

TEXTO PARA DISCUSSÃO/Nº211

Interpretando Variações nos Índices de Desigualdade de Theil

Lauro Ramos

MARÇO DE 1991



Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada

O Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada - IPEA
é uma Fundação vinculada ao Ministério da Economia,
Fazenda e Planejamento

PRESIDENTE

Antonio Kandir

DIRETOR TÉCNICO

Ruy de Quadros Carvalho

DIRETOR TÉCNICO ADJUNTO

Luis Fernando Tironi

DIRETOR DE ADMINISTRAÇÃO E FINANÇAS

Renato Moreira

COORDENADOR DE DIFUSÃO TÉCNICA E INFORMAÇÕES

Liscio Fábio de Brasil Camargo

COORDENADOR DE POLÍTICA AGRÍCOLA

Benedito Rosa do Espírito Santo

COORDENADOR DE POLÍTICA INDUSTRIAL E TECNOLÓGICA

Luis Fernando Tironi (interino)

COORDENADOR DE POLÍTICA MACROECONÔMICA

Eduardo Felipe Ohana

COORDENADOR DE POLÍTICA SOCIAL

Luiz Carlos Eichenberg Silva

COORDENADOR REGIONAL DO RIO DE JANEIRO

Ricardo Varsano

TEXTO PARA DISCUSSÃO tem o objetivo de divulgar
resultados de estudos desenvolvidos no IPEA, informando
profissionais especializados e recolhendo sugestões.

Tiragem: 100 exemplares

DIVISÃO DE EDITORAÇÃO E DIVULGAÇÃO

Brasília:

SGAN Q. 908 - MÓDULO E - Cx. Postal 040013

CEP 70.312

COORDENAÇÃO REGIONAL DO RIO DE JANEIRO

Av. Presidente Antonio Carlos, 51 - 13º ao 17º andares

CEP 20.020

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

2. O ÍNDICE THEIL T

3. O ÍNDICE THEIL L

4. RESULTADOS PARA O BRASIL:
1977/85

BIBLIOGRAFIA

INTERPRETANDO VARIAÇÕES NOS ÍNDICES DE DESIGUALDADE DE THEIL

Lauro Ramos

Da Coordenação Regional do IPEA — Rio de Janeiro.

SINOPSE

Este artigo propõe-se a oferecer uma interpretação mais intuitiva para as variações nos índices de desigualdade de Theil. Para tanto as transformações ocorridas na distribuição são "sintetizadas" por esquemas simples de taxas e subsídios que, aplicados à distribuição inicial, geram uma distribuição imaginária com a mesma desigualdade da distribuição final, conforme medida por aqueles índices. A título de ilustração a técnica é aplicada às variações observadas na distribuição de rendimentos no Brasil entre 1977 e 1985.

ABSTRACT

This paper offers an alternative and more intuitive way of interpreting variations in the two Theil inequality indices - Theil T and Theil L. The changes in the distribution are summarized by simple schemes of taxes and subsidies that replicate the observed changes in inequality, as measured by those indices. The technique is applied, for the sake of illustration, to the evolution of the Brazilian earnings distribution from 1977 to 1985.

1. Introdução

Nos últimos anos vários trabalhos [Bonelli e Sedlacek (1989), Reis e Barros (1989), Ramos (1990), entre outros] preocuparam-se com a evolução da desigualdade de renda. A análise desta evolução comumente baseia-se no cálculo de um índice de desigualdade em diferentes períodos, de tal sorte que quando o índice cresce de um período para outro diz-se que, de acordo com ele, a distribuição de renda piorou naquele intervalo de tempo, e *vice-versa*.¹

Este procedimento, todavia, é de pouca ou nenhuma valia para a avaliação da magnitude das transformações nas rendas individuais responsáveis, em última análise, pela variação nos valores do índice, mesmo quando esta é estatisticamente significativa. Naturalmente esta limitação não é uma característica específica dos índices de desigualdade. Em geral qualquer índice é incapaz de fornecer muita informação a respeito das transformações que acontecem no interior da estrutura a que eles se referem, pelo fato básico de serem medidas agregadas que visam a uma descrição sumária de um conjunto de forças e mecanismos em ação dentro daquele contexto. O aspecto do problema mais específico às medidas de desigualdade é que suas estruturas, no mais das vezes, não são transparentes, tornando extremamente difícil a formação de uma "intuição" para o significado de alterações em seus valores.

Neste artigo tentaremos caminhar na direção de prover meios mais familiares e intuitivos para entender a dimensão das mudanças associadas a uma determinada variação nos valores dos índices propostos por Theil (1967). Para tanto,

tais variações serão traduzidas, via mecanismos hipotéticos de redistribuição, em um esquema simples de taxas e subsídios que, aplicados à distribuição do ano t , gerariam uma distribuição imaginária com o mesmo índice de concentração daquela do ano $t+1$, quando medido por um daqueles índices.

O primeiro destes mecanismos consiste em um esquema de taxaões/subsídios seletivos, de acordo com a posição dos indivíduos na distribuição e o hiato entre seus rendimentos e a média populacional. Em termos mais concretos, todos os indivíduos teriam seus rendimentos (Y_i) alterados em $t(\bar{Y} - Y_i)$, onde $0 \leq t \leq 1$ ² e \bar{Y} corresponde à renda média da população, de tal modo que suas "novas" rendas (Y'_i) seriam dadas por

$$Y'_i = Y_i + t(\bar{Y} - Y_i) = (1-t)Y_i + t\bar{Y} \quad (1)$$

Este esquema de realocação de renda é obviamente compatível com uma sequência de transferências progressivas do tipo Dalton Pigou³ que preservam tanto a média como a ordenação da distribuição original.⁴ Ele pode ser entendido como uma taxação seletiva e proporcional (isto é, um imposto apenas para aqueles que estão acima da média, e igual a uma percentagem da parcela acima desta), em conjunto com um subsídio seletivo e proporcional (ou seja, um subsídio apenas para aqueles abaixo da média, equivalente a uma percentagem fixa de sua distância a ela),⁵ que operam no sentido de melhorar a distribuição.⁶ Naturalmente, quanto maior for t , maior será a redistribuição e, conseqüentemente, maior a melhoria associada.

1 *Implícita aqui está a hipótese de que não há modificações importantes no processo de mobilidade de renda. Há indicações, no entanto, de que houve variações sensíveis nesta mobilidade em períodos recentes [Pastore (1989), Adelman e Morley (1990)].*

2 *Esta restrição assegura que a distribuição assim induzida iria Lorenz-dominar a distribuição original. Assim, os índices de Theil, como qualquer outra medida de desigualdade compatível com critério de Lorenz, decresceriam após a redistribuição.*

3 *Se, alternativamente, definimos $-1 \leq t \leq 0$, o processo seria equivalente a uma série de transferências regressivas.*

4 *Vale salientar que o mecanismo proposto por Blackburn (1989) em um exercício semelhante para o coeficiente de Gini induz reversões na ordenação dos indivíduos de acordo com seus rendimentos.*

5 *Tal esquema pode ser visto, alternativamente, como um imposto proporcional à renda individual ($t \cdot 100\% Y_i$), com posterior repartição equitativa do total assim gerado.*

6 *Ou piorá-la, no caso em que $-1 \leq t \leq 0$.*

Alternativamente será analisado um esquema de redistribuição, chamado aqui de "transferências em bloco" por simplicidade, onde k.100% da renda ($k \geq 0$) dos (1-p).100% ($0 < p < 1$) indivíduos mais ricos são transferidos para os p.100% mais pobres, o que, admitindo-se que arrecadação e distribuição são feitas de modo proporcional dentro de cada estrato - implica a elevação da renda destes em t.100%.⁷ Ou seja, as "novas" rendas seriam dadas por:

$$Y'_i = (1 + k)Y_i \quad \text{para o estrato superior,} \quad (2a) \text{ e}$$

$$Y'_i = (1 + t)Y_i \quad \text{para o estrato inferior.} \quad (2b)$$

2. O Índice Theil T

O primeiro índice proposto por Theil, o Theil T, é definido por:

$$T = (1/N) \sum_i (Y_i/\bar{Y}) \log (Y_i/\bar{Y}) \quad (3)$$

onde N é o tamanho da população em questão.

Quando a população, por um critério qualquer, é dividida em, digamos, G grupos distintos, pode-se reescrever T da seguinte maneira:

$$T = \sum_{g=1}^G \alpha_g \beta_g \log \alpha_g + \sum_{g=1}^G \alpha_g \beta_g T_g \quad (4)$$

onde $\alpha_g = Y_g/\bar{Y}$, $\beta_g = n_g/N$, Y_g é a renda média dos membros do grupo g, n_g é o número de elementos do g-ésimo grupo e T_g é o índice de Theil relativo exclusivamente àquela categoria.

2.1 - Taxação Seletiva e Proporcional ao Hiato em Relação à Média

Se substituirmos (1) em (3), temos que:

$$T' = (1/N) \sum_{i=1}^N \{[(1-t)Y_i + t\bar{Y}]/\bar{Y}\} \log \{[(1-t)Y_i + t\bar{Y}]/\bar{Y}\} =$$

$$= (1/N) \sum_{i=1}^N \{[(1-t)(Y_i/\bar{Y}) + t]\} \log \{[(1-t)(Y_i/\bar{Y}) + t]\} =$$

$$= (1/N) \sum_{i=1}^N \{[(1-t)\alpha_i + t]\} \log \{[(1-t)\alpha_i + t]\} \quad (5)$$

Aplicando uma expansão de Taylor de primeira ordem tem-se que:

$$\log[(1-t)\alpha_i + t] \cong \log \alpha_i + t(1-\alpha_i)/\alpha_i \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5), chega-se a:

$$T' \cong (1/N) \{ (1-t) \sum_{i=1}^N \alpha_i \log \alpha_i + (1-t)t \sum_{i=1}^N (1-\alpha_i) +$$

$$+ t \sum_{i=1}^N \log \alpha_i + t^2 \sum_{i=1}^N [(1-\alpha_i)/\alpha_i] \}$$

Enquanto o segundo termo na relação acima é igual a zero, o último é negligível se $t^2 < \min \{ \alpha_i \}$.⁸ Assim, pode-se escrever que:

$$T' \cong (1-t) \{ (1/N) \sum_{i=1}^N \alpha_i \log \alpha_i \} + t \{ (1/N) \sum_{i=1}^N \log \alpha_i \}$$

O primeiro termo entre colchetes nada mais é do que o Theil T original, e o segundo corresponde ao recíproco da segunda medida proposta por Theil, o Theil L (L). Assim:

$$T' \cong (1-t)T - tL \Rightarrow \Delta T = T' - T \cong -t(T+L) \quad (7)$$

Para relacionar o resultado em (7) com a magnitude da mudança na distribuição entre dois instantes de tempo basta imaginar quão grande deveria ser a taxa (t_T) que, aplicada às rendas do período inicial, geraria uma distribuição com um índice de Theil T igual ao do período final. Tal medida é prontamente obtida de (7):

$$t_T \cong (T_t - T_t + 1)/(T_t + L_t) \quad (8)$$

7 Pode-se mostrar que, para valores razoáveis de k, a distribuição assim gerada Lorenz-domina a original, o contrário ocorrendo para $k < 0$.

8 Esta é uma condição suficiente, mas não necessária, para a maioria das distribuições estatísticas mais comuns. Vale frisar também que esta restrição limita a aplicabilidade do resultado final ao contexto de rendas positivas. Para um t igual a 0.1, que, como será visto adiante corresponde a alterações de monta na distribuição, esta restrição equivale a requerer que as rendas mensais individuais, no caso brasileiro, sejam superiores a 1/20 do salário mínimo, aproximadamente.

onde T_t e L_t são os índices de Theil para o período inicial e T_{t+1} é o índice para o período final.

3 - O Índice Theil L

O segundo índice de Theil, o Theil L, é definido por:

$$L = \log(\bar{Y}/\mu_g) = - (1/N) \sum_{i=1}^N \log(Y_i/\bar{Y}) \quad (9)$$

onde μ_g é a média geométrica das rendas individuais.

Quando a população é dividida em G grupos distintos, pode-se reescrever L da seguinte maneira:

$$L = - \sum_{g=1}^G \beta_g \log \alpha_g + \sum_{g=1}^G \beta_g L_g \quad (10)$$

onde $\alpha_g = Y_g/\bar{Y}$, $\beta_g = n_g/N$, Y_g é a renda média dos membros do grupo g, n_g é o número de elementos do g-ésimo grupo e L_g é o Theil L relativo exclusivamente àquela categoria.

Se pensarmos em dois grupos, o primeiro com uma fração p_1 da população e uma fração s_1 da renda total, o segundo com $p_2 = 1 - p_1$ e $s_2 = 1 - s_1$, respectivamente, podemos expressar L como:

$$L = - [p_1 \log (s_1/p_1) + p_2 \log (s_2/p_2)] + p_1 L_1 + p_2 L_2 \quad (11)$$

3.1 - Taxação Seletiva e Proporcional ao Hiato em Relação à Média

Chamando de s_1 e p_1 a fração da renda e da população que corresponde ao grupo com rendimentos abaixo da média, têm-se que uma redistribuição de acordo com (1) levaria a:

$$s'_1 = s_1 + t(p_1 - s_1) \quad (12)$$

Assim, com o auxílio de (11) e (12), podemos escrever que⁹:

$$L - L' = p_1 \log (1+t(p_1-s_1)/s_1) + (1-p_1) \log (1-t(p_1-s_1)/(1-s_1))$$

$$\equiv p_1 t(p_1 - s_1)/s_1 - (1 - p_1) t(p_1 - s_1)/(1-s_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \equiv \frac{s_1 (1 - s_1)}{(p_1 - s_1)^2} (L - L') \quad (13)$$

A partir de (12) tem-se que a taxa (t_L) que, aplicada às rendas do período inicial, geraria uma distribuição com um índice de Theil L idêntico ao do período final é:

$$t_L \equiv \frac{s(1-s)}{(p-s)^2} (L_t - L_{t+1}) \quad (14)$$

onde L_t e L_{t+1} são os índices de desigualdade para os períodos inicial e final, e s e p são, respectivamente, as frações de renda e população do grupo com rendimentos abaixo da média.

3.2 - Transferências em Bloco

Suponhamos que a população é agrupada em dois blocos quaisquer. Sejam p_1 e s_1 as frações da população e da renda total relativas ao primeiro grupo, e $p_2 = 1 - p_1$, $s_2 = 1 - s_1$ aquelas relativas ao segundo.¹⁰ Seja L o grau de concentração de renda nesta população conforme o Theil L. Se os membros do segundo grupo são taxados em $k.100\%$ e os do primeiro subsidiados em $t.100\%$, conforme descrito por (2), a mudança no Theil L é dada por:

$$L - L' = \Delta L = p_1 \log (1+t) + p_2 \log (1+k) \equiv \equiv p_1 t + (1-p_1)k \Rightarrow k \equiv (\Delta L - p_1 t)/(1-p_1) \quad (15)$$

Por consistência tem-se que:

$$(1+t) s_1 + (1+k) s_2 = 1 \Rightarrow k = -t s_1 / (1-s_1) \quad (16)$$

De (15) e (16) tem-se de imediato que:

$$t \equiv \frac{(1-s)}{(p_1 - s_1)} \Delta L \quad \text{e} \quad k \equiv \frac{s_1}{(p_1 - s_1)} \Delta L \quad (17)$$

⁹ Note-se que estamos desconsiderando os efeitos de tal distribuição em L_1 e L_2 .

¹⁰ Isto é, os dois grupos correspondem a uma partição da população. Esta hipótese torna ligeiramente mais simples a manipulação algébrica do problema, mas não é necessária. O único requerimento para o exercício é que os dois grupos sejam mutuamente exclusivos.

Assim, os valores de k e t que geram uma distribuição hipotética com um Theil L equivalente ao da distribuição no ano $t+1$, via taxaço dos "mais ricos" no ano t em $k.100\%$, juntamente com um subsídio aos "mais pobres" de $t.100\%$, são dados por:

$$t_B \equiv \frac{(1-s)}{(p-s)} (L_t - L_{t+1}) \quad \text{e} \quad k_B \equiv \frac{s}{(p-s)} (L_t - L_{t+1}) \quad (18)$$

4 - Resultados para o Brasil: 1977/85

Com o objetivo de ilustrar a aplicação desta técnica foram calculadas as taxas/subsídios a incidir sobre a diferença das rendas em relação às médias de modo a replicar as variações na distribuição de rendimentos no Brasil¹¹ entre 1977 e 1985. Na tabela a seguir são apresentados os índices de Theil para o período em questão [ver Ramos (1990)], assim como os "t" associados ao Theil T e ao Theil L - t_T e t_L ,¹² respectivamente - para as variações anuais e quadrienais. A evolução da desigualdade entre 1981 e 1985, por exemplo, pode ser sintetizada por um processo de transferências regressivas de renda da base para o topo da escala salarial equivalente a entre 7,3 e 9,1% da diferença

entre os salários individuais e a média.¹³

Vale a pena frisar a semelhança entre os resultados encontrados com base nos dois índices, notoriamente para a década de 70. A única discordância acentuada - entre 1983 para 1984 - deve-se, na realidade, a divergências nas indicações destes índices para aquela transição - enquanto o Theil T diagnostica uma melhoria na distribuição, o Theil L aponta uma elevação da desigualdade naquele interim - em decorrência de diferenças nas sensibilidades a transferências de cada um deles, conforme discutido em Barros e Ramos (1989).

Para finalizar, vale frisar que, como estamos ainda lidando com medidas agregadas, não podemos afirmar muito além de que taxas mais altas estão relacionadas com alterações mais substantivas na distribuição, enquanto taxas pequenas revelam mudanças de menor envergadura. É certo porém que, apesar de fornecer uma idéia bastante crua das transformações acontecidas, esta métrica alternativa tem um maior apelo intuitivo para a compreensão da magnitude destas do que a simples comparação dos valores dos índices de concentração.

11 Homens entre 18 e 65 anos, ocupados, trabalhando 20 horas ou mais por semana em regiões urbanas.

12 Para o cálculo de t_L tomou-se por base os s e p médios do período (0.35 e 0.75, respectivamente).

13 Ou, alternativamente, a uma taxaço uniforme em termos absolutos, seguida de um subsídio equivalente a entre 7,3 e 9,1% das rendas individuais.

Tabela 1
 Variações na Desigualdade de Renda no Brasil: 1977/85

Ano	T	L	t_T^* (%)	t_T^{**} (%)	t_L^* (%)	t_L^{**} (%)
1977	0,607	0,511	-		-	-
1978	0,571	0,488	3,2		3,3	
1979	0,560	0,486	1,0	77/81	0,3	77/81
1981	0,513	0,457	4,5	8,4	4,1	7,7
1982	0,527	0,465	-1,4		-1,1	
1983	0,565	0,496	-3,8		-4,4	
1984	0,558	0,498	0,7	81/85	-0,3	81/85
1985	0,584	0,521	-2,5	-7,3	-3,3	-9,1

* Relativo à variação anual.

** Relativo à variação quadrienal.

BIBLIOGRAFIA

- ADELMAN, I. e MORLEY, S. Measuring income mobility with census data. North-East Development Economics Conference, Economic Growth Center, Yale University, 1990, mimeo.
- ANAND, S. Inequality and poverty in Malaysia: measurement and decomposition. New York: Oxford University Press, 1983.
- BARROS, R.P. e RAMOS, L. Medidas de desigualdade. Rio de Janeiro: Terceira Escola de Séries Temporais e Econometria, 1989.
- BLACKBURN, L. Interpreting the magnitude of changes in measures of income inequality. Journal of Econometrics, v. 42: 21- 25, 1989.
- BONELLI, R. e SEDLACEK, G. Distribuição de renda: evolução no último quarto de século. In: Barros, R.P. e Sedlacek, G. (eds.), Mercado de trabalho e distribuição de renda: uma coletânea. Rio de Janeiro: INPES/IPEA, 1989.
- PASTORE, J. Inequality and social mobility: ten years later. In: BACHA, E. e KLEIN, H., (eds.), Social Change in Brazil - 1945/1985: The incomplete transition. Albuquerque: University of New Mexico Press, 1989.
- RAMOS, L. The distribution of earnings in Brazil: 1976-1985. Berkeley: University of California, 1990 (Dissertação de Doutorado).
- REIS, J.G.A. e BARROS, R.P. Um estudo da evolução das diferenças regionais da desigualdade no Brasil. Textos para Discussão Interna No. 178, IPEA/INPES, Rio de Janeiro, 1989.
- THEIL, H. Economics and information theory. Amsterdam: North-Holland, 1967.
-

