração irá aumentar em $ 1,7. Portanto, o custo imputado à restrição é de $ 1,7 por dg

Tabela 20

SOLUÇÃO ÓTIMA DO PROBLEMA DO FABRICANTE DE RAÇÕES PARA SUÍNOS (VIDE TEXTO)

c_j	Base \ c_i	20	30	18	15	0	0	b
		x_1	x_2	x_3	x_4	s_m	s_e	
30	x_2	0	1	—1/2	— 5/6	—1/6	0	0,4
0	s_e	0	0	8	41/3	1/3	1	0,2
20	x_1	1	0	3/2	11/6	1/6	0	0,6
	z_j	20	30	15	11,6	—1,7	0	24
	$c_j - z_j$	0	0	3	3,4	1,7	0	

requerido daquele aminoácido em cada kg de ração. Assim, se o fabricante de rações para suínos tiver a possibilidade de adquirir metionina sintética a preços menores do que $ 1,7 por dg, ele irá certamente fazê-lo. Se tais níveis de preços cobrem os custos de produção e distribuição de metionina sintética, então o investimento neste ramo é viável. O dimensionamento do mercado poderia ser feito a partir do cômputo de uma nova solução para o problema do fabricante — incluindo a nova atividade: "metionina sintética" — e de estimativas da produção total de rações para suínos.

IV.3.3 — Dualidade e Equilíbrio Espacial dos Preços

O dual do problema clássico de transportar um certo produto de m regiões de origem para n regiões de destino ao menor custo possível permite uma interessante interpretação em termos de equilíbrio espacial dos preços em um mercado disperso geograficamente.

Vamos partir do problema de fornecer quantidades mínimas D_j às regiões $j = 1, 2, \ldots, m$, dada a disponibilidade máxima das quantidades S_i nas regiões $i = 1, 2, \ldots, n$. Em outras palavras: D_j é a quantidade demandada do produto em pauta na região j e S_i é a quantidade ofertada do mesmo na região i. O custo unitário de transporte da região i para a região j é c_{ij}. Definindo x_{ij} como a quantidade transportada da região i para a região j, o problema de suprimento a custos mínimos é:

$$\text{Min} \quad CT = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij}$$

dado $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq D_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$; restrições de demanda mínima)

$-\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geq -S_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; restrições de suprimento máximo)

$$x_{ij} \geq 0 \quad (\text{todos } i,\ j)$$

(Observe que as restrições de suprimento máximo aparecem multiplicadas por -1; isto é feito com o objetivo de manter as desigualdades dentro do padrão estabelecido na Seção IV.2 para problemas de minimização).

Definindo d_j como o multiplicador associado à j-ésima restrição de demanda e s_i como o multiplicador associado à i-ésima restrição de suprimento, o dual do problema de transporte acima especificado é:

$$\text{Max} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} D_j \cdot d_j - \sum_{i=1}^{m} S_i \cdot s_i$$

dado $d_j - s_i \leq c_{ij}$ (todos i, j)

$d_j \geq 0$ ($j = 1, 2. \ldots, n$)

$s_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$)

Que interpretação poderíamos dar ao problema dual? Imaginemos que um agente de comercialização tivesse conhecimento das quantidades procuradas e ofertadas nas diversas regiões bem como dos custos unitários de transporte entre elas. Este agente se dispõe a adquirir o produto nas regiões onde existe oferta e vender o mesmo na região onde existe procura. Seu problema é estabelecer preços de compra e venda de modo a maximizar sua receita líquida. Se definirmos d_j como o preço de venda do produto na região j e s_i como o preço de aquisição na região i, vemos que a função-objetivo do dual representa exatamente a receita líquida do agente de comercialização referido. Vamos supor, em adição, que o nosso intermediário hipotético não desejasse atrair grande atenção sobre o seu negócio, de modo que ele mesmo impõe restrições sobre os preços d_j e s_i tais que lhe impeçam de obter lucros puros (admitimos que os lucros normais estejam incluídos nos custos unitários de transporte). Nestas condições a diferença de preços entre duas regiões i e j não deve ser superior ao custo de transportar uma unidade de produto entre elas. Se o cauteloso intermediário se permitir escolher preços que não satisfaçam esta condição, é de se esperar que concorrentes sejam atraídos pela rentabilidade do negócio e acabem vigorando diferenciais de preço que eliminam os lucros puros de qualquer maneira (admitindo, evidentemente, as hipóteses básicas da concorrência perfeita: livre acesso e transparência informacional). Devemos ainda observar que o multiplicador da restrição do dual que tem c_{ij} como constante do lado direito é x_{ij}. Assim, se o diferencial de preços entre as regiões i e j for inferior ao custo unitário de transporte entre elas, o fluxo físico x_{ij} será nulo. Em outras palavras, só serão utilizadas aquelas rotas que geram lucro puro igual a zero. As rotas que geram prejuízos aos preços que maximizam a receita líquida com inexistência de lucros puros não serão utilizadas.

Uma modificação do problema anterior, que também tem uma interpretação de interesse para estudos de Economia Regional, é obtida quando limitamos as possibilidades da oferta através da explicitação das quantidades de fatores de produção disponíveis nas regiões de origem. Vamos examinar este caso através de um pequeno exemplo.

Vamos supor que existam duas regiões de produção denominadas A e B nas quais o produto-objeto do estudo pode ser gerado. Admitamos que na região de produção i $(i = A, B)$ a obtenção de uma unidade do produto requer l_i unidades de trabalho e k_i unidades de capital. A região de produção i dispõe de T_i unidades de trabalho e K_i unidades de capital. Existem, por hipótese, três regiões de consumo (1, 2 e 3), sendo D_j a quantidade de produto demandada na j-ésima delas. Definindo c_{ij} como o custo unitário de transporte entre as regiões i e j e x_{ij} como a quantidade transportada entre as mesmas regiões, o problema de suprimento a custo mínimo de transporte é:

$$
\begin{array}{llr}
\text{Min} & C = c_{A1} x_{A1} + c_{A2} x_{A2} + C_{A3} x_{A3} + c_{B1} x_{B1} + c_{B2} x_{B2} + c_{B3} x_{B3} & \\
\text{dado} & x_{A1} + x_{B1} & \geq D_1 \\
 & x_{A2} + x_{B2} & \geq D_2 \\
 & x_{A3} + x_{B3} & \geq D_3 \\
 & - t_A\ x_{A1} - t_A\ x_{A2} - t_A\ x_{A3} & \geq -T_A \\
 & - k_A x_{A1} - k_A x_{A2} - k_A x_{A3} & \geq -K_A \\
 & - t_B\ x_{B1} - t_B\ x_{B2} - t_B\ x_{B3} & \geq -T_B \\
 & - k_B x_{B1} - k_B x_{B2} - k_B x_{B3} & \geq -K_B \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad (\text{todos } i,\ j) &
\end{array}
$$

Definindo λ_j como o multiplicador associado à restrição que tem D_j como constante do lado direito, λ_{Ti} como o multiplicador associado à restrição de disponibilidade de trabalho na região de produção i e λ_{Ki} como o multiplicador associado à restrição de capital na região de produção i, o dual do problema acima é:

$$
\begin{array}{llr}
\text{Max} & Z = D_1 \lambda_1 + D_2 \lambda_2 + D_3 \lambda_3 - T_A \lambda_{TA} - K_A \lambda_{KA} - T_B \lambda_{TB} - K_B \lambda_{KB} & \\
\text{dado} & \lambda_1 - t_A\ \lambda_{TA} - k_A\ \lambda_{KA} & \leq c_{A1} \\
 & \lambda_2 - t_A\ \lambda_{TA} - k_A\ \lambda_{KA} & \leq c_{A2} \\
 & \lambda_3 - t_A\ \lambda_{TA} - k_A\ \lambda_{KA} & \leq c_{A3} \\
 & \lambda_1 - t_B\ \lambda_{TB} - k_B\ \lambda_{KB} & \leq c_{B1} \\
 & \lambda_2 - t_B\ \lambda_{TB} - k_B\ \lambda_{KB} & \leq c_{B2} \\
 & \lambda_3 - t_B\ \lambda_{TB} - k_B\ \lambda_{KB} & \leq c_{B3}
\end{array}
$$

$$\lambda_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3)$$

$$\lambda_{Ti} \geq 0 \ (i = A, B)$$

$$\lambda_{Ki} \geq 0 \ (i = A, B)$$

Uma interpretação deste dual é vista a seguir. Suponha que um agente econômico com poder de decisão sobre o sistema examinado pretende estabelecer preços para os produtos (a nível de região de consumo) e preços para os fatores de produção (a nível de região de produção) de modo a maximizar a diferença entre as receitas totais e os custos de produção. Suponha ainda que este agente pretende ainda que os preços estabelecidos nesta maximização eliminem as possibilidades de obtenção de lucros puros. Portanto, λ_j representa o preço que deve ser estabelecido para o produto na região de consumo j, λ_{Ti} representa o preço do fator trabalho na região de produção i e λ_{Ki} representa o preço do fator capital na mesma região. As restrições do problema, escritas na forma geral $\lambda_j \leq l_i\lambda_{Ti} + k_i\lambda_{ki} + c_{ij}$, expressam que o preço da venda do produto não pode ser maior que o seu custo unitário de produção mais o seu custo unitário de transporte. Conseqüentemente, as restrições eliminam as possibilidades de obtenção de lucros puros. Observe, por fim, que o valor otimizado da renda líquida do dual, Z^*, é igual ao valor otimizado do custo total de transportes do primal, C^*. Fica evidente que o lucro puro do sistema, a preços-sombra, é zero.

Observação: A análise de equilíbrio espacial com programação linear é, em geral, severamente limitada pela hipótese de demanda completamente inelástica nas regiões de consumo. O abandono desta hipótese por uma hipótese mais realista que envolva uma relação explícita entre preços e quantidades não pode ser diretamente enquadrada no modelo de programação linear [7]. Admitindo-se relações lineares entre preços e quantidades, o modelo adequado à análise de equilíbrio espacial de preços é o de programação quadrática (a referência básica neste assunto é Takayama e Judge, 1971).

[7] Todavia, soluções aproximadas podem ser obtidas através de programação separável.

IV.4 — Análise de Sensibilidade, Oferta e Procura

A Análise de Sensibilidade refere-se ao estudo de certas questões de pós-otimização. Freqüentemente, o agente econômico tem interesse em saber até que ponto a solução encontrada para o seu problema de programação linear seria alterada se um ou mais parâmetros do problema original fossem modificados. Freqüentemente é possível utilizar elementos informativos das tabelas de Simplex já calculadas para abreviar o esforço computacional requerido na avaliação do efeito de mudanças paramétricas.

Nesta seção examinaremos o efeito de mudanças paramétricas nos coeficientes da função-objetivo e nos coeficientes do lado direito das restrições. A análise será totalmente desenvolvida a partir do problema numérico abaixo descrito.

Uma fábrica pode produzir três produtos: 1, 2 e 3. Definimos x_j $(j = 1, 2, 3)$ como a quantidade mensal produzida do j-ésimo produto. Os preços de mercado dos três produtos são $P_1 = \$ 20$, $P_2 = \$ 14$ e $P_3 = \$ 10$. Para produzir uma unidade do produto 1 são necessárias duas unidades do fator A, uma unidade do fator B e uma unidade do fator C. Para produzir uma unidade do produto 2 são necessárias duas unidades do fator A, três unidades do fator B e uma unidade do fator C. Para produzir uma unidade do produto 3 são necessárias uma unidade do fator A, uma unidade do fator B e duas unidades do fator C. O fator A é variável: a fábrica pode adquirir b_A unidades do fator por mês ao preço de $C_A = \$ 3$. B e C são fixos, sendo que a disponibilidade máxima do primeiro é 80 unidades e do segundo é 100 unidades. O objetivo da firma é maximizar lucros. Formalmente o problema é representado como:

$$\text{Max} \quad L = 20\,x_1 + 14\,x_2 + 10\,x_3 - 3\,b_A$$

$$\begin{array}{llll}
\text{dado} & 2\,x_1 + 2\,x_2 + 1\,x_3 - 1\,b_A \leq & 0 & \text{(fator } A\text{)} \\
& 1\,x_1 + 3\,x_2 + 1\,x_3 \leq & 80 & \text{(fator } B\text{)} \\
& 1\,x_1 + 1\,x_2 + 2\,x_3 \leq & 100 & \text{(fator } C\text{)} \\
& x_1, x_2, x_3, b_A \geq 0 & &
\end{array}$$

A Tabela 21 apresenta a solução ótima deste problema. Esta solução será chamada de solução de referência n.º 1.

Tabela 21

SOLUÇÃO DE REFERÊNCIA N.º 1

c_i	Base \ c_j	20	14	10	−3	0	0	0	b
		x_1	x_2	x_3	b_A	s_A	s_B	s_C	
−3	b_A	0	4	1	1	−1	2	0	160
20	x_1	1	3	1	0	0	1	0	80
0	s_C	0	−2	1	0	0	−1	1	20
	z_j	20	48	17	−3	3	14	0	1120
	$c_j - z_j$	0	−34	−7	0	−3	−14	0	

Note, na Tabela 21, que a atividade S_i $(i = A, B, C)$ representa a capacidade ociosa do i-ésimo fator de produção em unidades por mês.

IV.4.1 — Mudanças Paramétricas em um Coeficiente P_j da Função-Objetivo

IV.4.1.1 — O Caso de X_j Não-Básico

Vamos supor, com relação ao problema de referência acima estabelecido, que o agente decisório pretendesse examinar o efeito de mudanças em P_3 sobre o plano ótimo apresentado na Tabela 6. Notamos, em primeiro lugar, que a coluna associada à atividade x_3 não faz parte da base ótima, isto é, a atividade x_3 é não-básica. Dada a própria natureza do problema, de imediato podemos concluir que, se o produto 3 não é produzido quando $P_3 = 10$, também não irá entrar no plano ótimo para $P_3 < 10$. Portanto, a solução de referência n.º 1 (Tabela 21) é completamente estável com relação à diminuição de P_3. O que pode acontecer se $P_3 > 10$? Neste caso é de se esperar que para um valor de P_3 suficientemente alto a atividade x_3 acabe entrando no plano ótimo. Então, a solução de referência n.º 1 não deve ser completamente estável com relação a aumentos em P_3.

Para examinar os assuntos levantados no parágrafo anterior de um modo mais formal, vamos supor que $P_3 = 10 + \Delta$. Neste caso, a solução de referência n.º 1 deveria ser modificada para incorporar esta mudança. O resultado desta modificação está apresentado na Tabela 22.

Tabela 22

MODIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO DE REFERÊNCIA N.º 1
($P_3 = 10 + \Delta$; x_3 NÃO-BÁSICO)

c_i \ c_j	Base	20 x_1	14 x_2	$10+\Delta$ x_3	-3 b_A	0 s_A	0 s_B	0 s_C	b
—3	b_A	0	4	1	1	—1	2	0	160
20	x_1	1	3	1	0	0	1	0	80
0	s_C	0	— 2	1	0	0	— 1	—1	20
	z_j	20	48	17	—3	3	14	0	1120
	$c_j - z_j$	0	—34	$-7+\Delta$	0	—3	—14	0	

Nota-se, na Tabela 22, que o único efeito da modificação de P_3 em relação à solução de referência n.º 1 foi alterar o coeficiente $c_3 - Z_3$ pelo acréscimo de Δ. A solução básica apresentada na Tabela 22 é uma solução ótima? Isto depende do valor de Δ. Enquanto Δ for tal que $c_3 - Z_3$ permanecer negativo ou nulo, a solução de referência n.º 1 permanece ótima. Notamos que para qualquer

$\Delta < 0$ temos $c_3 - Z_3 < 0$. Concluímos que a solução de referência n.º 1 é totalmente estável com relação a diminuições de P_3. Entretanto, notamos também que para $\Delta > 7$ teremos $c_3 - Z_3 > 0$ e a solução básica apresentada na Tabela 6 deixará de ser ótima. Concluímos então que a solução de referência n.º 1 é estável com relação a aumentos de P_3 até o acréscimo máximo de 7 unidades ao valor utilizado inicialmente. Para $P_3 > 10 + 7$ a atividade x_3 passa a ser candidata à entrada na base. Definindo x_3^* como o nível de produção do produto 3 no plano ótimo, temos que:

$$(-\infty \leqq P_3 \leqq 17) \text{ determina, } \textit{coeteris paribus}, \; x_3^* = 0.$$

O termo *coeteris paribus* significa "tudo o mais permanecendo constante". No caso a expressão se refere a todos os demais parâmetros do problema.

Sabemos então que, se $\Delta > 7$, x_3 deverá entrar na base. Fazendo $\Delta = 8$ — isto é, $P_3 = 18$ — e substituindo este valor na Tabela 22, concluímos que a solução básica aí apresentada terá deixado de ser ótima. Escolhendo um pivô pelas regras do método Simplex e executando os cálculos necessários obtém-se a solução ótima apresentada na Tabela 23, a seguir.

Tabela 23

SOLUÇÃO DE REFERÊNCIA N.º 2 ($P_3 = 18$).

c_i \ c_j	Base	20	14	18	—3	0	0	0	b
		x_1	x_2	x_3	b_A	s_A	s_B	s_C	
— 3	b_A	0	6	0	1	— 1	3	—1	140
20	x_1	1	5	0	0	0	2	—1	60
18	x_3	0	— 2	1	0	0	— 1	1	20
	z_j	20	46	18	—3	3	13	1	1560
	$c_j - z_j$	0	—32	0	0	—3	—13	—1	

O resultado da Tabela 23 será usado na discussão subseqüente.

IV.4.1.2 – O Caso de X_j Básico

Vamos supor que o agente decisório pretendesse seguir examinando modificações paramétricas em P_3 além de $P_3 > 17$. Neste caso vamos usar a solução de referência n.º 2 (Tabela 23) como no ponto de balizamento. Já sabemos que, se P_3 for diminuído de 18 para $P_3 < 17$, o nível ótimo de x_3 deverá cair de 20 unidades por semana (*vide* Tabela 23) para zero unidade por semana. Mas o que se pode dizer com relação a $P_3 > 18$? Observando a Tabela 23 vemos que com $P_3 = 18$ a solução ótima é $x_1^* = 60$ e $x_3^* = 20$. Para valores de P_3 suficientemente altos é de se esperar que alguma troca de base deva ocorrer de modo que a produção de x_3 aumente.

Vamos supor que P_3 fosse novamente alterado, agora para $P_3 = 18 + \Delta$. Esta modificação deve ser introduzida na solução de referência n.º 2 (Tabela 23). Note entretanto que, como x_3 está na base ótima desta solução de referência, $P_3 = 18$ está presente na ocluna c_i. Portanto, toda a linha Z_j precisa ser recalculada, o que, por sua vez, determina a necessidade de recalcular toda a linha $c_j - Z_j$. A Tabela 24 apresenta o efeito de um acréscimo em P_3 na solução de referência n.º 2.

Tabela 24

MODIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO DE REFERENCIA N.º 2
($P_3 = 18 + \Delta$; x_3 BÁSICO)

c_i \ c_j	Base	20	14	$18+\Delta$	-3	0	0	0	b
		x_1	x_2	x_3	b_A	s_A	s_B	s_C	
-3	b_A	0	0	0	1	-1	3	-1	140
20	x_1	1	3	0	0	0	2	-1	60
$18+\Delta$	x_3	0	-2	1	0	0	-1	1	20
	z_j	20	$40-2.\Delta$	$18+\Delta$	-3	3	$13+\Delta$	$1+\Delta$	$1560+20.\Delta$
	c_j-z_j	0	$-32+2.\Delta$	0	0	-3	$-13+\Delta$	$-1-\Delta$	

A solução básica apresentada na Tabela 24 é uma solução ótima? A resposta a esta pergunta depende do valor de Δ. Conforme o valor numérico que se atribuir a Δ, poderemos obter um valor positivo para $(c_3 - Z_3)$, ou para $(c_{SB} - Z_{SB})$ ou ainda para $(c_{SC} - Z_{SC})$. Neste sentido, examinando cada possibilidade isoladamente, notamos que:

a) para $\Delta > 16$ teremos $c_3 - Z_3 > 0$,

b) para $\Delta > 13$ teremos $c_{SB} - Z_{SB} > 0$ e,

c) para $\Delta < -1$ teremos $c_{SC} - Z_{SC} > 0$.

Observando as possibilidades (a), (b) e (c) acima, concluímos que a solução básica da Tabela 24 é estável para $\Delta \leq 13$ e $\Delta \geq -1$. Portanto:

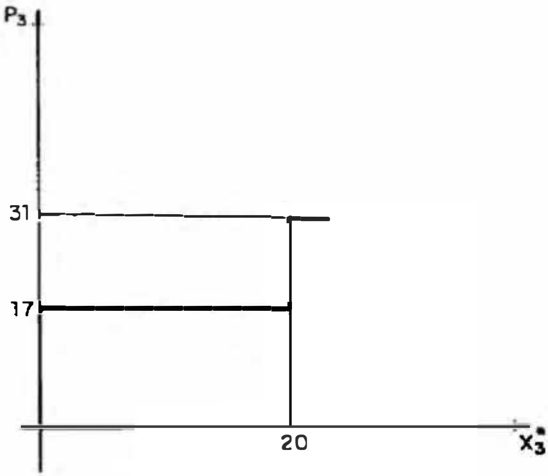
$(17 \leq P_3 \leq 31)$ determina, *coeteris paribus*, $x_3^* = 20$.

Na análise da seção IV.4.1.1 já havíamos visto que:

$(-\infty \leq P_3 \leq 17)$ determina, *coeteris paribus*, $x_3^* = 0$.

Colocando estas duas informações em forma gráfica (Figura 8, abaixo), obtemos parte da curva de oferta do produto 3.

Figura 8
Curva da Oferta do Produto 3



Deve ser observado que, para $P_3 = 17$, o nível ótimo de produção do Produto 3 é *qualquer* valor entre zero e vinte (Figura 8). Na verdade, qualquer plano de produção $\mathbf{x}$, definido como uma combinação convexa [8] dos planos apresentados nas Tabelas 21 e 23, gera o mesmo lucro $L = 1120$ se $P_3 = 17$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ b_A \\ S_A \\ S_B \\ S_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 0 \\ 0 \\ 160 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \\ 20 \\ 140 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_2 ; \lambda_1 + \lambda_2 = 1 ; \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, 2)$$

Evidentemente, se $P_3 = 17$, temos o caso em que a função-objetivo tem a mesma inclinação que a restrição mais limitante na direção da otimização. Nestes casos, como já vimos no Capítulo II, o problema de programação linear apresenta uma infinidade de soluções ótimas.

Exercícios: 1 — Verifique a viabilidade dos planos $\mathbf{x}$ acima definidos.

2 — Especifique um valor $\Delta > 13$ e < 16 e substitua na Tabela 24.

Encontre a nova solução ótima para $P_3 = 18 + \Delta$. Verifique o novo intervalo de estabilidade e complete a curva de oferta do Produto 3. Porque devemos estabelecer $\Delta < 16$?

IV.4.2 — Mudanças Paramétricas em uma Constante b_i nas Restrições

IV.4.2.1 — O Caso de b_i Não-Limitante

Vamos agora voltar ao problema originalmente proposto na introdução da seção IV.4.

Max $\quad L = 20\, x_1 + 14\, x_2 + 10\, x_3 - 3\, b_A$

8 *Vide* Subseção III.2.1 do Capítulo III.

$$
\begin{array}{lllll}
\text{dado} & 2\,x_1 + 2\,x_2 + 1\,x_3 - 1\,b_A \leq & 0 & \text{(fator A)} \\
 & 1\,x_1 + 3\,x_2 + 1\,x_3 & \leq 80 & \text{(fator B)} \\
 & 1\,x_1 + 1\,x_2 + 2\,x_3 & \leq 100 & \text{(fator C)}
\end{array}
$$

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, b_A \geq 0.$$

Para maior conveniência do leitor, a Tabela 21, contendo a solução deste problema, é repetida a seguir.

Tabela 21 (rep.)

SOLUÇÃO DE REFERÊNCIA N.º 1

c_i \ c_j	Base	20	14	10	—3	0	0	0	b
		x_1	x_2	x_3	b_A	s_A	s_B	s_C	
— 3	b_A	0	4	1	1	—1	2	0	160
20	x_1	1	3	1	0	0	1	0	80
0	s_C	0	— 2	1	0	0	— 1	1	20
	z_j	20	48	17	—3	3	14	0	1120
	$c_j—z_j$	0	—34	— 7	0	—3	—14	0	

Qual o efeito de alterações paramétricas em b_C (disponibilidade do fator C) sobre o plano ótimo apresentado na Tabela 21? Ora, uma vez que existe uma ociosidade de 20 unidades deste recurso na solução ótima do problema de referência $(S^*_C = 20)$, é evidente que acréscimos positivos à disponibilidade inicial do fator fixo C irão apenas acrescentar unidades adicionais à capacidade ociosa já observada. Por outro lado, parece também evidente que a disponibilidade inicial do fator fixo C possa ser diminuída até um montante igual à capacidade ociosa observada na Tabela 21 sem que isto altere os números da mesma tabela (exceto, naturalmente, pelo próprio valor $S^*_C = 20$, na coluna b). Concluímos então que, para $\triangle \geq -20$, a solução ótima não será alterada se a disponibilidade inicial do fator

C fosse modificada para $b_C = 100 + \Delta$ (exceto pelo valor assumido pela capacidade ociosa que passaria a $S_C = 20 + \Delta$). Para outro lado, o valor do produto marginal de um recurso não-limitante é zero. Então, no caso examinado:

$(b_C \geqq 80)$ determina, *coeteris paribus*, $VPMg_c = 0$.

O que acontece se $b_C < 80$? Para responder a esta pergunta observe novamente que, se a disponibilidade inicial do fator fixo C fosse modificada para $b_C = 100 + \Delta$, esta modificação se refletiria na Tabela 21 apenas pela alteração do valor da linha S_C com a coluna b para $20 + \Delta$. Agora, $b_C < 80$ ocorre se $\Delta < -20$. Mas, se $\Delta < -20$, a solução básica deixa de ser viável, pois a capacidade ociosa S_C se torna negativa! A Tabela 25 mostra a solução básica obtida se $\Delta = -21$, isto é, se $b_C = 79$. Observe que esta solução não é viável ($S_C = -1$). Entretanto, *é* uma solução *básica* do problema de referência modificado apenas no que tange à disponibilidade do fator fixo C (de $b_C = 100$ para $b_C = 79$).

Tabela 25

MODIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO DE REFERÊNCIA N.º 1
($b_C = 100 + \Delta$; $\Delta = -21$; b_C NÃO-LIMITANTE)

c_i \ c_j	Base	20	14	10	−3	0	0	0	b
		x_1	x_2	x_3	b_A	s_A	s_B	s_C	
−3	b_A	0	4	1	1	−1	2	0	160
20	x_1	1	3	1	0	0	1	0	80
0	s_C	0	−2	1	0	0	−1	1	−1
	z_j	20	48	17	−3	3	14	0	1120
	$c_j - z_j$	0	−34	−7	0	−3	−14	0	

A Tabela 25 mostra o "estranho" caso de uma solução básica não-viável que tem características de uma solução ótima (todos os

$c_j - Z_j$ são negativos) ! Se conseguirmos, de alguma maneira, recobrar a condição de não-negatividade exigida para viabilidade e ao mesmo tempo manter $c_j - Z_j < 0$, teremos obtido a solução ótima do problema de referência modificado para $b_C = 79$. Isto pode ser feito pela aplicação de um algoritmo chamado Simplex-dual.

Vamos fazer uma rápida digressão sobre este algoritmo.

Já sabemos que o método Simplex parte de uma solução básica não-negativa e procura obter, paulatinamente, condições de otimalidade. O método Simplex-dual, por sua vez, parte de uma solução básica "ótima" e procura obter, paulatinamente, condições de não-negatividade. Sucintamente, as regras do Simplex-dual para um problema de maximização são como se segue:

a) Obtenha uma solução básica com todos os $c_j - Z_j < 0$ sem preocupação de não-negatividade;

b.1) Caso todas as variáveis básicas sejam não-negativas a solução obtida é ótima;

b.2) Se alguma variável básica é negativa, deve sair da base a "mais negativa" dentre elas (digamos X_j) e entrar na base aquela variável x_i associada à menor razão $(c_i - Z_i) / Y_{ji}$; $(Y_{ji} < 0)$.

Se após a pivotação todos os $x_j > 0$, a nova solução básica é ótima; se não, repita este passo.

Note, na regra (b.2), que primeiro se determina o vetor a sair e depois o vetor a entrar. No método Simplex esta ordem é inversa.

A aplicação das regras do Simplex-dual aos dados da Tabela 10 é feita a seguir (Tabelas 26 e 27). A variável básica que sai é $S_C = -1$. O pivô portanto estará na linha S_C e deve ser negativo. Em princípio existem dois candidatos a pivô. Pela regra da menor razão conclui-se que S_B deve entrar na base.

Após a pivotação de elemento indicado na Tabela 26 obtém-se a solução ótima do problema de referência modificado pela mudança no valor numérico atribuído à disponibilidade do fator C para $b_C = 79$. O resultado é apresentado na Tabela 27.

Tabela 26

ESCOLHA DO PIVÔ PARA OTIMIZAR A TABELA 25 PELO MÉTODO SIMPLEX-DUAL

c_i \ c_j	Base	20	14	10	—3	0	0	0	b
		x_1	x_2	x_3	b_A	s_A	s_B	s_C	
— 3	b_A	0	4	1	1	—1	2	0	160
20	x_1	1	3	1	0	0	1	0	80
0	s_C	0	—2	1	0	0	—1	1	—1(x_1 <0)→
	z_j	20	48	17	—3	3	14	0	1120
	$c_j—z_j$	0	—34	—7	0	—3	—14	0	
							↑		

$$\left(\frac{-34}{-2} = 17\right) \qquad \left(\frac{-14}{-1} = 14\right)$$

Tabela 27

SOLUÇÃO DE REFERÊNCIA N.º 3 ($b_C = 79$)

c_i \ c_j	Base	20	14	10	—3	0	0	0	b
		x_1	x_2	x_3	b_A	s_A	s_B	s_C	
—3	b_A	0	0	3	1	— 1	0	2	158
20	x_1	1	1	2	0	0	0	1	79
0	s_B	0	2	— 1	0	0	1	— 1	1
	z_j	20	20	31	—3	3	0	14	1106
	$c_j — z_j$	0	— 6	—21	0	—3	0	—14	

IV.4.2.2 — O Caso de b_j Limitante

Na Subseção IV.4.2.1 examinamos a estabilidade da solução ótima do problema de referência n.º 1 com relação a alterações na disponibilidade do fator fixo C, fator este que se apresentava com capacidade ociosa no plano ótimo. Através da análise de sensibilidade concluiu-se que a solução de referência n.º 1 era estável para $b_C \geqq 80$. Ao fazer $b_C = 79$ uma nova solução ótima foi encontrada através do método Simplex-dual. Esta solução, denominada de solução de referência n.º 3, foi apresentada na Tabela 27 ao final da Subseção IV.4.2.1. Devemos observar que para $b_C \geqq 80$ tínhamos $VPMg_C = 0$ e para $b_C = 79$ temos $VPMg_C = 14$.

O que acontece se b_C for alterado com relação à solução de referência n.º 3? Inicialmente devemos observar que nesta solução o fator C é limitante, isto é, sua capacidade ociosa é nula. Nestas circunstâncias, qualquer modificação numérica de b_C pode causar modificações numéricas no nível de todas as atividades presentes no plano ótimo (se b_C não é limitante, apenas o nível da capacidade ociosa é alterado). Como avaliar todas estas alterações? Para responder a esta pergunta vamos fixar-nos, por um momento, na interpretação dos coeficientes numéricos da coluna S_C (linhas b_A, x_1 e S_B) na Tabela 27. Estes coeficientes foram referidos por y_{ij} e exaustivamente comentados nos Capítulos I e II. O primeiro coeficiente significa que para adicionar 1 unidade em S_C no plano de referência n.º 3 é necessário diminuir 2 unidades no nível da atividade b_A. O segundo coeficiente diz que, para o mesmo propósito, é preciso também diminuir uma unidade no nível de atividade x_1. Por fim, o terceiro coeficiente informa que, para acrescer uma unidade em S_C, é preciso ainda diminuir S_B em (-1) unidade. Portanto, se quiséssemos acrescentar Δ unidades ao nível de S_C na solução de referência n.º 3, o nível das atividades básicas deveria modificar-se para:

$$
\begin{aligned}
b_A &= 158 - 2 \cdot \Delta \\
x_1 &= 79 - 1 \cdot \Delta \\
S_B &= 1 + 1 \cdot \Delta
\end{aligned}
$$

Mas o que significa acrescer Δ unidades a S_C? Ao estabelecer um acréscimo Δ para a capacidade ociosa do fator C em relação ao nível na solução da Tabela 27 ($S_C = 0$), estamos simplesmente modificando a disponibilidade do fator C para $b_C = 79 - \triangle$. A Tabela 28 sumaria estas observações.

Tabela 28

MODIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO DE REFERÊNCIA N.º 3
($S_C = 0 + \triangle$; $b_C = 79 - \triangle$; b_C LIMITANTE)

c_i \ c_j	Base	20	14	10	−3	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	b_A	s_A	s_B	s_C	b
−3	b_A	0	0	3	1	−1	0	2	$158 - 2 . \triangle$
20	x_1	1	1	2	0	0	0	1	$79 - 1 . \triangle$
0	s_B	0	2	−1	0	0	1	−1	$1 + 1 . \triangle$
	z_j	20	20	31	−3	3	0	14	$1106 - 14 . \triangle$
	$c_j - z_j$	0	−6	−21	0	−3	0	−14	

Observando a coluna b da Tabela 28 notamos que:

$$b_A < 0 \quad \text{se} \quad \Delta > 79$$

$$x_1 < 0 \quad \text{se} \quad \Delta > 79$$

$$S_B < 0 \quad \text{se} \quad \Delta < -1$$

Uma vez que $b_C = 79 - \triangle$, concluímos que a base ótima encontrada para $b_C = 79$ permanece viável para $0 \leq b_C \leq 80$. Mais ainda, como o acréscimo $\triangle$ em S_C não afeta o cômputo dos coeficientes $c_j - Z_j$, além de viável a base composta pelas atividades b_A, x_1 e S_B permanece ótima naquele intervalo. Note que o *nível* das atividades na solução ótima modifica-se com acréscimos $\triangle$ em S_C, mas a *composição* da base ótima é a mesma para $-1 \leq \triangle \leq 79$.

Uma outra observação de importância é que:

$(0 \leq b_C \leq 80)$ determina, *coeteris paribus*, $VPMg_C = 14$.

Já vimos, também, na Subseção IV.4.2.1 que:

$(b_C \geq 80)$ determina, *coeteris paribus*, $VPMg_C = 0$.

A Figura 9 agrega estas duas observações numa forma gráfica. O resultado, evidentemente, é a curva de procura da firma pelo fator C (*vide* Subseção IV.1.5).

Figura 9
Procura Pelo Fator C

Note por fim que, se no cálculo de acréscimos realizado não tivéssemos atingido o limite inferior $b_C = 0$, teríamos de adotar um valor numérico para Δ que inviabilizasse a base apresentada na Tabela 28. A partir daí uma nova solução ótima poderia ser recalculada pelo método Simplex-dual.

Exercício: Reformule o problema de referência considerando também o fator C como fator variável. Resolva o problema atribuindo $P_C = 15$, depois para $P_C = 10$ e finalmente para $P_C = 14$. Compare os resultados obtidos com o gráfico acima. Pense um pouco e verifique se não seria possível obter a mesma curva de procura calculando intervalos de estabilidade para P_C com b_C variável ao invés de empregar o cálculo de intervalos de estabilidade para $VPMg_C$ como foi feito nesta seção.

IV.5 — Planejamento Descentralizado

Vamos examinar o problema do órgão central de planejamento de uma economia que pode ser subdividida em diversos setores. Cada setor pode produzir um certo conjunto de produtos utilizando um certo conjunto de fatores. Alguns produtos e alguns fatores são específicos de cada setor, não havendo, por assim dizer, relações intersetoriais diretas com relação aos mesmos. Outros produtos podem ser produzidos em mais de um setor e a oferta total dos mesmos é acumulada sobre os diversos setores. Da mesma forma, o uso de certos fatores pode ser disputado por mais de um setor a partir de uma dada disponibilidade total existente na economia. O problema do órgão central de planejamento é coordenar as decisões setoriais de modo a otimizar uma determinada função de bem-estar social da economia como um todo.

Se o problema puder ser formulado como um problema de programação linear, ele pode, pelo menos teoricamente, ser resolvido pelo método Simplex. No nível pragmático, todavia, este enfoque de planejamento centralizado apresenta duas sérias dificuldades. Em primeiro lugar é possível que o problema todo tenha dimensões que excluam qualquer possibilidade de computação mesmo em máquinas de grande porte [9]. Em segundo lugar, e talvez mais importante, o órgão de planejamento central deverá coletar informação detalhada com relação à tecnologia e à limitação de recursos específicos para cada um dos setores da economia além de informação sobre relações intersetoriais e recursos polivalentes. Esperar que qualquer órgão de planejamento consiga atuar com alguma eficiência em tal regime decisório centralizado é uma pretensão que só

9 Principalmente se o planejamento pretender incluir atividades de investimento num programa multiperiódico com horizontes de 4-6 anos (planos quadrienais, planos qüinqüenais, etc.).

pode ser explicada — mas nunca justificada — pela inexperiência com a práxis do planejamento.

Idealmente, o órgão central deveria decidir apenas sobre umas poucas políticas gerais na forma de variáveis exógenas aos setores, solicitando outrossim que os mesmos procurassem otimizar um determinado objetivo de relevância nacional a partir de planos elaborados a nível setorial. Uma vez que os planos setoriais preliminares estejam elaborados, o órgão central examina as relações intersetoriais e o uso dos recursos nacionais e eventualmente descobre que novas diretrizes podem proporcionar aumentos no bem-estar social. Estas novas diretrizes tomam a forma de modificações na política econômica vigente, o que, em geral, altera a composição dos planos setoriais otimizados. Elaborada uma segunda proposta da parte de cada setor, o órgão central volta a examinar o problema integrado e, novamente, pode reformular as diretrizes centrais. A cada passo o nível de bem-estar social, definido pelo órgão de planejamento central, é aumentado. O planejamento adquire uma feição iterativa e descentralizada, muito mais próxima da realidade observada ou mesmo da práxis necessária ao funcionamento de uma idealização social.

Existem pelo menos dois algoritmos capazes de prover elementos para o funcionamento prático de um planejamento descentralizado em uma economia que possa ser decomposta setorialmente. O primeiro deles foi elaborado por Dantzig e Wolfe e será objeto de estudo nesta seção. Um outro algoritmo, elaborado por Kornai e Lipták, com base na teoria de jogos poliédricos entre o centro e os setores, se constitui em matéria relativamente mais avançada e não será desenvolvido neste texto. As referências principais sobre o assunto são as seguintes: Dantzig, 1963 (Cap. 23) ; Baumol e Fabian, 1964, pp. 1-32; e Kornai e Lipták, 1965, pp. 141-169.

Vamos iniciar o estudo do planejamento descentralizado pela idéia de decomposição de um sistema linear. Se o conjunto de atividades de um problema de programação linear puder ser dividido em subconjuntos de modo que certos recursos sejam disputados apenas por atividades de um mesmo subconjunto enquanto outros por todas as atividades do problema, este apresenta viabilidade de decomposição. Um exemplo de um sistema viável para decomposição é:

$$
\begin{array}{llr}
\text{Max} & Z = 9\,x_1 + 5\,x_2 + 8\,y_1 + 7\,y_2 + 15\,y_2 & \\
\text{dado} & 2\,x_1 + 1\,x_2 + 1\,y_1 + 4\,y_2 + 6\,y_3 \leq 240 & \text{(Recurso A)} \\
 & 1\,x_1 + 2\,x_2 + 3\,y_1 + 5\,y_2 + 1\,y_3 \leq 300 & \text{(Recurso B)} \\
 & 2\,x_1 + 1\,x_2 \leq 60 & \text{(Recurso C)} \\
 & 3\,y_1 + 6\,y_2 + 9\,y_3 \leq 648 & \text{(Recurso D)} \\
 & 2\,y_1 + 1\,y_2 + 3\,y_3 \leq 450 & \text{(Recurso E)} \\
 & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

Observamos que os Recursos A e B são utilizados por todas as atividades do problema. Vamos denominar recursos deste tipo de "recursos nacionais" (por ex.: crédito oficial, importações, etc.). O recurso C, por sua vez, é requerido apenas pelas atividades x_1 e x_2. Além dos recursos nacionais, estas atividades usam apenas o recurso C. Portanto, estas atividades formam um subgrupo que podemos denominar de setor X. O recurso C é um recurso setorial específico do setor X. Os recursos D e E são utilizados apenas pelas atividades y_1, y_2 e y_3. Por analogia, os recursos D e E são recursos setoriais do setor Y.

Em linhas gerais, o algoritmo de Dantzig-Wolfe para o planejamento descentralizado em uma economia decomponível é como se segue. O órgão central informa a cada setor os coeficientes que deve adotar para cada uma das atividades na sua função-objetivo. Cada setor é outrossim solicitado a informar seu plano ótimo à luz dos coeficientes-objetivo recebidos e de suas próprias restrições setoriais. A seguir o órgão central examina os planos setoriais no contexto de disponibilidade dos recursos nacionais e eventualmente informa modificações nos coeficientes da função-objetivo para as atividades de cada setor. Novamente cada setor é solicitado a informar seu plano ótimo à luz da informação mais recente recebida do órgão central de planejamento e de seus próprios recursos setoriais. Todos os planos formulados pelos setores vão para bancos de memória no órgão central (ou centro). Entretanto, a informação detalhada sobre os coeficientes setoriais de insumo-produto e a disponibilidade de recursos setoriais específicos é ignorada no centro. Na realidade, este só utiliza os planos recebidos dos setores, as restrições de recursos nacionais e a função de bem-estar social estabelecida para fins do planejamento integrado. Estas informações, por sua vez, são ignoradas a nível setorial. Na etapa final, em vez de informar coeficientes da função-objetivo que os setores devem adotar, o órgão central determina os níveis das atividades que cada setor deve procurar atingir para maximizar a função de bem-estar social adotada para o planejamento nacional.

Basicamente, no processo de planejamento descentralizado iterativo, o centro trabalha com planos que são médias ponderadas — ou combinações convexas — dos planos setoriais anteriormente recebidos e informa coeficientes da função-objetivo que são os coeficientes adotados pelo centro com a dedução de um custo-sombra pelo emprego dos recursos nacionais escassos.

Assim, em termos do exemplo numérico acima citado, temos que:

a) O problema do centro na k-ésima iteração é:

$$\text{Max } Z_k = 9\,\overline{X}_{1k} + 5\,\overline{X}_{2k} + 8\,\overline{Y}_{1k} + 7\,\overline{Y}_{2k} + 16\,\overline{Y}_{3k}$$

$$\begin{aligned} \text{dado} \quad & 2\,\overline{X}_{1k} + 1\,\overline{X}_{2k} + 1\,\overline{Y}_{1k} + 4\,\overline{Y}_{2k} + 6\,\overline{Y}_{3k} \leq 240 \text{ (Recurso A)} \\ & 1\,\overline{X}_{1k} + 2\,\overline{X}_{2k} + 3\,\overline{Y}_{1k} + 5\,\overline{Y}_{2k} + 1\,\overline{Y}_{3k} \leq 300 \text{ (Recurso B)} \end{aligned}$$

onde:

$$\overline{\mathbf{X}}_k = \begin{bmatrix} \overline{X}_{1k} \\ \overline{X}_{2k} \end{bmatrix} \equiv \text{(combinação convexa dos planos já informados pelo setor } X\text{)}$$

$$\overline{\mathbf{Y}}_k = \begin{bmatrix} \overline{Y}_{1k} \\ \overline{Y}_{2k} \\ \overline{Y}_{3k} \end{bmatrix} \equiv \text{(combinação convexa dos planos já informados pelo setor } Y\text{)}$$

(Este problema será especificado detalhadamente mais adiante).

Ao resolver o problema, o centro determina λ_{AK} e λ_{BK}, isto é, os preços dos recursos nacionais A e B respectivamente. A seguir, o centro informa aos setores os coeficientes que deverão adotar para cada atividade em sua função-objetivo, na próxima otimização setorial:

$$P_{X1,k} = 9 - 2 \cdot \lambda_{AK} - 1 \cdot \lambda_{BK}$$

$$P_{X2,k} = 5 - 1 \cdot \lambda_{AK} - 2 \cdot \lambda_{BK}$$

$$P_{Y1,k} = 8 - 1 \cdot \lambda_{AK} - 3 \cdot \lambda_{BK}$$

$$P_{Y2,k} = 7 - 4 \cdot \lambda_{AK} - 5 \cdot \lambda_{BK}$$

$$P_{Y3,k} = 15 - 6 \cdot \lambda_{AK} - 1 \cdot \lambda_{BK}$$

Note que os coeficientes informados aos setores são benefícios unitários "brutos" menos o custo unitário pelo uso de recursos nacionais avaliados a preço-sombra. Note também que a média ponderada — ou combinação convexa — dos planos setoriais já informados pelo setor X (ou Y) é também um plano viável para o setor X (ou Y).

b) O problema do setor X na iteração k é:

$$\text{Max} \quad Z_{X,k} = P_{X1,k} \cdot X_{1,k+1} + P_{X2,k} \cdot X_{2,k+1}$$

$$\text{dado} \qquad 2 \cdot X_{1,k+1} + 1 \cdot X_{2,k+1} \leq 60 \qquad \text{(Recurso C)}$$

$$X_{i,k+1} \geq 0 \quad (i = 1, 2)$$

O plano ótimo obtido, $\mathbf{X}^*_{k+1}$, é informado ao centro juntamente com o valor otimizado da função-objetivo $(Z^*_{X,k})$.

c) O problema do setor Y na iteração k é:

$$\text{Max} \quad Z_{Y,k} = P_{Y1,k} \cdot Y_{1,k+1} + P_{Y2,k} \cdot Y_{2,k+1} + P_{Y3,k} \cdot Y_{3,k+1}$$

$$\text{dado} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot Y_{1,k+1} + \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot Y_{2,k+1} + \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot Y_{3,k+1} \leq \begin{bmatrix} 648 \\ 450 \end{bmatrix}$$

$$Y_{j,k+1} \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

O plano ótimo obtido, $\mathbf{Y}^*_{k+1}$, é informado ao centro, juntamente com o valor otimizado da função-objetivo $(Z^*_{Y,k})$.

d) Ao receber as informações setoriais supracitadas, o centro faz um certo teste de otimalidade para verificar se ganhos adicionais na função de bem-estar social ainda podem ser obtidos. Em caso negativo, a solução $\overline{X}_{1k}$, $\overline{X}_{2k}$, $\overline{Y}_{2k}$ e $\overline{Y}_{3k}$ é informada aos setores como metas de produção que devem ser alcançadas. Em caso positivo, os novos planos setoriais X^*_{k+1} e Y^*_{k+1} são incorporados às possibilidades de combinações convexas com os planos setoriais anteriores e o centro volta novamente a examinar o problema descrito em (a).

Na seqüência (a), (b), (c) e (d), acima relatada, faltou especificar como é procedido o teste de otimalidade pelo centro após o recebimento das informações setoriais. Para estudar este teste é necessário especificar mais detalhadamente o problema do centro descrito em (a).

Na k-ésima iteração o centro dispõe dos seguintes planos setoriais armazenados nos bancos de dados: X^*_j e Y^*_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, k)$. Uma combinação $\overline{X}_k$ dos planos X^*_j, $(j = 0, 1, 2, \ldots, k)$ é definida como:

$$\overline{X}_k = X^*_0 m_0 + X^*_1 m_1 + \ldots + X^*_k m_k;\ \sum_{j=0}^{k} m_j = 1; m_j \geq 0\ (j=1,2, \ldots, k)$$

Uma combinação convexa $\overline{Y}_k$ dos planos Y^*_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, k)$ é definida como:

$$\overline{Y}_k = Y^*_0 v_0 + Y^*_1 v_1 + \ldots + Y^*_k v_k;\ \sum_{j=0}^{k} v_j = 1;\ v_j \geq 0\ (j = 1, 2, \ldots, k)$$

Empregando as definições acima é possível reduzir o problema descrito em (a) a um problema de programação linear que tem as ponderações m_j e v_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ como atividades e apenas quatro restrições: uma restrição para o recurso A, uma restrição para o recurso B, uma restrição de convexidade sobre as ponderações m_j $(\Sigma m_j = 1)$ e uma restrição de convexidade sobre as ponderações v_j $(\Sigma v_j = 1)$. Os multiplicadores associados a cada uma destas restrições são, respectivamente, λ_{Ak}, λ_{Bk}, λ_{Mk} e λ_{Vk}. A interpretação dos multiplicadores λ_{Ak} e λ_{Bk} é bastante clara: eles representam os preços-sombra dos recursos nacionais A e B respectivamente. Qual a interpretação de λ_{Mk}? Note que este multiplicador está associado à restrição $\Sigma m_j = 1$, a qual, por sua vez condiciona a definição de um plano $\overline{X}_k$ como uma média ponderada dos planos X_j^* $(j = 1, 2, \ldots, k)$ apresentados pelo setor X até o momento. Se Σm_j pudesse ser igualado a $1 + \triangle$, o valor da função de bem-estar social poderia ser incrementado em $\triangle . \lambda_{Mk}$ unidades. Portanto, λ_{Mk} pode ser considerado como a utilidade marginal de transferir recursos nacionais para o setor X de modo que este possa ampliar suas atividades. Por raciocínio análogo, concluiremos que λ_{Vk} pode ser considerado como a utilidade marginal de transferir recursos nacionais para o setor Y.

Na seqüência, quando o setor X informa o valor Z^*_{Xk}, este valor pode ser comparado com λ_{Mk}. Note que Z^*_{Xk} é o valor líquido do bem-estar social associado com o plano X^*_{k+1}. Se $Z^*_{Xk} > \lambda_{Mk}$ o centro conclui que existe ganho a ser realizado pela reformulação do plano $\overline{X}_k$ permitida pela inclusão de X^*_{k+1} entre os componentes da combinação convexa usadas para a definição daquele. Se $Z^*_{Xk} = \lambda_{Mk}$, o centro conclui que nada tem a ganhar pela ampliação de possibilidades para $\overline{X}_{k+1}$. De modo análogo, para o setor Y, Z^*_{Yk} é comparado com λ_{Vk}.

O teste de otimalidade é então como se segue:

a) Se $Z^*_{Xk} > \lambda_{Mk}$ ou $Z^*_{Yk} > \lambda_{Vk}$ ou ambos, o plano $\overline{X}_k$, $\overline{Y}_k$ não é ótimo e as iterações devem prosseguir.

b) Se $Z^*_{Xk} = \lambda_{Mk}$ e $Z^*_{Yk} = \lambda_{Vk}$, o plano $\overline{X}_k$, $\overline{Y}_k$ é ótimo e as metas de produção nele contidas devem ser comunicadas aos respectivos setores.

Por fim, vamos aplicar as regras do planejamento descentralizado em uma iteração completa com o exemplo numérico estabelecido anteriormente. No primeiro passo admitimos que o centro tem conhecimento de um plano viável para cada setor:

$$\mathbf{X}_0^* = \begin{bmatrix} X^*_{1,0} \\ \\ X^*_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Y}_0^* = \begin{bmatrix} Y^*_{1,0} \\ Y^*_{2,0} \\ Y^*_{3,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para fins da primeira iteração o centro comunica os coeficientes "brutos" da sua função-objetivo:

$$P_{X1,0} = 9, \; P_{X2,0} = 5, \; P_{Y1,0} = 8, \; P_{Y2,0} = 7 \quad \text{e} \quad P_{Y3,0} = 15.$$

O problema do setor X então é:

$$\text{Max} \quad Z_{X,0} = 9\, X_{1,1} + 5\, X_{2,1}$$

dado
$$2\, X_{1,1} + 1\, X_{2,1} \leq 60$$
$$X_{i,1} \geq 0 \;\; (i = 1, 2)$$

A primeira solução ótima do problema do setor X, comunicada ao centro, é:

$$\mathbf{X}_1^* = \begin{bmatrix} X_{1,1}^* \\ \\ X_{2,1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 60 \end{bmatrix}$$

O problema do setor Y na primeira iteração é:

$$\text{Max} \quad Z_{Y,0} = 8\, Y_{1,1} + 7\, Y_{2,1} + 15\, Y_{3,1}$$

$$\text{dado} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ \\ 2 \end{bmatrix} Y_{1,1} + \begin{bmatrix} 6 \\ \\ 1 \end{bmatrix} Y_{2,1} + \begin{bmatrix} 9 \\ \\ 3 \end{bmatrix} Y_{3,1} \leq \begin{bmatrix} 648 \\ \\ 450 \end{bmatrix}$$
$$Y_{i,1} \geq 0 \;\; (i = 1, 2, 3)$$

A solução ótima do problema do setor Y, comunicada ao centro, é:

$$\mathbf{Y}_1^* = \begin{bmatrix} Y_{1,1}^* \\ Y_{2,1}^* \\ Y_{3,1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 216 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com base nos planos $\mathbf{X}_j^*$, $\mathbf{Y}_j^*$ $(j = 0, 1)$ o centro define as combinações convexas:

$$\overline{X}_{1,1} = 0\, m_0 + 0\, m_1 \qquad \overline{Y}_{1,1} = 0\, v_0 + 216\, v_1 \qquad v_0 + v_1 = 1$$

e   e

$$\overline{X}_{2,1} = 0\, m_0 + 60\, m_1 \qquad \overline{Y}_{2,1} = 0\, v_0 + 0\, v_1 \qquad v_0 \;,\; v_1 \geq 0$$

$$m_0 + m_1 = 1;\; m_0,\, m_1 \geq 0 \qquad \overline{Y}_{3,1} = 0\, v_0 + 0\, v_1$$

e seu primeiro problema é:

$$\text{Max } Z_1 = 9\ \overline{X}_{1,1} + 5\ \overline{X}_{2,1} + 8\ \overline{Y}_{1,1} + 7\ \overline{Y}_{2,1} + 16\ \overline{Y}_{3,1}$$

$$\text{dado} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \overline{X}_{1,1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \overline{X}_{2,1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \overline{Y}_{1,1} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \overline{Y}_{2,1} + \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} \overline{Y}_{3,1} \leq \begin{bmatrix} 240 \\ 300 \end{bmatrix}$$

e dadas, também, as definições de convexidade: $\Sigma m_j = 1$ e $\Sigma v_j = 1$.

Substituindo as variáveis $\overline{X}_{i,1}$ $(i = 1, 2)$ e $\overline{Y}_{j,1}$ $(j = 1, 2, 3)$ pelas suas definições em termos de (m_0, m_1) e (v_0, v_1) respectivamente, o problema do centro é reduzido a:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = 300\, m_1 + 1728\, v_1 \\
\text{dado} \quad & 60\, m_1 + 216\, v_1 \leq 240 \quad (\lambda_{A,1}) \\
& 120\, m_1 + 648\, v_1 \leq 300 \quad (\lambda_{B,1}) \\
& m_0 + m_1 = 1 \quad (\lambda_{M,1}) \\
& v_0 + v_1 = 1 \quad (\lambda_{V,1}) \\
& m_0, m_1, v_0, v_1 \geq 0.
\end{aligned}
$$

A solução deste problema é $m_0 = 1$, $m_1 = 0$, $v_0 = 0{,}537$, $v_1 = 0{,}463$ (quais os valores de $X^*_{i,1}$ e $Y^*_{j,1}$?) e ainda $\lambda_{A,1} = 0$, $\lambda_{B,1} = 2{,}67$, $\lambda_{M,1} = 0$ e $\lambda_{V,1} = 0$. Conseqüentemente, os coeficientes que devem ser informados aos setores para fins de novas otimizações setoriais, são:

$$
\begin{aligned}
P_{X1,1} &= 9 - 2.0 - 1.(2{,}67) = 6{,}33 \ldots \\
P_{X2,1} &= 5 - 1.0 - 2.(2{,}67) = -0{,}34 \\
P_{Y1,1} &= 8 - 1.0 - 3.(2.67) = 0{,}00 \\
P_{Y2,1} &= 7 - 4.0 - 5.(2{,}67) = -6{,}35 \\
P_{Y3,1} &= 16 - 6.0 - 1.(2.67) = 12{,}33 \ldots
\end{aligned}
$$

Comunicados os novos coeficientes para os setores usarem em suas funções-objetivo, e realizadas as subseqüentes otimizações a nível setorial, o setor X informa agora que:

$$X^*_2 = \begin{bmatrix} X^*_{1,2} \\ X^*_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Z^*_{X,2} = 190$$

enquanto que o Y informa que:

$$\mathbf{Y}_2^* = \begin{bmatrix} Y_{1,2}^* \\ Y_{2,2}^* \\ Y_{3,3}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 72 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Z_{Y,1}^* = 888 .$$

Como $Z_{X,1}^* = 190 > \lambda_{M,1} = 0$ e $Z_{Y,1}^* = 888 > \lambda_{V,1} = 0$, o centro conclui que vale a pena incorporar as soluções setoriais $\mathbf{X}_2^*$ e $\mathbf{Y}_2^*$ na definição de novas combinações convexas:

$$\begin{bmatrix} \overline{X}_{1,2} \\ \overline{X}_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} m_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 60 \end{bmatrix} m_1 + \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \end{bmatrix} m_2 ; \; m_0 + m_1 + m_2 = 1 \text{ e } m_i \geq 0 \; (i = 0, 1, 2)$$

e

$$\begin{bmatrix} \overline{Y}_{1,2} \\ \overline{Y}_{2,2} \\ \overline{Y}_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_0 + \begin{bmatrix} 216 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 72 \end{bmatrix} v_2 ; \; v_0 + v_1 + v_2 = 1 \text{ e } v_j \geq 0 \; (j = 0, 1, 2)$$

Conseqüentemente, o segundo problema do centro é:

$$\text{Max } Z_3 = 9 \; \overline{X}_{1,2} + 5 \; \overline{X}_{2,2} + 8 \; \overline{Y}_{1,2} + 7 \; \overline{Y}_{2,1} + 15 \overline{Y}_{3,1}$$

$$\text{dado} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \overline{X}_{1,2} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \overline{X}_{2,2} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \overline{Y}_{1,2} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \overline{Y}_{2,1} + \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} \overline{Y}_{3,1} \leq \begin{bmatrix} 240 \\ 300 \end{bmatrix}$$

e dadas, também, as combinações convexas acima definidas.

Exercício: Substitua as variáveis $\overline{X}_{i,2}$ e $\overline{Y}_{j,2}$ pelas suas definições como combinações convexas de soluções setoriais anteriores e reduza o problema do centro à otimização das ponderadas m_0, m_1, m_2, v_0, v_1 e v_2 subordinada à disponibilidade dos dois recursos nacionais e ainda $\Sigma m_i = 1$ e $\Sigma v_j = 1$. Prossiga na resolução do problema até o seu término.

Observação: A eficiência computacional do método de planejamento descentralizado é bem menor que a do Simplex no caso de problemas de pequena dimensão. Porém, em problemas de grande porte esta situação se reverte.

Apêndice I

A.I.1 — Convexidade, Concavidade, Ótimos Locais e Globais

Seja C um conjunto de pontos n-dimensionais. O conjunto C será um conjunto convexo se, dados dois pontos quaisquer $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ — pertencentes a C — o ponto $\mathbf{z}$ — definido com uma combinação convexa de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ — também pertencer a C. Em outras palavras:

dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$

dado $\mathbf{z} = a_1 \mathbf{x} + a_2 \mathbf{y}$; $a_1 + a_2 = 1$; $a_1, a_2 \geq 0$

se $\mathbf{z} \in C$

então C é um conjunto convexo.

Ou ainda: C é um conjunto convexo se o segmento de reta que une dois pontos quaisquer do conjunto estiver contido em C.

Alguns conjuntos de pontos bidimensionais convexos e não-convexos são representados nas Figuras I.1.a e I.1.b respectivamente.

O conjunto R, de raízes do sistema $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$, é um conjunto convexo. Senão vejamos: suponha que os pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pertençam a R, isto é, que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$. Demonstra-se, abaixo, que o ponto $\mathbf{z} = a_1 \mathbf{x} + a_2 \mathbf{y}$ ($a_1 + a_2 = 1$; $a_1, a_2 \geqq 0$) também pertence a R, isto é, que $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{Az} = \mathbf{A}(a_1 \mathbf{x} + a_2 \mathbf{y}) = a_1 \mathbf{Ax} + a_2 \mathbf{Ay} = a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b} =$$
$$= (a_1 + a_2)\, \mathbf{b} = \mathbf{b} \quad (C.Q.D.)$$

Figura I.1.a
Alguns Conjuntos Bidimensionais Convexos

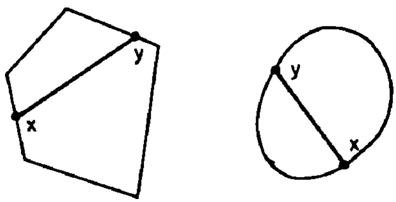
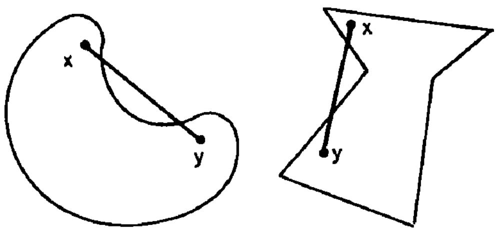


Figura I.1.b
Alguns Conjuntos Bidimensionais Não-Convexos



A função $f(\mathbf{v})$, definida para todo $\mathbf{v}$ pertencente a um conjunto convexo C, é dita uma *função côncava* se:

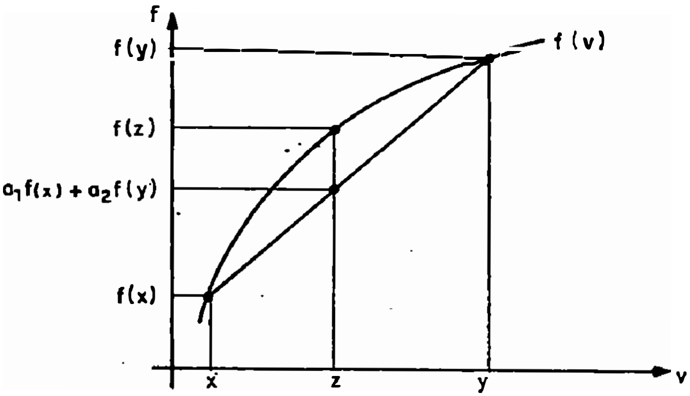
$$f(\mathbf{z}) \geq a_1 f(\mathbf{x}) + a_2 f(\mathbf{y})$$

onde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ e $\mathbf{z}$ é uma combinação convexa de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ com ponderações a_1 e a_2 respectivamente.

A função $f(\mathbf{v})$ é dita convexa se $-f(\mathbf{v})$ for uma função côncava, isto é, se $f(\mathbf{z}) = a_1 f(\mathbf{x}) + a_2 f(\mathbf{y})$, onde $\mathbf{z}$ é uma combinação convexa de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ com ponderações a_1 e a_2 respectivamente.

A Figura I.1.c, abaixo, ilustra uma função côncava:

Figura I.1.c
Uma Função Côncava: $z = a_1 x + a_2 y$;
$a_1, a_2 \geqslant 0$; $a_1 + a_2 = 1$



A função $f(\mathbf{v}) = \mathbf{c}'\mathbf{v}$ é uma função que satisfaz simultaneamente às definições de função côncava e de função convexa:

$$f(\mathbf{z}) = \mathbf{c}'\mathbf{z} = \mathbf{c}'(a_1 x + a_2 \mathbf{y}) = a_1(\mathbf{c}'\mathbf{x}) + a_2(\mathbf{c}'\mathbf{y}) = a_1 f(\mathbf{x}) + a_2 f(\mathbf{y})$$

No problema de programação matemática:

Max $f(\mathbf{x})$ dado $\mathbf{x} \; \varepsilon \; C$.

se $f(\mathbf{x})$ é uma função côncava e C é um conjunto convexo, então qualquer máximo local será também um máximo global.

A prova pode ser feita por contradição. Suponha que $f(.)$ tem um máximo local em $(\mathbf{v}, f(\mathbf{v}))$ e um máximo global em $(\mathbf{y}, f(\mathbf{y}))$ de tal modo que:

a) $f(\mathbf{v}) \geq f(\mathbf{z})$, para $\mathbf{z} \; \varepsilon \; C$ e na vizinhança de $\mathbf{v}$

b) $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \; \varepsilon \; C$ e

c) $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{v}) + \sigma$; $\sigma > 0$.

Sendo C um conjunto convexo, o ponto $\mathbf{z}$ pode ser escrito como uma média ponderada dos pontos $\mathbf{v}$ e $\mathbf{y}$ com ponderações a_1 e a_2 respectivamente. Por outro lado, sendo $f(.)$ uma função concava:

$$f(\mathbf{z}) \geq a_1 f(\mathbf{v}) + a_2 f(\mathbf{y});\ a_1 + a_2 = 1;\ a_1,\ a_2 \geq 0$$

Pela hipótese (c):

$$f(\mathbf{z}) \geq a_1\ f(\mathbf{v}) + a_2\ f(\mathbf{v}) + \sigma$$

ou

$$f(\mathbf{z}) > f(\mathbf{v}) + a_2 \cdot \sigma$$

Agora para $\mathbf{z}$ na vizinhança de $\mathbf{x}$ tem-se, necessariamente, $a_2 > 0$. Pela hipótese (c) tem-se então $a_2\sigma > 0$, de onde:

$$f(\mathbf{z}) > f(\mathbf{v})$$

O resultado acima é contraditório com a hipótese (a). A fonte da contradição está na hipótese (c), quando assumiu-se $\sigma > 0$. As hipóteses (a), (b) e (c) só serão consistentes se $\sigma = 0$, isto é, se o valor da função $f(.)$ no ótimo local for igual ao valor da função $f(.)$ no ótimo global. C.Q.D.

O resultado acima tem como corolário a observação de que o emprego de condições necessárias, em otimização é suficiente para obter ótimos globais nos casos em que (a) se pretenda maximizar uma função côncava sobre um conjunto de soluções viáveis convexo ou (b) se pretenda minimizar uma função côncava sobre um conjunto de soluções viáveis convexo.

A.I.2 — Condições de Kuhn-Tucker

Considere o problema de otimização condicionada clássico:

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{otimizar}}\ f(\mathbf{x})$$

$$\text{dado}\ g_i(\mathbf{x}) = b_i\ (i = 1,\ 2, \ldots,\ m)$$

onde $\mathbf{x} \in R^n$ (R^n é o conjunto de vetores reais no espaço n-dimensional). Este problema é equivalente ao problema de otimização incondicional:

$$\underset{x,\lambda}{\text{otimizar}}\ \phi = f(\mathbf{x}) + \sum_i \lambda_i (b_i - g_i(\mathbf{x}))$$

onde ϕ é denominada função de Lagrange e λ_i é denominado de multiplicador de Lagrange. Sendo $\mathbf{x}$ e λ os argumentos de ϕ, as condições necessárias para otimizar ϕ são:

$$(\mathrm{I}) \left| \begin{array}{ll} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_i \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_i} = 0; & j = 1, 2, \ldots, n \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(\mathbf{x}) = 0 & ; i = 1, 2, \ldots, m \end{array} \right.$$

As raízes do sistema (I) se constituem nos máximos e mínimos locais do problema de otimização condicionada clássico referido no início desta seção.[1] Por outro lado o teorema da função implícita aplicado ao sistema (I) permite escrever:

$$x_j = x_j(\mathbf{b}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\lambda_j = \lambda_j(\mathbf{b}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

de onde:

$$\phi = f(\mathbf{x}(\mathbf{b})) + \sum_i \lambda_i(\mathbf{b}) \cdot (b_i - g_i(\mathbf{x}(\mathbf{b})))$$

A derivada de ϕ em relação a b_k é:

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_k} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_i \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial b_k} \right) \frac{\partial x_j}{\partial b_k} + \sum_{i \neq k} \left(b_i - g_i(\mathbf{x}) \right) \frac{\partial \lambda_i}{\partial b_k} + \lambda_k$$

Em qualquer ponto $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ que satisfaça as condições de máximo ou mínimo local de ϕ — sistema (I) — tem-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_k} = \frac{\partial f}{\partial b_k} = \lambda_k^*$$

[1] *Vide*, por exemplo, Yamane, 1970.

pois os termos entre parênteses em $\frac{\partial \phi}{\partial b_k}$ se anulam. Conclui-se que o multiplicador λ_k^* mede a sensibilidade da função-objetivo em relação à constante da k-ésima restrição.

Considere, a seguir, o problema de maximização de uma função subordinada a condições de não-negatividade de seus argumentos:

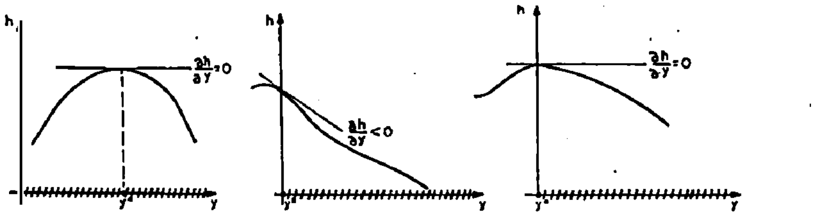
$$\max_{y} h(y) \text{ dado } y \geq 0$$

As Figuras I.2.a, I.2.b e I.2.c, abaixo, ilustram as possibilidades para a solução (y^*) do problema proposto.

Figura I.2.a
Solução Ótima Interna
($y^* > 0$)

Figura I.2.b
Solução Ótima de
Fronteira ($y^* = 0$)

Figura I.2.c
Solução Ótima de Fronteira
($y^* = 0$)



Uma rápida apreciação das possibilidades apresentadas nas Figuras I.2.a, b e c leva a concluir que a solução ótima do problema de maximizar uma função $h(y)$ sob condições de não-negatividade em y é caracterizada por:

$$\text{(II)} \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial y_i} \leq 0 & (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \dfrac{\partial h}{\partial y_i} \cdot y_i = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Note que, se $h(y)$ não é côncava, as condições (II) acima caracterizam máximos locais internos e de fronteira bem como mínimos locais internos (obtenha as condições para caracterização de soluções do problema de minimizar $h(\mathbf{y})$ dado $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$).

Considere agora o problema geral de programação matemática:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Max}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ &\text{dado } g_i(\mathbf{x}) \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ &\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x} \in R^n \end{aligned}$$

Considerando variáveis não-negativas s_i, pode-se reescrever o problema de programação matemática como:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Max}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ &\text{dado } g_i(\mathbf{x}) + s_i = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ &\qquad \mathbf{x} \geq 0; \ \mathbf{s} \geq 0; \ \mathbf{x} \in R^n \text{ e } \mathbf{s} \in R^m \end{aligned}$$

Este problema é um problema clássico de otimização condicionada; os requerimentos adicionais de não-negatividade podem ser apostos à função de Lagrange:

$$\phi = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, (b_i - g_i(\mathbf{x}) - s_i)$$

que deve ser então maximizada sobre $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{s} \geqq 0$ e λ. Um máximo local deverá satisfazer:

$$\text{A)} \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \displaystyle\sum_i \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial s_i} = -\lambda_i \leq 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

$$\text{B)} \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_j} \cdot x_j = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \displaystyle\sum_i \lambda_i \cdot \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) x_j = 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial x_i} \cdot s_i = \lambda_i \cdot s_i = 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

$$C)\quad \begin{cases} x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ s_i \geq 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

$$D)\quad \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(\mathrm{x}) - s_i = 0 \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Observe que a condição (D), acima, decorre do fato de que, em princípio, λ_i não é restrito.

Entretanto, as condições (A) até (D) podem também ser obtidas como caracterização da solução do seguinte ponto de sela:

$$\underset{x \geq 0}{\mathrm{Max}} \quad \underset{y \geq 0}{\mathrm{Min}} \quad L = f(\mathrm{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(\mathrm{x}))$$

As raízes deste problema devem satisfazer as seguintes condições:

$$(K:T)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} \leq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_j} \cdot x_j = 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} \geq 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i = 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ \lambda_i \geq 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

As condições $(K:T)$, acima, são conhecidas como condições de Kuhn-Tucker para maximização em programação matemática. (Verifique sua equivalência com as condições (A) até (D)). Em suma, o conjunto de condições $(K:T)$ acima caracteriza os máximos locais de:

$$\begin{array}{lll} \underset{x}{\mathrm{Max}}\ f(\mathrm{x}) & & \\ \text{dado } g_i(\mathrm{x}) \leq b_i & & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ \text{e} & \mathrm{x} \geq 0 & (\mathrm{x} \in R^{n}) \end{array}$$

Por outro lado, os mínimos locais do problema de minimização em programação matemática:

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & l(\mathbf{x}) & \\ \text{dado} & v_i(\mathbf{x}) \geq k_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ \text{e} & \mathbf{x} \geq 0 & (\mathbf{x} \; \varepsilon \; R^n) \end{array}$$

se caracterizam também como soluções do seguinte ponto de sela:

$$\underset{x \geq 0}{\text{Min}} \; \underset{y \geq 0}{\text{Max}} \; P = l(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (k_i - v_i)(\mathbf{x}))$$

A caracterização das raízes deste problema se constitui nas condições de Kuhn-Tucker para o problema de minimização em programação matemática:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial P}{\partial x_j} \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial x_j} \cdot x_j = 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \\[2ex] x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial \lambda_i} \leq 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i = 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \\[2ex] \lambda_i \geq 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right.$$

Deve ser observado que as condições de Kuhn-Tucker são condições necessárias para a caracterização de máximos e mínimos locais.[2] Todavia elas são também suficientes para ótimos globais se a função-objetivo a maximizar (minimizar) for côncava (convexa) e o conjunto de viabilidade para os argumentos for convexo (cf. Seção I.1, acima).

[2] Exceto em casos muito especiais; *vide* Chiang, 1982, p. 622.

Apêndice II

RESPOSTAS DE PROBLEMAS DO CAPÍTULO III

(1.1) Max $N = M_B + M_C$

dado (R1) $C_{AB} + C_{AC} \leq 200$

(R2) $C_{BB} + C_{BC} + 1{,}3\ M_B \leq 150$

(R3) $V_{CB} + V_{CC} + 0{,}8\ M_C \leq 180$

(R4) $M_B - 0{,}5\ C_{AB} - 0{,}5\ C_{BB} = 0$

(R5) $M_B - V_{CB} = 0$

(R6) $M_C - 0{,}5\ C_{AC} - 0{,}5\ C_{BC} = 0$

(R7) $M_C - V_{CC} = 0$

todas variáveis ≥ 0

(1.5) Max $SC = 6000x_M + 6500X_S + 29000X_B - 1{,}2c_M - 1{,}2C_S - 1{,}35C_B + S + 700A$

dado (R1) $0{,}6X_M + 0{,}8\ X_S + 2{,}5X_B + A \leq 500$

(R2) $3500\ X_M - C_M - P_M \leq 0$

(R3) $4200\ X_S - C_S - P_S \leq 0$

(R4) $16000\ X_B - C_B - P_B \leq 0$

(R5) $C_M - 1800\ X_M \leq 0$

(R6) $C_S - 2720\ X_S \leq 0$

(R7) $C_B - 6250\ X_B \leq 0$

$(R8)\ C_M + C_S + C_B \leq 1.100.000$

$(R9)\ P_M + P_S + P_B - 700\ A - S \leq 600.000$

$(R10)\qquad\qquad\qquad\qquad A \leq 150$

todas variáveis ≥ 0

Obs.: O coeficiente 1.800 na restrição $(R5)$ estabelece a disponibilidade de crédito para milho em \$/t; esta disponibilidade foi dada como \$ 3.000/ha de milho e, por outro lado, 1 t de milho requer 0,6 ha de terra: 3.000 (\$/ha) 0,6 (ha/t) = 1.800 (\$/t).

(1.7) Min $C = 9700\ x_{11} + 10.500\ x_{12} + 8200\ x_{13} + \ldots + 8.500\ x_{74}$

dado $(R1)$ $x_{11}+x_{21} + \ldots + x_{71} = 1350$ *(composição do pedido 1)*

$(R2)$ $x_{12}+x_{22} + \ldots + x_{72} = 4600$ *(composição do pedido 2)*

$(R3)$ $x_{13}+x_{23} + \ldots + x_{73} = 3200$ *(composição do pedido 3)*

$(R4)$ $x_{14}+x_{24} + \ldots + x_{74} = 8100$ *(composição do pedido 4)*

$(R5)$ $13x_{11}+12x_{21} + \ldots + 11x_{61}+18x_{71} \leq (14).(1350)$ *(umidade; pedido 1)*

$(R6)$ $13x_{12}+12x_{22} + \ldots + 11x_{62}+18x_{72} \leq (16).(4600)$ *(umidade; pedido 2)*

$(R7)$ $13x_{13}+12x_{23} + \ldots + 11x_{63}+18x_{73} \leq (13).(3200)$ *(umidade; pedido 3)*

$(R8)$ $13x_{14}+12x_{24} + \ldots + 11x_{64}+18x_{74} \leq (15).(8100)$ *(umidade; pedido 4)*

$(R9)$ $6x_{11}+ 4x_{21} + \ldots + 2x_{61}+ 3x_{71} \leq (3).(1350)$ *(impurezas; pedido 1)*

. . . .

$(R12)$ $6x_{14}+ 4x_{24} + \ldots + 2x_{64}+ 3x_{74} \leq (5).(8100)$ *(impurezas; pedido 4)*

$(R13)$ $0{,}77x_{11}+0{,}88x_{21} + \ldots + 0{,}89x_{61}+0{,}78x_{71} \geq (0{,}83).(1350)$ *(peso esp.; pedido 1)*

. . . .

$(R16)$ $0{,}77x_{14}+0{,}88x_{24} + \ldots + 0{,}89x_{64}+0{,}78x_{74} \geq (0{,}85).(8100)$ *(peso esp.; pedido 4)*

$(R17)$ $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} \leq 2350$ *(disponibilidade; lote 1)*

$$(R18)\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} \leq 1900 \text{ (disponibilidade; lote 2)}$$

. . . .

$$(R23)\ x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74} \leq 9100 \text{ (disponibilidade; lote 2)}$$

todas variáveis ≥ 0

Obs.: A restrição $(R5)$ é explicada a seguir. Note que $\frac{x_{11}}{1\,350}, \frac{x_{21}}{1\,350}, \frac{x_{61}}{1\,350}, \ldots, \frac{x_{71}}{1\,350}$ representam, respectivamente, as frações dos lotes 1, 2, ..., 6, 7 que compõem o pedido n.º 1. O teor de umidade resultante no pedido n.º 1 é uma média ponderada dos teores de umidade dos lotes usados para compor o pedido n.º 1, sendo a ponderação do lote i dada por $\frac{x_{i1}}{1\,350}$.

(1.9) Max $D = 17\,R_a + 19\,R_p - 9\,X_{mp} - 9\,X_{ma} - 15\,X_{sp} - 15X_{sa} - 6\,X_{fp} -$
$- 6\,X_{fp}$

dado

$$\begin{aligned}
&(R1)\ X_{mp} + X_{sp} + X_{fp} - R_p = 0\\
&(R2)\ X_{ma} + X_{sa} + X_{fa} - R_a = 0\\
&(R3)\ 2900\,X_{ma} + 2700\,X_{sa} + 2500\,X_{fa} - 2800\,R_a \geq 0\\
&(R4)\ 180\,X_{ma} + 300\,X_{sa} + 160\,X_{fa} - 200\,R_a \geq 0\\
&(R5)\ 18\,X_{ma} + 16\,X_{sa} + 13\,X_{fa} - 14\,R_a \geq 0\\
&(R6)\ 2900\,X_{mp} + 2700\,X_{sp} + 2500X_{fp} - 2500\,R_p \geq 0\\
&(R7)\ 180\,X_{mp} + 300\,X_{sp} + 160\,X_{fp} - 250\,R_p \geq 0\\
&(R8)\ 18\,X_{mp} + 16\,X_{sp} + 13\,X_{fp} - 16\,R_p \geq 0\\
&(R9)\ R_a \geq 600\ ;(R10)\ R_p \geq 600\\
&(R11)\ R_a + R_p \leq 2000
\end{aligned}$$

todas variáveis ≥ 0

Obs.: As restrições $(R1)$ e $(R2)$ definem as quantidades produzidas de ração para porcos (Rp) e para aves (Ra) respectivamente. As variáveis Ra e Rp não são imprescindíveis na formulação; elas podem ser substituídas em todas as vezes que aparecem pelas definições dadas em $(R1)$ e $(R2)$. A restrição $(R3)$ se refere ao requerimento mínimo de energia na ração para aves: o mínimo requerido é 2.800 cal/kg; como serão produzidos *Ra* kg de ração para aves, o requerimento total de energia se eleva à 2.800 *Ra* cal. A restrição (*R3*) estabelece que o total de aportes de energia na ração produzida para aves deve ser igual ou maior que o mínimo requerido.

(1.13) Min $C = 39X_{12} + 39X_{21} + 14X_{13} + \ldots + 21X_{45} + 21X_{54}$

dado
$$
\begin{aligned}
&(R1) \quad X_{21} + X_{31} - X_{12} - X_{13} \geq 25 \\
&(R2) \quad X_{21} + X_{25} + X_{24} - X_{12} - X_{42} - X_{52} \leq 42 \\
&(R3) \quad X_{13} + X_{43} + X_{53} - X_{31} - X_{34} - X_{35} \geq 33 \\
&(R4) \quad X_{34} + X_{34} + X_{54} - X_{42} - X_{43} - X_{45} \leq 56 \\
&(R5) \quad X_{45} + X_{25} + X_{35} - X_{54} - X_{52} - X_{53} \leq 29
\end{aligned}
$$

todos $X_{ij} \geq 0$

Obs.: Todas as restrições têm um mesmo significado geral: em cada local, a soma das quantidades que chegam ao local com a quantidade aí existente em excesso (oferta) deve ser igual ou maior do que a soma das quantidades que saem do mesmo local com a quantidade aí em falta (procura).

(1.15) Min $C = 18.900\ X_1 + 17.800\ X_2 + \ldots + 18.100\ X_6$

dado
$$
\begin{aligned}
&(R1) \quad X_6 + X_1 \geq 28 \\
&(R2) \quad X_1 + X_2 \geq 35 \\
&(R3) \quad X_2 + X_3 \geq 129 \\
&(R4) \quad X_3 + X_4 \geq 151 \\
&(R5) \quad X_4 + X_5 \geq 116 \\
&(R6) \quad X_5 + X_6 \geq 73
\end{aligned}
$$

$X_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,\ldots 6)$

(1.17) Max $RL = 10\ E_{A2} + 8E_{B1} + 8E_{B2} + 15\ E_{C1} + 15E_{C2} + 13E_{D1}$

dado
$$
\begin{aligned}
&(R1) \quad 8\ P_{A1} + 5\ P_{B1} + 7\ P_{C1} \leq 2200 \\
&(R2) \quad 4\ P_{A2} + 12\ P_{C2} + 7\ P_{D2} \leq 2200 \\
&(R3) \quad 6\ P_{B3} + 10\ P_{C3} + 9\ P_{D3} \leq 2200
\end{aligned}
$$

(R4) $2E_{B1} + 6E_{C1} + 5E_{D1} \leq 2200$
(R5) $3\ E_{A2} + 4\ E_{B2} + 4\ E_{C2} \leq 2200$
(R6) $P_{A1} + P_{A2} - E_{A2} = 0$
(R7) $P_{B1} + P_{B3} - E_{B1} - E_{B2} = 0$
(R8) $P_{C1} + P_{C2} + P_{C3} - E_{C1} - E_{C2} = 0$
(R9) $P_{D2} + P_{D3} - E_{D1} = 0$
(R10) e (R11) $E_{A2} \geq 120;\ E_{A2} \leq 210$
(R12) e (R13) $E_{B1} + E_{B2} \geq 50;\ E_{B1} + E_{B2} \leq 150$
(R14) e (R15) $E_{C1} + E_{C2} \geq 50;\ E_{C1} + E_{C2} \leq 100$
(R16) e (R17) $E_{D1} \geq 20;\ E_{D1} \leq 60$

todas as variáveis ≥ 0

(1.18) $\text{Min}\ C = \sum_{i=1}^{7} 5n_i + \sum_{i=1}^{7} 7{,}5e_i + \sum_{i=1}^{7} 35a_i$

dado (R1) $-x_1 + a_1 = -50$
(R2) $-x_2 + l_1 + a_2 + e_1 = 0$
(R3) $-x_3 + l_2 + a_3 + e_2 + n_1 = 0$
. . . .
(R7) $-x_7 + l_6 + a_7 + e_6 + n_5 = 0$
(R8) $x_1 - l_1 - n_1 - e_1 = 0$
(R9) $x_2 - l_2 - n_2 - e_2 = 0$
. . . .
(R14) $x_7 - l_7 - n_7 - e_7 = 0$
(R15) $x_1 - l_1 = 66$
(R16) $x_2 - l_2 = 48$
. . . .
(R24) $x_7 - l_7 = 104$

todas variáveis ≥ 0

Obs.: O conjunto (*R1*) até (*R7*) define a "origem" dos guardanapos disponíveis, enquanto que o conjunto (*R8*) até (*R14*) define o seu "destino". O conjunto (*R15*) até (*R24*) quantifica as demandas diárias.

$$(1.20)\ \text{Max } L = 2400\,P_i + 2400\,P_e + 1900\,S_i + 1900\,S_e - 710\,X_{1g} - 865\,X_{1f} - 590\,X_{2g} - 745\,X_{2f} - 640\,X_{3g} - 795\,X_{3f} - 680\,X_{4g} - 835\,X_{4f}$$

dado (*R1*) $X_{1g}+X_{2g}+X_{3g}+X_{4g}+1{,}33X_{1f}+1{,}33X_{2f}+1{,}33X_{3f} + 1{,}33X_{4f} \leq 4800$

(*R2*) $0{,}91\,(0{,}52X_{1g}+0{,}37X_{2g}+0{,}61X_{3g}+0{,}12X_{4g})+0{,}96\,(0{,}52X_{1f}+0{,}37X_{2f}+0{,}61X_{3f}+0{,}12X_{4f})-P_i-P_e\geq 0$

(*R3*) $0{,}73(0{,}08X_{1g}+0{,}29X_{2g}+0{,}04X_{3g}+0{,}47X_{4g})+0{,}88\,(0{,}08X_{1f}+0{,}29X_{2f}+0{,}04X_{3f}+0{,}47X_{4f})-S_i-S_e\geq 0$

(*R4*) $P_i \geq 800$

(*R5*) $S_i \geq 600$

(*R6*) $X_{1g}+X_{1f} \leq 650$

(*R7*) $X_{2g} + X_{2f} \leq 1430$

(*R7*) $X_{3g} + X_{3f} \leq 1670$

(*R9*) $X_{4g} + X_{4f} \leq 980$

todas variáveis ≥ 0

Obs.: A restrição (*R1*) se refere à capacidade de moagem; uma tonelada de minério moído fino requer $\frac{4\,800}{3\,600} \cong 1{,}33$ vezes mais capacidade de moagem que uma tonelada de minério moído grosso. A restrição (*R2*) estabelece que a produção de Fósforo deve ser igual ou maior que as vendas de Fósforo. De modo análogo (*R3*) representa o balanço entre produção e vendas de Enxofre.

$$(1.25)\ \text{Min } C = \sum_{j=1}^{5} 800\,mj + \sum_{j=2}^{5} 1000\,aj + \sum_{i=2}^{5} 1300\,d_i$$

dado $P_j + e_j - e_{j+1} \geq$ (*demanda do mês j*) $;\ j = 1,2,\ldots,5$

$$m_j + \frac{1}{2}\,e_j + \frac{1}{2}\,e_{j+1} = 0\ ;\ j = 1,2,\ldots,5$$

$$P_j - P_{j-1} - a_{j-1} + d_{j-1} = 0\ ;\ j = 1,2,\ldots,5$$

$e_1 = 200$

$e_j \leq 3500 \;;\; j = 2,3,4,5$

$e_6 = 500$

todas variáveis ≥ 0

(1.26) Min $I = 0{,}081\, e_a + 0{,}053\, e_b + \ldots + 0{,}046\, e_h + 0{,}2\, C^*$

dado (R1) $430\, P_a - 108\, P_f - 95\, P_h + 305\, C_a - Q_a = 37200$

(R2) $750\, P_b - 228\, P_c + 517\, C_b - Q_b = 86100$

. . . .

(R8) $1280\, P_h - 243\, P_b - 277\, P_c + 1410\, C_h - Q_h = 98.350$

(R9) $\dfrac{100}{48300}\, Q_a + e_a = 100$

(R10) $\dfrac{100}{93500}\, Q_b + e_b = 100$

. . . .

(R16) $\dfrac{100}{84500}\, Q_h + e_h = 100$

(R17) $\dfrac{1}{8}\, P_a + \dfrac{1}{8}\, P_b + \ldots + \dfrac{1}{8}\, P_h \leq 4$

(R18) $-5 \leq P_a \leq 10$

(R19) $-5 \leq P_b \leq 10$

. . . .

(R25) $-5 \leq P_h \leq 10$

(R26) $C - \dfrac{1}{20}\, C_a - \dfrac{4}{20}\, C_b - \dfrac{2}{20}\, C_c - \ldots$

$- \dfrac{2}{20}\, C_g - \dfrac{8}{20}\, C_h = 0$

$(R27) \quad -10 \leq C_a \leq 20$

$(R28) \quad -10 \leq C_b \leq 20$

. . . .

$(R35) \quad -10 \leq C_h \leq 20$

$(R36) \quad C - C^* = -10$

$$Q_a, Q_b, \ldots, Q_h \geq 0$$

$$c_a, c_b, \ldots, c_h \gtrless 0$$

$$C_a, C_b, \ldots, C_h, C \gtrless 0$$

$$P_a, P_b, \ldots, P_h \gtrless 0$$

Obs.: Este problema tem variáveis que não se restringem a valores não-negativos, isto é, são livres. *Vide* observação (a) ao final do Capítulo II.

(1.30) Max $P = 930\, s_1 + 980\, s_2 + 950\, s_3 + 860\, s_4$

dado $(R1) \quad s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \leq 6$

$(R2) \quad 14\, l_1 + 8\, g_1 + 5\, s_1 \leq 30$

$(R3) \quad 14\, l_2 + 8\, g_2 + 5\, s_2 \leq 40$

$(R4) \quad 14\, l_3 + 8\, g_3 + 5\, s_3 \leq 48$

$(R5) \quad 14\, l_4 + 8\, g_4 + 5\, s_4 \leq 40$

$(R6) \quad l_1 - g_1 \geq 0$

$(R7) \quad g_1 - S_1 \geq 0$

$(R8) \quad l_1 + l_2 - g_1 - g_2 \geq 0$

$(R9) \quad g_1 + g_2 - s_1 - s_2 \geq 0$

$(R10) \quad l_1 + l_2 + l_3 - g_1 - g_2 - g_3 \geq 0$

$(R11) \quad g_1 + g_2 + g_3 - s_1 - s_2 - s_3 \geq 0$

$(R12) \quad l_1 + l_2 + l_3 + l_4 - g_1 - g_2 - g_3 - g_4 \geq 0$

$(R13) \quad g_1 + g_2 + g_3 + g_4 - s_1 - s_2 - s_3 - s_4 \geq 0$

todas variáveis ≥ 0

Obs.: As restrições (*R6*) até (*R13*) seqüenciam as operações de lavração, gradagem e semeadura: em nenhuma semana deverá ser possível semear área superior quela gradeada e ainda não semeada bem como não deve ser possível gradear área superior àquela lavrada e ainda não gradeada.

(1.31) Max $Y = Z$

$$
\begin{aligned}
-\quad 30\,P + Z &\leq 0 \\
-\quad 20\,P + Z &\leq 500 \\
-\quad 50\,N + Z &\leq 0 \\
-\quad 30\,N + Z &\leq 800 \\
-\quad 35\,K + Z &\leq 0 \\
-\quad 20\,K + Z &\leq 1200 \\
-2500\,C + Z &\leq 0 \\
-1500\,C + Z &\leq 1000 \\
-\quad 150\,S + Z &\leq 0 \\
-\quad 80\,S + Z &\leq 1400 \\
-\quad 15\,I + Z &\leq 2000 \\
Z &\leq 3500
\end{aligned}
$$

$$20\,P + 23\,N + 14\,K + 1100\,C + 35\,S + 40\,I \leq 8000$$

todas variáveis ≥ 0

(1.33) Min $SDA = e_1^+ + e_1^- + e_2^+ + e_2^- + \ldots + e_7^+ + e_7^-$

$$
\begin{aligned}
\text{dado}\quad a + 5b + e_1^+ - e_1^- &= 6700 \\
a + 8b + e_2^+ - e_2^- &= 23900 \\
a + 4b + e_3^+ - e_3^- &= 7600 \\
a + 12b + e_4^+ - e_4^- &= 33400 \\
a + 16b + e_5^+ - e_5^- &= 65200 \\
a + 10b + e_6^+ - e_6^- &= 25800 \\
a + 7b + e_7^+ - e_7^- &= 12100 \\
e_j^+ ,\ e_j^- &\geq 0 \\
a,\ b &\gtrless 0
\end{aligned}
$$

$$(1.38)\quad \text{Max } NA = 3X_{12} + 4X_{13} + 2X_{25} + \ldots + 2X_{79} + 0X_{8,10} + 1X_{9,10}$$

$$\begin{aligned}
\text{dado}\quad (R1)\quad & X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1 \\
(R2)\quad & X_{12} - X_{25} - X_{26} - X_{27} = 0 \\
(R3)\quad & X_{13} - X_{35} - X_{36} - X_{37} = 0 \\
(R4)\quad & X_{14} - X_{45} - X_{46} - X_{47} = 0 \\
(R5)\quad & X_{25} + X_{35} + X_{45} - X_{58} - X_{59} = 0 \\
(R6)\quad & X_{26} + X_{36} + X_{46} - X_{68} - X_{69} = 0 \\
(R7)\quad & X_{27} + X_{37} + X_{47} - X_{78} - X_{79} = 0 \\
(R8)\quad & X_{68} + X_{78} - X_{8,10} = 0 \\
(R9)\quad & X_{69} + X_{79} - X_{9,10} = 0 \\
(R10)\quad & X_{8,10} + X_{9,10} = 1
\end{aligned}$$

$$\text{todos } X_{ij} \geq 0$$

BIBLIOGRAFIA

ARROW, K. *Essays in the theory of risk bearing*. North-Holland, 1970.

BAUMOL, W. L., e FABIAN, T. Decomposition, pricing for decentralization and external economies. *Management Science, 11* (1) :1-32, set. 1964.

CHARNES, A., e COOPER, W. Deterministic equivalents for optimizing and satisficing under chance-constraints. *Operations Research, 11*:18-9, 1963.

CHIANG, A. *Matemática para economistas*. McGraw-Hill, 1982.

DANTZIG, G. B. *Linear programming and extensions*. Princeton University Press, 1963.

DANTZIG, G. B., e FULKERSON, D. R. Minimizing the number of tankers to meet a fixed schedule. *Naval Research Logistic Quarterly, 1*:217-22, 1954.

EISEMANN, K. The trim problem. *Management Science, 3*:279-84, 1957.

FERGUSON, C. E. *Microeconomia*. Editora Forense-Universitária, 1974.

HADLEY, G. *Linear programming*. Addison, Wesley, 1961.

HOLANDA, A. D., e SANDERS JR., J. H. Avaliação da introdução de nova tecnologia para pequenos e médios agricultores sob condições de risco: o Seridó do Rio Grande do Norte. *Rede Economia Rural*, Tomo I, pp. 281-304, 1977.

JACOBS, W. W. The caterer problem. *Naval Research Logistics Quarterly, 1* (2), 1954.

KORNAI, J., e LIPTÁK, T. Two-level planning. *Econometrica, 33* (1) :141-69, 1965.

MANSFIELD, E. *Microeconomia: teoria e aplicação*. Editora Campus, 1978.

RAIFFA, H. *Teoria da decisão*. Vozes/USP, 1977.

ROBICHECK, A., TEICHROEW, D., e JONES, J. Optimal short term financing decisions. *Management Science*, set. 1965.

SENGUPTA, J. Safety-first rules under chance-constrained linear programming. *Operations Research, 17*:112-32, 1969.

SIELKEN JR., R. L., e HARTLEY, H. O. Two linear programming algorithms for unbiased estimation of linear models. *Journal of the American Statistical Association, 68* (343), 1973.

TAKAYAMA, T., e JUDGE, G. G. Spatial and temporal price allocation models. North-Holland Publishing Co., 1971.

WAGNER, H. *Principles of operations research with applications to managerial decisions*. Prentice-Hall, 1969.

YAMANE, T. *Matemática para economistas*, Editora Atlas, 1970.

Composto e impresso no
Centro de Serviços Gráficos
do IBGE, Rio de Janeiro, RJ

PNPE: OUTRAS PESQUISAS CONCLUÍDAS

A IMIGRAÇÃO ESTRANGEIRA PARA O BRASIL NO PERÍODO 1873-1932 — Elisa Reis

AS CAUSAS DA EVOLUÇÃO RECENTE DA POSSE DE BENS DURÁVEIS NO BRASIL — João Saboia

CARACTERÍSTICAS E NATUREZA DO CRESCIMENTO INDUSTRIAL: 1906-1914 — Maria Tereza Versiani

ESTRUTURA INDUSTRIAL NO BRASIL — Sérgio Buarque de Hollanda Filho

INFLAÇÃO E BALANÇO DE PAGAMENTOS — Francisco Lopes e André Lara Resende

SALÁRIO E PRODUTIVIDADE NA INDÚSTRIA DE TRANSFORMAÇÃO: 1970-1976 — Paulo Baltar e Paulo Renato Souza

URBANIZAÇÃO E CUSTOS NUMA ECONOMIA EM DESENVOLVIMENTO: O CASO DE MINAS GERAIS — Afrânio Andrade e Roberto Monte-Mór

A INFLAÇÃO BRASILEIRA NO PÓS-GUERRA — Fernando Holanda Barbosa e Antonio Carlos Porto Gonçalves

ENERGIA E ECONOMIA: UM MODELO INTEGRADO — Eduardo Modiano

INFLAÇÃO E NÍVEL DE ATIVIDADE NO BRASIL — Francisco Lopes

REFORMA FINANCEIRA INTERNA E ABERTURA FINANCEIRA AO EXTERIOR NA AMÉRICA L[illegible] e Carlos Díaz Alejand[illegible]

SÉRIE PNPE

— FUNDAMENTOS DA POLÍTICA PÚBLICA — Jorge Vianna Monteiro

2 — OS SALÁRIOS NA TEORIA ECONÔMICA — Roberto Macedo

3 — ANÁLISE MATEMÁTICA: UM TEXTO PARA ECONOMISTAS Antonio Salazar Pessôa Brandão

4 — PROGRAMAÇÃO LINEAR: CONCEITOS E APLICAÇÕES — Edgar Augusto Lanzer

5 — MOEDA E SISTEMA FINANCEIRO NO BRASIL — André Franco Montoro Filho

6 — ANÁLISE MACROECONÔMICA: UM TEXTO INTERMEDIÁRIO — Edmar Lisboa Bacha

IMPRESSO NO CENTRO
DE SERVIÇOS GRÁFICOS DO IBGE