MICROECONOMIA: TEORIA, MODELOS ECONOMÉTRICOS E APLICAÇÕES À ECONOMIA BRASILEIRA

FERNANDO DE HOLANDA BARBOSA

IPEA
Instituto de Planejamento Econômico e Social

PROGRAMA NACIONAL DE PNPE PESQUISA ECONÔMICA

PROGRAMA NACIONAL DE PESQUISA ECONÔMICA

(PNPE)

Criado em 1973, o PNPE tem como finalidade precípua estimular a produção científica, através da promoção da pesquisa acadêmica individual na área de Economia. As entidades promotoras do PNPE são: Instituto de Planejamento Econômico e ocial — IPEA, Financiadora de Estudos de Projetos — FINEP, Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social — BNDES, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística — IBGE e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico — CNPq. A princípio, o Programa foi administrado pelo antigo BNDE e, a partir de 1975, passou a ser gerido pelo IPEA/INPES.

CONSELHO DIRETOR DO PNPE:

Presidente: *José Flávio Pécora* (Secretário-Geral da SEPLAN e Presidente do IPEA)

Jessé de Souza Montello (Presidente do IBGE)

José Carlos da Fonseca (Presidente do BNDES)

Lynaldo Cavalcanti de Albuquerque (Presidente do CNPq)

José Augusto Arantes Savasini (Superintendente do Instituto de Planejamento — IPLAN/IPEA)

Michal Gartenkraut (Superintendente do Instituto de Pesquisas INPES/IPEA e Secretário-Executivo do PNPE)

MICROECONOMIA: TEORIA, MODELOS ECONOMÉTRICOS E APLICAÇÕES À ECONOMIA BRASILEIRA

FERNANDO DE HOLANDA BARBOSA

FERNANDO DE HOLANDA BARBOSA, doutor em Economia pela Universidade de Chicago (1975), é Professor da Escola de Pós-Graduação em Economia (EPGE) da Fundação Getulio Vargas e do Curso de Mestrado em Engenharia de Produção da Universidade Federal Fluminense.

INSTITUTO DE PLANEJAMENTO ECONÔMICO E SOCIAL
PROGRAMA NACIONAL DE PESQUISA ECONÔMICA

Série PNPE — 10

MICROECONOMIA: TEORIA, MODELOS ECONOMÉTRICOS E APLICAÇÕES À ECONOMIA BRASILEIRA

FERNANDO DE HOLANDA BARBOSA

Rio de Janeiro
IPEA/INPES
1985

Capa de L. C. Dias

Barbosa, Fernando de Holanda

Microeconomia: teoria, modelos econométricos e aplicações à economia brasileira. Rio de Janeiro, IPEA/INPES, 1985.

556 p. (IPEA/INPES. Série PNPE, 10).

1. Microeconomia — teoria. 2. Modelos econométricos — Brasil. I. Instituto de Planejamento Econômico e Social. Instituto de Pesquisas. II. Série. III. Título.

CDD 338.5
CDU 330.101.542 (81)

Este trabalho é da inteira e exclusiva responsabilidade de seu autor. As opiniões nele emitidas não exprimem, necessariamente, o ponto de vista da Secretaria de Planejamento da Presidência da República.

* INSTITUTO DE PLANEJAMENTO ECONÔMICO E SOCIAL

Serviço Editorial

Av. Pres. Antônio Carlos, 51 — 13.º andar — Rio de Janeiro (RJ) — CEP 20.020

Para Lívia, Ana Luiza, Gerana, Fernando, Maria Isabel e Sylvio.

SUMÁRIO

Segunda Parte: TEORIA DA PRODUÇÃO E CUSTO

PREFÁCIO

Este livro se diferencia das demais publicações referentes à microeconomia pelo fato de que, como o próprio subtítulo indica, combina teoria econômica, modelos econométricos e aplicações empíricas à economia brasileira com o objetivo de ajudar a disseminar, de um ponto de vista prático, a posição metodológica de que a teoria é uma ferramenta de análise, cujas proposições devem ser, em última instância, submetidas ao veredito dos dados.

O livro se preocupa, dentro desta concepção, em destacar aquelas proposições teóricas que podem ser, pelo menos potencialmente, refutadas através da observação empírica. A maioria destas proposições resulta de exercícios de estática comparativa, daí a ênfase que se encontra ao longo do texto com o estudo das respostas das variáveis endógenas com relação às mudanças das variáveis exógenas de cada modelo.

Procura também mostrar como as proposições da teoria econômica podem ser submetidas ao veredito dos dados através da formulação de modelos econométricos, cuja especificação é fundamentada na teoria econômica e nos métodos estatísticos.

A aplicação de modelos econométricos aos dados de uma realidade empírica concreta é ilustrada com exemplos extraídos da literatura econômica brasileira recente.

Organização do Livro

Organiza-se este trabalho em três partes. A primeira contém quatro capítulos, a segunda dois e a terceira é formada por três capítulos.

A primeira parte trata da teoria do consumidor. O Capítulo I apresenta os principais teoremas da teoria ordinal do consumidor, introduz as funções-utilidade indireta e de custo, sintetiza as principais conclusões com o auxílio da equação matricial fundamental da teoria do consumidor e discute a teoria econômica dos índices de custo de vida e de renda real. O Capítulo II contém aplicações da teoria do consumidor no que toca à especificação econométrica de equações de demanda, de sistemas de equações de demanda e de curvas de Engel. Além disso, esse capítulo exemplifica as aplicações econométricas com o estudo da demanda de café nos Estados Unidos e de curvas de Engel para a economia brasileira. O Capítulo III cuida do problema de alocação do tempo, desenvolvendo a análise convencional da escolha entre renda e lazer e, também, introduz os ingredientes básicos da economia da produção familiar. A última seção desse capítulo é dedicada ao estudo econométrico da oferta de mão-de-obra, desenvolvido por Oliveira, a partir de dados de corte transversal coletados na cidade de Belo Horizonte. O capítulo seguinte trata da alocação intertemporal, dando ênfase às teorias que tratam da função-consumo, da demanda de bens de consumo duráveis e da demanda de moeda. Esse capítulo finaliza com a apresentação e discussão de resultados de duas pesquisas de demanda de automóveis efetuadas com dados brasileiros.

A segunda parte do livro cuida da teoria da produção. O Capítulo V introduz os conceitos básicos da função de produção, apresenta algumas funções que têm sido largamente utilizadas em estudos empíricos e exemplifica o uso dessas funções através de uma resenha de cinco estudos econométricos realizados no Brasil. O Capítulo VI trata do custo de produção da empresa, estuda a demanda de fatores quando o nível de produção é uma variável exógena, estabelece as propriedades a que uma função de custo deve satisfazer, mostra a dualidade entre custo e função de produção, apresenta exemplos de função de custo e discute dois estudos de demanda de mão-de-obra levados a cabo com dados extraídos da economia brasileira.

A terceira parte do livro apresenta a teoria da empresa em diferentes estruturas de mercado, bem como o equilíbrio do mercado em concorrência perfeita. O Capítulo VII cuida da teoria da empresa em concorrência perfeita, deriva as propriedades das equações de demanda de fatores e de oferta de produto, introduz a função de lucro, que é a contrapartida da função-utilidade indireta da teoria do consumidor no caso da teoria da empresa, discute os problemas de equilíbrio de longo prazo e sumaria as principais proposições do capítulo através da equação matricial fundamental da teoria da empresa. A penúltima seção desse capítulo é dedicada inteiramente ao estudo da especificação econométrica da equação de oferta de produtos agrícolas e contém, também, resultados de três estudos empíricos realizados no Brasil. A última seção trata da teoria do investimento da empresa. O Capítulo VIII começa com o modelo de equilíbrio parcial e é ilustrado empiricamente com o estudo da especificação econométrica das equações de oferta de exportação e de demanda de importação. Três exemplos da literatura econômica brasileira mostram os problemas que surgem na especificação e estimação de tais equações. A terceira seção do Capítulo VIII apresenta as principais características do modelo de equilíbrio geral de dois produtos e dois fatores, largamente utilizado na teoria do comércio internacional. A quarta seção é dedicada à teoria econômica dos índices de produto real e de preços de produção e a última trata do modelo estático aberto de insumo-produto. O Capítulo IX se inicia com o modelo da empresa monopolista. Em seguida, apresenta-se o modelo da empresa em concorrência monopolista. Por fim examinam-se os seguintes modelos da empresa oligopolista: Cournot, coalizão, maximização de receita e preço-limite de entrada.

No final de cada capítulo o eventual leitor encontrará um bom número de exercícios com o escopo de ajudá-lo no processo de aprendizagem. Alguns são exercícios clássicos, baseados em artigos que certamente demandaram uma boa dose de tempo daqueles que os escreveram, e cuja resolução não se constitui em uma tarefa trivial.

Pré-Requisitos

Embora todo material de teoria econômica apresentado não pressuponha prévio conhecimento do leitor, é recomendável uma certa familiaridade com o conteúdo de livros introdutórios que apresentam um tratamento verbal e gráfico da microeconomia.

No que concerne aos modelos econométricos, pressupõe-se o conhecimento do modelo linear (regressão simples e múltipla) ao nível dos livros de econometria que tratam deste assunto, como, por exemplo, o de J. Kmenta, *Elementos de econometria* (traduzido pela Editora Atlas).

Quanto ao nível matemático, o texto utiliza conhecimentos básicos de cálculo diferencial e integral e de álgebra linear. O Apêndice Matemático ao final do livro apresenta de maneira concisa, sem nenhuma preocupação com rigor, os principais resultados que são largamente usados no texto. Todavia, este apêndice consiste apenas em uma revisão e ele não pretende fornecer o conhecimento básico nas referidas disciplinas.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar aos alunos que direta ou indiretamente contribuíram com suas sugestões para as sucessivas revisões que originaram a presente versão deste livro, resultado de vários cursos ministrados em diferentes instituições ao longo dos últimos cinco anos, especialmente na Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas e no Curso de Mestrado em Engenharia de Produção da Universidade Federal Fluminense.

O financiamento recebido do Programa Nacional de Pesquisa Econômica (PNPE), administrado pelo INPES/IPEA, tornou possível não somente o trabalho de revisão final, com a introdução de algumas modificações, mas também viabilizou a sua publicação.

Durante o longo período de elaboração, as sucessivas revisões do material contido neste livro foram datilografadas por várias pessoas que desempenharam com bastante eficiência a tarefa árdua de troca freqüente de esferas que um trabalho cheio de símbolos requer, e, entre elas, eu gostaria de mencionar Sheila de Miranda Drbal e Maria Helena de Almeida Leão, do INPES/IPEA, Ofélia Barbosa de Barros e Regina Helena Luz, da EPGE/FGV.

Primeira Parte

TEORIA DO CONSUMIDOR

Capítulo I

TEORIA DO CONSUMIDOR

Este capítulo tem como objetivo apresentar a teoria do consumidor. A primeira seção trata da teoria ordinal e deduz as principais implicações a que se chega sobre as equações de demanda de bens e serviços. A segunda seção introduz a função-utilidade indireta, explicita as propriedades que ela deve atender e mostra como obter-se as equações de demanda a partir da função-utilidade indireta. A terceira seção cuida da equação matricial fundamental da teoria do consumidor, que se constitui numa maneira elegante e compacta de se apresentar as principais proposições da teoria do consumidor. A quarta seção é dedicada à teoria dos números índices, que tem como ponto de partida a função de custo ou despesa do consumidor. O estudo detalhado da função de custo está contido no Capítulo VI, pois do ponto de vista formal inexiste qualquer diferença entre as funções de custo do consumidor e da empresa.

I.1 — A Teoria Ordinal do Consumidor

A teoria do consumidor contém dois ingredientes básicos: a função-utilidade que traduz as preferências e a restrição orçamentária indicadora do conjunto factível de opções do consumidor. A função-utilidade é deduzida a partir de alguns axiomas que dão substância à idéia de um consumidor racional. A limitação orçamentária, por sua vez, traduz o fato de que o consumidor não pode comprar bens e serviços além dos recursos de que dispõe, sejam provenientes dos rendimentos do patrimônio, do trabalho ou de sua capacidade de endividamento. A seguir, cuidamos de introduzir cada um destes ingredientes.

I.1.1 — As Preferências do Consumidor e sua Limitação Orçamentária

A teoria ordinal do consumidor afirma que as escolhas dos indivíduos refletem um conjunto de preferências que seguem os seguintes axiomas:

Axioma 1: *Axioma da Comparabilidade* — Para quaisquer duas cestas de bens $q^1 = (q_1^1, q_2^1, \ldots, q_n^1)$ e $q^2 = (q_1^2, q_2^2, \ldots, q_n^2)$, onde q_i^j é a quantidade do bem i na cesta j, o consumidor é capaz de dizer se a cesta 1 é preferida ($>$) ou equivalente ($=$) à cesta 2, $q^1 \geqslant q^2$, ou se a cesta 2 é preferida ($>$) ou equivalente ($=$) à cesta 1, $q^2 \geqslant q^1$. Basicamente, este axioma admite que as relações de preferência são completas.

Axioma 2: *Axioma da Transitividade* — Dadas quaisquer três cestas q^1, q^2 e q^3, se $q^1 \geqslant q^2$ e $q^2 \geqslant q^3$, então $q^1 \geqslant q^3$. Em outras palavras, se a cesta q^1 é preferida à cesta q^2, e esta por sua vez é preferida à cesta q^3, então a cesta q^1 é preferida à cesta q^3. Este axioma admite que as preferências dos consumidores são consistentes.

Os axiomas 1 e 2 não são suficientes para estabelecer a existência de uma função-utilidade. Com efeito, é possível existirem preferências tais que seria impossível traçar uma curva contínua separando uma dada cesta q das cestas que são preferidas daquelas que não são. Um exemplo clássico desse tipo de situação é o caso da preferência lexicográfica. Este tipo de preferência lembra o processo de se elaborar um dicionário, e daí o seu nome. No dicionário, as palavras são listadas de acordo com a primeira letra; no caso de duas palavras com a mesma letra inicial, a posição da palavra será dada pela segunda letra; quando as duas primeiras letras coincidem, a posição da palavra será dada pela terceira letra; e assim por diante. No caso do consumidor, cujas preferências são lexicográficas, admita-se que ele tenha a opção de escolher entre as duas cestas $q^1 = (q_1^1, q_2^1, \ldots, q_n^1)$ e $q^2 = (q_1^2, q_2^2, \ldots, q_n^2)$. Então, o consumidor prefere a cesta q^1 a q^2 se $q_1^1 > q_1^2$, independente das quantidades dos demais bens nas duas cestas. Quando as quantidades do primeiro bem são iguais, $q_1^1 = q_1^2$, o consumidor prefere a cesta q^1 a q^2 se $q_2^1 > q_2^2$, independente das quantidades dos demais bens. Da mesma forma quando $q_1^1 = q_1^2$ e $q_2^1 = q_2^2$ o consumidor prefere q^1 a q^2 se $q_3^1 > q_3^2$, e assim por diante. Uma visão gráfica deste tipo de preferência pode ser dada imaginando-se que as cestas 1 e 2 contêm apenas dois bens, como indicado na figura a seguir. O ponto A na Figura I.1 corresponde à cesta q^1 e é preferido a qualquer ponto ($=$ cesta) no segmento AB e também a qualquer ponto na área hachurada, como o ponto D. O ponto C, por sua vez, é preferido ao ponto A, pois a quantidade q_1 do primeiro bem é a mesma em ambas as cestas, enquanto a quantidade do segundo bem é maior na cesta C. Observe que os pontos C e D podem ficar tão próximos do ponto A quanto se queira e ainda assim eles não se tornam indiferentes ao ponto A. Daí a impossibilidade de se poder traçar uma curva separando os pontos que são preferidos ao ponto A, como o ponto C, daqueles que não são preferidos ao ponto A, como o ponto D. Com o intuito de excluir-se este tipo de preferência introduz-se o seguinte axioma:

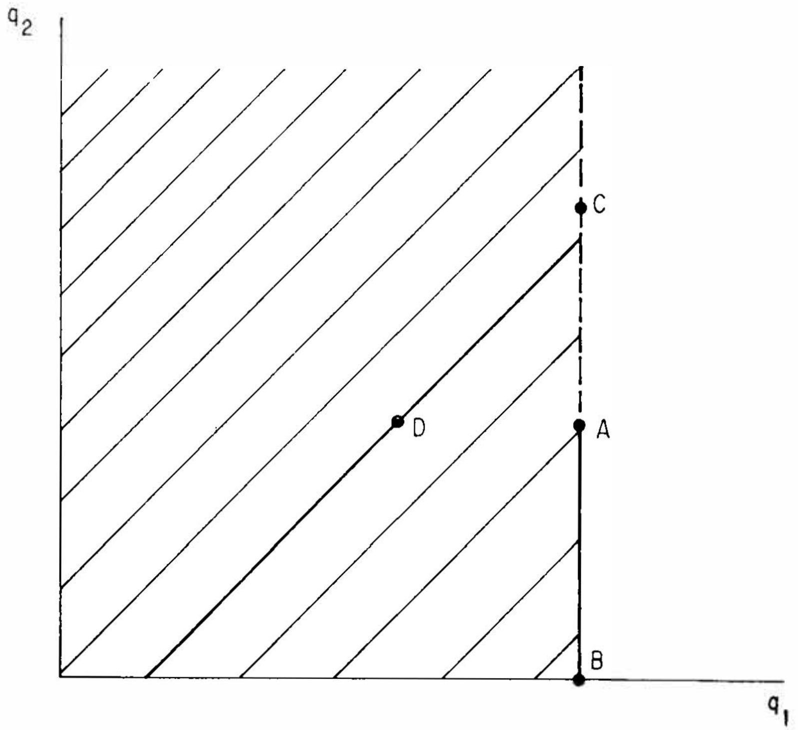
Axioma 3: *Axioma da Continuidade* — O conjunto de cestas que são indiferentes ou não são preferidas a uma dada cesta e o conjunto de cestas que são preferidas ou indiferentes a esta dada cesta são ambos fechados, qualquer que seja a cesta escolhida.

Pode-se provar que os três axiomas acima são suficientes para estabelecer a existência de uma função-utilidade:

$$u(q) = u(q_1, q_2, \ldots, q_n) \tag{1.1}$$

Figura I.1

PREFERÊNCIAS LEXICOGRÁFICAS



função real das quantidades consumidas $q_1, q_2, \ldots, q_n$, tal que, se a cesta q^1 é preferida a q^2, $q^1 > q^2$, então a utilidade associada à cesta q^1 é maior ou igual à utilidade associada à cesta q^2. Em símbolos:

$$u(q^1) \geqslant u(q^2)$$

A função-utilidade $u(q)$ não é única, pois qualquer transformação monotônica crescente de $u(q)$, digamos $F[u(q)]$, $F' > 0$, é também uma função-utilidade.

Além dos três axiomas já citados é usual admitir-se que a função-utilidade $u(q)$ satisfaça aos seguintes axiomas:

Axioma 4: Axioma da Monotonicidade — Entre duas cestas $q^1 = (q_1^1, q_2^1, \ldots q_n^1)$ e $q^2 = (q_1^2, q_2^1, \ldots, q_n^1)$, o consumidor prefere a que contiver maior quantidade do primeiro bem. Segue-se, então, que, se q_1 for maior que q_2, o consumidor prefere a cesta q^1. Este axioma traduz a idéia de não-saciedade do consumidor.

Axioma 5: Axioma da Convexidade Estrita — Se duas cestas q^1 e q^2 são indiferentes, então uma combinação linear de q^1 e q^2 é preferida tanto a q^1 quanto a q^2. Este axioma reflete a idéia de que o consumidor prefere uma cesta diversificada a uma cesta contendo um único bem.

Axioma 6: Axioma da Diferenciabilidade — A função-utilidade $u(q)$ possui derivadas contínuas de segunda ordem. Segue-se, então, de acordo com um teorema bem conhecido do cálculo diferencial, que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q_i \, \partial q_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial q_j \, \partial q_i}$$

ou seja, as derivadas de segunda ordem da função-utilidade são simétricas. Este axioma, juntamente com o axioma 4, implica que as utilidades marginais $\partial u / \partial q_i$ são positivas.

O axioma da convexidade estrita afirma que a função-utilidade é estritamente quase-côncava, pois se $u(q^1) = u(q^2)$, então para $0 < \alpha < 1$ segue-se que:

$$u\,[\alpha q^1 + (1 - \alpha)\, q^2] > u(q^1)$$

Cabe salientar ainda a seguinte propriedade que decorre dos axiomas 4 e 6: como a função-utilidade é estritamente quase-côncava e possui derivadas contínuas de segunda ordem, pode-se afirmar que:

$$Z'UZ \leqslant 0$$

para todo vetor $Z' = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_n]$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial q_i} Z_i = 0$$

onde U é a matriz hessiana da função-utilidade:

$$U = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial q_i \, \partial q_j} \right]$$

Esta propriedade que acabamos de citar será útil em conexão com as condições de segunda ordem no problema da maximização da função-utilidade do consumidor.

I.1.1.1 — As Curvas de Indiferença

Com o intuito de facilitar a apresentação das principais proposições da teoria do consumidor admitiremos que a cesta de bens do consumidor contém dois bens.[1] Assim, a função-utilidade (1.1) reduz-se a:

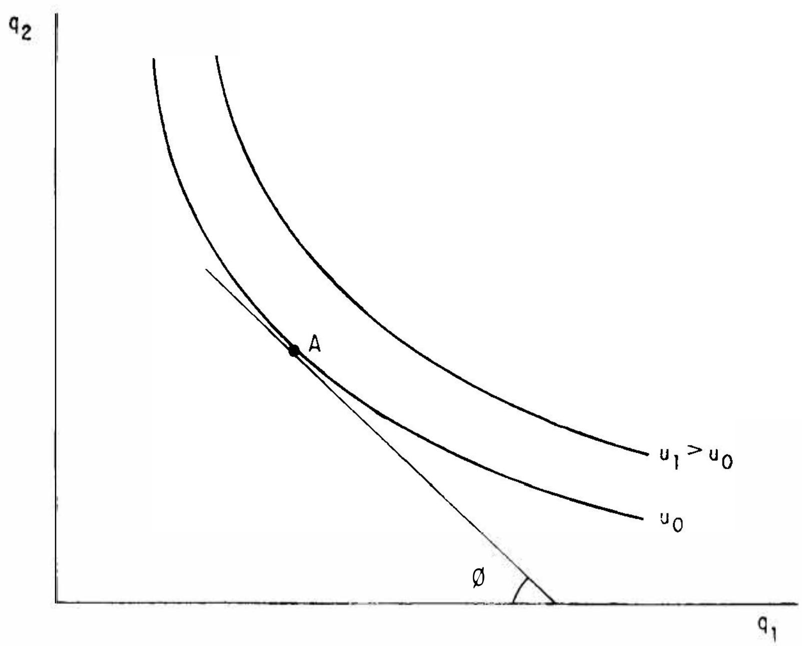
$$u(q) = u(q_1, q_2) \tag{1.2}$$

1 Esta hipótese não é restritiva como pode parecer à primeira vista, contudo será relaxada na terceira seção deste capítulo.

A relação (1.2) contém três variáveis: u, q_1 e q_2. Os economistas usualmente representam relações envolvendo três variáveis em um gráfico de duas dimensões fazendo uso de curvas de mesmo nível, como em topografia. Com efeito, na Figura I.2 tem-se no eixo vertical a quantidade do bem 2, enquanto no eixo horizontal marca-se a quantidade do bem 1. A curva u_0 indica as combinações de q_1 e q_2 que dão ao consumidor um nível de satisfação u_0, ou seja: $u_0 = u(q_1, q_2)$. À curva u_1 corresponde um nível de utilidade superior ao nível da curva u_0.

Figura I.2

CURVAS DE INDIFERENÇA



Ao longo de cada curva o consumidor é indiferente às diversas combinações dos bens, daí o nome de curvas de indiferença para tais curvas.

I.1.1.2 — Orçamento do Consumidor

Admita que o consumidor dispõe de uma renda y e que os preços dos bens e serviços sejam dados no mercado, no qual o consumidor não exerce qualquer interferência. O gasto total do consumidor será igual a $p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n$, onde p_i é o preço do bem i. A limitação orçamentária implica que o gasto total deve ser igual à renda total do consumidor y. Logo, de maneira geral tem-se:

$$p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_nq_n = y \quad (1.3)$$

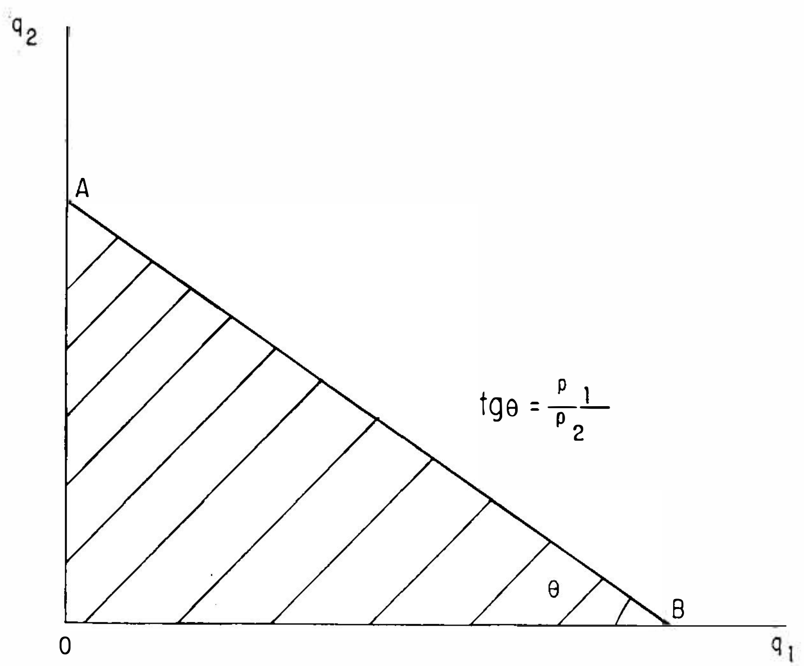
No caso de dois bens, a equação (1.3) reduz-se a:

$$p_1q_1 + p_2q_2 = y \quad (1.4)$$

e sua representação gráfica está na Figura I.3. A área hachurada mostra o conjunto de opções factíveis para o consumidor. A tangente do ângulo θ corresponde à relação de preços p_1/p_2. O segmento OA da Figura I.3 indica o poder de compra do consumidor medido em termos do bem 2, $OA = y/p_2$, enquanto o segmento OB é igual ao poder de compra do consumidor medido em termos do bem 1, isto é: $OB = y/p_1$.

Figura I.3

LIMITAÇÃO ORÇAMENTÁRIA DO CONSUMIDOR



I.1.2 — Equilíbrio do Consumidor

O problema do consumidor consiste em escolher as quantidades a comprar de q_1 e q_2 de tal modo a maximizar a função-utilidade (1.2) e que satisfaçam a restrição orçamentária (1.4).[2] A solução deste problema pode ser obtida a partir da expressão de Lagrange L:

$$L = u(q_1, q_2) + \lambda [y - p_1 q_1 - p_2 q_2] \tag{1.5}$$

I.1.2.1 — Condição de Primeira Ordem

A condição de primeira ordem para um máximo de L é obtida a partir da diferencial de (1.5):

$$\begin{aligned} dL = & \left(\frac{\partial u}{\partial q_1} - \lambda p_1\right) dq_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial q_2} - \lambda p_2\right) dq_2 \\ & + (y - p_1 q_1 - p_2 q_2)\, d\lambda \end{aligned} \tag{1.6}$$

Igualando-se a zero os coeficientes de dq_1, dq_2 e $d\lambda$, obtém-se, então, as condições de equilíbrio do consumidor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_1} &= \frac{\partial u}{\partial q_1} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= \frac{\partial u}{\partial q_2} - \lambda p_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= y - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Observe-se que a última equação nada mais é do que a equação de orçamento (1.4). Segue-se das duas primeiras equações de (1.7) que em equilíbrio as utilidades marginais são proporcionais aos preços:

$$\frac{\partial u/\partial q_1}{p_1} = \frac{\partial u/\partial q_2}{p_2} = \lambda \tag{1.8}$$

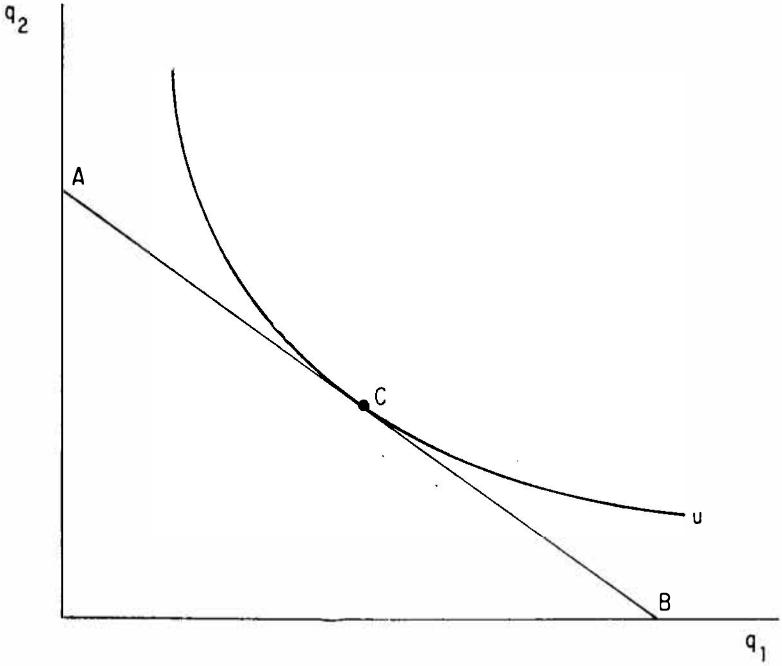
O coeficiente de proporcionalidade λ é o multiplicador de Lagrange, cuja interpretação econômica será vista mais adiante, na segunda seção deste capítulo.

Graficamente o equilíbrio do consumidor é dado pelo ponto C da Figura I.4, onde a reta de orçamento AB toca a curva de utilidade u.

2 Admitiremos que o consumidor compra ambos os bens, isto é: $q_1 > 0$ e $q_2 > 0$.

Figura I.4

EQUILÍBRIO DO CONSUMIDOR



I.1.2.2 — Condição de Segunda Ordem

A condição de segunda ordem para o máximo de L é obtida a partir da diferencial de segunda ordem de L. Da equação (I.6) resulta:

$$d^2L = \left(\frac{\partial u}{\partial q_1} - \lambda p_1\right) d^2q_1 + d\left(\frac{\partial u}{\partial q_1} - \lambda p_1\right) dq_1$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial q_2} - \lambda p_2\right) d^2q_2 + d\left(\frac{\partial u}{\partial q_2} - \lambda p_2\right) dq_2$$

$$+ (y - p_1q_1 - p_2q_2)\, d^2\lambda - (p_1dq_1 + p_2dq_2)\, d\lambda \qquad (1.9)$$

Como:

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial q_1} - \lambda p_1\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} dq_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial q_1\, \partial q_2} dq_2 - p_1 d\lambda$$

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial q_2} - \lambda p_2\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial q_2\, \partial q_1} dq_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} dq_2 - p_2 d\lambda$$

a diferencial (1.9) transforma-se em:

$$d^2L = \left(\frac{\partial u}{\partial q_1} - \lambda p_1\right) d^2q_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2}(dq_1)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial q_1\,\partial q_2}dq_1dq_2$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial q_2} - \lambda p_2\right) d^2q_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2}(dq_2)^2 - 2(p_1dq_1 + p_2dq_2)\,d\lambda$$

$$+ (y - p_1q_1 - p_2q_2)\,d^2\lambda \qquad (1.10)$$

Levando-se em conta as condições de equilíbrio (1.7) e o fato de que as diferenciais de q_1 e q_2 têm que satisfazer a restrição

$$p_1dq_1 + p_2dq_2 = 0 \qquad (1.11)$$

resultante da equação orçamentária (1.4), a diferencial (1.10) passa a ser escrita do seguinte modo:

$$d^2L = \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2}(dq_1)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial q_1\,\partial q_2}dq_1dq_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2}(dq_2)^2 \qquad (1.12)$$

ou, em notação matricial:

$$d^2L = [dq_1 \vdots dq_2]\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial q_1\,\partial q_2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial q_2\,\partial q_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial q_2^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} dq_1 \\ \cdots \\ dq_2\end{bmatrix} \qquad (1.13)$$

A condição de segunda ordem para o máximo de L é que a matriz hessiana U da função-utilidade $u(q_1, q_2)$, isto é:

$$U = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial q_1\,\partial q_2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial q_2\,\partial q_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial q_2^2}\end{bmatrix} \qquad (1.14)$$

seja negativa semidefinida para todo vetor $dq = [dq_1, dq_2]$ que satisfaça (1.11).[3] Esta condição resulta do fato de que a diferencial d^2L, dada em (1.13), não deve ser positiva para que o valor de L seja máximo. Cabe salientar que os axiomas enunciados na primeira seção deste capítulo garantem que esta condição de segunda ordem seja satisfeita.

[3] Admitiremos daqui por diante que a matriz U é negativa definida. Esta hipótese, embora não sendo necessária para o máximo da função-utilidade, simplifica bastante a álgebra. Cabe salientar que é sempre possível, através de uma transformação monotônica da função-utilidade, obter-se uma matriz hessiana não singular.

Observe-se que, de acordo com (1.8), se $dq_1 = \partial u/\partial q_2$ e $dq_2 = - \partial u/\partial q_1$ a condição (1.11) é satisfeita. Logo temos que:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial q_2} \ \vdots \ - \frac{\partial u}{\partial q_1}\right] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial q_1 \, \partial q_2} \\ \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial q_2 \, \partial q_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial q_2} \\ \cdots \\ -\dfrac{\partial u}{\partial q_1} \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{1.15}$$

ou:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} - 2 \frac{p_1}{p_2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \, \partial q_2} + \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} \leqslant 0 \tag{1.16}$$

Para chegar-se à desigualdade acima basta efetuar-se as multiplicações indicadas em (1.15) e levar-se em conta a equação (1.8).

I.1.2.3 — A Taxa Marginal de Substituição Decrescente

A taxa marginal de substituição mede os termos em que o consumidor está disposto a trocar um bem por outro, de tal modo que esta troca de bens mantenha inalterado o nível de utilidade do mesmo. Mais precisamente, a taxa marginal de substituição τ é definida como menos a derivada da quantidade do bem 2 em relação ao bem 1, mantendo-se constante o nível de utilidade. Isto é:

$$\tau = - \left.\frac{dq_2}{dq_1}\right|_{u = ct} = \frac{\partial u/\partial q_1}{\partial u/\partial q_2} \tag{1.17}$$

Na Figura I.2 a tangente do ângulo ϕ mede a taxa marginal de substituição no ponto A da curva de utilidade u_0. A expressão depois do segundo sinal de igualdade em (1.17) é obtida a partir de (1.2), pois:

$$du = \frac{\partial u}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial u}{\partial q_2} dq_2 = 0$$

para uma dada curva de indiferença. Note que, em equilíbrio, de acordo com (1.8), a taxa marginal de substituição é igual à relação de preços: $\tau = p_1/p_2$.

A taxa de variação da taxa marginal de substituição com relação à quantidade do bem 1 é igual a:

$$\frac{\partial \tau}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial u/\partial q_1}{\partial u/\partial q_2}\right) \tag{1.18}$$

de acordo com (1.17). Efetuando-se a derivada acima, obtém-se:

$$\frac{\partial \tau}{\partial q_1} = \frac{1}{(\partial u/\partial q_2)^2} \left[\frac{\partial u}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial u}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)\right] \tag{1.19}$$

Lembrando-se que:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} - \left(\frac{\partial u/\partial q_1}{\partial u/\partial q_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial q_1\,\partial q_2}$$

e:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) = -\left(\frac{\partial u/\partial q_1}{\partial u/\partial q_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q_1\,\partial q_2}$$

a expressão (1.19) transforma-se em:

$$\frac{\partial \tau}{\partial q_1} = \frac{1}{\partial u/\partial q_2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} - 2\left(\frac{\partial u/\partial q_1}{\partial u/\partial q_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial q_1\partial q_2} + \left(\frac{\partial u/\partial q_1}{\partial u/\partial q_2}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2}\right] \tag{1.20}$$

Como em equilíbrio a relação entre as utilidades marginais é igual à relação de preços, a equação acima pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial \tau}{\partial q_1} = \frac{1}{\partial u/\partial q_2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} - 2\,\frac{p_1}{p_2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial q_1\,\partial q_2} + \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2}\right] \tag{1.21}$$

Tendo em vista a desigualdade (1.16), segue-se, então, que na posição de equilíbrio a taxa marginal de substituição é decrescente:

$$\frac{\partial \tau}{\partial q_1} < 0 \tag{1.22}$$

I.1.3 — As Equações de Demanda

A solução do sistema de equações formado por (1.4) e (1.8), repetido aqui por conveniência:

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = y \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial u}{\partial q_1}\,p_2 = \frac{\partial u}{\partial q_2}\,p_1 \tag{1.24}$$

fornece as quantidades q_1 e q_2 demandadas dos dois bens como funções dos preços p_1 e p_2, e da renda y.[4] Em termos gerais, podemos escrever:

$$q_1 = q_1(p_1, p_2, y) \tag{1.25}$$

$$q_2 = q_2(p_1, p_2, y) \tag{1.26}$$

[4] Admitimos que as condições do teorema de função implícita sejam satisfeitas, o que significa dizer que a matriz hessiana da função-utilidade seja negativa definida.

As equações (1.25) e (1.26) são as de demanda dos bens 1 e 2. A seguir, passamos a estudar as propriedades que estas equações devem satisfazer.

I.1.3.1 — Estática Comparativa

Com o objetivo de calcular as derivadas parciais das equações de demanda (1.25) e (1.26) com respeito aos preços p_1 e p_2, e à renda y, comecemos por obter as diferenciais das equações (1.23) e (1.24). A diferencial da equação orçamentária é facilmente obtida, pois:

$$p_1 dq_1 + q_1 dp_1 + p_2 dq_2 + q_2 dp_2 = dy \qquad (1.27)$$

ou:

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 = dy - q_1 dp_1 - q_2 dp_2 \qquad (1.28)$$

No que toca à diferencial da equação de equilíbrio (1.24), tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} dp_2 + p_2 d\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial u}{\partial q_2} dp_1 + p_1 d\left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) \qquad (1.29)$$

As diferenciais das utilidades marginais que aparecem na expressão anterior são dadas por:

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} dq_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} dq_2 \qquad (1.30)$$

e:

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial q_2\, \partial q_1} dq_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} dq_2 \qquad (1.31)$$

Substituindo-se (1.30) e (1.31) na equação (1.29) resulta:

$$\left(p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} - p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1\, \partial q_2}\right) dq_1 + \left(p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1\, \partial q_2} - p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2}\right) dq_2 =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial q_2} dp_1 - \frac{\partial u}{\partial q_1} dp_2 \qquad (1.32)$$

As equações (1.28) e (1.32) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} - p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1\, \partial q_2} & p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1\, \partial q_2} - p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial q_2} dp_1 - \frac{\partial u}{\partial q_1} dp_2 \\ dy - q_1 dp_1 - q_2 dp_2 \end{bmatrix} \qquad (1.33)$$

Os valores de dq_1 e dq_2, soluções do sistema (1.33), são:

$$dq_1 = \frac{p_2}{|A|} \frac{\partial u}{\partial q_2} dp_1 - \frac{p_2}{|A|} \frac{\partial u}{\partial q_1} dp_2$$

$$- \frac{M_1}{|A|} (dy - q_1 dp_1 - q_2 dp_2) \tag{1.34}$$

$$dq_2 = - \frac{p_1}{|A|} \frac{\partial u}{\partial q_2} dp_1 + \frac{p_1}{|A|} \frac{\partial u}{\partial q_1} dp_2$$

$$- \frac{M_2}{|A|} (dy - q_1 dp_1 - q_2 dp_2) \tag{1.35}$$

onde:

$$M_1 = p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} - p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} \tag{1.36}$$

$$M_2 = - p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} \tag{1.37}$$

e:

$$|A| = p_2^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} - 2 \frac{p_1}{p_2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} + \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} \right] < 0 \tag{1.38}$$

O símbolo A denota a matriz que aparece no lado esquerdo de (1.33). O determinante da matriz A é negativo, como se pode perceber comparando-se (1.16) e (1.38). A derivada parcial de q_1 com respeito a p_1 é facilmente obtida a partir de (1.34), isto é:

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{p_2}{|A|} \frac{\partial u}{\partial q_2} + q_1 \frac{M_1}{|A|} \tag{1.39}$$

A derivada parcial de q_1 com respeito à renda é igual a:

$$\frac{\partial q_1}{\partial y} = - \frac{M_1}{|A|} \tag{1.40}$$

Observe que M_1 tanto pode ser negativo como positivo, de maneira que o sinal de $\partial q_1 / \partial y$ é indeterminado como era de se esperar *a priori*. A derivada parcial de q_1 com respeito a p_1, mantendo-se p_2 constante e fazendo-se $dy = q_1 dp_1$, é igual a:

$$\left. \frac{\partial q_1}{\partial p_1} \right|_{u = ct} = \frac{p_2}{|A|} \frac{\partial u}{\partial q_2} \tag{1.41}$$

como se pode depreender de (1.34). Mais adiante mostraremos que $q_1 dp_1$ é igual ao valor de renda compensatória que mantém o consumidor na mesma curva de indiferença. A expressão (1.41) corresponde ao efeito-substituição, enquanto (1.40) traduz o efeito-renda. A equação (1.39), por sua vez, mostra que o efeito-preço resulta da superposição dos efeitos-substituição e renda, pois substituindo-se as equações (1.40) e (1.41) em (1.39) obtém-se:

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \left.\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right|_{u=ct} - q_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} \tag{1.42}$$

A equação (1.42) é a famosa equação de Slutsky, que foi seu descobridor. Analogamente, poderia mostrar-se que:

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = \left.\frac{\partial q_2}{\partial p_2}\right|_{u=ct} - q_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} \tag{1.43}$$

onde:

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = \frac{p_1}{|A|} \frac{\partial u}{\partial q_1} + q_2 \frac{M_2}{|A|} \tag{1.44}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial y} = - \frac{M_2}{|A|} \tag{1.45}$$

$$\left.\frac{\partial q_2}{\partial p_2}\right|_{u=ct} = \frac{p_1}{|A|} \frac{\partial u}{\partial q_1} \tag{1.46}$$

No tocante à derivada parcial de q_1 com respeito a p_2 tem-se de (1.34) que:

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = - \frac{p_2}{|A|} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{M_1}{|A|} q_2 \tag{1.47}$$

Mantendo-se constante o nível de utilidade através de uma renda compensatória $dy = q_2 dp_2$ o efeito-substituição cruzado é dado por:

$$\left.\frac{\partial q_1}{\partial p_2}\right|_{u=ct} = - \frac{p_2}{|A|} \frac{\partial u}{\partial q_1} \tag{1.48}$$

Segue-se, então, que o efeito-preço cruzado é igual à soma algébrica dos efeitos-substituição e renda, ou seja:

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \left.\frac{\partial q_1}{\partial p_2}\right|_{u=ct} - q_2 \frac{\partial q_1}{\partial y} \tag{1.49}$$

Analogamente, teríamos:

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \left.\frac{\partial q_2}{\partial p_1}\right|_{u=ct} - q_1 \frac{\partial q_2}{\partial y} \tag{1.50}$$

onde:

$$\left.\frac{\partial q_2}{\partial p_1}\right|_{u=ct} = - \frac{p_1}{|A|} \frac{\partial u}{\partial q_2} \tag{1.51}$$

Com os resultados obtidos até aqui podemos agora apresentar as principais proposições da teoria do consumidor.

Proposição 1 — A quantidade demandada de um bem varia em sentido contrário à variação de preço do próprio bem quando se mantém a renda real do consumidor constante.

A proposição acima resulta do fato de que em equilíbrio $|A| < 0$. Logo de (1.41) e (1.46) obtém-se:

$$\left.\frac{\partial q_i}{\partial p_i}\right|_{u = ct} < 0, \; i = 1, 2 \tag{1.52}$$

Proposição 2 — Os efeitos-substituição cruzados são simétricos.

Em verdade, esta segunda proposição é facilmente obtida comparando-se (1.48) e (1.51), e lembrando-se que em equilíbrio as utilidades marginais são proporcionais aos preços. Segue-se, então, que:

$$\left.\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\right|_{u = ct} = \left.\frac{\partial q_j}{\partial p_i}\right|_{u = ct,} \quad i = 1, \; j = 2 \tag{1.53}$$

I.1.3.2 — Bens Substitutos e Complementares

A expressão anterior serve de base para a classificação dos bens em complementares e substitutos. Os bens i e j são ditos complementares quando o aumento (decréscimo) do preço p_j, compensado por uma variação na renda que mantenha constante o nível de utilidade, acarreta o decréscimo (aumento) na quantidade consumida do bem i, isto é:

$$\left.\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\right|_{u = ct} < 0$$

Por outro lado, quando:

$$\left.\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\right|_{u = ct} > 0$$

os bens i e j são substitutos. Neste caso o aumento (diminuição) do preço p_j, mantendo-se constante a renda real, aumenta (diminui) a quantidade consumida do bem i. É interessante observar que, no caso de o orçamento do consumidor conter apenas dois bens, estes são necessariamente substitutos, pois de acordo com (1.48) e (1.51), aliado ao fato de $|A| < 0$, tem-se:

$$\left.\frac{\partial q_1}{\partial p_2}\right|_{u = ct} = \left.\frac{\partial q_2}{\partial p_1}\right|_{u = ct} > 0$$

A desigualdade acima é válida apenas no caso de dois bens. Quando se tem mais de dois bens, tanto podem ser complementares como substitutos.

Proposição 3 — A equação de demanda é homogênea do grau zero nos preços dos bens e serviços e na renda do consumidor.

De acordo com o teorema de Euler, se a equação (1.25) é homogênea do grau zero, tem-se que:

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial q_1}{\partial p_2} p_2 + \frac{\partial q_1}{\partial y} y = 0 \tag{1.54}$$

A equação de demanda (1.25) satisfaz (1.54), pois multiplicando-se a equação (1.39) por p_1, a equação (1.40) por y, a equação (1.47) por p_2, e adicionando-se estes três resultados, chega-se sem dificuldade à expressão (1.54). A maneira mais simples de deduzir-se a proposição acima é observar que o equilíbrio do consumidor não se modifica quando todos os preços e a renda são multiplicados pela mesma constante, pois tanto a função-utilidade (1.2) como a equação orçamentária (1.4) permanecem inalteradas. Logo, as equações de demanda são homogêneas de grau zero em relação aos preços e a renda do consumidor.

Substituindo-se as equações (1.42) e (1.49) na equação (1.54), obtém-se:

$$\left.\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right|_{u=ct} p_1 + \left.\frac{\partial q_1}{\partial p_2}\right|_{u=ct} p_2 + \frac{\partial q_1}{\partial y}(y - p_1q_1 - p_2q_2) = 0 \tag{1.55}$$

Como o último termo da expressão acima é igual a zero, a equação anterior reduz-se a:

$$\left.\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right|_{u=ct} p_1 + \left.\frac{\partial q_1}{\partial p_2}\right|_{u=ct} p_2 = 0 \tag{1.56}$$

que é outra maneira de dizer que a equação de demanda é homogênea do grau zero nos preços dos bens, mantendo-se constante a renda real. No caso de n bens, tem-se que:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \left.\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\right|_{u=ct} = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.57}$$

De acordo com a primeira proposição:

$$\left.\frac{\partial q_i}{\partial p_i}\right|_{u=ct} \leqslant 0$$

Logo, de (1.57) segue-se que:

$$\sum_{j \neq i} p_j \left.\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\right|_{u=ct} \geqslant 0 \tag{1.58}$$

A interpretação da desigualdade acima, de acordo com Hicks (1946), é que os bens tendem a ser mais substitutos do que complementares, pois, quando $\partial q_i/\partial p_j|_{u=ct} > 0$, os bens i e j são substitutos.

Uma forma simples e elegante de sintetizar as três proposições acima é através da matriz de Slutsky, definida por:

$$S = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial q_1}{\partial p_1}\right|_{u=ct} & \left.\dfrac{\partial q_1}{\partial p_2}\right|_{u=ct} \\ \left.\dfrac{\partial q_2}{\partial p_1}\right|_{u=ct} & \left.\dfrac{\partial q_2}{\partial p_2}\right|_{u=ct} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} p_2 \dfrac{\partial u}{\partial q_2} & -p_2 \dfrac{\partial u}{\partial q_1} \\ -p_1 \dfrac{\partial u}{\partial q_2} & p_1 \dfrac{\partial u}{\partial q_1} \end{bmatrix} \tag{1.59}$$

Os valores depois do segundo sinal de igualdade em (1.59) resultam de (1.41), (1.46), (1.48) e (1.51). As proposições 1, 2 e 3 podem ser deduzidas a partir da seguinte proposição:

Proposição: A matriz de Slutsky é negativa semidefinida.

Com efeito, a forma quadrática $x'Sx$, onde $x' = [x_1, x_2]$, é igual a:

$$x'Sx = [x_1 \vdots x_2] \begin{bmatrix} \dfrac{p_2}{|A|} \dfrac{\partial u}{\partial q_2} & -\dfrac{p_2}{|A|} \dfrac{\partial u}{\partial q_1} \\ -\dfrac{p_1}{|A|} \dfrac{\partial u}{\partial q_2} & \dfrac{p_1}{|A|} \dfrac{\partial u}{\partial q_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \left[x_1^2 p_2 \frac{\partial u}{\partial q_2} - 2 x_1 x_2 p_1 \frac{\partial u}{\partial q_2} + x_2^2 p_1 \frac{\partial u}{\partial q_1} \right] \tag{1.60}$$

A expressão (1.60) pode ser transformada em:

$$x'Sx = \frac{\partial u / \partial q_2}{p_2 \, |A|} [x_1^2 p_2^2 - 2 x_1 x_2 p_1 p_2 + x_2^2 p_1^2] =$$

$$= \frac{\partial u / \partial q_2}{p_2 \, |A|} (x_1 p_2 - x_2 p_1)^2 \tag{1.61}$$

Desde que o determinante da matriz A é negativo na posição de equilíbrio, segundo (1.38), segue-se de (1.61) que:

$$x'Sx \leqslant 0 \tag{1.62}$$

A forma quadrática acima é igual a zero quando $x_1 = p_1$ e $x_2 = p_2$. Este fato implica a terceira proposição, ou seja, que a equação de demanda é homogênea do grau zero. O fato de a matriz S ser negativa implica que os elementos da diagonal principal são negativos, o que é equivalente à primeira proposição. Por sua vez, a matriz S sendo negativa semidefinida implica simetria, que é, na verdade, a afirmação contida na segunda proposição.

Proposição 4 — A soma ponderada das taxas de variações das quantidades demandadas com respeito à renda é igual à unidade. As ponderações são os preços dos respectivos bens.

A proposição 4 é facilmente obtida a partir da limitação orçamentária (1.4), pois derivando-se ambos os membros com respeito a y tem-se:

$$p_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1 \tag{1.63}$$

que é a expressão algébrica da quarta proposição.

Uma forma alternativa de expressar-se a proposição anterior é através das elasticidades-renda, definidas por:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial q_i}{\partial y} \frac{y}{q_i}, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.64}$$

e que medem a reação percentual da quantidade demandada à variação percentual na renda. A equação (1.63) pode ser escrita, então, do seguinte modo:

$$\frac{p_1 q_1}{y} \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{y}{q_1} + \frac{p_2 q_2}{y} \frac{\partial q_2}{\partial y} \frac{y}{q_2} = 1 \tag{1.65}$$

ou seja:

$$\omega_1 \varepsilon_1 + \omega_2 \varepsilon_2 = 1 \tag{1.66}$$

onde os ω_i são as proporções da despesa com a aquisição do bem i na renda y, isto é:

$$\omega_i = \frac{p_i q_i}{y} \tag{1.67}$$

Com base em (1.66) é usual classificar-se os bens em três categorias: i) luxo, quando $\varepsilon_i > 1$; ii) necessidade, quando $0 < \varepsilon_i < 1$; e iii) inferior, quando $\varepsilon_i < 0$.

I.1.3.3 — Elasticidades-Preço Compensadas

Com base nos efeitos-substituição é possível definir-se elasticidades-preço compensadas. Assim, mantendo-se constante o nível de renda real, η_{ii}^c mede a reação percentual da quantidade demandada a uma variação de 1% no preço do próprio bem. Em termos diferenciais temos:

$$\eta_{ii}^c = \frac{p_i}{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial p_i} \bigg|_{u = ct} \tag{1.68}$$

Por sua vez, a elasticidade-preço cruzada compensada (= renda real constante) é definida por:

$$\eta_{ij}^{c} = \frac{p_j}{q_i} \left. \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \right|_{u = ct} \tag{1.69}$$

ou seja, η_{ij}^{c} mede a reação percentual da quantidade demandada do bem i a variações do preço do bem j, mantendo-se constante o nível de renda real. Segue-se da propriedade de homogeneidade da equação de demanda que a soma das elasticidades-preço compensadas é igual a zero:

$$\eta_{11}^{c} + \eta_{12}^{c} = 0 \tag{1.70}$$

$$\eta_{21}^{c} + \eta_{22}^{c} = 0 \tag{1.71}$$

Obviamente, as propriedades acima são válidas para o caso geral de n bens:

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij}^{c} = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

I.1.3.4 — Elasticidades-Preço Não Compensadas

As elasticidades-preço não compensadas são definidas por:

$$\eta_{ii} = \frac{p_i}{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial p_i} \tag{1.72}$$

e:

$$\eta_{ij} = \frac{p_j}{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \tag{1.73}$$

onde η_{ii} é a elasticidade-preço da quantidade demandada do bem i com respeito a seu próprio preço e η_{ij} é a elasticidade-preço da quantidade demandada do bem i com respeito a variações do preço do bem j. Da equação (1.54) segue-se que estas elasticidades satisfazem à seguinte restrição:

$$\eta_{11} + \eta_{12} + \varepsilon_1 = 0 \tag{1.74}$$

ou, para o caso de n bens:

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij} + \varepsilon_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

I.1.3.5 — Resumo

As diferenciais das equações de demanda (1.25) e (1.26) são dadas por:

$$dq_1 = \frac{\partial q_1}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial q_1}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial q_1}{\partial y} dy \tag{1.75}$$

$$dq_2 = \frac{\partial q_2}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial q_2}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial q_2}{\partial y} dy \tag{1.76}$$

As equações de Slutsky

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{\partial q_1}{\partial p_1}\bigg|_{u=ct} - q_1 \frac{\partial q_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{\partial q_1}{\partial p_2}\bigg|_{u=ct} - q_2 \frac{\partial q_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = \frac{\partial q_2}{\partial p_2}\bigg|_{u=ct} - q_2 \frac{\partial q_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{\partial q_2}{\partial p_1}\bigg|_{u=ct} - q_1 \frac{\partial q_2}{\partial y}$$

quando substituídas em (1.75) e em (1.76) resultam nas seguintes equações diferenciais:

$$dq_1 = \frac{\partial q_1}{\partial p_1}\bigg|_{u=ct} dp_1 + \frac{\partial q_1}{\partial p_2}\bigg|_{u=ct} dp_2 + \frac{\partial q_1}{\partial y}(dy - q_1dp_1 - q_2dp_2) \tag{1.77}$$

$$dq_2 = \frac{\partial q_2}{\partial p_1}\bigg|_{u=ct} dp_1 + \frac{\partial q_2}{\partial p_2}\bigg|_{u=ct} dp_2 + \frac{\partial q_2}{\partial y}(dy - q_1dp_1 - q_2dp_2) \tag{1.78}$$

As proposições da teoria do consumidor implicam, então, que:

i) A matriz de Slutsky

$$S = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial q_1}{\partial p_1}\bigg|_{u=ct} & \dfrac{\partial q_1}{\partial p_2}\bigg|_{u=ct} \\ \dfrac{\partial q_2}{\partial p_1}\bigg|_{u=ct} & \dfrac{\partial q_2}{\partial p_2}\bigg|_{u=ct} \end{bmatrix}$$

é negativa semidefinida.

ii) Os coeficientes das variações da renda real $(= dy - q_1dp_1 - q_2dp_2)$, $\partial q_1/\partial y$ e $\partial q_2/\partial y$ satisfazem à seguinte restrição:

$$p_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} = 1$$

I.2 — A Função-Utilidade Indireta

A função-utilidade indireta é obtida quando substituem-se as equações de demanda (1.25) e (1.26) na função-utilidade (1.2), isto é:

$$u_I = u\ [q_1(p_1, p_2, y),\ q_2(p_1, p_2, y)] = u_I(p_1, p_2, y) \tag{2.1}$$

onde u_I indica, então, a utilidade máxima obtida pelo consumidor quando os preços de mercado são p_1 e p_2 e sua renda é igual a y.

A função-utilidade indireta u_I é homogênea do grau zero nos preços dos bens e serviços e na renda do consumidor, pois, como demonstramos na seção anterior, as equações de demanda são homogêneas do grau zero nestas variáveis. Assim, a função-utilidade indireta pode ser escrita, de maneira genérica, como função das razões p_i/y, ou seja:

$$u_I = u_I(p_1/y,\ \ p_2/y) \tag{2.2}$$

A expressão (2.2) mostra claramente que o nível de utilidade máxima permanece o mesmo quando os preços e a renda são multiplicados por uma mesma constante.

I.2.1 — A Utilidade Marginal da Renda

A utilidade marginal da renda é definida como a derivada da utilidade em relação à renda. Da expressão (2.1) resulta então que:

$$\frac{\partial u_I}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial q_1}\ \frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial q_2}\ \frac{\partial q_2}{\partial y} \tag{2.3}$$

Lembrando que, na condição de equilíbrio, as utilidades marginais são proporcionais aos preços dos respectivos bens, ou seja:

$$\frac{\partial u}{\partial q_i} = \lambda p_i,\ i = 1,\ 2$$

a utilidade marginal da renda (2.3) é igual a:

$$\frac{\partial u_I}{\partial y} = \lambda p_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} + \lambda p_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} = \lambda \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} \right) \tag{2.4}$$

De acordo com a quarta proposição da seção anterior, a expressão entre parênteses, depois do último sinal de igualdade em (2.4), é igual à unidade. Portanto, o multiplicador de Lagrange λ é igual à utilidade marginal da renda:

$$\frac{\partial u_I}{\partial y} = \lambda \tag{2.5}$$

I.2.2 — O Teorema de Roy

Derivando-se ambos os membros da equação orçamentária $p_1q_1 + p_2q_2 = y$ com respeito ao preço p_1, obtém-se:

$$p_1 \frac{\partial q_1}{\partial p_1} + q_1 + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial p_1} = 0 \tag{2.6}$$

ou:

$$p_1 \frac{\partial q_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial p_1} = - q_1 \tag{2.7}$$

A derivada parcial da função-utilidade indireta (2.1) com respeito ao preço p_1 é dada por:

$$\frac{\partial u_I}{\partial p_1} = \frac{\partial u}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial u}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial p_1} \tag{2.8}$$

Como as utilidades marginais $\partial u / \partial q_i$ são proporcionais aos preços p_i, a equação (2.8) é igual a:

$$\frac{\partial u_I}{\partial p_1} = \lambda p_1 \frac{\partial q_1}{\partial p_1} + \lambda p_2 \frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \lambda \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial p_1} \right) \tag{2.9}$$

Substituindo-se a equação (2.7) na expressão acima resulta:

$$\frac{\partial u_I}{\partial p_1} = - \lambda q_1 \tag{2.10}$$

Segue-se, então, de (2.5) e da expressão anterior que a quantidade demandada q_1 é igual a:

$$q_1 = - \frac{\partial u_I / \partial p_1}{\partial u_I / \partial y} \tag{2.11}$$

A expressão (2.11) estabelece o teorema de Roy, através do qual se pode deduzir, a partir da função-utilidade indireta, as quantidades demandadas dos diversos bens, pois de maneira geral pode afirmar-se que:

$$q_i = - \frac{\partial u_I / \partial p_i}{\partial u_I / \partial y} \tag{2.12}$$

I.2.3 — A Renda Compensatória

A diferencial total da função-utilidade indireta (2.1) é:

$$du_I = \frac{\partial u_I}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial u_I}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial u_I}{\partial y} dy \tag{2.13}$$

Substituindo-se os valores de $\partial u_I / \partial p_i$ dados por (2.12) na equação acima, resulta:

$$du_I = -q_1 \frac{\partial u_I}{\partial y} dp_1 - q_2 \frac{\partial u_I}{\partial y} dp_2 + \frac{\partial u_I}{\partial y} dy \qquad (2.14)$$

que é igual a:

$$du_I = \frac{\partial u_I}{\partial y} (dy - q_1 dp_1 - q_2 dp_2) \qquad (2.15)$$

Quando $dy = q_1 dp_1 + q_2 dp_2$, a diferencial da utilidade indireta é igual a zero. Com efeito, da equação (2.15) tem-se, neste caso:

$$du_I = 0 \qquad (2.16)$$

Portanto, uma variação compensatória na renda igual a $q_1 dp_1 + q_2 dp_2$, quando os preços variam de dp_1 e dp_2, mantém o consumidor no mesmo nível de utilidade. Obviamente, quando varia apenas o preço de um bem, a renda compensatória deve ser igual a $q_i dp_i$ para que o consumidor se mantenha na mesma curva de indiferença. Assim, a simbologia adotada para o efeito-substituição na seção anterior, isto é:

$$\left. \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \right|_{u = ct}$$

mostra claramente que este efeito pressupõe uma renda compensatória de forma a manter $u =$ constante.

I.2.4 — Propriedades da Função-Utilidade Indireta

A função-utilidade indireta satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 1 — A função-utilidade indireta é decrescente em relação aos preços dos bens e serviços e crescente em relação ao nível de renda.

Proposição 2 — A função-utilidade indireta é homogênea do grau zero nos preços dos bens e serviços e na renda do consumidor.

Proposição 3 — A função-utilidade indireta é uma função quase-convexa.

A primeira proposição é facilmente verificada examinando-se as expressões (2.5) e (2.10). Com efeito, a derivada parcial de u_I com relação ao preço p_i é negativa e a derivada parcial de u_I com relação à renda y é positiva:

$$\frac{\partial u_I}{\partial p_i} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_I}{\partial y} > 0$$

No tocante à segunda proposição, já foi assinalado anteriormente que o nível máximo de utilidade não se altera quando todos os preços e a renda do consumidor variam na mesma proporção, o que significa dizer que a função-utilidade indireta é homogênea do grau zero em relação aos preços e à renda:

$$u_I(kp,\ ky) = u_I(p,y)$$

Para demonstrar a terceira proposição, comecemos por derivar parcialmente a igualdade $-\partial u_I/\partial p_i = \lambda q_i$ com respeito ao preço p_i:

$$-\frac{\partial^2 u_I}{\partial p_i \partial p_i} = q_i \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} + \lambda \frac{\partial q_i}{\partial p_i}$$

A equação de Slutsky

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial q_i}{\partial p_i}\right|_u - q_i \frac{\partial q_i}{\partial y}$$

permite que se escreva a expressão anterior do seguinte modo:

$$-\frac{\partial^2 u_I}{\partial p_i \partial p_i} = \lambda \left.\frac{\partial q_i}{\partial p_i}\right|_u + q_i \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} - \lambda \frac{\partial q_i}{\partial y} q_i$$

Alternativamente, em notação matricial, tem-se:

$$-U_I = \lambda S + q \frac{\partial \lambda}{\partial p'} - \lambda \frac{\partial q}{\partial y} q' \qquad (2.17)$$

onde U_I é a matriz hessiana da função-utilidade indireta:

$$U_I = \left[\frac{\partial^2 u_I}{\partial p_i \partial p_j}\right]$$

S é a matriz de Slutsky; e:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p'} = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial \lambda}{\partial p_n}\right]$$

$$\frac{\partial q'}{\partial y} = \left[\frac{\partial q_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial q_n}{\partial y}\right]$$

$$q' = [q_1, \ldots, q_n]$$

Levando-se em conta (2.10), o vetor de quantidades q é igual a:

$$q = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial u_I}{\partial p} \qquad (2.18)$$

onde:

$$\frac{\partial u_I}{\partial p'} = \left[\frac{\partial u_I}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial u_I}{\partial p_n}\right]$$

Substituindo-se (2.18) em (2.17), resulta:

$$-U_I = \lambda S - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u_I}{\partial p}\frac{\partial \lambda}{\partial p'} - \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial u_I}{\partial p'} \tag{2.19}$$

A forma quadrática $z'U_Iz$ é, então, igual a:

$$z'U_Iz = -\lambda z'Sz + \frac{1}{\lambda}z'\frac{\partial u_I}{\partial p}\frac{\partial \lambda}{\partial p'}z + z'\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial u_I}{\partial p'}z$$

Esta forma quadrática, para todo vetor z que satisfaça a restrição

$$z'\frac{\partial u_I}{\partial p} = 0 \tag{2.20}$$

é igual a:

$$z'U_Iz = -\lambda z'Sz$$

Logo, como a matriz de Slutsky é negativa semidefinida, segue-se que:

$$z'U_Iz \geqslant 0$$

para todo vetor z que satisfaça (2.20). Portanto, a função-utilidade indireta é quase-convexa.

I.3 — A Equação Matricial Fundamental da Teoria do Consumidor

As principais proposições da teoria do consumidor podem ser deduzidas de maneira sucinta e elegante com o auxílio da equação matricial fundamental da teoria do consumidor, introduzida por Barten (1964). Com efeito, tomemos um consumidor que compre n bens nas quantidades $q_1, q_2, \ldots, q_n$, aos preços $p_1, p_2, \ldots, p_n$, cuja função de utilidade é dada por (1.1):

$$u(q_1, q_2, \ldots, q_n) \tag{3.1}$$

e com a renda igual a y, o que limita suas compras de acordo com o orçamento (1.3):

$$p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_nq_n = y \tag{3.2}$$

Na segunda seção mostrou-se que a maximização da função-utilidade (3.1), com a condição de que a equação (3.2) seja satisfeita, resulta nas seguintes condições de equilíbrio:

$$\frac{\partial u}{\partial q_i} = \lambda p_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.3}$$

onde λ, o multiplicador de Lagrange, é a utilidade marginal da renda. A condição de segunda ordem para que u ( ) seja máxima é que a matriz hessiana U, da função-utilidade (3.1), expressa por:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \, \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \, \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \, \partial q_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \, \partial q_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial q_n \, \partial q_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial q_n \, \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial q_n^2} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

seja negativa semidefinida para todo vetor $z \neq 0$ que satisfaça:

$$p'z = 0$$

onde p' é o vetor de preços: $[p_1, p_2, \ldots, p_n]$.

I.3.1 — Estática Comparativa

O objetivo da estática comparativa é verificar como as quantidades demandadas reagem a variações dos preços e da renda do consumidor. Para obter estes valores precisamos dos seguintes resultados:

a) *Orçamento familiar: derivadas em relação à renda* — Derivando-se ambos os lados da equação orçamentária (3.2) com respeito à renda obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial y} = 1 \tag{3.5}$$

A equação acima pode ser escrita em notação matricial da seguinte forma:

$$p' \frac{\partial q}{\partial y} = 1 \tag{3.6}$$

onde:

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial q_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial q_2}{\partial y} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\partial q_n}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

b) *Orçamento familiar: derivadas em relação aos preços* — A derivada parcial do orçamento familiar (3.2) com respeito ao preço p_j é dada por:

$$p_1 \frac{\partial q_1}{\partial p_j} + \cdots + p_{j-1} \frac{\partial q_{j-1}}{\partial p_j} + q_j + p_j \frac{\partial q_j}{\partial p_j}$$

$$+ p_{j+1} \frac{\partial q_{j+1}}{\partial p_j} + \cdots + p_n \frac{\partial q_n}{\partial p_j} = 0 \tag{3.8}$$

ou, então:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = -q_j, \quad j = 1, \ldots, n \tag{3.9}$$

Introduzindo-se a matriz:

$$\frac{\partial q}{\partial p'} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial q_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial q_1}{\partial p_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_1}{\partial p_n} \\ \dfrac{\partial q_2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial q_2}{\partial p_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_2}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial q_n}{\partial p_1} & \dfrac{\partial q_n}{\partial p_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_n}{\partial p_n} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

as n equações em (3.9) podem ser escritas sob a seguinte forma matricial:

$$p' \frac{\partial q}{\partial p'} = -q' \tag{3.11}$$

c) *Condição de Equilíbrio: derivadas em relação à renda* — Derivando-se a equação (3.3) com respeito a y resulta em:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q_i \partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial q_i \partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial y} =$$

$$= p_i \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \ i = 1, \ldots, n \tag{3.12}$$

ou:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial y} = p_i \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \ i = 1, \ldots, n \tag{3.13}$$

Alternativamente, podemos usar a matriz hessiana U, expressa em (3.4), e os vetores $\partial q / \partial y$ e p para escrever (3.13) como:

$$U \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial y} p \tag{3.14}$$

d) *Condição de Equilíbrio: derivadas em relação aos preços* — A derivada de (3.3) com respeito ao preço p_j, para $i = j$, é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q_i \partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial p_j} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial q_i \partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial p_j} = \lambda + p_i \frac{\partial \lambda}{\partial p_j} \tag{3.15}$$

Quando $i \neq j$ a derivada de (3.3) com respeito ao preço p_j é igual a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q_i \partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial p_j} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial q_i \partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial p_j} = p_i \frac{\partial \lambda}{\partial p_j} \tag{3.16}$$

As equações (3.15) e (3.16) podem ser escritas do seguinte modo:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial p_j} = \lambda + p_i \frac{\partial \lambda}{\partial p_j}, \text{ se } i = j$$

$$= p_i \frac{\partial \lambda}{\partial p_j}, \text{ se } i \neq j \tag{3.17}$$

Usando-se notação matricial, as equações acima podem ser escritas sucintamente através de:

$$U \frac{\partial q}{\partial p'} = \lambda I + p \frac{\partial \lambda}{\partial p'} \tag{3.18}$$

onde I é a matriz-identidade e:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p'} = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial \lambda}{\partial p_n} \right] \tag{3.19}$$

e os demais símbolos já são conhecidos.

I.3.2 — A Equação Matricial Fundamental

As equações (3.6), (3.11), (3.14) e (3.18) formam o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} U & p \\ p' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial y} & \dfrac{\partial q}{\partial p'} \\ -\dfrac{\partial \lambda}{\partial y} & -\dfrac{\partial \lambda}{\partial p'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda I \\ 1 & -q' \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

que é a equação matricial fundamental da teoria do consumidor.

Admitindo-se que a matriz U possui inversa, a matriz inversa da primeira matriz entre colchetes que aparece em (3.20) é igual a:

$$\begin{bmatrix} U & p \\ p' & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{p'U^{-1}p} \begin{bmatrix} (p'U^{-1}p)\, U^{-1} - U^{-1}p\,(U^{-1}p)' & U^{-1}p \\ (U^{-1}p)' & -1 \end{bmatrix}$$

Pré-multiplicando ambos os lados da equação (3.20) pela matriz acima, obtém-se então:

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{p'U^{-1}p}\, U^{-1}p \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial q}{\partial p'} = \lambda U^{-1} - \frac{\lambda}{p'U^{-1}p}\,(U^{-1}p)\,(U^{-1}p)' - \frac{1}{p'U^{-1}p}\, U^{-1}pq' \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{1}{p'U^{-1}p} \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p} = -\frac{\lambda}{p'U^{-1}p}\, U^{-1}p - \frac{1}{p'U^{-1}p}\, q \tag{3.24}$$

Substituindo-se (3.23) em (3.21), (3.22) e (3.24), obtemos:

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial y}\, U^{-1}p \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial q}{\partial p'} = \lambda U^{-1} - \frac{\lambda}{\partial \lambda / \partial y}\, \frac{\partial q}{\partial y}\, \frac{\partial q'}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y}\, q' \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p} = -\lambda\, \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\, q \tag{3.27}$$

Observe-se que o efeito-preço total resulta de três parcelas, segundo (3.26). A soma das duas primeiras parcelas constitui-se, como mostraremos mais adiante, no efeito-substituição:

$$\left.\frac{\partial q}{\partial p'}\right|_{u=ct} = \lambda U^{-1} - \frac{\lambda}{p'U^{-1}p}(U^{-1}p)(U^{-1}p)' =$$

$$= \lambda\left[U^{-1} - \frac{(U^{-1}p)(U^{-1}p)'}{p'U^{-1}p}\right] \qquad (3.28)$$

Proposição — A matriz de efeito-substituição

$$S = \left.\frac{\partial q}{\partial p'}\right|_{u=ct}$$

é negativa semidefinida.

Esta proposição baseia-se no fato de que a forma quadrática

$$x'\left(\left.\frac{\partial q}{\partial p'}\right|_{u=ct}\right)x = \lambda\left[x'U^{-1}x - \frac{(x'U^{-1}p)^2}{p'U^{-1}p}\right] =$$

$$= -\frac{\lambda}{p'U^{-1}p}\left[(x'U^{-1}p)^2 - (p'U^{-1}p)(x'U^{-1}x)\right] \qquad (3.29)$$

é negativa, exceto para $x = p$, quando a forma quadrática é nula. Esta conclusão decorre do fato de a matriz U^{-1} ser negativa definida e da aplicação da desigualdade de Schwartz.[5] Com efeito, a matriz U^{-1} pode ser escrita como $U^{-1} = B'B$ e portanto:

$$(x'U^{-1}p)^2 = (-x'B'Bp)^2 = (x'B'Bp)^2 \qquad (3.30)$$

$$(p'U^{-1}p)(x'U^{-1}x) = (p'B'Bp)(x'B'Bx) \qquad (3.31)$$

Denominando o vetor Bx por a e o vetor Bp por b e substituindo-se (3.30) e (3.31) na expressão (3.29), obtém-se:

$$x'\left(\left.\frac{\partial q}{\partial p'}\right|_{u=ct}\right)x = \frac{\lambda}{-p'U^{-1}p}\left[(a'b)^2 - (a'a)(b'b)\right] \qquad (3.32)$$

O valor entre colchetes na equação acima é negativo, de acordo com a desigualdade de Schwartz. A utilidade marginal da renda λ é positiva. O denominador de (3.32), $-p'U^{-1}p$, é positivo, pois a matriz U^{-1} é negativa definida.

5 A desigualdade de Schwartz [ver Hadley (1961, p. 33)] afirma que entre os vetores a e b a seguinte desigualdade é satisfeita: $|a'b| \leqslant |a| \cdot |b|$, onde $|Z| = (Z'Z)^{1/2}$ e $Z'Z$ é o produto escalar do vetor Z por ele próprio. É fácil verificar que a desigualdade de Schwartz implica $(a'b) \leqslant (a'a) \cdot (b'b)$.

Logo, a forma quadrática em (3.32) é negativa quando $a \neq b$. Para $a = b$ a forma quadrática é nula. Concluímos, então, que a matriz de substituição é negativa semidefinida.

Quando os preços e a renda mudam, as variações (infinitesimais) das quantidades dos bens e serviços comprados pelo consumidor são dadas por:

$$dq = \frac{\partial q}{\partial p'}\, dp + \frac{\partial q}{\partial y}\, dy \tag{3.33}$$

onde:

$$dq = \begin{bmatrix} dq_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dq_n \end{bmatrix}, \quad dp = \begin{bmatrix} dp_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dp_n \end{bmatrix}$$

Substituindo-se (3.26) em (3.33), obtém-se:

$$dq = \left(\lambda U^{-1} - \frac{\lambda}{\partial\lambda/\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial q'}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} q' \right) dp + \frac{\partial q}{\partial y}\, dy \tag{3.34}$$

Alternativamente, reagrupando-se os termos de (3.34), tem-se:

$$dq = \left(\lambda U^{-1} - \frac{\lambda}{\partial\lambda/\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial q'}{\partial y} \right) dp + \frac{\partial q}{\partial y} (dy - q'dp) \tag{3.35}$$

Na seção anterior mostrou-se que $dy = q'dp$ é a variação compensatória na renda para manter o consumidor no mesmo nível de utilidade. Logo, conclui-se que o efeito-substituição é igual a:

$$\left.\frac{\partial q}{\partial p'}\right|_{u = ct} = \lambda U^{-1} - \frac{\lambda}{\partial\lambda/\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial q'}{\partial y} \tag{3.36}$$

A expressão acima mostra que o efeito-substituição é igual à soma de duas parcelas. A primeira parcela, $\lambda U^{-1} = \lambda \{u^{ij}\}$, onde u^{ij} é o elemento da i-ésima linha e da j-ésima coluna da matriz U^{-1}, é denominada de efeito-substituição específico. Quando $u^{ij} > 0$, os bens i e j são substitutos específicos; quando $u^{ij} < 0$, os bens i e j são complementos específicos; tendo em vista que a matriz U^{-1} é negativa definida, $u^{ii} < 0$, ou seja, o bem i é complemento de si próprio. A segunda parcela de (3.36):

$$\frac{\lambda}{\partial\lambda/\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial y}$$

é chamada de efeito-substituição geral.

Uma interpretação do efeito-substituição específico pode ser dada reescrevendo-se a equação (3.35) do seguinte modo:

$$dq = \lambda U^{-1}dp + \frac{\partial q}{\partial y}\left(dy - q'dp - \frac{\lambda}{\partial\lambda/\partial y}\frac{\partial q'}{\partial y}dp\right) \quad (3.37)$$

e notando-se que a renda compensatória que mantém a utilidade marginal da renda, λ, constante é igual a:

$$dy = q'dp + \frac{\lambda}{\partial\lambda/\partial y}\frac{\partial q'}{\partial y}dp \quad (3.38)$$

Assim, de (3.37) segue-se que:

$$\left.\frac{\partial q}{\partial p'}\right|_{\lambda = ct} = \lambda U^{-1} \quad (3.39)$$

Para mostrar que a variação da renda em (3.38) é tal que mantém λ constante partimos da diferencial de λ:

$$d\lambda = \frac{\partial\lambda'}{\partial p}dp + \frac{\partial\lambda}{\partial y}dy \quad (3.40)$$

Em seguida, substituímos (3.27) em (3.40). O resultado é:

$$d\lambda = \left(-\lambda\frac{\partial q'}{\partial y} - \frac{\partial\lambda}{\partial y}q'\right)dp + \frac{\partial\lambda}{\partial y}dy \quad (3.41)$$

Colocando-se $\partial\lambda/\partial y$ em evidência na expressão acima, temos:

$$d\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial y}\left[dy - q'dp - \frac{\lambda}{\partial\lambda/\partial y}\frac{\partial q'}{\partial y}dp\right] \quad (3.42)$$

É fácil verificar com o auxílio de (3.42) que, para se ter $d\lambda = 0$:

$$dy - q'dp - \frac{\lambda}{\partial\lambda/\partial y}\frac{\partial q'}{\partial y}dp = 0$$

que nada mais é do que a equação (3.38).

O efeito-substituição pode ser, então, escrito como:

$$\left.\frac{\partial q}{\partial p'}\right|_{u = ct} = \left.\frac{\partial q}{\partial p'}\right|_{\lambda = ct} - \frac{\lambda}{\partial\lambda/\partial y}\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial q'}{\partial y}$$

Cabe ainda observar que a variação da renda real necessária para manter $\lambda =$ constante é igual a:

$$dy - q'dp = \frac{\lambda}{\partial\lambda/\partial y} \frac{\partial q'}{\partial y} dp$$

Portanto, o segundo e o terceiro membros do efeito-preço

$$\frac{\partial q}{\partial p'} = \frac{\partial q}{\partial p'}\bigg|_{\lambda = ct} - \frac{\lambda}{\partial\lambda/\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial q'}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} q'$$

representam efeitos da variação da renda. O segundo membro representa o efeito da variação da renda real para manter a utilidade marginal da renda constante, enquanto o terceiro é o efeito da variação da renda real para manter o nível de utilidade constante.

Vale ressaltar que a divisão do efeito-substituição nos efeitos específico e geral não é invariante a transformações monotônicas da função-utilidade. Contudo, esta divisão tem sido útil em especificações econométricas de sistemas de equações de demanda que incorporam informações adicionais sobre a estrutura de preferências dos consumidores, como é o caso do modelo de Rotterdam na versão de preços relativos [Theil (1975)], que possibilita a inclusão de informação *a priori* de que dois bens, digamos k e l, são independentes no sentido de que o efeito-substituição específico é igual a zero $(u^{kl} = 0)$.

I.3.3 — Equação Matricial Fundamental: Solução Genérica

A hipótese de que a matriz U é negativa definida não é tão inócua quanto parece à primeira vista. Por exemplo, de acordo com a expressão (3.23) seríamos levados a concluir que a utilidade marginal da renda varia em sentido contrário ao nível de renda, $\partial\lambda/\partial y < 0$. Contudo, esta proposição não é válida: a utilidade marginal da renda tanto pode aumentar como diminuir quando o nível de renda aumenta. A seguir, demonstram-se, novamente, as principais proposições da teoria do consumidor sem utilizar-se a hipótese restritiva de que a matriz hessiana da função-utilidade seja negativa definida.

Admita-se que a matriz inversa da primeira matriz entre colchetes que aparece na expressão (3.20) seja dada por:

$$\begin{bmatrix} V & r \\ r' & s \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

isto é:

$$\begin{bmatrix} V & r \\ r' & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & p \\ p' & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz V, o vetor r e o escalar s satisfazem, portanto, as seguintes equações:

$$VU + rp' = I$$

$$Vp = 0$$

$$r'U + sp' = 0$$

$$r'p = 1$$

Pré-multiplicando ambos os lados da equação (3.20) pela matriz (3.43), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial y} & \dfrac{\partial q}{\partial p'} \\ -\dfrac{\partial \lambda}{\partial y} & -\dfrac{\partial \lambda}{\partial p'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & r \\ r' & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \lambda I \\ 1 & -q' \end{bmatrix}$$

A solução desta equação em forma matricial fornece os seguintes resultados:

$$\frac{\partial q}{\partial y} = r \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial q}{\partial p'} = \lambda V - rq' \tag{3.45}$$

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial y} = s \tag{3.46}$$

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial p'} = \lambda r' - sq' \tag{3.47}$$

O sinal do efeito-renda, $\partial q/\partial y = r$, é indeterminado, pois nada se pode afirmar, *a priori,* acerca dos elementos do vetor r.

Quanto ao efeito-substituição, a matriz de Slutsky é obtida levando-se (3.44) em (3.45). O resultado é:

$$S = \left.\frac{\partial q}{\partial p'}\right|_u = \frac{\partial q}{\partial p'} + \frac{\partial q}{\partial y} q' = \lambda V \tag{3.48}$$

Para se provar que a matriz de Slutsky é negativa semidefinida, deve-se demonstrar que a forma quadrática

$$x'Sx = \lambda x'Vx$$

é negativa ou igual a zero para $x \neq 0$.

Definindo-se o vetor z através da transformação $x = Uz$, a forma quadrática $x'Sx$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$x'Sx = \lambda z'UVUz$$

onde levou-se em conta o fato de que a matriz U é simétrica. Como $VU + rp' = I$, segue-se que:

$$x'Sx = \lambda z'U\ [I - rp']\ z$$
$$= \lambda z'Uz - \lambda z'Urp'z$$

A condição de segunda ordem para o máximo da função-utilidade é que a matriz u seja negativa semidefinida para todo vetor z que satisfaça a restrição $p'z = 0$. Logo, para estes valores de z, tem-se que:

$$x'Sx = \lambda z'Uz \leqslant 0$$

Observe-se que o sinal de igualdade nesta expressão ocorre quando $x = p$, pois, das condições da matriz inversa, sabe-se que $Vx = 0$ quando $x = p$. Este fato implica que as equações de demanda são homogêneas do grau zero, pois de (3.48) resulta:

$$\frac{\partial q}{\partial p'}\ p + \frac{\partial q}{\partial y}\ q'p = \lambda Vp = 0$$

A utilidade marginal da renda λ é função dos preços dos bens e serviços e da renda do consumidor:

$$\lambda = \lambda\,(p,\ y)$$

Como nada se pode afirmar, *a priori*, quanto ao sinal do escalar s, a utilidade marginal da renda tanto pode aumentar como diminuir com o aumento da renda:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} \gtrless 0$$

Da mesma forma os sinais das derivadas parciais da utilidade marginal com respeito aos preços são indeterminados, pois nada se pode dizer, *a priori*, sobre os sinais dos componentes da expressão (3.47). Entretanto, é fácil verificar-se que a equação da utilidade marginal da renda é homogênea do grau -1 nos preços e na renda. Para isto, basta que se substitua (3.46) em (3.47) e se pós-multiplique o resultado assim obtido pelo vetor p, isto é:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p'}\ p + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\ p'q = -\lambda r'p$$

Como $r'p = 1$ e $p'q = y$ segue-se, então, que:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p'}\ p + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\ y = -\lambda$$

Pelo teorema inverso ao teorema de Euler de funções homogêneas conclui-se que a utilidade marginal da renda é uma função homogênea do grau —1:

$$\lambda (kp, ky) = k^{-1}\lambda (p, y).$$

I.4 — Índices de Custo de Vida e de Renda Real

Admita-se que os preços vigentes no mercado sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e que se deseja saber qual o menor custo para que o consumidor tenha um padrão de vida ou nível de satisfação u. A este conjunto de preços e ao nível de renda y do consumidor está associado um nível máximo de utilidade dado pela função-utilidade indireta:

$$u = u_I (p_1, p_2, \ldots, p_n, y) \tag{4.1}$$

O valor correspondente do custo mínimo para a obtenção do nível de satisfação u, que passaremos a denominar por C para indicar custo, é obtido a partir da função-utilidade indireta (4.1), fazendo-se $y = C$ e resolvendo-se a equação para o valor de C. De maneira geral esta solução pode ser expressa por:

$$C = C (u, p_1, \ldots, p_n) = C (u, p) \tag{4.2}$$

onde p denota o vetor de preços. A função acima é conhecida como função de custo, ou de despesa, e também é igual ao valor mínimo da solução do seguinte problema: minimizar $p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_nq_n$ com a condição de que a função-utilidade $u (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ seja igual a um valor dado e igual a u.

I.4.1 — Propriedades da Função de Custo

As propriedades da função de custo da empresa que minimiza o custo de produção, a serem apresentadas na terceira seção do Capítulo VI, são igualmente válidas para a função de custo do consumidor $C (u, p)$. Por esta razão apenas citaremos, sem demonstrar, as propriedades a que a função $C (u, p)$ deve obedecer, a saber: [6]

i) A função de custo $C (u, p)$ é homogênea do primeiro grau em relação aos preços dos bens e serviços, isto é:

$$C (u, kp) = kC (u, p) \tag{4.3}$$

onde k é um fator de proporcionalidade.

[6] **O leitor interessado nas demonstrações deve consultar a terceira seção do Capítulo VI, bastando para isto que onde existir q leia-se agora u.**

ii) O custo $C(u, p)$ varia no mesmo sentido dos preços dos bens e serviços, e a equação de demanda por bens pode ser obtida derivando-se parcialmente a função de custo em relação ao preço em questão, isto é:

$$\frac{\partial C}{\partial p_i} = q_i \tag{4.4}$$

iii) A função de custo $C(u, p)$ é côncava nos preços dos bens e serviços. Isto decorre do fato de que a matriz hessiana da função de custo em relação aos preços dos bens e serviços é igual à matriz de Slutsky, que é negativa semidefinida. Assim:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial p_j \, \partial p_i} = \left. \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \right|_{u = ct} \tag{4.5}$$

I.4.2 — Índice de Custo de Vida Verdadeiro

O índice de custo de vida procura medir a variação de renda que torna o consumidor indiferente entre duas situações nas quais as oportunidades que se lhes apresentam são diferentes. Assim, o índice de custo de vida verdadeiro será definido por:

$$V(u) = V(p_t, p_{t-1}/u) = \frac{C(u, p_t)}{C(u, p_{t-1})} \tag{4.6}$$

onde a notação $V(p_t, p_{t-1}/u)$ indica que o índice verdadeiro depende do nível de utilidade u a ser utilizado na comparação. O índice $V(u)$ é igual à razão entre o custo de vida quando os preços são p_t e o custo de vida quando os preços são p_{t-1}, ambos os custos sendo avaliados para o mesmo nível de utilidade u. Observe-se que, se os gostos e preferências do consumidor mudarem, entre as duas situações (que estiverem sendo) comparadas, este fato não traz qualquer problema para o cálculo do índice de custo de vida. Com efeito, o índice refere-se a um *dado* nível de utilidade u, e não a uma comparação intertemporal de utilidades.

I.4.3 — Índice de Custo de Vida Associado ao Sistema de Despesa Linear

A obtenção do índice $V(u)$ requer a especificação da função-utilidade indireta (4.1). Um caso particular é obtido a partir da função-utilidade direta de Klein-Rubin:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \log (q_i - \gamma_i), \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1 \tag{4.7}$$

onde os μ_i e os γ_i são parâmetros. A maximização de (4.4), com a condição de que a restrição orçamentária $\Sigma\ p_i q_i = y$ seja satisfeita, produz as seguintes equações de demanda:

$$p_i q_i = p_i \gamma_i + \mu_i \left(y - \sum_{k=1}^{n} p_k \gamma_k \right), \ i = 1, \ldots, n \tag{4.8}$$

O sistema de equações de demanda acima é conhecido como o sistema de despesa linear. A segunda seção do próximo capítulo contém maiores detalhes acerca deste sistema.

As equações de demanda contidas na expressão (4.8), quando substituídas na função-utilidade (4.7), resulta na função-utilidade indireta:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \log \frac{\mu_i \left(y - \sum_{k=1}^{n} p_k \gamma_k \right)}{p_i} \tag{4.9}$$

O custo mínimo C é então obtido fazendo-se $y = C$ na equação acima. O resultado é:

$$C = \sum_{k=1}^{n} p_k \gamma_k + e^{u - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \log \mu_i} \prod_{i=1}^{n} p_i^{\mu_i} \tag{4.10}$$

Substituindo-se (4.10) em (4.6) resulta no seguinte índice de custo de vida:

$$V(p_t, p_{t-1}/u) = \frac{e^{u - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \log \mu_i} \prod_{i=1}^{n} p_{it}^{\mu_i} + \sum_{k=1}^{n} p_{kt}\ \gamma_k}{e^{u - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \log \mu_i} \prod_{i=1}^{n} p_{i,t-1}^{\mu_i} + \sum_{k=1}^{n} p_{k,t-1}\ \gamma_k} \tag{4.11}$$

O índice acima requer para seu cálculo, além dos parâmetros que entram na sua fórmula e dos preços nos dois períodos, um valor de referência para a utilidade, o que, sem dúvida, torna difícil sua aplicação na prática.

I.4.3.1 — Crítica ao Índice Geométrico

Uma propriedade bastante conhecida na literatura econômica, que trata de índices de preços, é que o índice de custo de vida do tipo Laspeyres não leva em conta a substituição existente entre os diversos bens e serviços, que compõem a cesta do consumidor, quando a estrutura de preços relativos se modifica. Com base neste fato, o Instituto Brasileiro de Economia da Fundação Getulio Vargas introduziu, a partir de março de 1977, um novo método de cálculo para o grupo alimentação no Índice de Custo de Vida da cidade do Rio de Janeiro.

O índice do grupo alimentação passou a ser computado através da seguinte fórmula:

$$I = \left(\frac{p_{1t}}{p_{1,\,t-1}}\right)^{\omega_1} \left(\frac{p_{2t}}{p_{2,\,t-1}}\right)^{\omega_2} \cdots \left(\frac{p_{nt}}{p_{n,\,t-1}}\right)^{\omega_n}, \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \qquad (4.12)$$

onde p_{il} é o preço do bem i no período l e ω_i é a proporção de despesa com a aquisição do bem i. A nota explicativa do Instituto Brasileiro de Economia, publicada na revista *Conjuntura Econômica* de junho de 1977, menciona o fato de que a fórmula (4.12) admite explicitamente que as elasticidades-preço dos bens e serviços que entram no seu cálculo são iguais à unidade, e que esta escolha foi arbitrária, não se baseando em qualquer estudo empírico.

Quando $\gamma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, o índice (4.11) reduz-se a:

$$V\,(p_t,\, p_{t-1}/u) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{it}}{p_{i,\,t-1}}\right)^{\omega_i} \qquad (4.13)$$

onde $\mu_i = \omega_i = p_i q_i / y$. A comparação dos índices (4.13) e (4.12) mostra claramente que eles são iguais. Logo, o índice atualmente usado pela Fundação Getulio Vargas é um caso particular do índice de custo de vida verdadeiro associado à função-utilidade Klein-Rubin, quando todos os γ são iguais a zero.

As elasticidades-renda ε_i, as elasticidades-preço n_{ij} e as elasticidades-preço compensadas n^c_{ij} associadas ao sistema de despesa linear (4.8) são expressas por:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial q_i}{\partial y} \cdot \frac{y}{q_i} = \frac{\mu_i}{\omega_i} \qquad (4.14)$$

$$n_{ij} = -1 + \frac{\gamma_i}{q_i}(1 - \mu_i), \; i = j \qquad (4.15.\text{a})$$

$$n_{ij} = -\mu_i \frac{p_j \gamma_j}{p_i q_i}, \; i \neq j \qquad (4.15.\text{b})$$

$$n^c_{ij} = (1 - \mu_i)\left(\frac{\gamma_i}{q_i} - 1\right), \; i = j \qquad (4.16.\text{a})$$

$$n^c_{ij} = -\frac{\mu_i}{p_i q_i} p_j (q_j - \gamma_j), \; i \neq j \qquad (4.16.\text{b})$$

Segue-se, então, que no caso de $\gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_n = 0$, tem-se: $\varepsilon_i = 1$, $n_{ii} = -1$, $n_{ij} = 0$, $n^c_{ii} = -(1 - \omega_i)$, $n^c_{ij} = \omega_j$. Em palavras: i) as elasticidades-renda são unitárias; ii) as elasticidades-preço são iguais à unidade; iii) as elasticidades-preço cruzadas são nulas; iv) as elasticidades-preço compensadas são iguais a 1 menos a proporção da despesa com a aquisição do i-ésimo bem; v) a elasticidade-preço cruzada compensada entre os bens i e j depende apenas da proporção da renda gasta com o bem j, o que significa dizer, por exemplo, que a elasticidade-preço cruzada compensada entre a abóbora e o chuchu é igual à elasticidade-preço cruzada compensada entre o feijão e o chuchu.

I.4.4 — Índices de Custo de Vida: Laspeyres e Paasche Modificados

O índice de custo de vida verdadeiro definido na equação (4.6) não explicita qual o nível de utilidade que deve ser utilizado na comparação entre os períodos t e $t-1$. Em princípio, qualquer nível de utilidade pode ser usado. A seguir, usaremos dois diferentes níveis de utilidade para servirem de comparação e que darão origem a dois índices diferentes.

I.4.4.1 — O Índice de Laspeyres Modificado

Quando o padrão de vida ($\equiv$ nível de utilidade), usado para comparação entre os dois períodos, refere-se ao período $t-1$, o índice (4.6) passa a ser expresso por:

$$V(u_{t-1}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t}\, q_{i,t}^{*}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t-1}\, q_{i,t-1}} \tag{4.17}$$

onde o denominador da expressão acima indica o custo dos bens e serviços adquiridos no período $t-1$ aos respectivos preços e o numerador $\sum_i p_{i,t}\, q_{i,t}^{*}$ indica o custo dos bens e serviços em que o consumidor teria de incorrer para manter o mesmo padrão de vida ($= u_{t-1}$) do período anterior aos preços vigentes em t. O problema que surge para o cálculo do índice (4.17) é que as quantidades $q_{i,t}^{*}$ não são observadas, pois o padrão de vida ($= u_t$) no período t é diferente do padrão no período $t-1$ ($u_t \neq u_{t-1}$) e, conseqüentemente, $q_{i,t}^{*} \neq q_{i,t}$.

O fato de não observarmos as quantidades $q_{i,t}^{*}$ não constitui empecilho para que o índice (4.17) seja calculado, pelo menos aproximadamente. Com efeito, uma expansão de Taylor nos possibilita escrever: [7]

$$q_{i,t}^{*} - q_{i,t-1} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{S_{ij}^{t} + S_{ij}^{t-1}}{2} \right) \Delta p_{j,t} + O_3 \tag{4.18}$$

[7] A expansão de Taylor que será usada aqui não é a comumente apresentada nos livros-textos. Com efeito, a expansão

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2}\, h'\,(f_x + f_{x+h}) + O_3 \tag{A}$$

resulta da combinação das seguintes expressões:

$$f(x+h) - f(x) = h'f_x + \frac{1}{2}\, h'F_x h + O_3 \tag{B}$$

e:

$$f_{x+h} - f_x = F_x h + O_2 \tag{C}$$

onde F_x é a matriz hessiana de $f(x)$ e f_y é o vetor de derivadas parciais de $f(x)$ avaliadas no ponto y. Pré-multiplicando-se (C) por h' e substituindo-se a expressão daí resultante em (B), resulta na expansão (A). Para maiores detalhes, ver Theil (1975, pp. 37-8).

onde O_3 é um termo de 3.ª ordem nas variações dos preços, S_{ij}^{t} e S_{ij}^{t-1} representam os efeitos-substituição avaliados nos períodos t e $t - 1$, respectivamente, isto é:

$$\left.\frac{\partial q_{i,t}}{\partial p_{j,t}}\right|_{u = ct} = S_{ij}^{t} \tag{4.19}$$

$$\left.\frac{\partial q_{i,t-1}}{\partial p_{j,t-1}}\right|_{u = ct} = S_{ij}^{t-1} \tag{4.20}$$

onde as derivadas parciais são avaliadas mantendo a renda real constante ($u = ct$) e $\Delta p_{j,t} = p_{j,t} - p_{j,t-1}$.

Sabe-se da teoria do consumidor que os efeitos-substituição têm de satisfazer as seguintes condições:

$$\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{t} \, p_{j,t} = 0 \tag{4.21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{t-1} \, p_{j,t-1} = 0 \tag{4.22}$$

Face às condições (4.21) e (4.22), é fácil verificar-se que:

$$\sum_{j=1}^{n} (S_{ij}^{t} + S_{ij}^{t-1}) \, (p_{j,t} - p_{j,t-1}) = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{t-1} \, p_{j,t} - \sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{t} \, p_{j,t-1} \tag{4.23}$$

Desprezando-se o termo de 3.ª ordem, a equação (4.18) passa a ser escrita como:

$$q_{i,t}^{*} = q_{i,t-1} + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{t-1} \, p_{j,t} - \sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{t} \, p_{j,t-1} \right) \tag{4.24}$$

Substituindo-se a expressão acima em (4.17), obtém-se:

$$V(u_{t-1}) = \frac{\sum_{i} p_{i,t} \, q_{i,t-1} + \frac{1}{2} \sum_{i} p_{i,t} \left(\sum_{j} S_{ij}^{t-1} \, p_{j,t} - \sum_{j} S_{ij}^{t} \, p_{j,t-1} \right)}{\sum_{i} p_{i,t-1} \, q_{i,t-1}} \tag{4.25}$$

Observe-se que:

$$\sum_{i} p_{it} \sum_{j} S_{ij}^{t} \, p_{j,t-1} = \sum_{j} p_{j,t-1} \sum_{i} S_{ji}^{t} \, p_{it} = 0 \tag{4.26}$$

pois $S_{ij} = S_{ji}$ (simetria da matriz de Slutsky) e a condição (4.21) tem de ser satisfeita. Com este resultado a equação (4.25) passa a ser escrita como:

$$V(u_{t-1}) = \frac{\sum_i p_{i,t}\, q_{i,t-1}}{\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t-1}} + \frac{\frac{1}{2}\sum_i \sum_j p_{i,t}\, p_{j,t}\, S_{ij}^{t-1}}{\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t-1}} \tag{4.27}$$

A primeira parcela do lado direito de (4.27) nada mais é do que o índice de Laspeyres. Logo:

$$V(u_{t-1}) = L + \frac{\frac{1}{2}\sum_i \sum_j p_{i,t}\, p_{j,t}\, S_{ij}^{t-1}}{\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t-1}} \tag{4.28}$$

onde $L = (\sum_i p_{i,t}\, q_{i,t-1})/(\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t-1})$. Como a forma quadrática

$$\sum_i \sum_j p_{i,t}\, p_{j,t}\, S_{ij}^{t-1} \tag{4.29}$$

é negativa em virtude de a matriz de Slutsky ser negativa semidefinida, segue-se que o índice de Laspeyres superestima o índice de custo de vida verdadeiro, $L > V(u_{t-1})$, uma proposição bastante popular na literatura que trata de índices de preços. Quando os preços em t são proporcionais aos preços em $t-1$, $p_{i,t} = k\, p_{i,t-1}$, os índices $V(u_{t-1})$ e L coincidem, pois a forma quadrática (4.29) anula-se devido à inexistência de alteração nos preços relativos.

A elasticidade-preço compensada, avaliada no período $t-1$, é definida por:

$$n_{ij}^{c} = S_{ij}^{t-1}\, \frac{p_{j,t-1}}{q_{i,t-1}}$$

Substituindo-se este valor em (4.28), obtém-se:

$$V(u_{t-1}) = L + \frac{\frac{1}{2}\sum_i \sum_j p_{i,t}\, q_{i,t-1}\, n_{ij}^{c}\, \frac{p_{j,t}}{p_{j,t-1}}}{\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t-1}} \tag{4.30}$$

Alternativamente:

$$V(u_{t-1}) = \sum_i \omega_{i,t-1}\, \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \omega_{i,t-1}\, \frac{p_{j,t}}{p_{j,t-1}}\, \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}}\, n_{ij}^{c} \tag{4.31}$$

ou ainda:

$$V(u_{t-1}) = \frac{\sum_i p_{i,t}\, q_{i,t-1}\left[1 + \frac{1}{2}\sum_j n_{ij}^{c}\, \frac{p_{j,t}}{p_{j,t-1}}\right]}{\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t-1}} \tag{4.32}$$

As fórmulas (4.30), (4.31) e (4.32) mostram claramente a correção a ser feita no índice de Laspeyres para o cálculo do índice de custo de vida verdadeiro. O cálculo deste novo índice requer o conhecimento das elasticidades-preço compensadas n^c_{ij}. Cabe ressaltar que este novo índice é uma aproximação para qualquer função-utilidade, não necessitando que se introduzam hipóteses restritivas acerca do comportamento do consumidor. O sentido que estamos atribuindo à afirmação de que estes novos índices prescindem da especificação de uma função-utilidade é de que estes índices não foram deduzidos a partir de uma função-utilidade conhecida *a priori*. Por exemplo, o índice de custo de vida (4.32) consiste em uma aproximação para qualquer função-utilidade, pois, além dos dados de preços e quantidades normalmente utilizados no cômputo de índices de preços, precisa-se apenas de estimativas das elasticidades-preço compensadas num *dado ponto* das equações de demanda.

I.4.4.2 — O Índice de Paasche Modificado

Quando o nível de utilidade de referência, para comparação entre os períodos t e $t-1$, é o nível de utilidade do período t, o índice de custo de vida (4.6) toma a seguinte forma:

$$V(u_t) = V(p_t, p_{t-1}/u_t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t}\, q_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t-1}\, q^*_{i,t-1}} \tag{4.33}$$

isto é, o índice $V(u_t)$ é igual à razão entre o custo dos bens e serviços adquiridos no período t, aos preços do mesmo período, e o custo dos bens e serviços, aos preços do período $t-1$, que o consumidor teria de adquirir no período $t-1$ para manter o mesmo padrão de vida do período t.

Obviamente, as quantidades $q^*_{i,t-1}$ não são observadas, o que impossibilita o cálculo do índice (4.33). Entretanto, é possível computar-se aproximadamente este índice. Com efeito, $q^*_{i,t-1}$ pode ser desenvolvido em série de Taylor como:

$$q^*_{i,t-1} - q_{it} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{S^{t-1}_{ij} + S^t_{ij}}{2} \right) \Delta p_{j,t-1} \tag{4.34}$$

onde desprezamos termos de terceira ordem nos Δp. Levando-se em conta a expressão (4.24), podemos escrever a equação (4.34) do seguinte modo:

$$q^*_{i,t-1} = q_{it} + \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n} S^t_{ij}\, p_{j,t-1} - \sum_{j=1}^{n} S^{t-1}_{ij}\, p_{j,t} \right] \tag{4.35}$$

Substituindo-se a equação acima no índice (4.33), obtém-se:

$$V(u_t) = \frac{\sum_i p_{i,t}\, q_{i,t}}{\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t} + \frac{1}{2} \sum_i p_{i,t-1} \left(\sum_j S^t_{ij}\, p_{j,t-1} - \sum_j S^{t-1}_{ij}\, p_{j,t}\right)} \tag{4.36}$$

Em virtude de: $\sum_i p_{i,t-1} \sum_j S_{ij}^{t-1} p_{j,t} = \sum_j p_{j,t} \sum_i S_{ji}^{t-1} p_{i,t-1} = 0$, pois $S_{ij} = S_{ji}$, e pelo fato de que a condição (4.23) ter de ser obedecida, o índice $V(u_t)$ passa a ter a seguinte expressão:

$$V(u_t) = \frac{\sum_i p_{i,t} q_{i,t}}{\sum_i p_{i,t-1} q_{i,t} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t-1} p_{j,t-1} S_{ij}^t} \tag{4.37}$$

Alternativamente, podemos escrever o índice (4.37) como:

$$V(u_t) = \frac{\dfrac{\sum_i p_{i,t} q_{i,t}}{\sum_i p_{i,t-1} q_{i,t}}}{1 + \dfrac{1/2 \sum_i \sum_j p_{i,t-1} p_{j,t-1} S_{ij}^t}{\sum_i p_{i,t-1} q_{i,t}}} \tag{4.38}$$

O numerador da expressão acima é o índice de Paasche

$$P = \frac{\sum_i p_{i,t} q_{i,t}}{\sum_i p_{i,t-1} q_{i,t}}$$

e o denominador mostra a correção a ser feita no índice de Paasche para que se obtenha o índice de custo de vida verdadeiro, cuja base de comparação é o padrão de vida no período t $(u = u_t)$.

Como a forma quadrática

$$\sum_i \sum_j p_{i,t-1} p_{j,t-1} S_{ij}^t$$

que aparece no denominador da expressão (4.38) é negativa em virtude de a matriz de Slutsky ser negativa semidefinida, é fácil concluir-se que $V(u_t) > P$, isto é, que o índice de Paasche subestima o índice de custo de vida verdadeiro, uma proposição bastante conhecida na literatura econômica que trata dos números índices. Observe que é incorreto afirmar-se que $L > V > P$ a partir das desigualdades $L > V(u_{t-1})$ e $V(u_t) > P$, pois os índices $V(u_{t-1})$ e $V(u_t)$ são diferentes. Quando $p_{i,t-1} = k\, p_{i,t}$, para todos os valores de i, o índice de Paasche é igual ao índice verdadeiro $V(u_t)$, pois a forma quadrática acima é igual a zero.

I.4.5 — Índices de Renda Real: Laspeyres e Paasche Modificados

O índice de renda real verdadeiro é definido através da seguinte expressão:

$$V_q\,(u_t, u_{t-1}/p) = V_q\,(p) = \frac{C\,(u_t,\, p)}{C\,(u_{t-1},\, p)} \tag{4.39}$$

onde $C\,(u_t, p)$ é o custo dos bens e serviços adquiridos quando o padrão de vida é u_t e o vetor de preços é igual a p, e $C\,(u_{t-1}, p)$ é o custo dos bens e serviços quando o nível de utilidade é u_{t-1} e os preços são dados pelo mesmo vetor p.

O problema que surge no cálculo do índice de renda real verdadeiro é quanto à escolha do vetor de preços que será utilizado como referência na comparação entre as situações em t e $t - 1$. A escolha é, sem dúvida alguma, arbitrária. Todavia, costuma-se usar os preços no período $t - 1$ ou então os preços no período t como referência. A escolha de um ou outro vetor de preços dará margem a dois índices diferentes que serão apresentados a seguir.

I.4.5.1 — O Índice de Laspeyres Modificado

Quando os preços escolhidos para servirem de referência são os preços do período $t - 1$, o índice de renda real verdadeiro (4.39) passa a ser expresso por:

$$V_q\,(p_{t-1}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q^*_{i,t}\, p_{i,t-1}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} \tag{4.40}$$

Da mesma forma que nos índices de preços, o índice (4.40) é difícil de calcular porque as quantidades q^*_{it} não são observadas, pois elas representam as quantidades de bens e serviços que o consumidor adquiriria no período t se os preços fossem idênticos aos do período anterior. Obviamente, como os preços em t e $t - 1$ são diferentes, as quantidades q_{it} diferem das q^*_{it}. Este problema pode ser contornado através da expansão de Taylor:

$$q^*_{i,t} = q_{i,t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{S_{ij}^{t-1} + S_{ij}^{t}}{2} \right) \Delta p_{j,t-1} \tag{4.41}$$

onde desprezamos os termos de terceira ordem nos Δp_j. Substituindo-se (4.41) em (4.40) e levando-se em conta a expressão (4.24), obtém-se:

$$V_q\,(p_{t-1}) =$$

$$= \frac{\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t} + \frac{1}{2} \sum_i p_{i,t-1} \sum_j S_{ij}^{t}\, p_{j,t-1} - \frac{1}{2} \sum_i p_{i,t-1} \sum_j S_{ij}^{t-1}\, p_{j,t}}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} \tag{4.42}$$

Como:

$$\sum_i p_{i,t-1} \sum_j S_{ij}^{t-1} \; p_{j,t} = \sum_j p_{j,t} \sum_i S_{ji}^{t-1} \; p_{i,t-1} = 0$$

Segue-se que a equação (4.42) reduz-se a:

$$V_q(p_{t-1}) = \frac{\sum_i q_{i,t} \, p_{i,t-1} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t-1} \, S_{ij}^t \, p_{j,t-1}}{\sum_i q_{i,t-1} \, p_{i,t-1}} \tag{4.43}$$

Alternativamente, o índice (4.43) pode ser escrito como:

$$V_q(p_{t-1}) = \frac{\sum_i q_{i,t} \, p_{i,t-1}}{\sum_i q_{i,t-1} \, p_{i,t-1}} + \frac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t-1} \, p_{j,t-1} \, S_{ij}^t}{\sum_i q_{i,t-1} \, p_{i,t-1}} \tag{4.44}$$

A primeira parcela do lado direito de (4.44) é o índice de Laspeyres de renda real:

$$L_q = \frac{\sum_i q_{i,t} \, p_{i,t-1}}{\sum_i q_{i,t-1} \, p_{i,t-1}}$$

A segunda parcela do lado direito de (4.44) indica a correção a ser feita no índice de Laspeyres:

$$\frac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t-1} \, p_{j,t-1} \, S_{ij}^t}{\sum_i q_{i,t-1} \, p_{i,t-1}} = \frac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_{i,t} \, p_{i,t-1} \, \eta_{ij}^c \, \frac{p_{j,t-1}}{p_{j,t}}}{\sum_i q_{i,t-1} \, p_{i,t-1}}$$

onde η_{ij}^c é a elasticidade-preço cruzada compensada avaliada no período t. Em virtude de a forma quadrática

$$\sum_i \sum_j p_{i,t-1} \, p_{j,t-1} \, S_{ij}^t$$

ser negativa, o índice de Laspeyres superestima o índice de renda real verdadeiro, $L_q > V_q \, (p_{t-1})$, uma proposição familiar da teoria econômica. Quando todos os preços variam na mesma proporção os dois índices coincidem, pois obviamente não existe substituição em virtude de os preços relativos não se terem modificado.

Da mesma forma que no índice de preços, o cálculo do novo índice de renda real requer o conhecimento das elasticidades-preço cruzadas compensadas. Cabe, também, salientar o fato de que o novo índice proposto aqui constitui-se em uma aproximação para qualquer função-utilidade, não requerendo, todavia, que se suponha uma forma específica para a função-utilidade.

I.4.5.2 — O Índice de Paasche Modificado

Quando os preços utilizados para comparação no índice de renda real verdadeiro referem-se ao período t, o índice (4.39) passa a ser expresso por:

$$V_q(p_t) = \frac{\sum_i q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum q^*_{i,t-1}\, p_{i,t}} \tag{4.45}$$

onde as quantidades $q^*_{i,t-1}$ não são observadas, pois seriam as quantidades que o indivíduo consumiria se no período $t - 1$ os preços fossem iguais aos preços vigentes no período t. Conseqüentemente, o valor exato do índice (4.45) não pode ser computado. Todavia, um valor aproximado pode ser calculado com base na seguinte expansão de Taylor:

$$q^*_{i,t-1} = q_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{S^t_{ij} + S^{t-1}_{ij}}{2} \right) \Delta\, p_{j,t} \tag{4.46}$$

onde os elementos de terceira ordem nos $\Delta\, p_j$ foram desprezados. Substituindo-se (4.46) em (4.45) e levando-se em conta a expressão (4.20), obtém-se:

$$V_q(p_t) =$$

$$= \frac{\sum_i q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{it} + \frac{1}{2} \sum_i p_{i,t} \sum S^{t-1}_{ij}\, p_{jt} - \frac{1}{2} \sum_i p_{i,t} \sum_j S^t_{ij}\, p_{j,t-1}} \tag{4.47}$$

Como:

$$\sum_i p_{i,t} \sum_j S^t_{ij}\; p_{j,t-1} = \sum_j p_{j,t-1} \sum_i S^t_{ji}\, p_{i,t} = 0$$

a equação (4.47) reduz-se a:

$$V_q(p_t) = \frac{\sum_i q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{i,t} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t}\, p_{j,t}\, S^{t-1}_{ij}} \tag{4.48}$$

Alternativamente, a expressão acima pode ser escrita do seguinte modo:

$$V_q(p_t) = \frac{\dfrac{\sum_i q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{it}}}{1 + \dfrac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t}\, p_{j,t}\, S^{t-1}_{ij}}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{i,t}}} \tag{4.49}$$

O numerador desta equação nada mais é do que o índice de renda real de Paasche:

$$P_q = \frac{\sum_i q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{i,t}}$$

O denominador de (4.49) mostra a correção a ser feita no índice de Paasche para que se obtenha o índice de renda real verdadeiro. Observe que o valor desta correção é superior à unidade em virtude de ser negativa a forma quadrática:

$$\sum_i \sum_j p_{i,t}\, p_{j,t}\, S_{i,j}^{t-1}$$

Assim, o índice de Paasche subestima o índice de renda real verdadeiro, ou seja: $P_q < V_q(p_t)$. Da mesma forma que nos casos anteriores o cálculo do índice (4.49) requer o conhecimento das elasticidades-preço cruzadas compensadas, avaliadas no período $t - 1$.

Nesta seção mostramos claramente que não há necessidade de se fazer hipóteses completamente arbitrárias quanto ao comportamento do consumidor com o objetivo de se calcular índices de preços, ou de quantidades, que levem em conta a substituição que ocorre entre os bens e serviços adquiridos pelo consumidor quando os preços relativos se alteram. Uma modificação bastante simples nos tradicionais índices de Laspeyres e de Paasche pode ser feita dando origem a novos índices, que para serem computados requerem estimativas das elasticidades-preço compensadas. Estes novos índices independem da função-utilidade pois constituem-se em uma aproximação para qualquer tipo de função-utilidade.

Um dos argumentos contra a utilização dos índices propostos aqui seria o de que as instituições que computam índices de preços não dispõem de estimativas das elasticidades-preço compensadas. Obviamente, o que se deve recomendar a essas instituições é que procurem estimar as elasticidades-preço necessárias ao cálculo dos índices se desejarem corrigir as distorções provocadas pela inexistência de substituição nos índices tradicionais de Laspeyres e Paasche. Acreditamos ser preferível trabalhar com valores estimados, mesmo que precários, das elasticidades do que arbitrar-se fórmulas que traduzem hipóteses bastante fortes acerca do comportamento dos consumidores.

I.4.6 — O Índice Geométrico Modificado

O índice geométrico modificado para calcular o aumento do custo de vida é definido através da seguinte expressão:

$$G = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \right)^{\bar{\omega}_i} \qquad (4.50)$$

onde $\bar{\omega}_i$ é igual à média aritmética entre a proporção da renda gasta pelo consumidor na aquisição do bem i no período t, $\omega_{i,t}$, e a proporção correspondente ao período $t - 1$, $\omega_{i,t-1}$, ou seja:

$$\bar{\omega}_i = \frac{\omega_{i,t} + \omega_{i,t-1}}{2}$$

O principal problema para a utilização do índice G diz respeito à obtenção dos pesos $\bar{\omega}$. Com efeito, o cálculo de $\bar{\omega}_i$ requer valores de $\omega_{i,t}$ e $\omega_{i,t-1}$, o que por sua vez implica conhecer-se as quantidades e preços em ambos os períodos. Na prática isto significa dizer que se teria de coletar dados de quantidades período a período, tarefa que não é impossível, mas cujo custo certamente torna de pouco uso o índice geométrico para se avaliar a variação do custo de vida.

A interpretação do índice geométrico do ponto de vista teórico não é muito transparente, pois consiste em uma aproximação do índice que resulta da média geométrica dos índices verdadeiros $V(u_{t-1})$ e $V(u_t)$. Em outras palavras, o índice geométrico seria uma espécie de índice ideal de Fisher para os índices verdadeiros. [8]

Com o objetivo de mostrar que o índice geométrico de Theil é uma aproximação daquele que resulta da média geométrica dos índices verdadeiros $V(u_t)$ e $V(u_{t-1})$, comecemos por expandir em série de Taylor os logaritmos de $C(u_t, p_t)$ e de $C(u_{t-1}, p_t)$, isto é:

$$\log C(u_t, p_t) = \log C(u_t, p_{t-1}) +$$

$$\frac{1}{2} \sum_i \left[\left. \frac{\partial \log C(u_t, p)}{\partial \log p_i} \right|_t + \left. \frac{\partial \log C(u_t, p)}{\partial \log p_i} \right|_{t-1} \right] \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \qquad (4.51.a)$$

e:

$$\log C(u_{t-1}, p_t) = \log C(u_{t-1}, p_{t-1}) +$$

$$\frac{1}{2} \sum_i \left[\left. \frac{\partial \log C(u_{t-1}, p)}{\partial \log p_i} \right|_t + \left. \frac{\partial \log C(u_{t-1}, p)}{\partial \log p_i} \right|_{t-1} \right] \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \qquad (4.51.b)$$

Da expressão (4.4) é fácil concluir que:

$$\left. \frac{\partial \log C(u_t, p)}{\partial \log p_i} \right|_t = \frac{p_{i,t}\, q_{i,t}}{C_t} = \omega_{i,t}$$

$$\left. \frac{\partial \log C(u_t, p)}{\partial \log p_i} \right|_{t-1} = \frac{p_{i,t-1}\, q^*_{i,t-1}}{C^*_{t-1}} = \omega^*_{i,t-1}$$

$$\left. \frac{\partial \log C(u_{t-1}, p)}{\partial \log p_i} \right|_t = \frac{p_{i,t}\, q^*_{i,t}}{C^*_t} = \omega^*_{i,t-1}$$

$$\left. \frac{\partial \log C(u_{t-1}, p)}{\partial \log p_i} \right|_{t-1} = \frac{p_{i,t-1}\, q_{i,t-1}}{C_{t-1}} = \omega_{i,t-1}$$

[8] O índice ideal de Fisher é igual à média geométrica dos índices de Laspeyres e Paasche.

Cabe ressaltar que as variáveis contendo asteriscos não são observáveis, pois representam quantidades que seriam consumidas em condições hipotéticas de preços. Substituindo-se os valores acima nas equações (4.51.a) e (4.51.b), obtém-se:

$$\log \frac{C(u_t, p_t)}{C(u_t, p_{t-1})} = \frac{1}{2} \sum_i (\omega_{i,t} + \omega^*_{i,t-1}) \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{4.52.a}$$

e:

$$\log \frac{C(u_{t-1}, p_t)}{C(u_{t-1}, p_{t-1})} = \frac{1}{2} \sum_i (\omega^*_{i,t} + \omega_{i,t-1}) \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{4.52.b}$$

Tomando-se a média aritmética destas duas expressões, resulta:

$$\log \left[\frac{C(u_t, p_t)}{C(u_t, p_{t-1})} \frac{C(u_{t-1}, p_t)}{C(u_{t-1}, p_{t-1})} \right]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_i (\omega_{i,t} + \omega^*_{i,t-1} + \omega^*_{i,t} + \omega_{i,t-1}) \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{4.53}$$

Seguindo-se um procedimento usado por Theil (1975, p. 138), temos que:

$$\omega^*_{i,t-1} = \omega_{i,t} + \sum_i \left. \frac{\partial \omega_i}{\partial \log p_i} \right|_{\substack{u_t \\ p_t}} \log \frac{p_{i,t-1}}{p_{i,t}} + O_2 \tag{4.54.a}$$

e:

$$\omega^*_{i,t} = \omega_{i,t-1} + \sum_i \left. \frac{\partial \omega_i}{\partial \log p_i} \right|_{\substack{u_{t-1} \\ p_{t-1}}} \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} + O_2 \tag{4.54.b}$$

onde O_2 é um termo de segunda ordem nas variações logarítmicas dos preços. Somando-se (4.54.a) e (4.54.b), temos:

$$\omega^*_{i,t-1} + \omega^*_{i,t} = \omega_{i,t} + \omega_{i,t-1} + O_2 \tag{4.55}$$

pois os demais termos que apareceriam no lado direito da expressão acima são de segunda ordem. Segue-se, então, que substituindo-se (4.55) em (4.53) resulta em:

$$\log G = \sum_i \left(\frac{\omega_{i,t} + \omega_{i,t-1}}{2} \right) \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{4.56}$$

onde os termos desprezados são de terceira ordem e:

$$G = \left[\frac{C(u_t, p_t)}{C(u_t, p_{t-1})} \frac{C(u_{t-1}, p_t)}{C(u_{t-1}, p_{t-1})} \right]^{1/2} = [V(u_t) \cdot V(u_{t-1})]^{1/2}$$

É fácil concluir a partir de (4.56) que:

$$G = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \right)^{\bar{\omega}_i}$$

Caso se deseje calcular o índice de renda real associado a este índice de custo de vida, o índice de renda real implícito será dado pela seguinte fórmula:

$$V_q = \frac{\sum_i q_{i,t}\, p_{i,t}}{(\sum_i q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \right)^{\bar{\omega}_i}}$$

I.5 — Exercícios

1. A função-utilidade é expressa por:

$$u(q_1, q_2) = a_1 q_1 + a_2 q_2 + \frac{1}{2} (b_{11} q_1^2 + 2 b_{12} q_1 q_2 + b_{22} q_2^2)$$

onde a_1, a_2, b_{11}, b_{12} e b_{22} são parâmetros. Calcule:

a) A equação de demanda de cada bem.
b) A equação da utilidade marginal da renda.

2. Suponha que a função-utilidade $u(q_1, q_2)$ seja homotética. Mostre que ambas as elasticidades-renda são iguais à unidade.

3. Suponha que a função-utilidade $u(q)$ seja aditiva, isto é:

$$u(q) = v_1(q_1) + v_2(q_2) + \dots + v_n(q_n)$$

a) Algum bem pode ser inferior?
b) Qual o padrão da matriz de substituição?

4. A quantidade q_i maximiza o nível de utilidade para o vetor de preços p, enquanto $C(p, u)$ indica o nível mínimo de renda para que se atinja o nível de utilidade u aos preços $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. A partir da identidade

$$q_i(p, u) \equiv q_i[p, C(p, u)]$$

deduza a equação de Slutsky.

5. Para a função

$$\log u_I = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log \frac{p_i}{y} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \log \frac{p_i}{y} \log \frac{p_j}{y}$$

a) Quais as restrições que os parâmetros α_i e β_{ij} devem satisfazer para que esta função seja uma função-utilidade indireta?

b) Quais são as equações de demanda dos n bens?

6. Para a função-utilidade direta

$$u(q) = A\,(q_1^l + q_2^l)^{1/l}$$

calcule:

a) A função-utilidade indireta.

b) A função de custo (ou de despesa) do consumidor.

7. Dada a função-utilidade

$$u(q) = v(q_1) + \alpha \log q_2$$

onde α é um parâmetro e $v(q_1)$ uma função côncava, monotônica crescente, pede-se:

a) As equações de demanda dos dois bens.

b) As elasticidades-preço e renda.

c) A função-utilidade indireta é aditiva?

d) Aditividade das funções-utilidade direta e indireta implica que todos os bens têm elasticidades-preço, não compensadas, unitárias?

8. Dada a função-utilidade indireta

$$u_I = (p_1^\rho + p_2^\rho)^{-1/\rho}\, y$$

obtenha:

a) As equações de demanda dos dois bens.

b) O índice de custo de vida verdadeiro quando o padrão de referência for o período atual.

9. A função de custo para um consumidor é dada por:

$$C(u, p) = uc(p)$$

onde $c(p) = c(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Mostre que para esta função de custo as elasticidades-renda de todos os bens são iguais à unidade.

10. Dada a função-utilidade direta

$$u(q) = A\, q_1^{\alpha_1}\, q_2^{\alpha_2} \ldots q_n^{\alpha_n}$$

onde A, α_1, α_2, $\ldots$, α_n são parâmetros, calcule:

a) O índice de custo de vida verdadeiro.

b) O índice de renda real verdadeiro.

11. Suponha que a função-utilidade direta seja expressa por:

$$u(q) = \min\left(\frac{q_1}{\alpha_1}, \frac{q_2}{\alpha_2}, \ldots, \frac{q_n}{\alpha_n}\right)$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são parâmetros. Qual a fórmula do índice de custo de vida verdadeiro? Na sua resposta explicite o padrão de referência que estiver usando.

12. A função de custo (ou de despesa) de um consumidor é dada por:

$$C(u, p_1, p_2) = k\,(p_1^{\alpha}\; p_2^{\beta}\; u\; e^{\theta u})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

onde k, α, β e θ são parâmetros. Calcule:

a) O índice de custo de vida verdadeiro.
b) O índice de renda real verdadeiro.

13. O índice de custo de vida verdadeiro associado à função-utilidade Klein-Rubin

$$u(q) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \log(q_1 - \gamma_i)$$

depende do nível de utilidade usado como referência. Mostre como o índice de Laspeyres (ou Paasche) modificado pode ser usado para se calcular um valor aproximado do índice de custo de vida verdadeiro associado ao sistema de despesa linear.

14. A partir da função-utilidade

$$u(q) = \frac{q_1 - \alpha}{(q_2 - \beta)^2}, \quad \begin{matrix} q_1 > \alpha \\ q_2 > \beta \end{matrix}$$

a) Calcule a função de custo.
b) Mostre que um dos bens é inferior.

15. Certo ou errado (justifique a sua resposta):

a) Quando as preferências do consumidor são do tipo lexicográfica a elasticidade-renda da demanda de um bem é igual a 1 e as elasticidades-renda dos demais bens são iguais a zero.

b) A função $u(q) = q_1^2 + q_2^2$ não obedece às condições que uma função-utilidade deve satisfazer.

c) Quando a função-utilidade é homotética o índice de custo de vida verdadeiro independe do nível de utilidade.

d) Quando a função-utilidade direta é aditiva a hipótese de que ela é quase-côncava não implica que todas as utilidades marginais são decrescentes.

e) Se a função-utilidade for aditiva, a utilidade marginal da renda independe do nível de renda.

f) A existência de bens de Giffen contradiz a proposição da teoria do consumidor de que a curva de demanda é negativamente inclinada.

g) Dois bens i e j são considerados substitutos brutos quando:

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} > 0$$

Esta definição não é simétrica, pois, em geral:

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} \neq \frac{\partial q_j}{\partial p_i}$$

h) Se todos os bens tiverem suas próprias elasticidades-preço não compensadas iguais à unidade, as respectivas elasticidades-preço compensadas serão também iguais à unidade.

i) O índice de Laspeyres é um limite superior enquanto o índice de Paasche é um limite inferior para o índice de custo de vida verdadeiro.

j) Uma transformação monotônica crescente da função-utilidade não altera as principais proposições da teoria do consumidor.

k) Quando a função-utilidade é homogênea do grau 1, a utilidade marginal da renda independe do nível de renda.

l) Para a função-utilidade $u = \alpha\, q_2 + \beta \log q_1$, o efeito-substituição do bem 1 é sempre igual ao efeito-preço.

I.6 — Bibliografia

BARBOSA, F. de H. Índice de custo de vida: avaliação do método da Fundação Getulio Vargas e nova formulação. *Revista Brasileira de Economia,* 33: 485-99, 1979.

BARTEN, A. P. Consumer demand functions under conditions of almost additive preferences. *Econometrica,* 32:1-38, 1964.

GREEN, H. A. J. *Consumer theory.* London, Macmillan, 1976.

HICKS, J. R. *Value and capital.* Oxford, Clarendon Press, 1946.

KATZNER, D. W. *Static demand theory.* London, Macmillan, 1970.

MALINVAUD. *Lectures on microeconomic theory.* Amsterdam, North-Holland, 1972.

PHLIPS, L. *Applied consumption analysis*. New York, American Elsevier, 1974.

SAMUELSON, P. A. *Foundations of economic analysis*. New York, Atheneum, 1971.

SIMONSEN, M. H. *Teoria microeconômica*. Vol. 1. Rio de Janeiro, Fundação Getulio Vargas, 1967.

SLUTSKY, E. On the theory of the budget of the consumer. [Trad. ing. do art. orig. pub. em ital.] In: STIGLER, G. J., e BOULDING, K. E., orgs. *Readings in price theory*. Chicago, Richard D. Irwin.

THEIL, H. *Theory and measurement of consumer demand*. Vol. 1. Amsterdam, North-Holland, 1975.

Capítulo II

APLICAÇÕES DA TEORIA DO CONSUMIDOR

Este capítulo tem como objetivo apresentar três tipos de aplicações da teoria do consumidor. A primeira seção é dedicada à especificação da equação de demanda de um bem considerado isoladamente. A segunda trata dos sistemas de equações de demanda, mais especificamente do sistema de despesa linear, do sistema adilog indireto e do modelo de Rotterdam. As curvas de Engel são examinadas na seção seguinte, com ênfase na especificação das possíveis formas funcionais que podem ser utilizadas em estudos empíricos que a elas se refiram.

II.1 — Equações de Demanda

Em algumas situações o economista está interessado em estudar isoladamente a equação de demanda por um determinado produto, sem levar em consideração as equações de demanda pelos demais bens. A teoria do consumidor, apresentada no capítulo anterior, nos diz que a quantidade demandada por um bem ou serviço, digamos o primeiro, é função do preço do próprio bem, dos demais preços e da renda do consumidor. Em símbolos:

$$q_1 = q_1 (p_1, \ldots, p_n, y) \tag{1.1}$$

A diferencial desta equação, análoga às equações (1.77) e (1.78) do Capítulo I, é dada por:

$$dq_1 = \sum_{j=1}^{n} \left. \frac{\partial q_1}{\partial p_j} \right|_{u=ct} dp_j + \frac{\partial q_1}{\partial y} \left(dy - \sum_{j=1}^{n} q_j dp_j \right) \tag{1.2}$$

e as proposições da teoria do consumidor afirmam que:

$$\left. \frac{\partial q_1}{\partial p_1} \right|_{u=ct} < 0 \tag{1.3}$$

e:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \left. \frac{\partial q_1}{\partial p_j} \right|_{u=ct} = 0 \tag{1.4}$$

A equação (1.3) traduz o fato de que o efeito substituição é negativo, enquanto a equação (1.4) diz que o consumidor reage somente a variações de preços relativos.

II.1.1 — Especificação Econométrica

A especificação de uma equação de demanda que incorpore as proposições sugeridas pela teoria deve ser função dos preços relativos e da renda real do consumidor. Portanto, a quantidade demandada de q_1 é função de seu preço p_1/P, dos preços p_j/P, $j = 2, \ldots, n$, dos bens que lhes são complementares e substitutos e da renda real y/P:

$$q_1 = f\left(\frac{p_1}{P}, \frac{p_2}{P}, \ldots, \frac{p_n}{P}, \frac{y}{P}\right) \tag{1.5}$$

onde P é um índice dos preços dos bens e serviços que compõem a cesta do consumidor, por exemplo: $P = \Sigma\ \omega_i p_i$ ou $\log P = \Sigma\ \omega_i \log P_i$. Em (1.5), quando há referência à equação de demanda de mercado, a quantidade q_1 diz respeito ao consumo *per capita* do bem 1 e a renda real é a renda *per capita*. Certamente, uma variável que pode ser importante na demanda de mercado é a distribuição de renda entre os consumidores, mormente quando esta tiver variado com o decorrer do tempo. Todavia, nos estudos de demanda não se costuma levar em conta as variações da distribuição de renda, face à inexistência de dados ao longo do tempo mais que a qualquer outro fator.

No que toca à forma funcional da equação (1.5), a teoria econômica não sugere qualquer forma específica. O problema é solucionado do ponto de vista empírico. Em geral, as formas funcionais mais usadas são as linear nas variáveis e linear no logaritmo das variáveis. Na forma linear, a equação (1.5) transforma-se em:

$$q_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{p_{1t}}{P_t} + \alpha_2 \frac{p_{2t}}{P_t} + \cdots + \alpha_n \frac{p_{nt}}{P_t} + \beta \frac{y_t}{P_t} + \xi_t \tag{1.6}$$

onde o índice t refere-se ao período de tempo ao qual correspondem as observações. Na forma logarítmica, a equação de demanda (1.5) é expressa por:

$$\log q_{1t} = \alpha_0' + \alpha_1' \log \frac{p_{1t}}{P_t} + \alpha_2' \log \frac{p_{2t}}{P_t} + \ldots$$

$$+ \alpha_n' \log \frac{p_{nt}}{P_t} + \beta \log \frac{y_t}{P_t} + \xi_t \tag{1.7}$$

Observe-se que neste caso os coeficientes das variáveis preço e renda são as elasticidades da quantidade demandada com respeito às variáveis que o coeficiente está multiplicando e as elasticidades-preço são elasticidades compensadas. Em ambos os casos, o sinal esperado do coeficiente α_1 é negativo, enquanto os coeficientes das demais variáveis podem ter quaisquer sinais. Quando o valor do coeficiente α_j, $j = 2, \ldots, n$, for negativo, o bem j e o bem 1 são complementares; em caso contrário, isto é, quando $\alpha_j > 0$, os bens 1 e j são substitutos.

Em ambas as equações, (1.6) e (1.7), introduzimos a perturbação aleatória ξ_t para representar outros fatores que afetam a demanda e que foram deixados fora do modelo. Admitiremos que ξ_t tem média zero, variância constante e que é serialmente independente. Quando, além destas hipóteses, admite-se também que a distribuição de ξ_t é normal, a forma linear (1.6) implica que a distribuição de q_t é normal. Por outro lado, na forma logarítmica esta hipótese de normalidade de ξ_t implicaria que o logaritmo de q_t é que seria distribuído normalmente, ou seja, q_t teria uma distribuição log-normal. Assim, a hipótese de normalidade de ξ_t aliada à forma funcional escolhida para a equação de demanda implica uma dada distribuição para a quantidade q_t. Recomenda-se, portanto, que para uma dada amostra esta hipótese seja devidamente verificada, isto é, se é ou não adequada ao caso em estudo.

Cabe ressaltar que do ponto de vista prático o analista não inclui os preços de todos os bens adquiridos pelos consumidores na equação de demanda. Com efeito, o econometrista introduz informação *a priori*, não testada, de que um bom número de elasticidades-preço cruzadas são nulas, especificando, digamos, a seguinte equação de demanda:

$$\log q_{1t} = \alpha_0 + \eta_{11}^c \log \frac{p_{1t}}{P_t} + \eta_{12}^c \log \frac{p_{2t}}{P_t}$$

$$+ \eta_{13}^c \log \frac{p_{3t}}{P_t} + \beta \log \frac{y_t}{P_t} + \alpha Z_t + \xi_t \qquad (1.8)$$

A equação (1.8) é um caso particular da equação (1.7) quando $\alpha_j = \eta_{1j}^c = 0$, para $j = 4, \ldots, n$. Introduzimos a variável Z_t para captar outros efeitos que não preços e renda e que, entretanto, possam ter influenciado a quantidade demandada no período. Observe-se que, de acordo com a restrição (1.4), $\eta_{11}^c + \eta_{12}^c + \eta_{13}^c = 0$, uma hipótese que pode ser testada a partir da equação (1.8).

Algumas vezes, tem sido usada a seguinte especificação da equação de demanda [Houthakker (1965)]:

$$\log q_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 \log \frac{p_{1t}}{P_t} + \beta \log \frac{y_t}{P_t} + \alpha Z_t + \xi_t \qquad (1.9)$$

e admitamos, para simplificar, que o logaritmo de P_t é igual a $\sum_{i=1}^{n} \omega_{it} \log p_{it}$. Neste caso, o coeficiente α_1 não pode ser identificado com a elasticidade-preço compensada. Com efeito, a derivada parcial do logaritmo de q_{1t} em relação ao logaritmo de p_{1t}, mantendo-se constante a renda real y_t/P_t, é igual a:

$$\left.\frac{\partial \log q_{1t}}{\partial \log p_{1t}}\right|_{\frac{y}{P} = ct} = \alpha_1 - \alpha_1 \frac{\partial \log P_t}{\partial \log p_{1t}} \qquad (1.10)$$

Como $\log P_t = \sum_{i=1}^{n} \omega_{it} \log p_{it}$, segue-se que:

$$\frac{\partial \log P_t}{\partial \log p_{1t}} = \omega_{1t}$$

Substituindo-se o resultado anterior na expressão (1.10), obtém-se:

$$\left. \frac{\partial \log q_{1t}}{\partial \log p_{1t}} \right|_{\frac{y}{P} = ct} = \alpha_1 (1 - \omega_{1t}) \tag{1.11}$$

Alternativamente:

$$\eta^c_{11} = \alpha_1 (1 - \omega_{1t}) \tag{1.12}$$

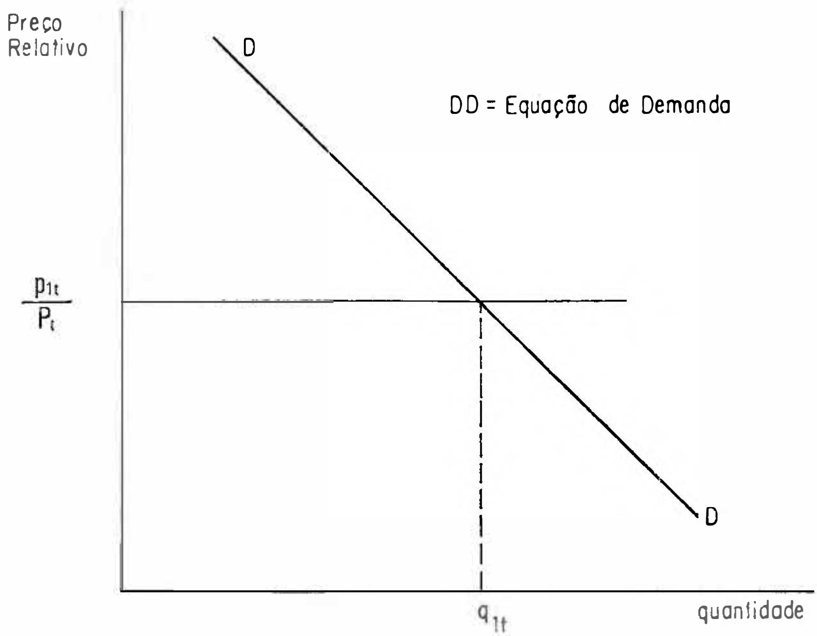
É fácil concluir, com base nas expressões acima, que o coeficiente α_1 não é igual à elasticidade-preço compensada. Obviamente, para valores pequenos de ω_{1t} a diferença entre η^c_{11} e α_1 é bastante pequena.

A estimação dos parâmetros da equação (1.6), ou da equação (1.7), depende das propriedades da variável estocástica ξ_t. A seguir, examinaremos três possibilidades.

1.ª Hipótese: o preço do bem é exógeno. No caso do preço p_{1t}/P_t ser exógeno, como indica a Figura II.1, o erro ξ_t não está correlacionado com o preço, pois

Figura II.1

O PREÇO É EXÓGENO



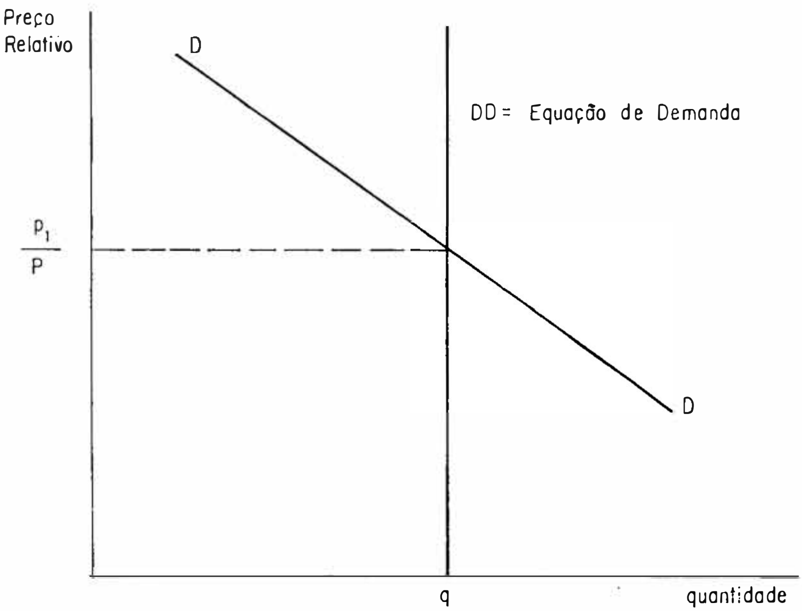
qualquer descolocamento, devido a fatores aleatórios, na curva *DD* não afeta o preço do bem 1. Assim, pode-se empregar o método de mínimos quadrados ordinários na estimação dos parâmetros da equação de demanda, porque as hipóteses do modelo estão em conformidade com as hipóteses desse método.

2.ª Hipótese: a quantidade q_{1t} é exógena. Quando a quantidade q_{1t} é exógena, ela não está correlacionada com o erro ξ_t. Com efeito, qualquer choque na curva de demanda não altera a quantidade q_{1t}. Conseqüentemente, a equação de demanda determina o preço do produto, como indicado na Figura II.2. A equação (1.6) pode ser reescrita como:

$$\frac{p_{1t}}{P_t} = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1} q_{1t} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{p_{2t}}{P_t} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\frac{p_{nt}}{P_t} - \frac{\beta}{\alpha_1}\frac{y_t}{P_t} - \xi_t \qquad (1.13)$$

Figura II.2

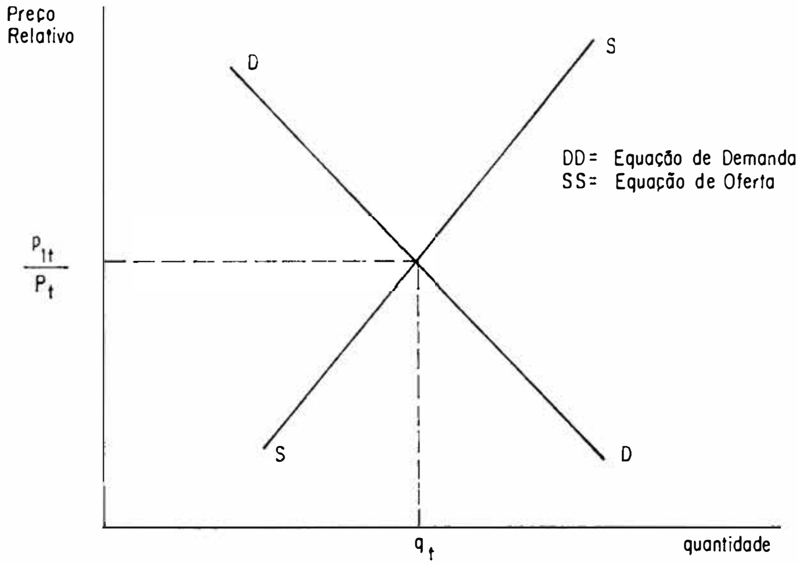
A QUANTIDADE É EXÓGENA



A aplicação do método de mínimos quadrados ordinários na estimação dos parâmetros da equação (1.13) possibilita, então, indiretamente, a estimação dos parâmetros α_0, α_1, ..., α_n e β.

3.ª Hipótese: preço e quantidade são endógenos. No caso mais geral, preço e quantidade são variáveis endógenas determinadas simultaneamente no mercado, como indica a Figura II.3. Assim, qualquer perturbação que afete a quantidade demandada, afeta também o preço do produto. Logo, a variável preço p_{1t} está correlacionada com o erro ξ_t. Em conseqüência, a aplicação do método de mínimos quadrados ordinários levaria, entre outras coisas, à estimação de estimadores viesados. Neste caso, o método de variáveis instrumentais é um dos indicados para a obtenção de estimadores não-viesados. [1]

Figura II.3
PREÇO E QUANTIDADE SÃO ENDÓGENOS



II.1.2 — Estudo da Demanda de Café: Bacha (1968)

O café, durante longo tempo, foi o principal produto de exportação do Brasil, contribuindo até 1964 com mais da metade do valor das nossas exportações e com cerca de um terço do total das exportações mundiais. Em virtude da importância deste produto para a economia brasileira e face a nossa participação no mercado mundial, Bacha construiu um modelo econométrico para o mercado internacional de café, composto de 35 equações, das quais 23 são

1 Obviamente, estamos supondo que o modelo em estudo é identificado, pois de outra forma não teria sentido estimar-se os parâmetros do modelo.

estocásticas enquanto 12 são identidades, com o objetivo primordial de analisar os efeitos da política de preços praticada pelas autoridades governamentais brasileiras sobre o mercado mundial deste produto. Neste modelo, Bacha estima equações de demanda de café, para os tipos comum e solúvel, para os Estados Unidos, com dados anuais do período 1951/65. Esta parte da pesquisa de Bacha, que será reproduzida a seguir, ilustra bastante bem a aplicação da teoria do consumidor no estudo de demanda de um bem quando considerado isoladamente.

As equações de demanda para os cafés dos tipos comum e solúvel foram especificadas de acordo com:

$$q_{1t} = \alpha_{10} + \alpha_{11} \frac{p_{1t}}{P_t} + \alpha_{12} \frac{p_{2t}}{P_t} + \beta_1 \frac{1}{y_t^*} + \gamma_1 D + \xi_{1t} \qquad (1.14)$$

e:

$$q_{2t} = \alpha_{20} + \alpha_{21} \frac{p_{1t}}{P_t} + \alpha_{22} \frac{p_{2t}}{P_t} + \beta_2 \frac{1}{y_t^*} + \gamma_2 D + \xi_{2t} \qquad (1.15)$$

onde:

q_{1t} = consumo civil de café comum nos EUA em 1.000 sacas de café torrado;

q_{2t} = consumo civil de café solúvel nos EUA em 1.000 sacas de café solúvel;

p_{1t} = preço ao consumidor do café comum nos EUA em centavos de dólar por libra torrada;

p_{2t} = preço ao consumidor de café solúvel nos EUA em centavos de dólar por libra torrada;

P_t = índice de preços de alimentos aos consumidores nos EUA, com 1958 = = 100;

y_t^* = renda pessoal disponível dos EUA, em bilhões de dólares de 1958;

D = variável *dummy*, igual a 0 em 1951/53, igual a 1 em 1954/65.

Os seguintes pontos, de acordo com Bacha (1968, pp. 127-8), foram levados em conta nessas especificações:

i) "As equações da demanda para os cafés regular e solúvel seguem padrões bastante diferentes e devem ser considerados separadamente, ao invés de serem agregados numa única equação de demanda de café, visto como um produto homogêneo;

ii) Foi levado em consideração o deslocamento para baixo, do tipo uma vez para sempre, da equação de demanda para café comum em 1954, aparentemente causado pelo elevado aumento de preços de café naquele ano;

iii) O declínio na taxa de aumento do consumo total de café durante os primeiros anos da década de 60, na presença de preços declinando, sugere o uso de uma relação não linear entre consumo e renda. A formulação acima introduz o termo da renda como recíproco da renda pessoal disponível, baseado na hipótese de um nível assintótico de consumo além do qual este não responde ao aumento da renda;

iv) Consideração deve ser dada para o problema de viés dos coeficientes de preços estimados por mínimos quadrados ordinários em virtude da determinação simultânea de preços e quantidades no mercado".

O segundo ponto acima, que diz respeito à mudança da equação de demanda em 1954, traduz-se em termos da especificação econométrica através da variável *dummy D*. O coeficiente γ_1 na equação (1.14) deve ser negativo em virtude do declínio do consumo de café comum, para um mesmo nível de preços e renda. Como se acredita que as preferências dos consumidores americanos mudaram na direção de maior consumo de café solúvel a variável *dummy D* é também incluída na equação (1.15) e espera-se que o sinal do coeficiente γ_2 seja positivo.

O problema do viés causado pelo método de estimação de mínimos quadrados ordinários foi levado em conta, pois os parâmetros das equações (1.14) e (1.15) foram estimados também pelo método de mínimos quadrados em duas etapas. Na verdade, Bacha usou uma variante deste método, pois apenas um subconjunto de variáveis predeterminadas — produção total do Brasil, produção total de outros países latino-americanos, produção total da África e quatro variáveis do tipo *dummy* — foram usadas como variáveis instrumentais.

A multicolinearidade entre os preços do café comum e do café solúvel certamente foi um problema que deve ter surgido na estimação dos parâmetros das equações de demanda (1.14) e (1.15) com os dados para o período analisado. Bacha, por esta razão, adotou o seguinte procedimento. Em primeiro lugar, estimou os parâmetros das referidas equações sem impor nenhuma restrição, obtendo, então, certas proporções entre os coeficientes das variáveis preços. Estas proporções foram impostas, como restrições, numa segunda estimativa das mesmas equações. Por exemplo, se na primeira estimativa o valor encontrado para $\hat{\alpha}_{11} + 6{,}0\ \hat{\alpha}_{12}$ foi igual a zero, a equação (1.14) passou, então, a ser dada por:

$$q_{1t} = \alpha_{10} - \alpha_{12}\left(6{,}0\ \frac{p_{1t}}{P_t} - \frac{p_{2t}}{P_t}\right) + \beta_1 \frac{1}{y_t^*} + \gamma_1 D + \xi_{1t} \quad (1.16)$$

Com esta nova regressão se estimou os parâmetros α_{10}, α_{12}, β_1 e γ_1. O problema com este procedimento é que a mesma amostra é usada duas vezes. Primeiro para obter a relação entre os parâmetros α_{11} e α_{12}. Depois, para estimar os parâmetros da equação de demanda, levando-se em conta a restrição estimada a partir da primeira regressão. Em conseqüência, as propriedades tradicionais dos estimadores não se aplicam neste caso, devendo-se observar certa cautela na interpretação dos intervalos de confiança e nos testes de hipóteses.

A Tabela II.1 mostra as estimativas dos parâmetros das equações de demanda (1.14) e (1.15), estimados por mínimos quadrados ordinários e por mínimos quadrados em duas etapas com a modificação assinalada anteriormente. Todos os coeficientes têm os sinais esperados. O coeficiente da variável *dummy* na equação de demanda de café comum é negativo e significativo, enquanto o coeficiente desta variável na equação de demanda de café solúvel é positivo e significativo. Os coeficientes da variável renda evidencia o fato de que o café não é um bem inferior. É interessante observar que os coeficientes da variável preço,

Tabela II.1

DEMANDA DE CAFÉ DOS ESTADOS UNIDOS: BACHA (1968)

Constante	$4,8\frac{p_1}{P} - \frac{p_2}{P}$	$6,0\frac{p_1}{P} - \frac{p_2}{P}$	$0,69\frac{p_2}{P} - \frac{p_1}{P}$	*Dummy*	$\frac{1,000}{y^*}$	R^2	σ	DW	Produto	Método de Estimação
22.406	—	—4,70	—	—2.126	—1.710	0,998	251	2,23	Café	
(821)		(3,04)		(263)	(199)				Comum	MQO
25.849	—22,65	—	—	—1.851	—2.758	—	396	—	Café	
(2.812)	(14,27)			(468)	(744)				Comum	MQ2EM
1.409	—	—	—4,650	405,5	—28,05	0,989	43,5	2,09	Café	
(210)			(0,610)	(64,5)	(8,31)				Solúvel	MQO
1.554	—	—	—4,318	381,6	—84,68		46,4	—	Café	
(219)			(0,671)	(47,4)	(88,65)				Solúvel	MQ2EM

FONTE: Bacha (1968).

OBS.: a) Os valores entre parênteses são os erros-padrão das estimativas; b) MQO = mínimos quadrados ordinários; MQ2EM = mínimos quadrados em duas etapas, modificado; $\hat{\sigma}$ = erro-padrão. Para o significado dos demais símbolos, ver texto.

no caso do café comum, obtidos pelos dois métodos de estimação, se apresentam bastante diferentes, o mesmo não ocorrendo quando se trata do café solúvel.

A Tabela II.2 contém as elasticidades, tanto em relação aos preços como à renda, das demandas de café comum e solúvel, avaliados no ponto médio da amostra. Como já foi salientado no parágrafo anterior as estimativas das elasticidades-preço do café comum, seja em relação ao seu próprio preço seja em relação ao preço do café solúvel, obtidas pelos dois métodos de estimação empregados são bastante diferentes, o que certamente não causa surpresa devido ao problema de simultaneidade.

As elasticidades da demanda do café comum em relação ao próprio preço, ao preço do café solúvel e à renda são, em valores absolutos, ligeiramente superiores a 0,5. A elasticidade da demanda de café solúvel em relação ao seu próprio preço é igual a —1,059, a elasticidade-preço cruzada é igual a 0,366 enquanto a elasticidade-renda é desprezível.

Estes resultados parecem indicar que, contrário ao que comumente se acredita, a elasticidade-preço da demanda de café nos Estados Unidos não é tão pequena. Todavia, esta conclusão não tem fundamento. Com efeito, a quantidade total demandada de café verde é igual à soma das quantidades demandadas para se produzir os cafés comum e solúvel, de acordo com a expressão:

$$q_t = 1{,}19\ q_{1t} + 3{,}1\ q_{2t} \tag{1.17}$$

onde q_t é a quantidade total demandada do café verde; o coeficiente 1,19 que multiplica q_{1t} indica que para se produzir cada unidade de café comum se necessita de 1,19 unidade de café verde e o coeficiente 3,1 que multiplica q_{2t} indica que para se obter uma unidade de café solúvel são necessários, de acordo

Tabela II.2

ELASTICIDADES-PREÇO E RENDA DA DEMANDA DE CAFÉ NOS ESTADOS UNIDOS: BACHA (1968)

Equação de Demanda (método)	Elasticidade com Respeito a		
	Preço de Comum	Preço de Solúvel	Renda
Comum (MQO)	—0,154	0,107	0,354
Comum (MQ2EM)	—0,591	0,518	0,572
Solúvel (MQO)	0,391	—1,128	n.s.
Solúvel (MQ2EM)	0,366	—1,059	n.s.

FONTE: Bacha (1968).

OBS.: a) O símbolo n.s. significa que o valor da elasticidade não é significantemente diferente de zero; e b) as elasticidades foram calculadas no ponto médio da amostra.

com a média observada no período analisado, 3,1 unidades de café verde. Admitindo-se que o preço do café solúvel é cerca de quatro vezes o preço do café comum, valor este observado no ponto médio da amostra analisada, a quantidade demandada de café verde é igual a:

$$q_t = 35577 - 1020\ D - 45{,}21\ \frac{p_1}{P} - 3548500\ \frac{1}{y^*} \qquad (1.18)$$

Esta equação foi obtida substituindo-se (1.14) e (1.15) em (1.17), levando-se em conta que $p_1 = 4{,}0\ p_2$ e usando-se as estimativas de mínimos quadrados em duas etapas da Tabela II.1.

A elasticidade-preço da demanda de café verde, obtida a partir de (1.18) e calculada no ponto médio da amostra, é igual a —0,17. Este valor mostra que na verdade a demanda de café nos Estados Unidos é bastante inelástica em relação ao preço.

II.2 — Sistemas de Equações de Demanda

Os sistemas de equações de demanda utilizados nos estudos econométricos podem ser desenvolvidos a partir de três enfoques:

a) especificação da função-utilidade direta;
b) especificação da função-utilidade indireta; e
c) aproximação do sistema de equações em termos diferenciais.

No primeiro enfoque, as condições de equilíbrio, juntamente com a restrição orçamentária, fornecem as equações de demanda. No segundo enfoque, dada uma função-utilidade indireta, aplica-se o teorema de Roy para obter-se as equações de demanda. O último enfoque baseia-se numa aproximação das equações diferenciais do tipo (1.77) e (1.78) do Capítulo I, e as equações assim obtidas não correspondem necessariamente a uma determinada função de utilidade.

A seguir apresentaremos três sistemas de demanda: o sistema de despesa linear, o modelo adilog indireto e o modelo de Rotterdam, que representam, na ordem listada, exemplos dos três enfoques que acabamos de mencionar.

II.2.1 — Sistema de Despesa Linear

A função-utilidade Klein-Rubin é dada por:

$$u\,(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \log\,(q_i - \gamma_i) \qquad (2.1)$$

onde os μ_i e os γ_i são parâmetros, $q_i > \max\ (\gamma_i, 0)$, para que a função (2.1) seja definida. Os μ_i são normalizados de tal modo que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$. Observe-se também, através da equação (2.2) a seguir, que os μ_i devem ser positivos para que as utilidades marginais sejam positivas.

A condição de que em equilíbrio as utilidades marginais são proporcionais aos preços aplicada à função-utilidade (2.1) resulta em:

$$\frac{\partial u}{\partial q_i} = \frac{\mu_i}{q_i - \gamma_i} = \lambda p_i \tag{2.2}$$

ou:

$$\mu_i = \lambda p_i (q_i - \gamma_i) \tag{2.3}$$

Como $\Sigma \, \mu_i = 1$, segue-se que a utilidade marginal da renda, λ, é igual a:

$$\lambda = \frac{1}{y - \Sigma \, p_k \gamma_k}$$

onde levamos em conta o fato de que $y = \Sigma \, p_i q_i$. Substituindo-se o valor de λ dado na equação acima em (2.3), obtém-se:

$$p_i q_i = p_i \gamma_i + \mu_i \left(y - \sum_{k=1}^{n} p_k \gamma_k\right), \; i = 1, \ldots, n \tag{2.4}$$

que é a i-ésima equação do sistema de despesa linear. Quando se admite que os coeficientes γ_i não são negativos — uma hipótese restritiva como se verá mais adiante — pode-se interpretá-los como as quantidades mínimas adquiridas dos diversos bens pelo consumidor. Com efeito, $p_i \gamma_i$ representa, então, a despesa mínima na aquisição do bem i, e $\Sigma \, p_k \gamma_k$ seria a despesa com as compras das quantidades mínimas dos diversos bens que compõem a dieta do consumidor. Sobraria então ao consumidor o valor $y - \Sigma \, p_k \gamma_k$, que seria alocado entre os diversos bens, de acordo com as proporções μ_i, conhecidas como a propensão marginal a gastar no bem i, pois:

$$\frac{\partial p_i q_i}{\partial y} = \mu_i \tag{2.5}$$

de acordo com (2.4).

O sistema de despesa linear implica várias restrições ao comportamento do consumidor, em conseqüência do formato peculiar da função-utilidade (2.1). Este modelo tem sido bastante aplicado em estudos empíricos; contudo, antes de aplicá-lo em qualquer situação real, é bom que se tenha em mente suas restrições e sua adequação ou não ao caso em tela. Nos parágrafos seguintes explicitamos as limitações do sistema de despesa linear. Para facilitar este trabalho, escrevemos a equação (2.4) do seguinte modo:

$$q_i = \gamma_i + \frac{\mu_i}{p_i} \left(y - \sum_{k=1}^{n} p_k \gamma_k\right), \; i = 1, \ldots, n \tag{2.6}$$

A elasticidade-renda do bem i é expressa por:

$$\varepsilon_i = \frac{y}{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial y} = \frac{y}{p_i q_i} \mu_i = \frac{\mu_i}{\omega_i},\ i = 1, \ldots, n \tag{2.7}$$

pois, de (2.6), tem-se:

$$\frac{\partial q_i}{\partial y} = \frac{\mu_i}{p_i}$$

e ω_i indica a proporção da renda gasta na aquisição do i-ésimo bem.

Como $\mu_i > 0$, as elasticidades-renda são necessariamente positivas. Logo, o sistema de despesa linear não comporta bens inferiores.

A derivada parcial de q_i com respeito ao preço p_i é igual a:

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_i} = \frac{-\, p_i q_i + p_i \gamma_i (1 - \mu_i)}{p_i^2},\ i = 1, \ldots, n \tag{2.8}$$

A elasticidade-preço é, então, dada por:

$$\eta_{ii} = \frac{p_i}{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial p_i} = -1 + \frac{\gamma_i}{q_i}(1 - \mu_i) \tag{2.9}$$

É fácil verificar-se através da expressão acima que a hipótese $\gamma_i > 0$ implica a impossibilidade de ter-se bens inelásticos. Assim, não é recomendável na estimação do sistema de despesa linear a imposição, *a priori*, da restrição de não-negatividade nos parâmetros γ.

A elasticidade-preço compensada, que mantém constante a renda real do consumidor, é igual a:

$$\eta_{ii}^c = \eta_{ii} + \omega_i \varepsilon_i \tag{2.10}$$

Substituindo-se (2.7) e (2.9) na equação (2.10), obtém-se:

$$\eta_{ii}^c = -\frac{(1 - \mu_i)\ (q_i - \gamma_i)}{q_i} \tag{2.11}$$

que é negativa de acordo com o teorema básico da teoria do consumidor.

A derivada parcial da quantidade q_i com respeito ao preço p_j, $i \neq j$, obtida através de (2.6), é:

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = -\frac{\mu_i \gamma_j}{p_i},\ i \neq j \tag{2.12}$$

A elasticidade-preço cruzada é, portanto, igual a:

$$\eta_{ij} = \frac{p_j}{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = -\mu_i \frac{p_j \gamma_j}{p_i q_i},\ i \neq j \tag{2.13}$$

Observe-se que a hipótese $\gamma_j > 0$ implicaria que η_{ij} fosse um número negativo. Novamente, esta restrição pode não ser desejada, *a priori,* pelo pesquisador.

A elasticidade-preço cruzada compensada é expressa por:

$$\eta^c_{ij} = \eta_{ij} + \omega_j \, \varepsilon_i \tag{2.14}$$

Substituindo-se (2.7) e (2.13) na expressão (2.14), resulta:

$$\eta^c_{ij} = \frac{\mu}{p_i q_i} \, p_j \, (q_j - \gamma_j), \; i \neq j \tag{2.15}$$

Como $(q_j - \gamma_j) > 0$, e $\mu_i > 0$, segue-se então que $\eta^c_{ij} > 0$. Em palavras, isto quer dizer que os bens que entram no sistema de despesa linear são sempre substitutos, não havendo lugar para bens complementares neste sistema.

Em resumo, as principais restrições do sistema de despesa linear são: i) inexistência de bens inferiores; e ii) impossibilidade de os bens serem complementares. Assim, como os estudos de sistemas de equações de demanda empregam sempre dados agregados, esta agregação deve levar em consideração estas restrições, de tal modo que todos os bens sejam substitutos e normais.

II.2.2 — Sistema Adilog Indireto

O sistema adilog indireto, introduzido por Houthakker (1960), baseia-se na seguinte função-utilidade indireta:

$$u_I\,(y,\,p) = - \sum_{i=1}^{n} A_i \left(\frac{p_i}{y}\right)^{\alpha_i} \tag{2.16}$$

onde A_i e α_i são parâmetros que têm de satisfazer certas condições, como mencionaremos mais adiante.

A aplicação do teorema de Roy à função-utilidade indireta (2.16) requer o cálculo das seguintes derivadas:

$$\frac{\partial u_I}{\partial y} = - \sum_{i=1}^{n} A_i \, (p_i)^{\alpha_i} \, (-\alpha_i) \; y^{-\alpha_i - 1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i \left(\frac{p_i}{y}\right)^{\alpha_i} (y)^{-1} \tag{2.17}$$

e:

$$\frac{\partial u_I}{\partial p_i} = - A_i \alpha_i \left(\frac{p_i}{y}\right)^{\alpha_i} p_i^{-1} \tag{2.18}$$

Dividindo-se, então, (2.18) por (2.17), obtém-se, de acordo com o teorema de Roy, a quantidade demandada do bem i:

$$q_i = - \frac{- A_i \alpha_i \left(\dfrac{p_i}{y}\right)^{\alpha_i} p_i^{-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \, \alpha_i \left(\dfrac{p_i}{y}\right)^{\alpha_i} y^{-1}} \tag{2.19}$$

que é igual a:

$$q_i = \frac{A_i\alpha_i\,(p_i/y)^{\alpha_i - 1}}{\sum_{i=1}^{n} A_i\alpha_i \left(\frac{p_i}{y}\right)^{\alpha_i}} \tag{2.20}$$

Observe-se que o denominador de (2.20) é comum a todas as expressões das quantidades demandadas. Portanto, dividindo-se a equação de q_i pela correspondente a q_j, $i \neq j$, chega-se a:

$$\frac{q_i}{q_j} = \frac{A_i\alpha_i\,(p_i/y)^{\alpha_i - 1}}{A_j\alpha_j\,(p_j/y)^{\alpha_j - 1}} \tag{2.21}$$

Tomando-se o logaritmo de ambos os membros da expressão acima, temos:

$$\begin{aligned} \log q_i - \log q_j &= \log A_i\alpha_i - \log A_j\alpha_j \\ &+ (\alpha_i - 1)\log\frac{p_i}{y} - (\alpha_j - 1)\log\frac{p_j}{y} \end{aligned} \tag{2.22}$$

que é uma equação sob forma mais tratável para fins de estimação estatística.

Cabe lembrar que os parâmetros da função-utilidade indireta (2.16) devem satisfazer a algumas restrições para que a expressão (2.20) represente a quantidade demandada do bem i. Assim é que $A_i\alpha_i$ deve ser positivo para que $q_i > 0$ e $\alpha_i < 1$ para que a matriz de Slutsky seja negativa semidefinida.[2]

O modelo adilog indireto, como o sistema de despesa linear, acarreta algumas restrições na estrutura de comportamento do consumidor devido à aditividade da função-utilidade indireta (2.16). A seguir, apresentamos as restrições deste modelo.

A derivada parcial da quantidade q_i com respeito à renda y, obtida através de (2.20), é igual a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial y} &= \frac{-(\alpha_i - 1)\,A_i\alpha_i\,(p_i/y)^{\alpha_i - 1}}{y\sum_{k=1}^{n} A_k\alpha_k\left(\frac{p_k}{y}\right)^{\alpha_k}} \\ &+ \frac{A_i\alpha_i\,(p_i/y)^{\alpha_i - 1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k p_k}{y^2}A_k\alpha_k\,(p_k/y)^{\alpha_k - 1}}{\left[\sum_{k=1}^{n} A_k\alpha_k\,(p_k/y)^{\alpha_k}\right]^2} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Levando-se em conta (2.20), a expressão acima pode ser escrita do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial y} &= \frac{-(\alpha_i - 1)\,q_i}{y} + \frac{q_i}{y}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\frac{p_k q_k}{y} = \\ &= -(\alpha_i - 1)\frac{q_i}{y} + \frac{q_i}{y}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\omega_k \end{aligned} \tag{2.24}$$

2 Uma demonstração desta propriedade pode ser encontrada em Theil (1975, p. 98).

A elasticidade-renda ε_i é, então, dada por:

$$\varepsilon_i = \frac{y}{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial y} = 1 - \left(\alpha_i - \sum_{k=1}^{n} \omega_k \alpha_k \right) \tag{2.25}$$

Observe-se que $\varepsilon_i \lesseqgtr 1$ desde que:

$$\alpha_i \lesseqgtr \sum_{k=1}^{n} \omega_k \alpha_k$$

Portanto, o fato de α_i ter de ser menor que a unidade não implica restrição sobre as elasticidades-renda.

A derivada parcial de q_i com respeito ao preço p_i é igual a:

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_i} = \frac{(\alpha_i - 1) A_i \alpha_i (p_i/y)^{\alpha_i - 2} (1/y)}{\sum_{k=1}^{n} A_k \alpha_k (p_k/y)^{\alpha_k}} - \frac{[A_i \alpha_i (p_i/y)^{\alpha_i - 1}]^2 \alpha_i/y}{[\Sigma A_k \alpha_k (p_k/y)^{\alpha_k}]^2} \tag{2.26}$$

A equação acima, depois de levar-se em conta (2.20), transforma-se em:

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_i} = \frac{(\alpha_i - 1) q_i}{p_i} - \frac{\alpha_i q_i^2}{y}. \tag{2.27}$$

A elasticidade-preço η_{ii} é, então, dada por:

$$\eta_{ii} = - \alpha_i \omega_i + \alpha_i - 1 = - 1 + \alpha_i (1 - \omega_i) \tag{2.28}$$

Como $\alpha_i < 1$ e $0 < \omega_i < 1$, a elasticidade-preço η_{ii} não pode ser positiva, o que significa dizer que no modelo adilog indireto não existem bens de Giffen.

A elasticidade-preço compensada η^c_{ii} é igual a:

$$\eta^c_{ii} = \eta_{ii} + \omega_i \varepsilon_i = - \alpha_i \omega_i + \alpha_i - 1 + \omega_i \left[1 - \left(\alpha_i - \sum_{k=1}^{n} \omega_k \alpha_k \right) \right] \tag{2.29}$$

Alternativamente:

$$\eta^c_{ii} = \alpha_i - 1 + \omega_i \left(1 - 2\alpha_i + \sum_{k=1}^{n} \omega_k \alpha_k \right) \tag{2.30}$$

A derivada parcial da quantidade q_i com respeito ao preço p_j, obtida a partir de (2.20), é:

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \frac{- A_i \alpha_i (p_i/y)^{\alpha_i - 1} \alpha_j A_j \alpha_j (p_j/y)^{\alpha_j - 1} (1/y)}{[\Sigma A_k \alpha_k (p_k/y)^{\alpha_k}]^2} \tag{2.31}$$

A expressão acima simplifica-se desde que se leve em conta a equação de demanda (2.20). O resultado é:

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = - \frac{q_i q_j \alpha_j}{y} \tag{2.32}$$

A elasticidade-preço cruzada η_{ij} é, então, dada por:

$$\eta_{ij} = - \omega_j \alpha_j \tag{2.33}$$

Observe-se que qualquer que seja o bem i, a elasticidade-preço cruzada η_{ij} é sempre a mesma, pois, de acordo com (2.33), seu valor só depende do produto $\omega_j \alpha_j$. Assim, por exemplo, as elasticidades-preço cruzadas entre café (c) e açúcar (a), η_{ca}, e entre sal (s) e açúcar (a), η_{sa}, são iguais, $\eta_{ca} = \eta_{sa}$, de acordo com o modelo adilog indireto. Obviamente, para tais tipos de bens este é um resultado que não deve ser imposto, *a priori*, em um modelo que procure estudar as inter-relações existentes entre os três bens.

A elasticidade-preço cruzada compensada é facilmente obtida a partir de (2.33) e (2.25). O resultado é:

$$\begin{aligned} \eta^*_{ij} &= \eta_{ij} + \omega_j \varepsilon_i = \omega_j \left[1 - \alpha_i - \alpha_j + \sum_{k=1}^{n} \omega_k \alpha_k \right] = \\ &= \omega_j (\varepsilon_i - \alpha_j) \end{aligned} \tag{2.34}$$

A expressão acima mostra que os bens inferiores, $\varepsilon_i < 0$, tendem a ser complementares aos demais bens. É claro que se α_j for negativo com valor absoluto maior que o de ε_i, os bens podem ser substitutos. Por outro lado, se os bens i e j são bens de luxo com elasticidades-renda superiores à unidade, de acordo com a fórmula da elasticidade-renda (2.25), os valores de α_i e α_j devem ser pequenos. Logo, segundo (2.34), os bens de luxo, no modelo adilog indireto, tendem a ser substitutos.

II.2.3 — O Modelo de Rotterdam

As equações diferenciais (1.77) e (1.78) do Capítulo I, quando multiplicadas por p_1/y e p_2/y, respectivamente, são iguais a:

$$\begin{aligned} \frac{p_1 q_1}{y} \frac{dq_1}{q_1} &= \frac{q_1 p_1}{y} \frac{p_1}{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial p_1}\bigg|_{u=ct} \frac{dp_1}{p_1} \\ &+ \frac{p_1 q_1}{y} \frac{p_2}{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial p_2}\bigg|_{u=ct} \frac{dp_2}{p_2} \\ &+ p_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} \left[\frac{dy}{y} - \frac{q_1 p_1}{y} \frac{dp_1}{p_1} - \frac{p_2 q_2}{y} \frac{dp_2}{p_2} \right] \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\frac{p_2q_2}{y}\,\frac{dq_2}{q_2} = \frac{p_2q_2}{y}\,\frac{p_1}{q_2}\,\frac{\partial q_2}{\partial p_1}\bigg|_{u=ct}\,\frac{dp_1}{p_1}$$

$$+\frac{p_2q_2}{y}\,\frac{p_2}{q_2}\,\frac{\partial q_2}{\partial p_2}\bigg|_{u=ct}\,\frac{dp_2}{p_2}$$

$$+\,p_2\,\frac{\partial q_2}{\partial y}\left[\frac{dy}{y}-\frac{p_1q_1}{y}\,\frac{dp_1}{p_1}-\frac{p_2q_2}{y}\,\frac{dp_2}{p_2}\right] \tag{2.36}$$

O modelo de Rotterdam utiliza-se dos seguintes parâmetros:

$$\Pi_{11} = \frac{q_1p_1}{y}\,\frac{p_1}{q_1}\,\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\bigg|_{u=ct} = \omega_1\,\eta^c_{11}$$

$$\Pi_{12} = \frac{q_1p_1}{y}\,\frac{p_2}{q_1}\,\frac{\partial q_1}{\partial q_2}\bigg|_{u=ct} = \omega_1\,\eta^c_{12}$$

$$\Pi_{21} = \frac{p_2q_2}{y}\,\frac{p_1}{q_2}\,\frac{\partial q_2}{\partial p_1}\bigg|_{u=ct} = \omega_2\,\eta^c_{21}$$

$$\Pi_{22} = \frac{p_2q_2}{y}\,\frac{p_2}{q_2}\,\frac{\partial q_2}{\partial p_2}\bigg|_{u=ct} = \omega_2\,\eta^c_{22}$$

$$\mu_1 = p_1\,\frac{\partial q_1}{\partial y} = \frac{\partial\,(p_1q_1)}{\partial y}$$

$$\mu_2 = p_2\,\frac{\partial q_2}{\partial y} = \frac{\partial\,(p_2q_2)}{\partial y}$$

para escrever as equações (2.35) e (2.36) na seguinte forma:

$$\omega_1 d\,(\log\,q_1) = \Pi_{11}\,d\,(\log\,p_1) + \Pi_{12}\,d\,(\log\,p_2)$$
$$+\,\mu_1\,[d\,(\log\,y) - \omega_1 d\,(\log\,p_1) - \omega_2 d\,(\log\,p_2)] \tag{2.37}$$

e:

$$\omega_2 d\,(\log\,q_2) = \Pi_{21}\,d\,(\log\,p_1) + \Pi_{22}\,d\,(\log\,p_2)$$
$$+\,\mu_2\,[d\,(\log\,y) - \omega_1 d\,(\log\,p_1) - \omega_2 d\,(\log\,p_2)] \tag{2.38}$$

onde $d\,(\log\,x) = dx/x$.

As proposições da teoria do consumidor implicam que:

a) $\Pi_{11} < 0$ e $\Pi_{22} < 0$;

b) $\Pi_{12} = \Pi_{21}$;

c) $\Pi_{11} + \Pi_{12} = 0$ e $\Pi_{21} + \Pi_{22} = 0$;

d) $\mu_1 + \mu_2 = 1$.

A matriz

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix}$$

será denominada também matriz de Slutsky e é negativa semidefinida, como vimos no Capítulo I, sintetizando, portanto, as proposições a, b e c listadas acima. [3]

Antes de prosseguir com a apresentação do modelo de Rotterdam, cabe mencionar a justificativa para usar a variável

$$\omega_i d(\log q_i) = \frac{p_i}{y} dq_i, \; i = 1, 2$$

como variável dependente nas equações (2.37) e (2.38). A diferencial de $\omega_i = p\, q_i / y$, a participação dos gastos com o i-ésimo bem na renda do consumidor, é igual a:

$$d\omega_i = d\left(\frac{p_i q_i}{y}\right) = \frac{q_i}{y} dp_i + \frac{p_i}{y} dq_i - \frac{p_i q_i}{y^2} dy$$

Alternativamente podemos escrever a expressão anterior como:

$$d\omega_i = \omega_i d(\log p_i) + \omega_i d(\log q_i) - \omega_i d(\log y) \tag{2.39}$$

A teoria do consumidor postula que preços e renda são variáveis exógenas ao consumidor. Logo, concluímos com base na expressão (2.39) que $\omega_i d(\log q_i)$ é a componente endógena na mudança da proporção ω_i. Segundo Theil (1975, p. 23), "esta componente endógena é uma escolha natural para a variável dependente na equação de demanda".

Admita-se que q_{it} é a quantidade comprada do bem i no período t, p_{it} é o preço do bem i no período t, ω_{it} é a proporção do orçamento gasto na aquisição do bem i no período t. O modelo de Rotterdam, do ponto de vista prático, admite as seguintes aproximações para as variáveis que aparecem nas equações diferenciais (2.37) e (2.38):

$$Dq_{it} = \log q_{it} - \log q_{i,\, t-1}$$

$$Dp_{it} = \log p_{it} - \log p_{i,\, t-1}$$

$$\bar{\omega}_{it} = \frac{\omega_{i,\, t-1} + \omega_{i,t}}{2}$$

[3] A matriz Π é diferente da matriz S. Todavia, usaremos a mesma denominação para ambas, pois dentro do contexto ficará claro a que matriz nos estaremos referindo.

Com estas aproximações, as equações (2.37) e (2.38) passam a ser escritas como:

$$\bar{\omega}_{1t}Dq_{1t} = \Pi_{11}Dp_{1t} + \Pi_{12}Dp_{2} + \mu_1(Dy_t - \bar{\omega}_{1t}Dp_{1t} - \bar{\omega}_{2t}Dp_{2t}) \quad (2.40)$$

$$\bar{\omega}_{2t}Dq_{2t} = \Pi_{21}Dp_{1t} + \Pi_{22}Dp_{2t} + \mu_2(Dy_t - \bar{\omega}_{1t}Dp_{1t} - \bar{\omega}_{2t}Dp_{2t}) \quad (2.41)$$

Adicionando-se as equações (2.40) e (2.41), obtém-se:

$$\bar{\omega}_{1t}Dq_{1t} + \bar{\omega}_{2t}Dq_{2t} = (\Pi_{11} + \Pi_{12})\,Dp_{1t} + (\Pi_{21} + \Pi_{22})\,Dp_{2t} + (\mu_1 + \mu_2)\,(Dy_t - \bar{\omega}_{1t}Dp_{1t} - \bar{\omega}_{2t}Dp_{2t}) \quad (2.42)$$

Levando-se em conta que $\Pi_{11} + \Pi_{12} = 0$, $\Pi_{21} + \Pi_{22} = 0$ e $\mu_1 + \mu_2 = 1$, a equação (2.42) implica que:

$$\bar{\omega}_{1t}Dq_{1t} + \bar{\omega}_{2t}Dq_{2t} = Dy_t - \bar{\omega}_{1t}Dp_{1t} - \bar{\omega}_{2t}Dp_{2t} = DQ_t \quad (2.43)$$

Com este resultado o sistema de equações formado por (2.40) e (2.41) pode ser escrito como:

$$\bar{\omega}_{1t}Dq_{1t} = \Pi_{11}Dp_{1t} + \Pi_{12}Dp_{2t} + \mu_1 DQ_t \quad (2.44)$$

$$\bar{\omega}_{2t}Dq_{2t} = \Pi_{21}Dp_{1t} + \Pi_{22}Dp_{2t} + \mu_2 DQ_t \quad (2.45)$$

onde DQ_t é a variação na renda real do consumidor. No caso mais geral de n bens, o sistema de Rotterdam é descrito pelo conjunto de equações:

$$\bar{\omega}_{it}Dq_{it} = \mu_i DQ_t + \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij}Dp_{jt}, \; i = 1, \ldots, n \quad (2.46)$$

onde

$$DQ_t = \sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_{it}Dq_{it}.$$

O sistema de Rotterdam é bastante flexível, pois não impõe qualquer restrição sobre os seus parâmetros e sua forma possibilita que os teoremas da teoria do consumidor sejam devidamente testados. Todavia, esta flexibilidade implica um número bastante grande de parâmetros a serem estimados. Enquanto o sistema de despesa linear e o modelo adilog indireto têm $2n$ parâmetros, o modelo de Rotterdam possui $n^2 + n = n(n+1)$ parâmetros. Este fato implica que, para uma dada amostra, o número de graus de liberdade para estimar-se o modelo de Rotterdam é bem menor do que o dos outros dois modelos.

Um outro ponto que deve ser mencionado em relação ao modelo de Rotterdam é que ele se constitui em uma aproximação linear dos valores de $\omega_{it}Dq_{it}$. Quando se interpreta os parâmetros do modelo como constantes, para todos os valores da renda e dos preços, pode-se provar [ver Theil (1975, pp. 101-12)] que as elasticidades-renda seriam, então, iguais à unidade, o que limitaria bastante a aplicabilidade do modelo. Todavia, os defensores do modelo enfatizam que esta interpretação seria contrária ao espírito do modelo, que se constitui em uma aproximação e não se baseia no fato de que os parâmetros são constantes.

II.2.3.1 — Especificação Econométrica

O estudo econométrico dos sistemas de equações de demanda vistos até aqui requer uma cuidadosa especificação da parte estocástica, em geral diferente para cada tipo do modelo. Todavia, um elo comum nestes modelos é a singularidade da matriz de variância. A seguir, mostraremos este problema para o modelo de Rotterdam, que é similar para os demais sistemas.

Acrescentando-se o erro estocástico às equações (2.46), resulta:

$$\bar{\omega}_{it} Dq_{it} = \mu_i DQ_t + \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij} Dp_{jt} + \xi_{it}, \quad i = 1, \ldots, n \qquad t = 1, \ldots, T \tag{2.47}$$

A esperança matemática de ξ_{it} é, por hipótese, igual a zero:

$$E\xi_{it} = 0, \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad t = 1, \ldots, T \tag{2.48}$$

A covariância entre ξ_{is} e ξ_{jt} é igual a σ_{ij} quando $s = t$ e igual a zero nos demais casos, isto é:

$$E\xi_{is}\xi_{jt} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & \text{se } s = t \\ 0, & \text{se } s \neq t \end{cases} \tag{2.49}$$

Introduzindo-se o vetor $\xi_t' = [\xi_{1t}, \xi_{2t}, \ldots, \xi_{nt}]$ as hipóteses (2.48) e (2.49) podem ser escritas do seguinte modo:

$$E\xi_t = 0, \quad t = 1, \ldots, T \tag{2.48.a}$$

$$\text{Var } \xi_t = E\xi_t\xi_t' = \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}, \quad t = 1, \ldots, T \tag{2.49.a}$$

A expressão (2.49.a) mostra que a matriz de variância Ω é constante para todas as observações.

Somando-se ambos os lados de (2.47) em relação a todos os bens, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_{it} Dq_{it} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i DQ_t + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij} Dp_{jt} + \sum_{i=1}^{n} \xi_{it} =$$

$$= DQ_t \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \sum_{j=1}^{n} Dp_{jt} \sum_{i=1}^{n} \Pi_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \xi_{it} \tag{2.50}$$

Levando-se em conta que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$, $\Pi_{ij} = \Pi_{ji}$ e que $\sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij} = 0$, a equação (2.50) simplifica-se e o resultado é:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_{it} Dq_{it} = DQ_t + \sum_{i=1}^{n} \xi_{it} \tag{2.51}$$

Como $\sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_{it} Dq_{it} = DQ$ por construção, segue-se então da expressão (2.51) que a soma dos erros ξ_{it}, para um dado período de tempo, é nula, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{it} = 0 \tag{2.52}$$

A covariância entre ξ_{jt} e $\sum_{i=1}^{n} \xi_{it}$ é nula, pois:

$$E\xi_{jt} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_{it} \right) = E\xi_{jt} \, . \, 0 = 0 \tag{2.53}$$

Por outro lado, a covariância entre ξ_{jt} e $\sum_{i=1}^{n} \xi_{it}$ pode, também, ser expressa por:

$$\begin{aligned} E\xi_{jt} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_{it} \right) &= E\xi_{jt} \, (\xi_{1t} + \dots + \xi_{jt} + \dots + \xi_{nt}) = \\ &= E\, (\xi_{1t}\xi_{jt} + \dots + \xi_{jt}^2 + \dots + \xi_{nt}\xi_{jt}) = \\ &= \sigma_{1j} + \dots + \sigma_{jj} + \dots + \sigma_{nj} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Comparando-se (2.53) e (2.54), chega-se à conclusão de que:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} = 0 \tag{2.55}$$

ou, como a matriz de variância Ω é simétrica:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ji} = 0, \quad j = 1, \dots, n \tag{2.56}$$

Introduzindo-se o vetor unitário $\iota = [1, \dots, 1]$, a expressão acima pode ser escrita como:

$$\Omega\iota = 0 \tag{2.57}$$

A matriz Ω de tamanho n x n é, portanto, singular. Admite-se, em geral, que a matriz Ω é positiva semidefinida e com posto igual a $n - 1$.

A singularidade da matriz de variância implica que, num sistema de n equações, uma equação pode ser desprezada. Basta que se estime os parâmetros de $n - 1$ equações para obter-se o valor numérico dos parâmetros da equação que for deixada fora. A equação que deve ser desprezada é irrelevante. Com efeito, admitindo-se que se tenha estimado as $(n - 1)$ primeiras equações, temos que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \bar{\omega}_{it} Dq_{it} = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i DQ_t + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij} Dp_{jt} + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_{it} =$$

$$= DQ_t \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i + \sum_{j=1}^{n} Dp_{jt} \sum_{i=1}^{n-1} \Pi_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_{it} \qquad (2.58)$$

Como $\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i = 1 - \mu_n$, $\sum_{i=1}^{n-1} \Pi_{ij} = - \Pi_{nj}$ e $\xi_{nt} = - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_{it}$, a equação acima reduz-se a:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \bar{\omega}_{it} Dq_{it} = DQ_t \, (1 - \mu_n) - \sum_{j=1}^{n} \Pi_{nj} Dp_{jt} - \xi_{nt} \qquad (2.59)$$

ou passando DQ_t para o lado esquerdo da equação (2.59):

$$- \left(DQ_t - \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\omega}_{it} Dq_{it} \right) = - \mu_n DQ_t - \sum_{j=1}^{n} \Pi_{nj} Dp_{jt} - \xi_{nt} \qquad (2.60)$$

Como $DQ_t - \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\omega}_{it} Dq_{it} = \bar{\omega}_{nt} Dq_{nt}$, a equação (2.60) transforma-se em:

$$\bar{\omega}_{nt} Dq_{nt} = \mu_n DQ_t + \sum_{j=1}^{n} \Pi_{nj} Dp_{jt} + \xi_{nt} \qquad (2.61)$$

Assim, o conhecimento de $n - 1$ equações de um sistema de equações de demanda com n equações permite a obtenção da enésima equação.

II.3 — As Curvas de Engel

Ernst Engel, em 1857, formulou algumas "leis" relativas ao comportamento do consumidor. Entre elas, podemos citar as seguintes: i) a alimentação constitui-se no item mais importante do orçamento doméstico; ii) a proporção dos gastos em alimentação decresce com o aumento da renda; iii) a proporção dos gastos com moradia e vestuário permanece aproximadamente constante, enquanto a proporção dos gastos com bens de luxo aumenta quando a renda aumenta. Certamente, algumas destas leis não resistiram ao tempo, como reconheceu o próprio Engel. Todavia, a utilização de orçamentos familiares, como proposto por Engel há mais de um século, permanece como uma das fontes mais ricas e úteis para o estudo do comportamento do consumidor.

II.3.1 — Especificação Econométrica

Nas pesquisas de orçamentos familiares pode-se admitir que a variabilidade dos preços dos bens e serviços é muito pequena, pois este tipo de pesquisa é, em geral, elaborada num curto período de tempo. Do ponto de vista prático, pode-se considerar os preços como sendo iguais para todos os consumidores. Assim, de acordo com a teoria do consumidor, a equação de demanda pelo i-ésimo bem é expressa por:

$$q_i = q_i\,(y/p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n) \tag{3.1}$$

onde a notação $q_i(y/p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$ indica que os preços $p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n$ são constantes. Alguns autores denominam a equação (3.1) de curva de Engel. Todavia, é mais comum denominar de curva de Engel a relação entre a despesa com o bem e a renda, isto é:

$$c_i = p_i q_i = p_i q_i\,(y/p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n) = c_i\,(y/p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n) \tag{3.2}$$

É claro que, como os preços são supostamente constantes, é indiferente definir-se a curva de Engel por (3.1) ou por (3.2). No que se segue, utilizaremos a segunda definição.

A única restrição que se aplica às curvas de Engel, segundo a teoria do consumidor, diz respeito à equação orçamentária. Com efeito, a soma das despesas na aquisição dos diversos bens e serviços deve ser igual à renda do consumidor, isto é:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i = \sum_{i=1}^{n} c_i = y \tag{3.3}$$

II.3.1.1 — Outros Fatores na Explicação do Consumo

A equação (3.2) considera que a variação no consumo dos diversos bens e serviços deve-se única e exclusivamente às variações na renda dos consumidores. Conseqüentemente, torna-se necessário controlar outros fatores que influenciam também o consumo. Assim, antes de estimar uma equação do tipo (3.2), as unidades familiares devem ser classificadas de acordo com classe social, área residencial, composição da família, ocupação, nível de escolaridade, e assim por diante. Uma segunda alternativa é especificar uma equação do tipo:

$$c_i = c_i\,(y, Z) \tag{3.4}$$

onde Z é um vetor cujos elementos são variáveis, possivelmente do tipo *dummy*, que levam em conta explicitamente outros fatores, além da renda, que influenciam o padrão de consumo dos indivíduos.

II.3.1.2 — A Definição de Variáveis

No que toca à definição de variáveis, existem, basicamente, duas alternativas. A primeira define o consumo c_i como sendo o consumo *per capita,* o mesmo ocorrendo com a renda. Esta solução é bastante criticada, pois não leva em conta a composição da unidade familiar. Com efeito, para se dar um exemplo, uma família com cinco adultos não é equivalente a uma família com dois adultos e três crianças. A segunda alternativa considera, então, não o número total de pessoas, mas o número de adultos equivalentes. Entretanto, esta opção cria problemas do ponto de vista prático, pois tem-se de ter uma escala de adultos equivalentes. Existe na literatura um bom número de estudos que trata deste assunto e o leitor interessado deve consultar, por exemplo, a resenha de Brown e Deaton (1972).

Cabe, ainda, salientar o fato de que é mais comum utilizar-se não a renda, mas a despesa total como variável independente na curva de Engel.

II.3.1.3 — Forma Funcional

A teoria econômica, da mesma forma que nas equações de demanda, não sugere uma forma funcional específica para a equação (3.2). Prais e Houthakker (1955), em um estudo clássico sobre o assunto, sugeriram as seguintes formas funcionais (ver Figura II.4):

linear: $$c_i = \alpha + \beta y + \xi_i \qquad (3.5)$$

log-log: $$\log c_i = \alpha + \beta \log y + \xi_i \qquad (3.6)$$

semilog: $$c_i = \alpha + \beta \log y + \xi_i \qquad (3.7)$$

hiperbólica: $$c_i = \alpha - \frac{\beta}{y} + \xi_i \qquad (3.8)$$

log-recíproca: $$\log c_i = \alpha - \frac{\beta}{y} + \xi_i \qquad (3.9)$$

onde ξ_i é a perturbação aleatória. Cabe tecer alguns comentários sobre as características das formas funcionais acima. A equação linear (3.5) seria uma boa aproximação para produtos com elasticidade-renda unitária, pois, neste caso, a elasticidade-renda ε_i:

$$\varepsilon_i = \frac{y}{c_i} \frac{\partial c_i}{\partial y} = \frac{\beta}{\frac{\alpha}{y} + \beta}$$

tende para 1, $\lim_{y \to \infty} \varepsilon_i = 1$, quando a renda aumenta ($y \to \infty$).

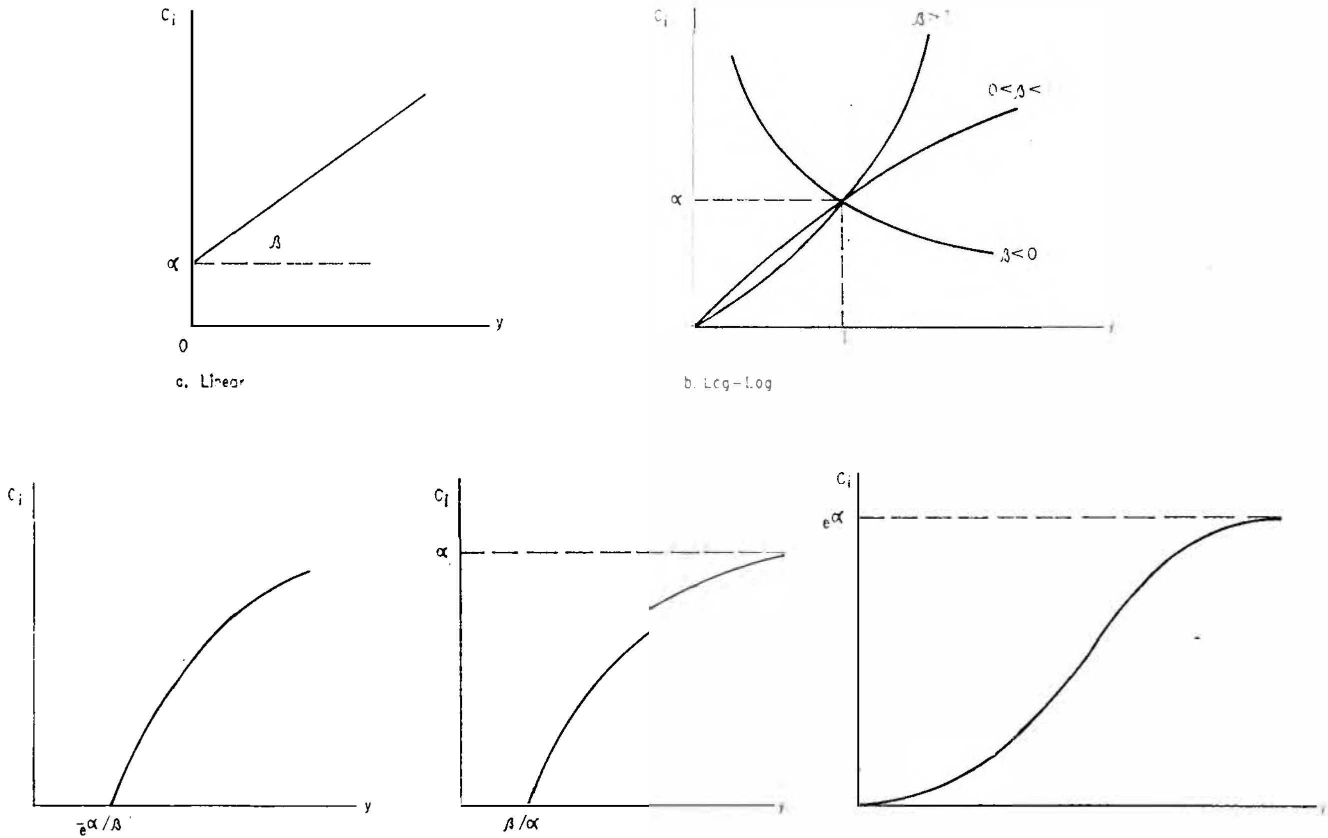
A especificação log-log, equação (3.6), tem uma característica bastante atrativa, que é o fato de a elasticidade-renda $\varepsilon_i = \beta$ ser constante. Este tipo de especificação seria adequado para, entre outros, os bens chamados inferiores, cuja elasticidade-renda é negativa.

A forma funcional (3.7), uma equação semilogarítmica, é interessante por apresentar um nível inicial de renda, y^*, abaixo do qual o bem não é adquirido, pois, quando $c_i = 0$, $\alpha + \beta \log y = 0$ e, portanto:

$$y^* = e^{-\alpha/\beta}$$

Figura II 4

CURVAS DE ENGEL



a. Linear b. Log-Log c Semi-Log d Hiperbólica e Log-Reciproca

A especificação (3.8) apresenta duas características importantes. Quando a renda aumenta, $y \rightarrow \infty$, o consumo tende para um nível máximo, pois:

$$\lim_{y \to \infty} c_i = \alpha$$

Por outro lado, quando a renda é igual a $y^* = \beta/\alpha$, o consumo é nulo, isto é, a equação hiperbólica contém um ponto de saturação do consumo e também uma renda crítica, abaixo da qual não existe consumo do bem.

A última especificação da forma funcional, equação (3.9), apresenta um ponto de saturação. Com efeito, tomando-se o limite desta expressão quando $y \rightarrow \infty$, tem-se:

$$\lim_{y \to \infty} \log c_i = \alpha$$

É fácil concluir que o nível de saturação do consumo é igual a $c^* = e^{\alpha}$. Cabe salientar, ainda, que, apesar de a função não ser definida para $y = 0$, o seu limite é igual a zero, pois:

$$\lim_{y \to 0} c_i = \lim_{y \to 0} e^{\alpha - \beta/y} = 0$$

Um problema que obviamente aparece diz respeito ao estabelecimento de um critério para selecionar-se entre as formas funcionais acima a mais adequada para um determinado bem. Um dos critérios usados baseia-se em escolher a forma funcional que apresentar o maior valor da estatística F. Este critério é equivalente a escolher-se a forma funcional que tiver o maior coeficiente de determinação R^2, pois a estatística F e o coeficiente R^2 são relacionados através da expressão:

$$F = \frac{R^2 / (k - 1)}{(1 - R^2) / (N - k)} \tag{3.10}$$

onde N é o número de observações da amostra e k é o número de coeficientes da regressão a ser estimada. Da expressão acima temos que:

$$R^2 = \frac{aF}{\mathrm{v} + aF} \tag{3.11}$$

onde $a = (k - 1) / (N - k) > 0$. Como $\partial R^2 / \partial F > 0$, ao maior valor de **F** corresponde o maior valor de R^2. Abaixo, mostraremos que este critério é inadequado. Portanto, seu uso não é recomendado.

II.3.1.4 — A Transformação de Box-Cox

Do ponto de vista estatístico seria interessante que as formas funcionais (3.5) - (3.9) pudessem ser obtidas como casos particulares de uma forma funcional mais geral. O estudo dessa forma funcional generalizada possibilitaria, então, a escolha da mais adequada para cada bem. A transformação de Box-Cox (1964) permite justamente que isto seja feito.

A idéia básica da transformação de Box-Cox consiste em transformar uma variável X de acordo com a expressão:

$$X^{(\lambda)} = \frac{X^{\lambda} - 1}{\lambda} \tag{3.12}$$

Quando $\lambda = 1$, $X^{(\lambda)} = X - 1$. Se $\lambda = -1$, temos que $X^{(\lambda)} = 1 - X^{-1}$ e, quando λ aproxima-se de zero, $X^{(\lambda)}$ tende para o logaritmo natural de X. Para provar este último caso, escrevemos X^{λ} do seguinte modo:

$$X^{\lambda} = e^{\log X^{\lambda}} = e^{\lambda \log X}$$

Expandindo a expressão acima em série de Taylor, com base na expansão $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$, obtemos:

$$e^{\lambda \log X} = 1 + \lambda \log X + \frac{\lambda^2 (\log X)^2}{2!} + \cdots$$

Segue-se daí que:

$$\frac{X^{\lambda} - 1}{\lambda} = \frac{e^{\lambda \log X} - 1}{\lambda} = \log X + \frac{\lambda (\log X)^2}{2!} + \ldots$$

Quando $\lambda \to 0$, o limite da expressão acima resulta em:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{X^{\lambda} - 1}{\lambda} = \log X$$

A transformação de Box-Cox possibilita, então, escrever uma forma funcional bastante geral para a curva de Engel, cuja expressão é:

$$\frac{c_i^{\lambda_1} - 1}{\lambda_1} = \alpha' + \beta \frac{y_i^{\lambda_2} - 1}{\lambda_2} + \xi_i \qquad (3.13)$$

São, então, obtidos os seguintes casos particulares:

i) equação linear (3.5), $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$c_i = (\alpha' + 1 - \beta) + \beta y_i + \xi_i$$

ii) equação log-log (3.6), $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$:

$$\log c_i = \alpha' + \beta \log y + \xi_i$$

iii) equação semilog (3.7), $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$:

$$c_i = (\alpha' + 1) + \beta \log y + \xi_i$$

iv) equação hiperbólica (3.8), $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$:

$$c_i = (\alpha' + 1 + \beta) - \frac{\beta}{y} + \xi_i$$

v) equação log-recíproca, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$:

$$\log c_i = (\alpha' + \beta) - \frac{\beta}{y} + \xi_i$$

Além das formas funcionais acima, a transformação de Box-Cox é bastante rica, contendo outras formas funcionais, bastando para isto que se combine um par de valores para λ_1 e λ_2. É claro que a generalização da transformação de Box-Cox é obtida ao custo de introduzir-se dois parâmetros adicionais no modelo, além do que a estimação do modelo passa a não ser um problema tão trivial.

O método de máxima verossimilhança pode ser empregado na estimação dos parâmetros do modelo. Claramente, ao maior valor da função de verossimilhança não corresponde o maior valor de R^2, ou da estatística F, daí não sendo apropriado o seu uso na seleção da forma funcional, como assinalamos anteriormente.

Vale ressaltar que um custo adicional no processo descrito acima é de que não existe qualquer garantia de que a restrição $\Sigma\, c_i = 1$ será satisfeita, quando se escolhe as formas funcionais das curvas de Engel de um ponto de vista puramente empírico.

II.3.2 — Exemplos de Estudos Empíricos

Nesta seção apresentaremos dois exemplos de estudos empíricos de curvas de Engel no Brasil: Lopes (1972) e Medeiros (1978). O primeiro trabalho utiliza o enfoque do sistema adilog indireto para descrever a estrutura de consumo, enquanto o segundo estudo baseia-se numa abordagem empírica, através da transformação de Box-Cox, para estimar as curvas de Engel para alimentos e educação.

II.3.2.1 — Lopes (1972)

O dispêndio c_i com o i-ésimo bem, de acordo com o sistema adilog indireto, é igual a:

$$c_i = p_i q_i = \frac{A_i \alpha_i p_i^{\alpha_i} y^{1-\alpha_i}}{\sum_{k=1}^{n} A_k \alpha_k p_k^{\alpha_k} y^{-\alpha_k}}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.14}$$

Este resultado é obtido a partir da equação (2.20) quando se multiplica ambos os seus lados pelo preço p_i.

Introduzindo-se um novo parâmetro $a_i = A_i \alpha_i p_i^{\alpha_i}$, será de presumir-se que os preços num estudo de orçamento familiar não variam e, fazendo-se $b_i = -\alpha_i$, a equação anterior passa a ser escrita como:

$$c_i = \frac{a_i y^{b_i + 1}}{\sum_{k=1}^{n} a_k y^{b_k}} \tag{3.15}$$

Esta especificação da curva de Engel obviamente satisfaz à única propriedade a que estas curvas devem obedecer, qual seja, a de que a soma dos dispêndios na aquisição dos diversos bens deve ser igual ao total da renda.

Lopes usa a especificação (3.15) para estimar funções de consumo para diversos setores da economia brasileira. No seu modelo de programação a propriedade de consistência deve ser observada, daí a principal razão de sua escolha pelo sistema adilog indireto. Antes de apresentar os resultados obtidos por este autor, cabe tecer algumas considerações sobre a especificação econométrica da equação (3.15).

Admitindo-se que a parte estocástica entra na equação (3.15) de uma maneira multiplicativa, de acordo com:

$$c_i = \frac{a_i y^{b_i + 1} e^{u_i}}{\sum_{k=1}^{n} a_k y^{b_k} e^{u_k}}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.16}$$

onde u_i é uma variável aleatória com média zero e variância constante e igual a σ^2. Observe que esta especificação estocástica preserva o critério de adição, pois é fácil verificar-se que $\Sigma c_i = y$.

A equação de dispêndio para o enésimo bem é dada por:

$$c_n = \frac{a_n y^{b_n + 1} e^{u_n}}{\sum_{k=1}^{n} a_k y^{b_k} e^{u_k}} \tag{3.17}$$

Tomando-se logaritmos neperianos de ambos os membros de (3.16) e (3.17) e subtraindo-se o logaritmo de c_n do logaritmo de c_i, $i = 1, \ldots, n - 1$, resulta:

$$\left| \begin{array}{l} \log \dfrac{c_1}{c_n} = \log \dfrac{a_1}{a_n} + (b_1 - b_n) \log y + u_1 - u_n \\[2ex] \log \dfrac{c_2}{c_n} = \log \dfrac{a_2}{a_n} + (b_2 - b_n) \log y + u_2 - u_n \\ \vdots \\ \log \dfrac{c_{n-1}}{c_n} = \log \dfrac{a_{n-1}}{a_n} + (b_{n-1} - b_n) \log y + u_{n-1} - u_n \end{array} \right. \tag{3.18}$$

As variâncias e covariâncias dos termos aleatórios são iguais a:

$$E\,(u_i - u_n)^2 = Eu_i^2 + Eu_n^2 - 2Eu_iu_n = 2\sigma^2 \tag{3.19.a}$$

e:

$$E\,(u_i - u_n)\,(u_j - u_n) = -\,Eu_n^2 = -\,\sigma^2,\ i \neq j \tag{3.19.b}$$

onde levamos em conta a hipótese de que as variáveis u_i e u_j, $i \neq j$, não são correlacionadas.

O sistema de equações (3.18) constitui o que na literatura econométrica se chama de regressões aparentemente não relacionadas. Na verdade, o sistema (3.18) é um caso particular deste modelo estocástico, pois as variáveis explicativas, uma constante e o logaritmo da renda são as mesmas em todas as equações. Para este caso particular, prova-se que a aplicação do método de mínimos quadrados ordinários para cada equação conduz a estimadores eficientes para os parâmetros do modelo.

Imaginemos, então, que a partir de uma dada amostra estimou-se, através do método de mínimos quadrados ordinários, os parâmetros log a_i/a_n e $b_i - b_n$, $i = 1, \ldots, n - 1$, que passamos a denominar por γ_i e δ_i, respectivamente. Poderia pensar-se que devido ao fato de tal método de estimação não gerar estimativas para cada parâmetro a_i e b_i, individualmente, isto causaria algum problema. Todavia tal não ocorre, pois cada consumo c_i, $i = 1, \ldots, n - 1$, pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$c_i = \frac{e^{\gamma_i} y^{\delta_i + 1}}{\sum_{k=1}^{n-1} e^{\gamma_k} y^{\delta_k} + 1}$$

facilmente deduzida a partir de (3.17), quando não se considera a parte aleatória. O consumo com o enésimo bem é obtido, então, por resíduo:

$$c_n = y - \sum_{i=1}^{n-1} c_i$$

Assim, o fato de não se poder identificar cada parâmetro, a_i e b_i, não traz qualquer problema para o cálculo dos dispêndios com os diversos bens a partir de um dado valor da renda y.

A elasticidade-renda do i-ésimo bem no sistema adilog indireto, de acordo com a equação (2.25), é dada por:

$$\varepsilon_i = 1 - \left(\alpha_i - \sum_{k=1}^{n} \omega_k \alpha_k\right) \tag{3.20}$$

Portanto, a diferença entre as elasticidades-renda ε_i e ε_j é igual à diferença entre os parâmetros b_i e b_j, ou seja:

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = \alpha_j - \alpha_i = b_i - b_j \tag{3.21}$$

Obviamente, isto não significa dizer que $\varepsilon_i = b_i$ e $\varepsilon_j = b_j$. Caso se deseje calcular as elasticidades-renda dos diversos bens a partir das estimativas δ_i, pode-se adotar o seguinte procedimento. A soma ponderada das elasticidades-renda é igual a 1. Logo:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \varepsilon_i = \sum_{i \neq n} \omega_i (\varepsilon_n + \delta_i) + \omega_n \varepsilon_n = 1$$

Segue-se, portanto, que:

$$\varepsilon_n = 1 - \sum_{i \neq n} \omega_i \delta_i$$

Assim, para um conjunto de ponderações ω_i obtém-se uma estimativa para ε_n. Levando-se em conta que:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_n + b_i - b_n = \varepsilon_n + \delta_i, \quad i = 1, \ldots, n - 1$$

estimativas das demais elasticidades-renda podem ser calculadas.

Caso o pesquisador ache conveniente fazer a hipótese adicional de que os parâmetros do sistema adilog indireto devem satisfazer à restrição:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \alpha_k + 1 = 0$$

a elasticidade-renda ε_i é igual ao parâmetro b_i, como se pode comprovar através da expressão (3.20). Cabe salientar que esta hipótese adicional possibilita estimar-se todas as elasticidades-preço a partir de dados de orçamento familiar, como se pode comprovar examinando-se as fórmulas destas elasticidades, apresentadas na subseção que trata do sistema adilog indireto.

A hipótese simplificadora de que $\varepsilon_i = b_i$ conduz a um método bastante simples de estimação dos parâmetros b_i. Com efeito, na curva de Engel do tipo log-linear:

$$\log c_i = \alpha_i + \beta_i \log y + \xi_i$$

o coeficiente β_i é igual à elasticidade-renda do i-ésimo bem. Assim, uma estimativa de b_i seria dada pela estimativa de β_i. Este foi o procedimento usado por Lopes para obter estimativas dos parâmetros b_i do sistema adilog indireto.

Os dados utilizados por Lopes foram os de orçamento familiar coletados pela Fundação Getulio Vargas para o período 1961/63. A amostra inclui as cidades do Rio de Janeiro, São Paulo e Curitiba, bem como três cidades, consideradas típicas, para cada um dos seguintes Estados: São Paulo, Minas Gerais e Rio de Janeiro. As observações foram agrupadas em nove classes de renda, de maneira que o número total de observações era igual a 108.

Os bens foram agregados em setores, de forma a serem consistentes com a matriz de insumo-produto utilizada no modelo de programação.

A Tabela II.3 mostra as elasticidades-renda estimadas por Lopes para as diversas funções-consumo setoriais. Como se pode facilmente observar pelos desvios-padrão das estimativas, todos os coeficientes são significativos. Os setores agricultura, comércio, perfumaria, alimentação, indústria química e energia elétrica apresentam elasticidades-renda inferiores à unidade, embora o último setor mencionado não apresente elasticidade significantemente diferente de 1, enquanto os demais se mostram superiores à unidade.

Os parâmetros a_i, que constam da última coluna da Tabela II.3, foram estimados de tal modo que os consumos setoriais para o ano de 1959 fossem iguais aos consumos efetivamente observados.

Tabela II.3

ESTIMATIVAS DAS ELASTICIDADES-RENDA: LOPES (1972)

Setor	Constante	Elasticidade-Renda (b_i)	R^2	a_i
Agricultura	—1,120	0,8750 (0,0258)	0,916	0,4457
Indústria Química e Energia Elétrica	—5,743	0,9868 (0,0185)	0,919	0,0027
Comércio	—1,703	0,9509 (0,0123)	0,983	0,1914
Serviços	—1,987	1,0926 (0,0194)	0,968	0,0984
Combustível e Borracha	—17,67	2,5323 (0,1507)	0,806	$0{,}1 \times 10^{-7}$
Minerais Não-Metálicos, Metalurgia, Mecânica e Material Elétrico	—8,066	1,5600 (0,1020)	0,701	$0{,}7 \times 10^{-5}$
Material de Transporte	—23,61	2,8807 (0,3279)	0,607	$0{,}1 \times 10^{-7}$
Madeira e Mobiliário	—7,703	1,3696 (0,0970)	0,687	0,006
Perfumaria	—2,382	0,7984 (0,0303)	0,869	0,618
Têxtil	—5,453	1,1588 (0,0496)	0,839	0,0171
Vestuário e Couro	—4,369	1,1532 (0,0547)	0,810	0,0084
Alimentação	—1,681	0,5904 (0,0235)	0,857	3,7303
Bebidas	—6,935	1,2321 (0,0733)	0,749	0,0027
Fumo	—2,479	0,7735 (0,0594)	0,624	0,0499
Editorial e Gráfica	—12,70	1,8849 (0,0627)	0,911	$0{,}6 \times 10^{-6}$
Construção	—14,60	1,9380 (0,2106)	0,524	$0{,}5 \times 10^{6}$
Transporte e Comunicações	—8,237	1,5913 (0,0635)	0,861	0,0003

FONTE: Lopes (1972).

OBS.: 1) Os valores entre parênteses são os erros-padrão das estimativas.

2) Os valores do coeficiente a_i para os setores de Metalurgia, Mecânica e Material Elétrico são, respectivamente: $0{,}3 \times 10^{-5}$, $0{,}2 \times 10^{-5}$ e 0,0001. O valor de a_i na tabela corresponde ao setor de Minerais Não-Metálicos.

II.3.2.2 — Medeiros (1978)

A transformação de Box-Cox foi a abordagem usada por Medeiros para estudar as curvas de Engel para alimentação e educação, com dados de orçamentos familiares de uma pesquisa realizada na cidade de São Paulo no período 1971 a 1972.

A especificação adotada por Medeiros é um caso particular da equação (3.13). Com efeito, quando se faz $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, essa equação passa a ser escrita como:

$$\frac{c_i^\lambda - 1}{\lambda} = \alpha + \beta \frac{y_i^\lambda - 1}{\lambda} + \xi_i \tag{3.22}$$

Admitindo-se que o termo aleatório ξ_i siga uma distribuição normal com média zero, variância constante e igual a σ^2, a função de verossimilhança para uma amostra de tamanho N é igual a:

$$l\,(\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \sigma^2/\text{dados}) = 2\pi^{-N/2}\,.\ \sigma^{-N}\,.\ J\,.$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}[c_i^{(\lambda)} - \alpha - \beta y_i^{(\lambda)}]^2\right\} \tag{3.23}$$

onde usamos a notação $X^{(\lambda)} = (X^\lambda - 1)/\lambda$, J representa o valor do jacobiano

$$J = \prod_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial \xi_i}{\partial c_i}\right| = \prod_{i=1}^{N} c_i^{\lambda-1} \tag{3.24}$$

e a notação exp { } indica o número natural e elevado à expressão entre chaves.

O logaritmo da função de verossimilhança, desprezando-se a parte constante que entra em (3.23), é dado por:

$$\log l = -\frac{N}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}[c_i^{(\lambda)} - \alpha - \beta y_i^{(\lambda)}]^2$$
$$+ (\lambda - 1)\sum_{i=1}^{N}\log c_i \tag{3.25}$$

Os parâmetros α, β, λ e σ são então obtidos maximizando-se esta função. De um ponto de vista prático esta maximização pode ser feita com o seguinte procedimento. Para um valor escolhido de λ faz-se a regressão de $c_i^{(\lambda)}$ contra $y_i^{(\lambda)}$, encontrando-se o valor de $\hat{\sigma}^2(\lambda)$:

$$\hat{\sigma}^2(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{N}[c_i^{(\lambda)} - \hat{\alpha} - \hat{\beta} y_i^{(\lambda)}]^2}{N}$$

que, obviamente, depende do valor de λ usado. Substituindo-se esta expressão em (3.25), obtém-se o valor concentrado do logaritmo da função de verossimilhança:

$$\log l_C(\lambda) = -\frac{N}{2}\log \hat{\sigma}^2(\lambda) + (\lambda - 1)\sum_{i=1}^{N}\log c_i$$

que depende do valor de λ. Segue-se, então, que a partir de um conjunto de valores escolhidos para λ pode-se traçar esta curva e obter-se o valor de λ que torna máxima a função de verossimilhança. As estimativas de σ^2, α e β correspondentes ao valor de λ que maximiza a função de verossimilhança são as estimativas de máxima verossimilhança destes parâmetros. Com base na propriedade de que menos duas vezes o logaritmo da razão de verossimilhança tem distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade, pode-se testar hipóteses e construir intervalos de confiança para λ.

A Tabela II.4 apresenta os resultados obtidos por Medeiros para a alimentação. As variáveis usadas são as médias mensais dos dispêndios em alimentação *per capita* (c_i) e dos dispêndios totais *per capita* (y_i). Devido ao fato de que os dados são grupados por classes de renda e o número de famílias em cada classe não é o mesmo, ambas as variáveis, c_i e y_i, são multiplicadas pela raiz quadrada do número de observações na classe, antes de se efetuar as transformações com o parâmetro λ. Este procedimento tem como objetivo eliminar possível heterocedasticidade nas observações devido ao processo de agregação.

O valor de λ que maximiza a função de verossimilhança é igual a —0,85; um intervalo de confiança de 95% tem como limites os valores —0,50 e —1,20. De maneira que a hipótese de que λ é igual a —1 não é rejeitada, sugerindo uma relação linear para o inverso das variáveis:

$$\frac{1}{c_i} = 1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta} + \hat{\beta}\,\frac{1}{y_i} + \text{erro}$$

A estimativa do coeficiente β é significativa e os valores das elasticidades-renda são inferiores à unidade. A elasticidade-renda diminui quando o nível de renda aumenta, como era de se esperar *a priori* em se tratando de alimentação.

O coeficiente de determinação R^2 é igual a 0,9938 e é interessante observar que o valor máximo de R^2 não corresponde ao valor máximo de λ, fato este já assinalado anteriormente quando mencionamos que o critério de seleção através do valor de R^2 é incorreto.

A estatística de Durbin-Watson é igual a 2,08, sugerindo que a relação linear entre as variáveis transformadas é adequada. Cabe observar que, embora a estatística de Durbin-Watson tenha como objetivo testar autocorrelação dos resíduos em dados de séries de tempo, ela pode ser usada no caso daqueles provenientes de corte transversal, para testar não-linearidade, desde que estejam ordenados por ordem crescente da variável independente.

Cabe ainda mencionar que Medeiros testou a possível existência de economias de escala através da inclusão da variável tamanho da família, não encontrando qualquer evidência para tal fenômeno na amostra analisada. Estes resultados não estão apresentados na Tabela II.4.

Tabela II.4

CURVA DE ENGEL PARA ALIMENTAÇÃO: MEDEIROS (1978)

λ	Constante	Renda	R^2	Erro-Padrão da Estimativa	DW	Verossimilhança	Elasticidade-Renda
—1,20	—0,68	1,81 (41,89)	0,9938	0,00017	1,70	12,08	0,81 a 0,16
—1,10	—0,60	1,66 (42,69)	0,9940	0,00025	1,87	34,48	0,80 a 0,18
—1,05	—0,56	1,58 (42,93)	0,9941	0,00031	1,95	43,64	0,78 a 0,19
—1,00	—0,52	1,51 (43,00)	0,9941	0,00039	2,02	45,69	0,76 a 0,20
—0,95	—0,47	1,44 (42,88)	0,9941	0,00048	2,08	63,67	0,76 a 0,21
—0,85	—0,38	1,31 (41,93)	0,9938	0,00076	2,13	69,55	0,74 a 0,24
—0,80	—0,33	1,25 (41,08)	0,9945	0,00097	2,12	60,43	0,73 a 0,25
—0,60	—0,08	1,02 (35,48)	0,9913	0,00268	1,85	20,38	0,68 a 0,31
—0,40	—0,25	0 82 (28,44)	0,9866	0,00806	1,44	2,28	0,63 a 0,37
—0,20	0,78	0,65 (22,22)	0,9782	0,02491	1,10	0,22	0,57 a 0,43
—0,01	1,60	0,51 (17,70)	0,9661	0,07254	0,88	0,02	0,51 a 0,50

FONTE: Medeiros (1978).

OBS.: 1) Os números entre parênteses são os valores da estatística t; 2) Na coluna da elasticidade-renda têm-se os valores desta para as classes de renda mais baixa e mais elevada, respectivamente.

Quanto à curva de Engel para educação, as variáveis usadas foram: dispêndio em educação por família (c_i) e dispêndio total por família (y), ambas em termos de média mensal. Devido à mesma razão alegada para alimentação, as variáveis foram multiplicadas pela raiz quadrada do número de observações em cada classe de renda.

Como se pode constatar através da Tabela II.5, o valor de λ, para educação, que maximiza a função de verossimilhança, é igual a 0,05 e o intervalo de confiança de 95% é dado por (—0,20, 0,40). Portanto, a hipótese de que λ é igual a zero não é rejeitada, sugerindo que a elasticidade-renda é constante. Observe que a elasticidade-renda é superior à unidade e seu intervalo de variação vai de 1,64 a 1,54, diminuindo com o aumento do nível de renda. Todavia, a variabilidade é bastante pequena.

Tabela II.5

CURVA DE ENGEL PARA EDUCAÇÃO: MEDEIROS (1978)

λ	Constante	Renda	R^2	Erro-Padrão da Estimativa	DW	Verossi-milhança	Elasticida-de-Renda
—0,30	—11,48	4,66 (16,52)	0,9613	0,11	1,91	6,31	1,34 a 1,98
—0,10	—8,40	2,26 (16,30)	0,9603	0,22	1,64	71,24	1,51 a 1,70
—0,05	—7,93	1,90 (16,02)	0,9589	0,26	1,60	96,35	1,55 a 1,64
—0,03	—7,77	1,77 (15,89)	0,9583	0,29	1,59	105,29	1,57 a 1,62
0,03	—7,37	1,44 (15,44)	0,9559	0,36	1,55	124,30	1,62 a 1,56
0,05	—7,26	1,34 (15,28)	0,9550	0,40	1,55	127,31	1,64 a 1,54
0,15	—6,91	0,95 (14,39)	0,9496	0,61	1,52	117,27	1,74 a 1,46
0,20	—6,84	0,81 (13,93)	0,9464	0,77	1,52	101,15	1,80 a 1,43
0,25	—6,83	0,68 (13,48)	0,9429	0,97	1,53	82,39	1,87 a 1,40
0,50	—7,83	0,31 (11,55)	0,9238	3,23	1,57	16,98	2,28 a 1,27

FONTE: Medeiros (1978).
OBS.: 1) Os números entre parênteses são os valores da estatística t; 2) Na coluna da elasticidade-renda têm-se os valores desta para as classes de renda mais baixa e mais elevada, respectivamente.

II.4 — Exercícios

1. Prove que no modelo adilog indireto a restrição de que os coeficientes α_i sejam inferiores à unidade, $\alpha_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, é suficiente para que a função-utilidade indireta seja quase-convexa. A condição $\alpha_i < 1$ também é necessária?

2. A função-utilidade direta de Johansen é dada por:

$$u(q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\alpha_i} \left(\frac{q_i - \gamma_i}{\beta_i} \right)^{\alpha_i}, \quad \alpha_i < 1, \ \beta_i > 0, \ \gamma_i < q_i$$

Obtenha os sistemas de equações de demanda derivados a partir dessa função-utilidade nas seguintes situações:

a) Quando $\alpha_i \to 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

b) Quando $\gamma_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

c) Quando $\alpha_i = \alpha$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. A hipótese de que os parâmetros do modelo de Rotterdam sejam constantes implica severas restrições sobre o comportamento do consumidor. Mostre que neste caso todas as elasticidades-preço, não compensadas, e todas as elasticidades-renda são unitárias.

4. Para a função

$$u_I(y, p) = \log\left(y - \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{hk}\, p_h^{1/2}\, p_k^{1/2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \mu_k \log p_k$$

onde α_{hk} e μ_k são parâmetros, pede-se:

a) Quais as condições que os parâmetros α_{hk} devem satisfazer para que esta função seja uma função-utilidade indireta?

b) Qual o sistema de equações de demanda dos n bens?

5. Quais as expressões algébricas das curvas de Engel para os seguintes sistemas de equações de demanda:

a) Sistema de Despesa Linear;

b) Sistema Adilog Indireto;

c) Modelo de Rotterdam.

6. A função-utilidade indireta do consumidor é dada por:

$$u_I = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \left(\frac{p_i}{y}\right)^{0,5} \left(\frac{p_j}{y}\right)^{0,5}$$

a) Qual o sistema de equações de demanda associado a esta função?

b) Qual a expressão das curvas de Engel?

7. Um sistema de equações de demanda deve satisfazer às seguintes propriedades:

i) $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$, adição (*adding-up*);

ii) $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \varepsilon_i = 1$, agregação de Engel;

iii) $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \eta_{ij} = -\omega_j$, agregação de Cournot;

iv) $\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij} = -\varepsilon_i$, homogeneidade;

v) $\omega_i (\eta_{ij} + \omega_j \varepsilon_i) = \omega_j (\eta_{ji} + \omega_i \varepsilon_j)$, $i \neq j$, simetria;

onde:

ω_i = proporção de renda gasta na aquisição do i-ésimo bem;

ε_i = elasticidade-renda do i-ésimo bem;

η_{ij} = elasticidade-preço, não compensada, do bem i em relação ao preço do bem j.

a) A partir das proposições da teoria do consumidor, mostre como se obtém estas propriedades;

b) Mostre que as propriedades ii) e iii) podem ser derivadas a partir das propriedades i), iv) e v);

c) O sistema de demanda linear nos logaritmos das variáveis:

$$\log q_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \log p_j + \beta_i \log y$$

satisfaz às propriedades listadas acima?

d) O sistema de demanda linear nas variáveis:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p_j + \beta_i y$$

satisfaz às propriedades listadas acima?

8. Quais as propriedades listadas no exercício anterior que são satisfeitas pelo seguinte sistema de equações de demanda:

$$\log q_i = \alpha_i \log \frac{p_i}{P} + \beta_i \log \frac{y_i}{P}$$

onde P é um índice de preços dos bens e serviços que entram no orçamento do consumidor.

9. A função-utilidade do consumidor é expressa por:

$$u(q) = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-\beta_i q_i}$$

a) Quais as condições que os parâmetros α e β devem satisfazer?

b) Derive o sistema de equações de demanda associado a esta função-utilidade e discuta especificações econométricas alternativas para estimá-lo.

10. Mostre que a proporção gasta pelo consumidor na aquisição do i-ésimo bem, ω_i, pode ser obtida através das seguintes expressões:

$$\omega_i = \frac{\partial \log u}{\partial \log q_i} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log u}{\partial \log q_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\omega_i = -\frac{\partial \log u_I}{\partial \log p_i} \Big/ \frac{\partial \log u_I}{\partial \log y}, \quad i = 1, \ldots, n$$

onde u e u_I são, respectivamente, as funções-utilidade direta e indireta.

11. A função-utilidade translog é dada por:

$$-\log u(q) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \log q_i \log q_j$$

a) Mostre que a proporção de renda gasta com a aquisição do i-ésimo bem é dada pela seguinte equação:

$$\omega_i = \frac{\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \log q_j}{\alpha + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \log q_j}$$

onde $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ e $\beta_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij}$.

b) Quais as restrições que os parâmetros das equações dos ω_i devem atender?

12. Repita o exercício anterior para a função-utilidade indireta translog:

$$\log u_I = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log \frac{p_i}{y} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \log \frac{p_i}{y} \log \frac{p_j}{y}$$

Observação: Na expressão de ω_i onde tiver q_i substitua-se agora por p_i/y.

II.5 — Bibliografia

BACHA, E. *An econometric model for the international coffee market: the impact of Brazilian price policy*. Dissertação Doutoral inédita. Yale University, 1968.

BARTEN, A. P. Maximum likelihood estimation of a complete system of demand equations. *European Economic Review,* 1:7-73, 1969.

BOX, G. E. P., e COX, D. R. An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society,* Série B, 26:211-52, 1964.

BRIDGE, J. L. *Applied econometrics*. Amsterdam, North-Holland, 1971.

BROWN, A., e DEATON, A. Survey in applied economics: models of consumer behavior. *The Economic Journal,* 82:1.145-236, 1972.

CHRISTENSEN, L. R., JORGENSON, D. W., e LAU, L. S. Transcendental logarithmic utility functions. *American Economic Review,* 65:367-83, 1965.

CRAMER, J. S. *Empirical econometrics.* Amsterdam, North-Holland, 1969.

DHRYMES, P. J. On a class of utility and production functions yielding everywhere differentiable demand functions. *Review of Economic Studies,* 34: 399-408, 1967.

FRISCH, R. A complete scheme for computing all direct and cross demand elasticities in a model with many sectors. *Econometrica,* 27:117-96, 1959.

GOLDBERGER, A. S., e GAMALETSOS, T. A cross-country comparison of consumer expenditure patterns. *European Economic Review,* 1, 1970.

HOUTHAKKER, H. S. Additive preferences. *Econometrica,* 28:244-57, 1960.

KLEIN, L. R., e RUBIN, H. A constant utility index of the cost of living. *Review of Economic Studies,* 15:84-7, 1947.

LOPES, F. L. Desigualdade e crescimento: um modelo de programação com aplicação ao Brasil. *Pesquisa e Planejamento Econômico,* Rio de Janeiro, *2* (2) :189-226, dez. 1972.

MEDEIROS, J. A. S. Curvas de Engel e transformação de Box-Cox: uma aplicação aos dispêndios em alimentação e educação na cidade de São Paulo. *Pesquisa e Planejamento Econômico,* Rio de Janeiro, *8* (3) :795-828, dez. 1978.

PHLIPS, L. *Applied consumption analysis.* New York, American Elsevier, 1974.

PRAIS, S. J., e HOUTHAKKER, H. S. *The analysis of family budgets.* Cambridge, Cambridge University Press, 1955.

STONE, R. Linear expenditure system and demand analysis: an application to the pattern of British demand. *The Economic Journal,* 64:511-27, 1954.

THEIL, H. *Theory and measurement of consumer demand.* Vol. 1. Amsterdam, North-Holland, 1975.

WOLD, H., e JURÉEN, L. *Demand analysis.* New York, John Wiley, 1953.

ZAREMBKA, P. An econometric analysis of the food-consumption function. In: *Toward a theory of economic development.* San Francisco, Holden-Day, 1972.

Capítulo III

ALOCAÇÃO DO TEMPO

Este capítulo tem como objetivo aplicar a teoria do consumidor ao estudo da alocação do tempo, um recurso escasso com que todos nós nos defrontamos. A primeira seção, além de tratar do problema clássico da escolha entre lazer e trabalho, seja do ponto de vista do indivíduo ou da família, examina os principais fatores que levam as pessoas a participarem ou não na força de trabalho. A segunda seção apresenta os principais ingredientes da economia de produção familiar, um desenvolvimento recente que certamente ampliou a área de aplicação da teoria do consumidor ao tratar as unidades familiares não somente pelo aspecto do consumo, mas também sob o ângulo da produção, porquanto bens e serviços são transformados, dentro das unidades familiares, com a utilização do tempo dos seus membros e o objetivo do consumo final dos produtos daí resultantes. A terceira seção ilustra o problema de alocação do tempo através de um estudo econométrico de autoria de Oliveira (1978), a partir de dados de uma pesquisa de orçamento familiar em Belo Horizonte.

III.1 — Oferta de Mão-de-Obra

Os estudos de oferta de mão-de-obra procuram explicar duas dimensões que caracterizam a quantidade de trabalho ofertada no mercado, quais sejam: i) o número de pessoas que, pertencentes à população economicamente ativa e dadas as condições de mercado, desejam trabalhar; e ii) a quantidade de horas de trabalho que essas pessoas estão dispostas a oferecer.

Cuidaremos, em primeiro lugar, por razões didáticas, da teoria subjacente à equação de oferta de horas de trabalho. Em seguida trataremos de estudar os fatores que influenciam a decisão de uma pessoa em participar ou não na força de trabalho.

III.1.1 — Horas de Trabalho: A Decisão Individual

O enfoque tradicional da teoria da oferta de mão-de-obra parte da idéia de que para um indivíduo o tempo disponível pode ser alocado entre trabalho e lazer, e de que este deriva da utilidade dos bens e serviços que consome e do tempo utilizado no lazer, isto é:

$$u = u\ (q,\ l) \tag{1.1}$$

onde q é um índice da quantidade de bens e serviços consumidos e l é a quantidade de tempo utilizado nas atividades de lazer.

A renda y do indivíduo é gasta na compra de bens e serviços de consumo. Assim:

$$y = pq \tag{1.2}$$

onde p é um índice dos preços dos bens e serviços adquiridos. A renda y, por sua vez, é igual à soma de duas parcelas. A primeira parcela é igual ao salário por unidade de tempo, ω, vezes o tempo total trabalhado. A segunda parte dos rendimentos é proveniente de outras fontes, como por exemplo rendimentos da propriedade e transferências. Conseqüentemente, podemos dizer que:

$$y = \omega h + R \tag{1.3}$$

onde h é o tempo gasto trabalhando e R é o valor dos rendimentos provenientes de outras fontes que não o trabalho. As equações (1.2) e (1.3), quando combinadas, fornecem a limitação orçamentária do consumidor:

$$pq = \omega h + R \tag{1.4}$$

A segunda restrição existente na escolha do indivíduo diz respeito à limitação do tempo. Supondo que t seja o total de tempo disponível, que pode ser interpretado como aquela quantidade de tempo que leva em conta as necessidades biológicas básicas, este deve ser igual à soma do tempo h gasto no trabalho, mais o tempo l gasto nas atividades de lazer, isto é:

$$h + l = t \tag{1.5}$$

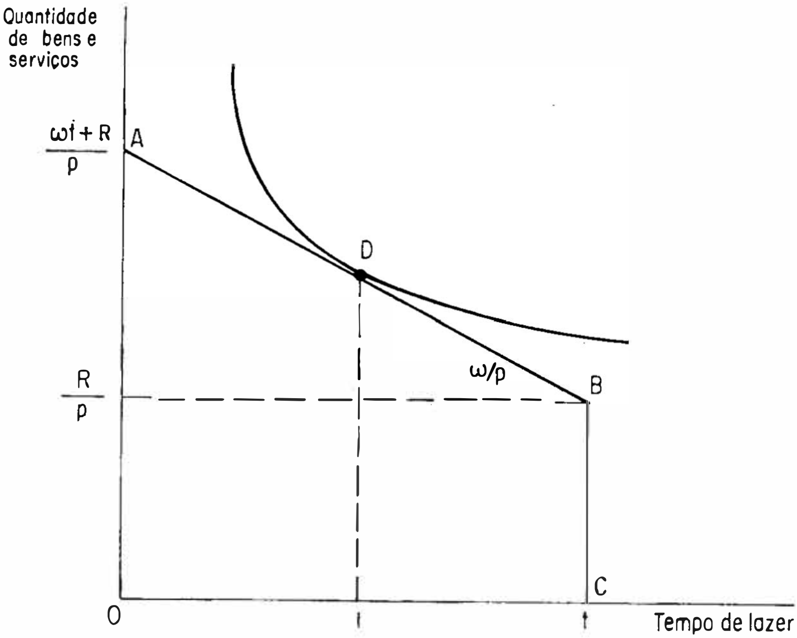
As restrições (1.4) e (1.5) não são independentes, pois aumentando-se (diminuindo-se) as horas de trabalho pode-se aumentar (diminuir) a quantidade de bens e serviços comprada. Assim, a equação (1.5), quando substituída em (1.4), resulta na seguinte restrição:

$$pq + \omega l = \omega t + R = I \tag{1.6}$$

A equação acima engloba as restrições de tempo e de renda que limitam as opções de escolha do indivíduo. O lado esquerdo de (1.6) é igual ao valor pq dos bens e serviços de consumo adquiridos, mais o valor alternativo do tempo, ωl, gasto em lazer. I é a renda "integral", segundo Becker (1965), ou a renda "potencial", segundo Kosters (1966), ou seja, corresponde à renda que o indivíduo obteria na hipótese de que todo o seu tempo disponível fosse utilizado no trabalho. A Figura III.1 mostra o gráfico correspondente à equação (1.6). No eixo vertical tem-se a quantidade de bens e serviços q, enquanto no eixo horizontal marca-se o tempo utilizado em lazer. A linha quebrada ABC limita as opções de escolha do indivíduo.

Figura III . 1

ALOCAÇÃO DO TEMPO ENTRE LAZER E TRABALHO



O problema de alocação de recursos do consumidor consiste em escolher os valores de q e l, de tal modo que a função de utilidade (1.1) seja maximizada, com a condição de que a restrição (1.6) seja satisfeita. Em equilíbrio, as utilidades marginais são proporcionais aos preços:

$$\frac{\partial u/\partial q}{p} = \frac{\partial u/\partial l}{\omega} \qquad (1.7)$$

O ponto D da Figura III.1 representa graficamente a condição acima. O sistema de equações formado por (1.7) e (1.6) produz as equações de demanda por bens e serviços e por lazer:

$$\begin{cases} q = q\,(p,\ \omega,\ I) \\ l = l\,(p,\ \omega,\ I) \end{cases} \qquad (1.8)$$

As proposições da teoria do consumidor que apresentamos na primeira seção do primeiro capítulo aplicam-se ao caso agora em estudo. Com efeito, as diferenciais das equações de demanda (1.8) são dadas por:

$$\begin{bmatrix} dq \\ dl \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{qp} & S_{q\omega} \\ S_{lp} & S_{l\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ d\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial q/\partial I \\ \partial l/\partial I \end{bmatrix} (dI - q\,dp - l\,d\omega) \qquad (1.9)$$

e a matriz de Slutsky,

$$\begin{bmatrix} S_{qp} & S_{q\omega} \\ S_{lp} & S_{l\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial q}{\partial p}\right|_{u=ct} & \left.\dfrac{\partial q}{\partial \omega}\right|_{u=ct} \\ \left.\dfrac{\partial l}{\partial p}\right|_{u=ct} & \left.\dfrac{\partial l}{\partial \omega}\right|_{u=ct} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

é negativa semidefinida.

III.1.1.1 — A Equação de Oferta de Horas de Trabalho

A quantidade de horas trabalhadas é obtida subtraindo-se do tempo total disponível as horas de lazer: $h = t - l$. Logo, de (1.8) tem-se que a quantidade ofertada de horas de trabalho é função do preço p, do salário unitário ω e da renda potencial I:

$$h = h\ (p,\ \omega,\ I) \tag{1.11}$$

A diferencial dessa equação é:

$$dh = \left.\frac{\partial h}{\partial p}\right|_{u=ct} dp + \left.\frac{\partial h}{\partial \omega}\right|_{u=ct} d\omega + \frac{\partial h}{\partial I}[dI - q dp - l d\omega] \tag{1.12}$$

onde:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial p}\right|_{u=ct} = -\left.\frac{\partial l}{\partial p}\right|_{u=ct} \tag{1.13}$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial \omega}\right|_{u=ct} = -\left.\frac{\partial l}{\partial \omega}\right|_{u=ct} > 0 \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial h}{\partial I} = -\frac{\partial l}{\partial I} \tag{1.15}$$

Os resultados acima são facilmente obtidos lembrando-se que $dh = -dl$, pois t é constante. Quanto ao sinal do efeito-substituição (1.14), este decorre do fato de a matriz de Slutsky (1.10) ser negativa semidefinida. Assim, o aumento do salário ω, mantendo-se constante a renda real, acarreta um aumento no número de horas trabalhadas. No que toca ao efeito-renda (1.15), a teoria nada tem a dizer sobre o seu sinal. Todavia, acredita-se que $\partial h/\partial I$ seja negativo, pois o lazer deve ser um bem normal ($\partial l/\partial I > 0$).

Como $I = \omega t + R$, segue-se que:

$$dI = t d\omega + dR \tag{1.16}$$

Substituindo-se este valor em (1.12), resulta:

$$dh = \left.\frac{\partial h}{\partial p}\right|_{u=ct} dp + \left.\frac{\partial h}{\partial \omega}\right|_{u=ct} d\omega + \frac{\partial h}{\partial I}[h d\omega + dR - q dp] \tag{1.17}$$

Alternativamente, a equação acima pode ser escrita do seguinte modo:

$$\begin{aligned} dh = {} & \left(\left.\frac{\partial h}{\partial p}\right|_{u=ct} - q\frac{\partial h}{\partial I}\right) dp \\ & + \left(\left.\frac{\partial h}{\partial \omega}\right|_{u=ct} + h\frac{\partial h}{\partial I}\right) d\omega + \frac{\partial h}{\partial I} dR \end{aligned} \tag{1.18}$$

As equações de Slutsky são, então, dadas por:

$$\frac{\partial h}{\partial p} = \left.\frac{\partial h}{\partial p}\right|_{u=ct} - q\,\frac{\partial h}{\partial I} \tag{1.19}$$

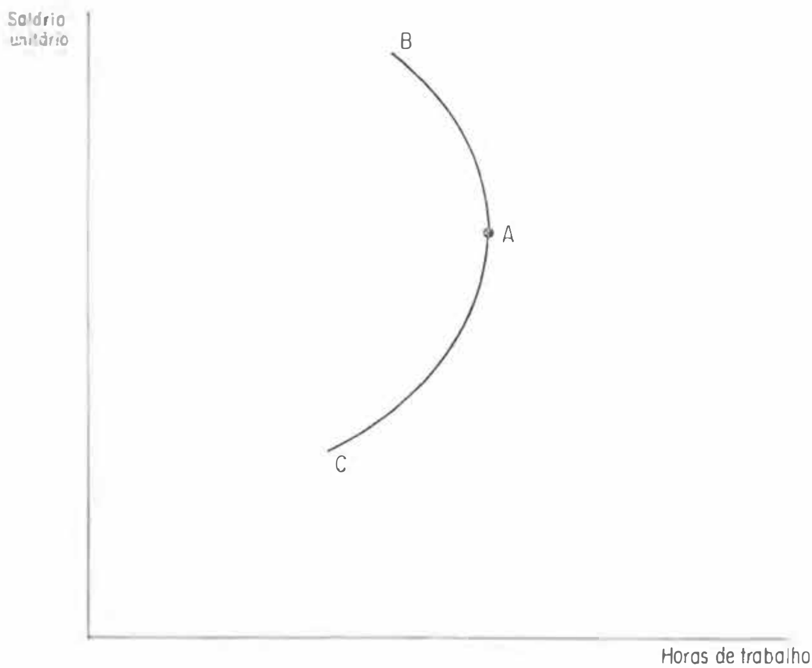
$$\frac{\partial h}{\partial \omega} = \left.\frac{\partial h}{\partial \omega}\right|_{u=ct} + h\,\frac{\partial h}{\partial I} \tag{1.20}$$

Em virtude de ser positivo o efeito-substituição e supostamente negativo o efeito-renda, o sinal do efeito-preço $\partial h / \partial \omega$, dado em (1.20), é, *a priori*, indeterminado.

III.1.1.2 – Correlação Negativa entre Horas de Trabalho e Salários

Em países desenvolvidos, como os Estados Unidos, constatou-se que, para a população adulta masculina, os salários e as horas de trabalho estavam negativamente correlacionados. Esse fato foi observado tanto para dados de série temporal como para aqueles provenientes de corte transversal. Uma explicação para tal fenômeno pode ser encontrada na expressão (1.20), e baseia-se no fato de que o efeito-renda teria sido mais importante do que o efeito-substituição, acarretando, conseqüentemente, um efeito-preço total negativo: $\partial h / \partial \omega < 0$. A curva de oferta da Figura III.2 ilustra essa possibilidade, que corresponde

Figura III.2
CURVA DE OFERTA DE MÃO-DE-OBRA



ao trecho AB da curva CAB conhecida na literatura como curva de oferta "dobrada para trás" (*backward bending*).

III.1.1.3 – Homogeneidade da Equação de Oferta

A equação de oferta (1.11) é homogênea do grau zero nos preços p e ω, e na renda I, pois o equilíbrio do consumidor não se altera quando todos os preços e rendimentos são multiplicados por uma mesma constante. Assim, a equação (1.11) tem de satisfazer à seguinte propriedade:

$$p \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_{u=ct} + \omega \left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{u=ct} = 0 \qquad (1.21)$$

III.1.1.4 – Especificações Alternativas da Equação de Oferta

O estudo econométrico da oferta de horas de trabalho requer a escolha da forma funcional da equação de oferta, bem como a especificação das variáveis que entram na função. A forma funcional é um problema empírico, não havendo indicação, *a priori*, da teoria de qual é a forma mais adequada. É claro que sempre é recomendável analisar-se cuidadosamente as implicações da forma que estiver sendo utilizada. Quanto às variáveis a serem incluídas na equação de oferta, a teoria que acabamos de apresentar é bastante explícita: índice de preço dos bens e serviços de consumo, salário unitário e uma variável renda que pode ser especificada de três maneiras alternativas, produzindo as seguintes funções de oferta: [1]

$$h = f\ (\omega/p,\ I/p,\ Z) \qquad (1.22)$$

$$h = f\ (\omega/p,\ R/p,\ Z) \qquad (1.23)$$

$$h = f\ (\omega/p,\ y/p,\ Z) \qquad (1.24)$$

A variável Z representa outros fatores não indicados pela teoria econômica e que afetam também o número de horas trabalhadas. Cabe observar ainda que, devido à homogeneidade de grau zero da equação de oferta, as variáveis nas três equações acima são variáveis em termos reais, isto é, deflacionadas pelo índice de preços p. Obviamente, se um dos objetivos do estudo da equação de oferta de horas de trabalho for testar o grau de homogeneidade da equação, as três variáveis devem entrar separadamente.

[1] Usamos o mesmo símbolo $f\ (\ )$ para as diversas alternativas. Todavia, isto não significa dizer que a função $f(\ )$ seja a mesma para todos os casos.

Um ponto importante a observar quando as equações de oferta assumem uma determinada forma funcional é a interpretação dos seus coeficientes. Para exemplificar, tomemos o caso em que as equações (1.22), (1.23) e (1.24) assumem o formato do tipo log-log:

$$\log h_i = a_0 + a_1 \log \frac{\omega_i}{p_i} + a_2 \log \frac{I_i}{p_i} + \xi_{1i} \tag{1.25}$$

$$\log h_i = b_0 + b_1 \log \frac{\omega_i}{p_i} + b_2 \log \frac{R_i}{p_i} + \xi_{2i} \tag{1.26}$$

$$\log h_i = c_0 + c_1 \log \frac{\omega_i}{p_i} + c_2 \log \frac{y_i}{p_i} + \xi_{3i} \tag{1.27}$$

onde as perturbações aleatórias ξ_{1i}, ξ_{2i} e ξ_{3i} foram acrescentadas às equações, e não incluímos, para simplificar, a variável Z.

Os parâmetros a_1 e a_2, da equação (1.25), são iguais a:

$$a_1 = \eta^c_{h\omega} - \frac{l\omega}{I} \varepsilon_I > 0$$

$$a_2 = \varepsilon_I < 0 \tag{1.28}$$

onde $\eta^c_{h\omega}$ é a elasticidade-preço compensada e ε_I é a elasticidade-renda, $\varepsilon_I = \frac{\partial h}{\partial I} I/h$. Os resultados acima são facilmente obtidos a partir de (1.12) e (1.21). Como se espera que o lazer seja um bem normal, a_2 deve ser negativo e, portanto, o sinal de a_1 deve ser positivo.

Os coeficientes b_1 e b_2, da equação (1.26), são iguais a:

$$b_1 = \eta^c_{h\omega} + \frac{h\omega}{I} \varepsilon_I = \eta^c_{h\omega} + \frac{h\omega}{R} \varepsilon_R \gtreqless 0$$

$$b_2 = \varepsilon_R < 0 \tag{1.29}$$

onde os sinais são obtidos a partir de (1.17) e (1.21) e $\varepsilon_R = \varepsilon_I \cdot \frac{I}{R}$. O sinal do coeficiente b_2 deve ser negativo, enquanto o sinal de b_1 *a priori*, é indeterminado.

No que concerne aos parâmetros da equação (1.27), sua interpretação torna-se fácil quando se lembra que, devido ao fato de $y = \omega h + R$, a diferencial de y é:

$$dy = \omega dh + h d\omega + dR$$

Substituindo-se o valor de dR, dado pela expressão anterior na equação (1.17), e rearranjando-se alguns membros, chega-se à seguinte equação diferencial:

$$dh = \frac{\left.\dfrac{\partial h}{\partial p}\right|_{u=ct} - q\,\dfrac{\partial h}{\partial y}}{1 + \omega\,\dfrac{\partial h}{\partial I}}\,dp + \frac{\left.\dfrac{\partial h}{\partial \omega}\right|_{u=ct}}{1 + \omega\,\dfrac{\partial h}{\partial I}}\,d\omega + \frac{\partial h/\partial y}{1 + \omega\,\dfrac{\partial h}{\partial I}}\,dy$$

Levando-se em conta a expressão (1.17) e a equação anterior, os parâmetros c_1 e c_2 da equação (1.27) têm a seguinte interpretação:

$$c_1 = \frac{\eta_{h\omega}}{1 + \omega\,\dfrac{\partial h}{\partial I}} > 0$$

$$c_2 = \frac{\varepsilon_y}{1 + \omega\,\dfrac{\partial h}{\partial I}} < 0 \qquad (1.30)$$

onde $\varepsilon_y = (\partial h/\partial y)\ (y/h)$. Os sinais indicados acima supõem que o denominador de c_1 e c_2 seja positivo.

As expressões (1.28), (1.29) e (1.30) mostram claramente que a interpretação dos parâmetros nas três equações são diferentes, tanto no que diz respeito às elasticidades-preço quanto às elasticidades-renda. Cabe ainda notar que no caso da equação (1.27) surge o problema de correlação da variável y_i com o erro ξ_{3i}, pois $y_i = \omega_i h_i + R_i$. Assim, o método de mínimos quadrados ordinários não é adequado para a estimação dos parâmetros dessa equação, pois os estimadores seriam inconsistentes.

Quando o estudo da equação de oferta de horas de trabalho for baseado em dados de corte transversal, as variáveis salário e renda não precisam ser deflacionadas, pois, para um dado instante de tempo, os preços dos bens e serviços são aproximadamente os mesmos para todos os consumidores.

III.1.2 — Horas de Trabalho: A Decisão Familiar

A função-utilidade (1.1) considera apenas as decisões de um indivíduo no que toca à alocação de seus recursos. Entretanto, esse tipo de decisão é tomada no âmbito familiar em que vários membros podem oferecer diferentes quantidades de horas de trabalho no mercado de mão-de-obra. A seguir, estendemos a análise anterior para o caso de uma família em que dois dos seus membros estão participando da força de trabalho. A generalização para o caso mais geral não traz maiores problemas e por isso não será desenvolvida aqui.

As preferências da família traduzem-se através da função-utilidade:

$$u = u\ (q,\ l_1,\ l_2) \qquad (1.31)$$

em que l_1 e l_2 são os tempos que cada membro da família gasta com lazer.

A renda familiar é igual à soma dos rendimentos do trabalho dos dois membros, mais o total de rendimentos proveniente de outras fontes, isto é:

$$y = \omega_1 h_1 + \omega_2 h_2 + R \tag{1.32}$$

onde ω_1 e ω_2 são os salários unitários de cada membro e h_1 e h_2 são as horas dedicadas ao trabalho pelos mesmos.

A limitação de tempo para cada membro da família é dada pelas seguintes expressões:

$$h_1 + l_1 = t \tag{1.33}$$

e

$$h_2 + l_2 = t \tag{1.34}$$

Como o total de rendimentos é gasto na aquisição de bens e serviços de consumo no valor pq, as restrições (1.32), (1.33) e (1.34) podem ser combinadas na única restrição:

$$pq + \omega_1 l_1 + \omega_2 l_2 = \omega_1 t + \omega_2 t + R = I \tag{1.35}$$

onde I é a renda "integral", ou "potencial", da família.

A maximização da função-utilidade (1.31), sujeita à restrição (1.35), fornece a condição de equilíbrio de que as utilidades marginais são proporcionais aos preços:

$$\frac{\partial u/\partial q}{p} = \frac{\partial u/\partial l_1}{\omega_1} = \frac{\partial u/\partial l_2}{\omega_2} \tag{1.36}$$

III.1.2.1 – O Sistema de Equações de Demanda

O sistema de equações formado por (1.36) e (1.35) fornece as equações de demanda por bens e serviços e por lazer de cada membro da família:

$$q = q\ (p, \omega_1, \omega_2, I) \tag{1.37}$$

$$l_1 = l_1\ (p, \omega_1, \omega_2, I) \tag{1.38}$$

$$l_2 = l_2\ (p, \omega_1, \omega_2, I) \tag{1.39}$$

cujas equações diferenciais são expressas por:

$$\begin{bmatrix} dq \\ dl_1 \\ dl_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{qp} & S_{q1} & S_{q2} \\ S_{1p} & S_{11} & S_{12} \\ S_{2p} & S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ d\omega_1 \\ d\omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial q/\partial I \\ \partial l_1/\partial I \\ \partial l_2/\partial I \end{bmatrix} \text{x} \tag{1.40}$$
$$\text{x}\ (dI - q dp - l_1 d\omega_1 - l_2 d\omega_2)$$

O principal teorema da teoria do consumidor afirma que a matriz de Slutsky,

$$\begin{bmatrix} S_{qp} & S_{q1} & S_{q2} \\ S_{1p} & S_{11} & S_{12} \\ S_{2p} & S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial q}{\partial p}\right|_{u=ct} & \left.\frac{\partial q}{\partial \omega_1}\right|_{u=ct} & \left.\frac{\partial q}{\partial \omega_2}\right|_{u=ct} \\ \left.\frac{\partial l_1}{\partial p}\right|_{u=ct} & \left.\frac{\partial l_1}{\partial \omega_1}\right|_{u=ct} & \left.\frac{\partial l_1}{\partial \omega_2}\right|_{u=ct} \\ \left.\frac{\partial l_2}{\partial p}\right|_{u=ct} & \left.\frac{\partial l_2}{\partial \omega_1}\right|_{u=ct} & \left.\frac{\partial l_2}{\partial \omega_2}\right|_{u=ct} \end{bmatrix} \qquad (1.41)$$

é negativa semidefinida. A matriz acima quando pré-multiplicada pelo vetor $[p\ \omega_1\ \omega_2]$ é igual a zero, pois as equações de demanda (1.37) a (1.39) são homogêneas do grau zero nos preços e na renda do consumidor.

III.1.2.2 — As Equações de Oferta de Horas de Trabalho

A quantidade de horas de trabalho supridas por cada membro é obtida deduzindo-se do tempo total disponível t as horas de lazer. Assim, as equações de oferta de horas de trabalho são funções de p, ω_1, ω_2 e I, isto é:

$$h_1 = h_1(p, \omega_1, \omega_2, I) \qquad (1.42)$$

$$h_2 = h_2(p, \omega_1, \omega_2, I) \qquad (1.43)$$

As diferenciais destas equações são facilmente obtidas a partir de (1.40), em virtude de:

$$dh_1 = -\ dl_1$$

$$dh_2 = -\ dl_2$$

pois $h_1 + l_1 = h_2 + l_2 = t$, e t é uma constante. Portanto:

$$\begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1p} & s_{11} & s_{12} \\ s_{2p} & s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ d\omega_1 \\ d\omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial h_1/\partial I \\ \partial h_2/\partial I \end{bmatrix} \mathrm{x}$$

$$\mathrm{x}\ (dI - q dp - l_1 d\omega_1 - l_2 d\omega_2) \qquad (1.44)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} s_{1p} & s_{11} & s_{12} \\ s_{2p} & s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S_{1p} & S_{11} & S_{12} \\ S_{2p} & S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \qquad (1.45)$$

e:

$$\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial I \\ \partial h_2/\partial I \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial l_1/\partial I \\ \partial l_2/\partial I \end{bmatrix} \qquad (1.46)$$

O fato de a matriz de Slutsky (1.41) ser negativa semidefinida implica que a matriz

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

é positiva definida. Assim, o aumento de salário unitário de um membro da família, compensado por uma variação de renda que mantenha a renda integral real constante, acarreta o aumento das horas trabalhadas por esse membro.

É interessante observar que a simetria da matriz (1.47) implica $s_{12} = s_{21}$. Em palavras, essa igualdade quer dizer que a reação de um membro da família à variação de salário do outro membro é igual à reação deste último quando o salário do primeiro varia, desde que a renda real seja mantida constante.

Em virtude de $dI = td\omega_1 + td\omega_2 + dR$, o sistema de equações (1.44) pode ser escrito, alternativamente, na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1p} & s_{11} & s_{12} \\ s_{2p} & s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ d\omega_1 \\ d\omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial h_1/\partial I \\ \partial h_2/\partial I \end{bmatrix} \text{x}$$

$$\text{x } (h_1 d\omega_1 + h_2 d\omega_2 - q dp + dR) \tag{1.48}$$

As equações de Slutsky são, então, dadas por:

$$\frac{\partial h_i}{\partial p} = s_{ip} - q \frac{\partial h_i}{\partial I}, \; i = 1, 2 \tag{1.49.a}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial \omega_j} = s_{ij} + h_j \frac{\partial h_i}{\partial I}, \; i, j = 1, 2 \tag{1.49.b}$$

III.1.2.3 — Especificações Alternativas da Equação de Oferta

A especificação da equação de oferta de horas de trabalho para os membros da família pode ser feita de diferentes maneiras quanto às variáveis que entram na equação. A seguir, exemplificaremos para o caso de um membro da família, pois a equação do outro membro é análoga. As cinco equações abaixo mostram as diferentes possibilidades: [2]

$$h_1 = f\left(\frac{\omega_1}{p}, \frac{\omega_2}{p}, \frac{I}{p}, Z\right) \tag{1.50}$$

$$h_1 = f\left(\frac{\omega_1}{p}, \frac{\omega_2}{p}, \frac{R}{p}, Z\right) \tag{1.51}$$

$$h_1 = f\left(\frac{\omega_1}{p}, \frac{\omega_2}{p}, \frac{y}{p}, Z\right) \tag{1.52}$$

$$h_1 = f\left(\frac{\omega_1}{p}, \frac{\omega_2}{p}, \frac{y_2}{p}, Z\right) \tag{1.53}$$

$$h_1 = f\left(\frac{\omega_1}{p}, \frac{W_2}{p}, \frac{h}{p}, Z\right) \tag{1.54}$$

[2] Como antes, usamos o mesmo símbolo $f(\;)$ para as diversas alternativas. Todavia, isso não significa dizer que a função $f(\;)$ seja a mesma para todos os casos.

onde Z representa outras variáveis, além de preços e renda que o economista julgue adequado controlar.

Nas quatro primeiras equações a diferença de especificação diz respeito à variável renda, pois os salários, ω_1 e ω_2, de cada membro da família entram igualmente nestas equações. A variável renda, que entra na primeira equação, é a renda integral da família, I. Na segunda equação, a variável renda é o total de rendimentos R, proveniente de outras fontes que não o trabalho. Na terceira equação, a variável renda, y, é a renda total da família, $y = \omega_1 h_1 + \omega_2 h_2 + R$. Na quarta equação, a variável renda é igual ao salário total do segundo membro, mais o rendimento R, proveniente de outras fontes, isto é: $y_2 = \omega_2 h_2 + R$. Na última equação, a de número (1.54), a oferta de horas de trabalho é função do salário ω_1, do salário total do segundo membro, $W_2 = \omega_2 h_2$, e do rendimento R proveniente de outras fontes.

A escolha de uma especificação entre essas cinco alternativas prende-se mais à disponibilidade de dados, pois do ponto de vista teórico algumas delas apresentam certos inconvenientes, facilmente percebidos na discussão que se segue.

Deve-se ter bastante cuidado na interpretação dos coeficientes de cada equação. A seguir, examinaremos tal problema, considerando o caso em que cada função é linear nas variáveis. Por simplicidade desprezaremos a variável Z e admitiremos que os dados do estudo sejam provenientes de corte transversal em que p é constante e, portanto, $dp = 0$.

A equação (1.50) na forma linear é expressa por:

$$h_{1i} = a_0 + a_1\omega_{1i} + a_2\omega_{2i} + a_3 I_i + \xi_{1i} \tag{1.55}$$

onde os a são parâmetros do modelo. Comparando (1.55) com a primeira equação de (1.44), é fácil concluir que:

$$\left|\begin{array}{l} a_1 = s_{11} - l_1 \dfrac{\partial h_1}{\partial I} > 0 \\[2ex] a_2 = s_{12} - l_2 \dfrac{\partial h_1}{\partial I} \gtreqless 0 \\[2ex] a_3 = \dfrac{\partial h_1}{\partial I} < 0 \end{array}\right. \tag{1.56}$$

O sinal de a_3 é, *a priori*, indeterminado, do ponto de vista teórico. Contudo, se lazer for um bem normal, o sinal esperado do coeficiente a_3 é negativo. Nesse caso, o sinal de a_1 é positivo, enquanto o sinal de a_2 é indeterminado, pois $s_{12} \gtreqless 0$.

A equação (1.51) escrita em forma linear é dada por:

$$h_{1i} = b_0 + b_1\omega_{1i} + b_2\omega_{2i} + b_3 R_i + \xi_{2i} \tag{1.57}$$

É fácil verificar, através da comparação de (1.57) com (1.48), que os coeficientes b têm a seguinte interpretação:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= s_{11} + h_1 \frac{\partial h_1}{\partial I} \gtreqless 0 \\
b_2 &= s_{12} + h_2 \frac{\partial h_1}{\partial I} \gtreqless 0 \\
b_3 &= \frac{\partial h_1}{\partial I} < 0
\end{aligned}
\tag{1.58}
$$

Os coeficientes b_1 e b_2 têm, *a priori,* o sinal indeterminado, enquanto b_3 será negativo se lazer for um bem normal.

Na equação (1.52), a variável renda é igual à renda familiar total. A equação linear correspondente é igual a:

$$h_{1i} = c_0 + c_1\omega_{1i} + c_2\omega_{2i} + c_3 y_i + \xi_{3i} \tag{1.59}$$

Com o objetivo de interpretar os coeficientes da equação acima, levamos em conta que:

$$dy = \omega_1 h_1 + h_1 d\omega_1 + \omega_2 dh_2 + h_2 d\omega_2 + dR$$

Alternativamente:

$$dy - \omega_1 dh_1 - \omega_2 dh_2 = h_1 d\omega_1 + h_2 d\omega_2 + dR$$

Substituindo-se o valor de dR, dado por esta expressão em (1.48), resulta no seguinte sistema de equações:

$$
\begin{bmatrix} 1 + \omega_1 \dfrac{\partial h_1}{\partial I} & \omega_2 \dfrac{\partial h_1}{\partial I} \\ \omega_1 \dfrac{\partial h_2}{\partial I} & 1 + \omega_2 \dfrac{\partial h_2}{\partial I} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} d\omega_1 \\ d\omega_2 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial I} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial I} \end{bmatrix} dy
$$

Resolvendo-se o sistema de equações acima para a primeira equação, obtém-se os coeficientes c_1, c_2 e c_3 que multiplicam as diferenciais de ω_1, ω_2 e y, respectivamente, isto é:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\left(1 + \omega_2 \dfrac{\partial h_2}{\partial I}\right) s_{11} - \omega_2 \dfrac{\partial h_1}{\partial I} s_{21}}{1 + \omega_1 \dfrac{\partial h_1}{\partial I} + \omega_2 \dfrac{\partial h_2}{\partial I}} \\
c_2 &= \frac{\left(1 + \omega_2 \dfrac{\partial h_2}{\partial I}\right) s_{12} - \omega_2 \dfrac{\partial h_1}{\partial I} s_{22}}{1 + \omega_1 \dfrac{\partial h_1}{\partial I} + \omega_2 \dfrac{\partial h_2}{\partial I}} \\
c_3 &= \frac{\partial h_1 / \partial I}{1 + \omega_1 \dfrac{\partial h_1}{\partial I} + \omega_2 \dfrac{\partial h_2}{\partial I}}
\end{aligned}
\tag{1.60}
$$

Além dessa complicada mistura de parâmetros que torna difícil a interpretação dos coeficientes c_1, c_2 e c_3, a forma funcional (1.59) apresenta o problema de correlação entre o erro ξ_{3i} e a variável renda y_i, o que torna a estimação dos parâmetros do modelo um problema pouco trivial. Conseqüentemente, essa forma funcional não é muito recomendável para ser usada em estudos empíricos.

A equação (1.53) na especificação linear toma o seguinte formato:

$$h_{1i} = e_0 + e_1\omega_{1i} + e_2\omega_{2i} + e_3 y_{2i} + \xi_{4i} \tag{1.61}$$

O significado dos coeficientes e_1, e_2 e e_3 pode ser obtido através do seguinte procedimento. A diferencial da renda y_2 é:

$$dy_2 = \omega_2 dh_2 + h_2 d\omega_2 + dR$$

Substituindo-se o valor de dR dado por esta expressão em (1.48) e resolvendo-se o sistema daí resultante, os coeficientes da equação de dh_1 que multiplicam as diferenciais de ω_1, ω_2 e y, respectivamente, são dados por:

$$\begin{aligned} e_1 &= s_{11} + \frac{(h_1 - s_{21}\omega_2)\,\partial h_1/\partial I}{1 + \omega_2 \partial h_2/\partial I} \\ e_2 &= s_{12} - \frac{\omega_2 \dfrac{\partial h_1}{\partial I}\, s_{22}}{1 + \omega_2 \dfrac{\partial h_2}{\partial I}} \\ e_3 &= \frac{\partial h_1/\partial I}{1 + \omega_2 \dfrac{\partial h_2}{\partial I}} \end{aligned} \tag{1.62}$$

É interessante observar que entre os parâmetros acima verifica-se a seguinte igualdade:

$$e_1 - e_3(h_1 - \omega_2 s_{12}) = s_{11} \tag{1.63}$$

É claro então que, na hipótese de ser nulo o efeito-substituição cruzado, o efeito-substituição s_{11} pode ser calculado a partir da seguinte expressão:

$$s_{11} = e_1 - e_3 h_1 \tag{1.64}$$

que resulta de (1.63) quando $s_{12} = 0$.

A equação (1.54) em forma linear é igual a:

$$h_{1i} = f_0 + f_1\omega_{1i} + f_2 W_{2i} + f_3 R_i + \xi_{5i} \tag{1.65}$$

Um dos atrativos dessa especificação é que ela prescinde de dados de salário unitário e de horas trabalhadas do segundo membro de família, pois W_2 é igual ao salário total $\omega_2 h_2$. Com o objetivo de interpretar os coeficientes f_1, f_2 e f_3, observe-se que a diferencial de W_2 é igual a:

$$dW_2 = \omega_2 dh_2 + h_2 d\omega_2$$

Substituindo-se o valor de $d\omega_2$, obtido a partir desta expressão em (1.48), e resolvendo-se o sistema para se encontrar os coeficientes f_1, f_2 e f_3 que multiplicam $d\omega_1$, dW_2 e dR, respectivamente, na equação que corresponde a dh_1, quando $s_{12} = 0$, resulta:

$$\begin{aligned}
f_1 &= s_{11} + \frac{h_1 \dfrac{\partial h_1}{\partial I}\left(1 + s_{22}\dfrac{\omega_2}{h_2}\right)}{1 + \dfrac{s_{22}\omega_2}{h_2} + \omega_2 \dfrac{\partial h_2}{\partial I}} \\
f_2 &= \frac{\partial h_1/\partial I}{h_2\left(1 + \dfrac{s_{22}\omega_2}{h_2} + \omega_2 \dfrac{\partial h_2}{\partial I}\right)} \qquad (1.66) \\
f_3 &= \frac{h_1}{I} - \frac{\partial h_1/\partial I \, \dfrac{\partial h_2}{\partial I}\,\omega_2}{1 + \dfrac{s_{22}\,\omega_2}{h_2} + \dfrac{\partial h_2}{\partial I}\,\omega_2}
\end{aligned}$$

Pode-se mostrar que a seguinte igualdade se verifica:

$$f_1 - f_3 h_1 = s_{11} \qquad (1.67)$$

o que possibilita a estimativa do efeito-substituição s_{11} a partir de estimativas de f_1 e f_3 e de um valor arbitrado para h_1.

Um ponto que vale salientar na especificação (1.65) é a correlação possivelmente existente entre a variável W_2 e o erro ξ_{5i}, pois W_2 resulta do produto de ω_2 pelo número de horas trabalhadas h_2. Esta, por sua vez, é determinada simultaneamente no modelo com h_1. Assim, qualquer choque que afete h_1 deve afetar, também, h_2. Daí, portanto, a correlação entre W_{2i} e ξ_{5i}.

III.1.3 — Participação na Força de Trabalho

A decisão de uma pessoa em participar ou não na força de trabalho nem sempre reflete um processo de escolha, como é o caso da população adulta do sexo masculino em sociedades como a nossa, que condicionam — ou até certo ponto obrigam — as pessoas deste grupo da população a estarem participando do processo produtivo. Todavia, para alguns grupos de população, como é o caso de jovens e mulheres, razões de ordem econômica parecem influenciar a escolha de se engajar ou não no mercado de trabalho.

Na primeira subseção deste capítulo admitimos que o processo de decisão individual conduzia a um equilíbrio em que determinado número de horas era alocado ao trabalho remunerado. Quando o indivíduo tem a opção de não trabalhar e a exerce, significa dizer que o número de horas dedicadas ao trabalho é igual a zero. Analiticamente este tipo de equilíbrio corresponde ao chamado equilíbrio de fronteira (ou de canto). Em vista disso começamos esta subseção com o enunciado do teorema de Kuhn-Tucker, necessário à compreensão do problema de maximização condicionada do consumidor que será tratado em seguida.

III.1.3.1 – Teorema de Kuhn-Tucker

Considere o seguinte problema de programação não-linear:

maximizar a função

$$F(x) = F(x_1, \ldots, x_n)$$

com as seguintes restrições:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0 \\ g(x) &= g(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0 \\ x_1 &\geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 \end{aligned}$$

onde a função $F(x)$ é uma função côncava e as restrições $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ e $x \geqslant 0$ formam um conjunto convexo.[3]

A equação de Lagrange associada a esse problema é:

$$L = F(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_2 g(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.68}$$

onde λ_1 e λ_2 são multiplicadores de Lagrange.

As condições necessárias e suficientes para um ponto de máximo do problema de programação não-linear descrito acima, conhecidas como as condições de Kuhn-Tucker, são:[4]

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial x_i} \leqslant 0, \; i = 1, \ldots, n \tag{1.69}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) x_i = 0 \tag{1.70}$$

$$x_i \geqslant 0, \; i = 1, \ldots, n \tag{1.71}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, \; \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = g(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0 \tag{1.72}$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \lambda_i = 0 \tag{1.73}$$

$$\lambda_i \geqslant 0, \; i = 1, 2 \tag{1.74}$$

[3] Cabe lembrar que um conjunto é dito convexo quando para dois pontos quaisquer do conjunto, x e y, o ponto $\alpha x + (1 - \alpha) y$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, pertence, também, ao conjunto. Uma função real $F(x)$, definida num conjunto convexo, é côncava quando $F[\alpha x + (1 - \alpha) y] \geqslant \alpha F(x) + (1 - \alpha) F(y)$ para $0 < \alpha < 1$. Quando a desigualdade é satisfeita, a função é dita estritamente côncava. Se $F[\alpha x + (1 - \alpha) y] > \alpha F(x) + (1 - \alpha) F(y)$, $0 < \alpha < 1$, para todo x e y, $x \neq y$, $f(\;)$ é então estritamente côncava.

[4] Para uma demonstração deste teorema, ver, por exemplo, Intriligator (1971).

A partir das três primeiras condições acima é fácil verificar que ou $\partial L/\partial x_i = 0$, ou $x_i = 0$, ou então ambos são iguais a zero. Segue-se daí que, se $x_i > 0$, então $\partial L/\partial x_i = 0$ e, quando $\partial L/\partial x_i < 0$, o valor de x_i é igual a zero.

Por outro lado, das três últimas condições, listadas acima, tem-se que $\lambda_1 = 0$, ou $f(x) = 0$, ou então ambos $\lambda_1 = 0$ e $f(x) = 0$. O mesmo se pode dizer acerca de λ_2 e $g(x)$. Daí concluir-se que se o multiplicador de Lagrange for positivo a restrição assume o valor nulo: $\lambda_1 > 0 \Rightarrow f(x) = 0$, $\lambda_2 > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow g(x) = 0$. Quando as restrições tomam a forma de desigualdades, os multiplicadores de Lagrange são iguais a zero, isto é: $f(x) > 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ e $g(x) > 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$.

Quando x_i for um ponto de equilíbrio interior, $x_i > 0$, tem-se que $\partial L/\partial x_i = 0$, e se x_i for um ponto de equilíbrio de fronteira, $x_i = 0$, resulta que $\partial L/\partial x_i \leqslant 0$. Cabe ainda observar que se $\partial L/\partial x_i < 0$ o valor de x_i é igual a zero.

III.1.3.2 – Horas de Trabalho: Equilíbrio de Fronteira

O objetivo do consumidor consiste em maximizar a função-utilidade:

$$u\ (q,\ l) \tag{1.75}$$

com as seguintes restrições:

$$pq \leqslant \omega h + R \tag{1.76}$$

$$h + l \leqslant t \tag{1.77}$$

$$q \geqslant 0,\ l \geqslant 0,\ h \geqslant 0 \tag{1.78}$$

onde os símbolos têm o mesmo significado dos da primeira seção deste capítulo. A expressão de Lagrange neste caso é dada por:

$$L = u\ (q,\ l) + \lambda_1\ [\omega h + R - pq] + \lambda_2\ [t - h - l] \tag{1.79}$$

e suas derivadas parciais são iguais a:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial u}{\partial q} - \lambda_1 p$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l} - \lambda_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \lambda_1 \omega - \lambda_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \omega h + R - pq$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = t - h - l$$

No caso de equilíbrio interior, $q > 0$, $l > 0$ e $h > 0$, as derivadas parciais acima se anulam e é fácil verificar-se que a condição de equilíbrio (1.7) é obtida:

$$\frac{\partial u/\partial q}{p} = \frac{\partial u/\partial l}{\omega}$$

Quanto a posições de equilíbrio de fronteira, temos dois casos que merecem atenção. O primeiro, sem muita importância do ponto de vista empírico, é quando o número de horas de lazer é igual a zero e, conseqüentemente, o número de horas trabalhadas é igual ao total de horas disponível. Assim, de acordo com o teorema de Kuhn-Tucker citado anteriormente, temos:

$$\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l} - \lambda_2 \leqslant 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \lambda_1 \omega - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial u}{\partial q} - \lambda_1 p = 0$$

Combinando-se estas três expressões, chega-se à conclusão de que o salário real é superior ou igual à taxa marginal de transformação entre bens e lazer:

$$\frac{\partial u/\partial l}{\partial u/\partial q} \leqslant \frac{\omega}{p}$$

ou, ainda, que o valor atribuído ao tempo é inferior ou igual ao salário ω:

$$\frac{\partial u/\partial l}{\lambda_1} \leqslant \omega$$

A Figura III.3a mostra o equilíbrio do consumidor quando este se dedica integralmente ao trabalho.

O segundo caso de equilíbrio de fronteira, bastante importante do ponto de vista empírico, corresponde à situação em que o indivíduo decide não participar na força de trabalho. Conseqüentemente $h = 0$ e $l = t$. As condições para que este tipo de equilíbrio ocorra são:

$$\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l} - \lambda_2 = 0$$

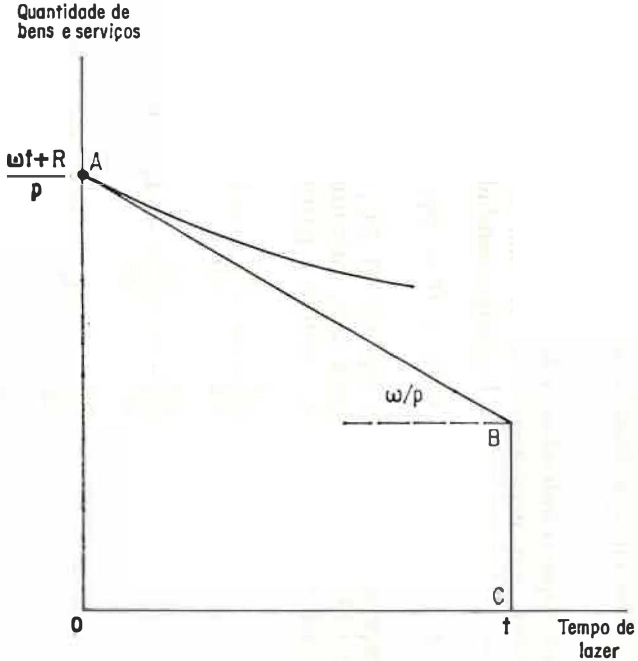
$$\frac{\partial L}{\partial h} = \lambda_1 \omega - \lambda_2 \leqslant 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial u}{\partial q} - \lambda_1 p = 0$$

Figura III. 3

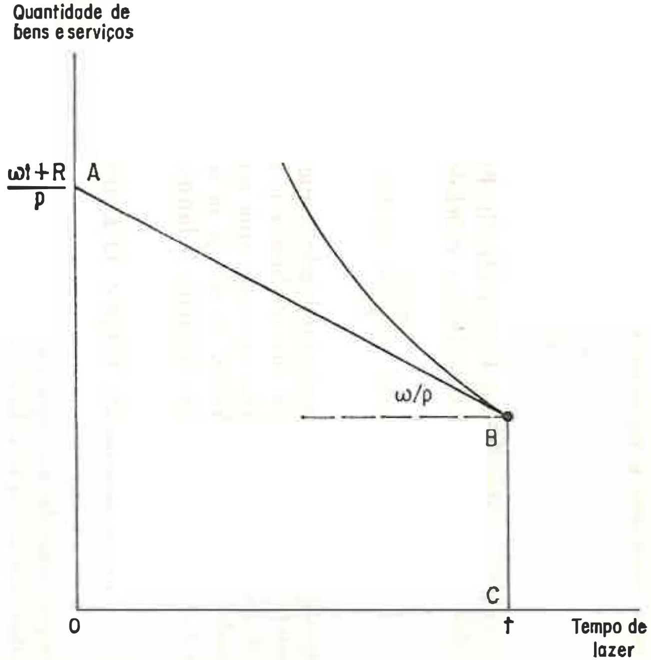
ALOCAÇÃO DO TEMPO ENTRE LAZER E TRABALHO: EQUILÍBRIO DE FRONTEIRA

Figura III. 3.a



a) Indivíduo dedica todo o seu tempo ao trabalho.

Figura III.3b



b) Indivíduo não participa da força de trabalho.

Quando se combina estas três equações, obtém-se a condição de que o salário real deve ser inferior ou no máximo igual à taxa marginal de substituição entre lazer e bens para que o equilíbrio se dê no ponto em que $h = 0$, isto é:

$$\frac{\omega}{p} \leqslant \frac{\partial u/\partial l}{\partial u/\partial q}$$

que corresponde à situação da Figura III.3b. Por outro lado, quando se combina as duas primeiras equações acima, conclui-se que:

$$\omega \leqslant \frac{\partial u/\partial l}{\lambda_1} = \omega^s \qquad (1.80)$$

A proposição contida nessa desigualdade é que o indivíduo resolve não trabalhar quando o valor ω^s, por ele atribuído a seu tempo, denominado preço sombra do tempo, for superior ao valor que seu tempo pode ser remunerado no mercado de trabalho. Assim, se $\omega^s \geqslant \omega$ o indivíduo não trabalha e se $\omega^s = \omega$ o indivíduo trabalha, digamos, h horas.

III.1.3.3 — Preço Sombra do Tempo: O Enfoque de Heckman

O enfoque adotado até aqui cuida isoladamente de cada dimensão da oferta de trabalho: participação e horas de trabalho. Um outro enfoque, proposto por Heckman (1974), permite que se trate esses dois problemas de um modo unificado. Esse enfoque baseia-se nas funções de demanda condicional de Pollak (1969).

Admita-se que o indivíduo trabalhe um número fixo de horas, $h = h_0$, e que seu objetivo seja maximizar $u\,(q,\, l)$ com as condições $pq = \omega h_0 + R$ e $h_0 + l = t$. A expressão de Lagrange associada a este problema é dada por:

$$L = u\,(q,\, l) + \lambda_1\,(\omega h_0 + R - pq) + \lambda_2\,(t - h_0 - l) \qquad (1.81)$$

Essa expressão é idêntica à equação (1.79), exceto que agora o número de horas de trabalho é fixo e igual a h_0. Admitindo-se inexistência de equilíbrio de fronteira, o máximo de L é obtido a partir das seguintes equações:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial u}{\partial q} - \lambda_1 p = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l} - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \omega h_0 + R - pq = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = t - h_0 - l = 0$$

O preço sombra do tempo ω^S é igual à razão entre $\partial u/\partial l$ e λ_1. Das condições de equilíbrio acima resulta que:

$$\omega^S = \frac{\partial u/\partial l}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Como q, l, λ_1 e λ_2 são funções das variáveis exógenas h_0, $\omega h_0 + R$ e p, segue-se que ω^S é função, também, dessas variáveis. Assim, podemos escrever:

$$\omega^S = f\ (h_0,\ \omega h_0 + R,\ p) \tag{1.82}$$

Quando o número de horas não é fixo e pode variar, o número de horas de trabalho é obtido pela condição, já vista anteriormente, de que o salário ω seja igual ao preço sombra do tempo ω^S. Impondo-se esta igualdade na equação (1.82) e desde que algumas condições sejam satisfeitas, chega-se a uma função que relaciona ω^S com h, R e p, isto é:

$$\omega^S = g\ (h,\ R,\ p) \tag{1.83}$$

A vantagem desta formulação é que o valor de ω^S para $h = 0$, quando o indivíduo não participa na força de trabalho, pode ser calculado diretamente.

Admitindo-se que o salário que o indivíduo pode obter no mercado dependa do seu nível de escolaridade E, de sua experiência no mercado M e possivelmente de outras variáveis representadas aqui pela letra Z, temos que:

$$\omega = \omega\ (E,\ M,\ Z) \tag{1.84}$$

Quando o salário de mercado, ω, for igual ao valor ω^S que o indivíduo atribui ao seu tempo, $\omega = \omega^S$, a equação

$$g(h,\ R,\ p) = \omega\ (E,\ M,\ Z)$$

fornece o número de horas de trabalho do indivíduo em função dos valores das variáveis R, p, E, M e Z.

Por outro lado, quando o indivíduo preferir não trabalhar, $h = 0$, o valor que atribui a seu tempo em outras atividades será maior que, ou quando muito igual, ao valor que o mercado está disposto a pagar por seu tempo, isto é: $\omega^S \geqslant \omega$.

III.2 — A Economia da Produção Familiar

Em um trabalho, sem dúvida alguma, bastante importante no desenvolvimento da teoria do consumidor, Becker (1964) parte da idéia de que as preferências das pessoas são definidas com relação aos bens e serviços que são objeto de consumo final, e que não correspondem necessariamente àqueles bens e serviços adquiridos no mercado.

Os bens e serviços adquiridos no mercado, como qualquer um pode constatar através de observação casual, são transformados via produção doméstica, com auxílio do tempo dos membros da família, em outros bens e serviços que irão, estes sim, satisfazer às necessidades dos indivíduos. Assim, por exemplo, o feijão e outros ingredientes são utilizados juntamente com o tempo da dona-de-casa e dos serviços de equipamentos domésticos, como o fogão e outros aparelhos, na produção de uma feijoada. Outro exemplo seria o da diversão proporcionada por um jogo de futebol, que envolve não somente o custo da entrada mas também serviços de transporte para o deslocamento até o campo de futebol, tempo da pessoa, possivelmente os serviços de um rádio de pilha, bem como refrigerantes, sanduíches, etc.

Com a finalidade de distinguir aqueles bens e serviços que são comprados no mercado, como o feijão, daqueles obtidos através da produção doméstica, como a feijoada, denominaremos, como Becker, estes últimos de mercadorias.

Admitindo-se, por simplicidade, que Z_1 e Z_2 são as duas mercadorias consumidas pelo indivíduo, sua função-utilidade será expressa por:

$$u = u\,(Z_1,\ Z_2) \tag{2.1}$$

Com relação a essa função, admite-se que ela satisfaça todos os axiomas listados na primeira seção do Capítulo I.

As mercadorias Z_1 e Z_2 são produzidas com o auxílio das quantidades q_1 e q_2 de bens e serviços comprados no mercado e das quantidades de tempo l_1 e l_2 supridas pelo indivíduo, através das seguintes funções de produção:

$$Z_1 = f\,(q_1,\ l_1) \tag{2.2}$$

$$Z_2 = g\,(q_2,\ l_2) \tag{2.3}$$

Admite-se, na formulação acima, que não existe produção conjunta, o que certamente é um pouco irrealista; todavia, este procedimento traz o benefício de simplificar o tratamento analítico do problema.

Separabilidade da Função-Utilidade

Substituindo-se (2.2) e (2.3) na função-utilidade (2.1) resulta em:

$$u = u\,[f\,(q_1,\ l_1),\ g\,(q_2,\ l_2)] \tag{2.4}$$

A característica dessa função-utilidade é que a taxa marginal de substituição entre q_i e l_i depende apenas dos seus valores, pois:

$$\frac{\partial u/\partial q_i}{\partial u/\partial l_i} = \frac{(\partial u/\partial Z_i)\ (\partial Z_i/\partial q_i)}{(\partial u/\partial Z_i)\ (\partial Z_i/\partial l_i)} = \frac{\partial Z_i/\partial q_i}{\partial Z_i/\partial l_i} = \Psi\,(q_i,\ l_i)$$

A função-utilidade (2.4) é, então, do tipo "fracamente" separável.

Orçamento de Renda

A renda y do consumidor, gasta totalmente na aquisição de q_1 e q_2, é igual à soma do salário unitário ω vezes a quantidade de horas trabalhadas h, mais o valor dos rendimentos R provenientes de outras fontes que não o trabalho. Assim:

$$y = \omega h + R = p_1 q_1 + p_2 q_2 \tag{2.5}$$

Orçamento de Tempo

O tempo total disponível do consumidor é alocado na produção das mercadorias Z_1 e Z_2 ou então no mercado de trabalho. Logo:

$$l_1 + l_2 + h = t \tag{2.6}$$

Combinação dos Dois Orçamentos

As restrições (2.5) e (2.6) podem ser combinadas numa única equação. Com efeito, substituindo-se o valor de h dado pela equação (2.6) na expressão (2.5), obtém-se:

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + \omega l_1 + \omega l_2 = \omega t + R = I \tag{2.7}$$

onde I é a renda integral ou potencial do consumidor.

Maximização da Função-Utilidade

A maximização da função-utilidade (2.1), com a condição de que as restrições técnicas (2.2) e (2.3) e a restrição orçamentária (2.7) sejam satisfeitas, conduz às seguintes condições de equilíbrio:

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = \frac{\partial u}{\partial Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial q_1} = \lambda p_1 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l_1} = \frac{\partial u}{\partial Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial l_1} = \lambda \omega \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial q_2} = \frac{\partial u}{\partial Z_2} \frac{\partial Z_2}{\partial q_2} = \lambda p_2 \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l_2} = \frac{\partial u}{\partial Z_2} \frac{\partial Z_2}{\partial l_2} = \lambda \omega \tag{2.11}$$

onde λ, o multiplicador de Lagrange, é igual à utilidade marginal da renda.

As equações (2.8) - (2.11) podem ser vistas de diferentes ângulos, os quais revelam diferentes aspectos das condições de equilíbrio do consumidor. Assim, quando as duas primeiras e as duas últimas equações são combinadas, elas evidenciam que o consumidor produz Z_1 e Z_2 a custos mínimos, pois as taxas marginais de substituição técnica são iguais aos preços relativos dos fatores utilizados na produção das mercadorias, isto é:

$$\frac{\partial Z_1/\partial q_1}{\partial Z_1/\partial l_1} = \frac{p_1}{\omega} \tag{2.12}$$

e:

$$\frac{\partial Z_2/\partial q_2}{\partial Z_2/\partial l_2} = \frac{p_2}{\omega} \tag{2.13}$$

Uma outra maneira de olhar as condições de equilíbrio (2.8) - (2.11) é obtida dividindo-se a primeira pela segunda equação e a terceira pela última, cujo resultado é:

$$\frac{\partial u/\partial Z_1}{\partial u/\partial Z_2} = \frac{p_1/(\partial Z_1/\partial q_1)}{p_2/(\partial Z_2/\partial q_2)} = \frac{\omega/(\partial Z_1/\partial l_1)}{\omega/(\partial Z_2/\partial l_2)} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \tag{2.14}$$

Essa equação mostra que, em equilíbrio, a taxa marginal de substituição no consumo é igual à relação entre os custos marginais, Π_1 e Π_2, de produção das mercadorias Z_1 e Z_2, respectivamente.

As quatro equações (2.8) - (2.11) podem ser escritas ainda como:

$$\frac{\partial u/\partial q_1}{p_1} = \frac{\partial u/\partial l_1}{\omega} = \frac{\partial u/\partial q_2}{p_2} = \frac{\partial u/\partial l_2}{\omega} \tag{2.15}$$

que nada mais são do que as condições clássicas de equilíbrio do consumidor, ou seja, de que as utilidades marginais são proporcionais aos preços.

Com a finalidade de analisar as implicações empíricas da formulação da teoria do consumidor, segundo Becker, examinaremos a seguir dois casos particulares, que correspondem às hipóteses acerca das funções de produção (2.2) e (2.3). O primeiro caso a ser estudado parte da hipótese de que as funções de produção apresentam-se em proporções fixas, não havendo possibilidade de substituição entre os fatores. O segundo caso particular a ser discutido admite que as funções de produção apresentem retornos constantes de escala.

III.2.1 — Produção em Proporções Fixas

Admita-se que as funções de produção (2.2) e (2.3) são do tipo Leontief, de acordo com as seguintes expressões:

$$Z_1 = \min\left\{\frac{q_1}{\alpha_1}, \frac{l_1}{\beta_1}\right\} \tag{2.16}$$

$$Z_2 = \min\left\{\frac{q_2}{\alpha_2}, \frac{l_2}{\beta_2}\right\} \tag{2.17}$$

onde a notação min indica o valor mínimo das variáveis listadas entre chaves e os parâmetros α_1, β_1, α_2 e β_2 são os coeficientes técnicos de produção.

O custo de produção de uma unidade da mercadoria Z_1 é constante e, portanto, igual ao custo marginal:

$$\Pi_1 = p_1\alpha_1 + \omega\beta_1 \tag{2.18}$$

Da mesma forma, para a segunda mercadoria, temos que:

$$\Pi_2 = p_2\alpha_2 + \omega\beta_2 \tag{2.19}$$

Cumpre observar que em ambos os casos o custo de cada mercadoria compõe-se de duas partes. A primeira componente corresponde ao valor dos bens e serviços, enquanto a segunda parcela do custo é igual ao valor alternativo do tempo usado na produção da mercadoria.

Em vista das expressões dos custos Π_1 e Π_2, a equação orçamentária (2.7) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$p_1q_1 + \omega l_1 + p_2q_2 + \omega l_2 = \Pi_1Z_1 + \Pi_2Z_2 = \omega t + R = I \tag{2.20}$$

Esta expressão evidencia o fato de que o custo total das mercadorias consumidas deve ser igual à renda integral do indivíduo.

Equações de Demanda por Mercadorias

A condição de equilíbrio (2.14), juntamente com a equação orçamentária (2.20), fornece as equações de demanda pelas duas mercadorias consumidas:

$$Z_1 = Z_1\ (\Pi_1,\ \Pi_2,\ I) \tag{2.21}$$

$$Z_2 = Z_2\ (\Pi_1,\ \Pi_2,\ I) \tag{2.22}$$

As diferenciais das equações acima são iguais a:

$$dZ_1 = \left.\frac{\partial Z_1}{\partial \Pi_1}\right|_{u=ct} d\Pi_1 + \left.\frac{\partial Z_1}{\partial \Pi_2}\right|_{u=ct} d\Pi_2 + \frac{\partial Z_1}{\partial I}\,[dI - Z_1 d\Pi_1 - Z_2 d\Pi_2] \tag{2.23}$$

e:

$$dZ_2 = \left.\frac{\partial Z_2}{\partial \Pi_1}\right|_{u=ct} d\Pi_1 + \left.\frac{\partial Z_2}{\partial \Pi_2}\right|_{u=ct} d\Pi_2 + \frac{\partial Z_2}{\partial I}\,[dI - Z_1 d\Pi_1 - Z_2 d\Pi_2] \tag{2.24}$$

onde a notação é idêntica à usada nas seções precedentes. A matriz de Slutsky,

$$\begin{bmatrix} \left.\frac{\partial Z_1}{\partial \Pi_1}\right|_{u=ct} & \left.\frac{\partial Z_1}{\partial \Pi_2}\right|_{u=ct} \\ \left.\frac{\partial Z_2}{\partial \Pi_1}\right|_{u=ct} & \left.\frac{\partial Z_2}{\partial \Pi_2}\right|_{u=ct} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

de acordo com o teorema fundamental da teoria do consumidor é negativa semidefinida. Esta matriz quando pré-multiplicada pelo vetor $[\Pi_1 \ \Pi_2]$ é igual ao vetor nulo.

As equações de demanda (2.21) e (2.22) devem ainda obedecer ao critério de adição. Com efeito, segue-se da equação orçamentária (2.20) que as derivadas parciais das quantidades das mercadorias, Z_1 e Z_2, com respeito à renda integral I satisfazem à seguinte restrição:

$$\Pi_1 \frac{\partial Z_1}{\partial I} + \Pi_2 \frac{\partial Z_2}{\partial I} = 1 \tag{2.26}$$

Como os preços das mercadorias, Π_1 e Π_2, dependem dos preços dos bens e serviços, do preço do tempo e dos coeficientes técnicos de produção, que são parâmetros, as equações de demanda das mercadorias podem ser escritas da seguinte forma:

$$Z_1 = \phi_1 (p_1, p_2, \omega, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, I) \tag{2.27}$$

$$Z_2 = \phi_2 (p_1, p_2, \omega, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, I) \tag{2.28}$$

Levando-se em conta que

$$d\Pi_1 = \alpha_1 dp_1 + \beta_1 d\omega + p_1 d\alpha_1 + \omega d\beta_1$$

$$d\Pi_2 = \alpha_2 dp_2 + \beta_2 d\omega + p_2 d\alpha_2 + \omega d\beta_2$$

as equações diferenciais de (2.27) e (2.28) são facilmente obtidas substituindo-se os valores de $d\Pi_1$ e $d\Pi_2$ nas expressões (2.23) e (2.24). O resultado a que se chega é:

$$\begin{aligned} dZ_1 &= \alpha_1 s_{11} dp_1 + \alpha_2 s_{12} dp_2 + (\beta_1 s_{11} + \beta_2 s_{12})\, d\omega \\ &+ \frac{\partial Z_1}{\partial I} [dI - q_1 dp_1 - q_2 dp_2 - (l_1 + l_2) d\omega - p_1 Z_1 d\alpha_1 - p_2 Z_2 d\alpha_2 - \omega Z_1 d\beta_1 - \omega Z_2 d\beta_2] \\ &+ s_{11} (p_1 d\alpha_1 + \omega d\beta_1) + s_{12} (p_2 d\alpha_2 + \omega d\beta_2) \end{aligned} \tag{2.29}$$

e:

$$\begin{aligned} dZ_2 &= \alpha_1 s_{21} dp_1 + \alpha_2 s_{22} dp_2 + (\beta_1 s_{21} + \beta_2 s_{22})\, d\omega \\ &+ \frac{\partial Z_2}{\partial I} [dI - q_1 dp_1 - q_2 dp_2 - (l_1 + l_2) d\omega - p_1 Z_1 d\alpha_1 - p_2 Z_2 d\alpha_2 - \omega Z_1 d\beta_1 - \omega Z_2 d\beta_2] \\ &+ s_{21} (p_1 d\alpha_1 + \omega d\beta_1) + s_{22} (p_2 d\alpha_2 + \omega d\beta_2) \end{aligned} \tag{2.30}$$

As equações acima nos levam, entre outras, às seguintes conclusões. Um aumento do preço p_1, mantida constante a renda real, acarreta um decréscimo na quantidade demandada Z_1. Quanto ao efeito do aumento compensado do salário sobre a quantidade Z_1, nada se pode dizer, *a priori*, pois o sinal do efeito-substituição

$$\left.\frac{\partial Z_1}{\partial \omega}\right|_{u=ct} = \left(\beta_1 - \beta_2 \frac{\Pi_1}{\Pi_2}\right) s_{11}$$

depende da intensidade do uso do tempo $\theta_i = \omega\beta_i / \Pi_i$ nas duas mercadorias. Assim:

$$\left.\frac{\partial Z_1}{\partial \omega}\right|_{u=ct} \gtreqless 0 \Longleftrightarrow \frac{\omega\beta_1}{\Pi_1} \gtrless \frac{\omega\beta_2}{\Pi_2}$$

ou seja, quando a proporção do gasto com o tempo no custo da primeira mercadoria for maior que a proporção correspondente à segunda, o aumento compensado do salário leva a uma diminuição da quantidade demandada Z_1. Quando as duas proporções forem idênticas, a demanda não reage às variações compensadas do salário. Por outro lado, se Z_1 for menos intensiva no uso do tempo, a quantidade demandada dessa mercadoria aumenta com o acréscimo compensado do salário.

Um aumento da produtividade na produção de Z_1, através da diminuição dos coeficientes α_1 e β_1, compensado por uma variação de rendimentos que mantenha a renda real constante, aumenta a quantidade demanda de Z_1.

Outras conclusões sobre as propriedades das derivadas parciais das equações de demanda das duas mercadorias, Z_1 e Z_2, podem ser facilmente obtidas a partir da análise dos resultados contidos nas expressões (2.29) e (2.30).

A Equação de Oferta de Horas de Trabalho

O número de horas dedicadas ao trabalho é igual ao número total de horas disponíveis menos a soma de horas gastas na produção das duas mercadorias. Em símbolos: $h = t - l_1 - l_2$. Como os tempos utilizados na produção de Z_1 e Z_2 são iguais a $l_1 = \beta_1 Z_1$ e $l_2 = \beta_2 Z_2$, segue-se que a equação de oferta de horas de trabalho será função de todas as variáveis listadas nas equações (2.27) e (2.28). Portanto, de maneira genérica, podemos escrever:

$$h = h(p_1, p_2, \omega, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, I) \qquad (2.31)$$

Com a finalidade de obter a diferencial da equação acima, substituímos na expressão

$$dh = -\beta_1 dZ_1 - \beta_2 dZ_2 - Z_1 d\beta_1 - Z_2 d\beta_2$$

os valores de dZ_1 e dZ_2 contidos em (2.29) e (2.30), respectivamente. O resultado é:

$$
\begin{aligned}
dh = & - [\alpha_1 \beta_1 s_{11} + \alpha_1 \beta_2 s_{21}]\, dp_1 \\
& - [\alpha_2 \beta_1 s_{12} + \alpha_2 \beta_2 s_{22}]\, dp_2 \qquad - [\beta_1^2 s_{11} + 2\beta_1 \beta_2 s_{12} + \beta_2^2 s_{22}]\, d\omega \\
& - \left(\beta_1 \frac{\partial Z_1}{\partial I} + \beta_2 \frac{\partial Z_2}{\partial I} \right) [dI - q_1 dp_1 - q_2 dp_2 - (l_1 + l_2)\, d\omega - p_1 Z_1 d\alpha_1 \\
& \qquad - p_2 Z_2 d\alpha_2 - \omega Z_1 d\beta_1 - \omega Z_2 d\beta_2] \\
& - (\beta_1 p_1 s_{11} + \beta_2 p_1 s_{21})\, d\alpha_1 \qquad - (\beta_1 p_2 s_{12} + \beta_2 p_2 s_{22})\, d\alpha_2 \\
& - (\omega\beta_1 s_{11} + \omega\beta_2 s_{21} + Z_1)\, d\beta_1 \qquad - (\omega\beta_1 s_{12} + \omega\beta_2 s_{22} + Z_2)\, d\beta_2 \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

Certamente essa equação diferencial ocupa bastante espaço e é aparentemente um pouco complicada. Embora possa parecer que sua dedução revele um gosto excessivo pela álgebra *vis-à-vis* conteúdo econômico, isso não é verdade. Com efeito, na expressão (2.32) estão contidas todas as proposições da teoria econômica sobre a equação de oferta de horas de trabalho. Cuidaremos a seguir da análise dessas propriedades.

Horas de Trabalho $\times$ Preços dos Bens e Serviços

A derivada parcial de h em relação ao preço p_i, mantidos constantes a renda real e os coeficientes técnicos de produção, é igual ao coeficiente que multiplica o primeiro termo contendo dp_i em (2.32), isto é:

$$
\left. \frac{\partial h}{\partial p_i} \right|_{u=ct} = - \frac{\alpha_i}{\omega \Pi_i} s_{ii} \left(\frac{\omega\beta_i}{\Pi_i} - \frac{\omega\beta_j}{\Pi_j} \right), \quad \begin{matrix} i \neq j \\ i, j = 1, 2 \end{matrix} \qquad (2.33)
$$

Como o efeito-substituição s_{ii} é negativo, segue-se que:

$$
\left. \frac{\partial h}{\partial p_i} \right|_{u=ct} \gtreqless 0 \iff \frac{\omega\beta_i}{\Pi_i} \gtreqless \frac{\omega\beta_j}{\Pi_j} \qquad (2.34)
$$

O efeito-preço total pode ser decomposto na soma dos efeitos-substituição e renda de acordo com a seguinte equação de Slutsky:

$$
\frac{\partial h}{\partial p_i} = \left. \frac{\partial h}{\partial p_i} \right|_{u=ct} - q_i \frac{\partial h}{\partial I} \qquad (2.35)
$$

onde:

$$
\frac{\partial h}{\partial I} = - \left(\beta_1 \frac{\partial Z_2}{\partial I} + \beta_2 \frac{\partial Z_2}{\partial I} \right)
$$

O sinal do efeito-preço total é ambíguo, pois ambos os componentes podem ter quaisquer sinais.

Horas de Trabalho $\times$ Salários

A derivada parcial de h em relação ao salário unitário ω, mantidos constantes a renda real e os coeficientes técnicos de produção, é igual ao coeficiente que multiplica o primeiro termo contendo $d\omega$ que aparece em (2.32). Temos que:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial \omega}\right|_{u=ct} = -(\beta_1^2 s_{11} + 2\beta_1\beta_2 s_{12} + \beta_2^2 s_{22}) \tag{2.36}$$

A expressão no lado direito de (2.36) é uma forma quadrática, cuja matriz é a matriz de Slutsky, pois:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial \omega}\right|_{u=ct} = -[\beta_1 \; \beta_2] \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

Como a matriz de Slutsky é negativa semidefinida, segue-se, então, que:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial \omega}\right|_{u=ct} \geqslant 0 \tag{2.37}$$

Assim, essa desigualdade afirma que um aumento (diminuição) compensado do salário acarreta um aumento (diminuição) do número de horas alocadas ao trabalho.

O efeito total de uma variação do salário unitário é dado pela seguinte equação de Slutsky:

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} = \left.\frac{\partial h}{\partial \omega}\right|_{u=ct} - (l_1 + l_2)\frac{\partial h}{\partial I} \tag{2.38}$$

Vale ressaltar que o sinal de (2.38) será positivo quando $\partial h/\partial I$ for negativo.

Horas de Trabalho $\times$ Coeficientes Técnicos de Produção

No tocante à derivada parcial de h em relação ao coeficiente técnico α_i, mantidos constantes a renda real, os demais coeficientes técnicos e os preços, temos que:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial \alpha_i}\right|_{u=ct} = \frac{p_i \Pi_i}{\omega}\left(\frac{\omega\beta_i}{\Pi_i} - \frac{\omega\beta_j}{\Pi_j}\right) s_{ii}, \quad \begin{array}{l} i \neq j \\ i,\, j = 1,\, 2 \end{array} \tag{2.39}$$

Como o efeito-substituição s_{ii} é negativo, o sinal da expressão acima depende das intensidades de uso do tempo, pois:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial \alpha_i}\right|_{u=ct} \gtreqless 0 \iff \frac{\omega\beta_i}{\Pi_i} \lesseqgtr \frac{\omega\beta_j}{\Pi_j} \tag{2.40}$$

O efeito total da variação do coeficiente α_i pode ser decomposto nos efeitos-substituição e renda de acordo com a seguinte equação de Slutsky:

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha_i} = \left.\frac{\partial h}{\partial \alpha_i}\right|_{u=ct} - p_i Z_i \frac{\partial h}{\partial I} \tag{2.41}$$

Quanto à derivada parcial de h em relação ao coeficiente técnico β_i, mantidos constantes a renda real, os demais coeficientes técnicos e os preços, temos que:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial \beta_i}\right|_{u=ct} = -\left[\Pi_i \left(\frac{\omega\beta_i}{\Pi_i} - \frac{\omega\beta_j}{\Pi_j}\right) s_{ii} + Z_i\right], \quad \begin{array}{l} i \neq j \\ i, j = 1, 2 \end{array} \tag{2.42}$$

Assim, quando

$$\frac{\omega\beta_i}{\Pi_i} < \frac{\omega\beta_j}{\Pi_j}$$

o sinal da expressão (2.42) é negativo. Em caso contrário, o sinal é ambíguo. O efeito total da variação de β_i é dado pela seguinte equação de Slutsky:

$$\frac{\partial h}{\partial \beta_i} = \left.\frac{\partial h}{\partial \beta_i}\right|_{u=ct} - \omega Z_i \frac{\partial h}{\partial I} \tag{2.43}$$

Aumento da Produtividade do Tempo $\times$ *Horas de Trabalho*

Admita-se que todos os preços permanecem constantes, assim como os coeficientes técnicos α_1 e α_2 e a renda R. Então:

$$dp_1 = dp_2 = d\omega = d\alpha_1 = d\alpha_2 = dR = 0$$

Suponha-se também que os coeficientes técnicos β_1 e β_2 variem na mesma proporção, isto é:

$$\frac{d\beta_1}{\beta_1} = \frac{d\beta_2}{\beta_2}$$

Com essas hipóteses a equação diferencial (2.32) reduz-se a:

$$dh = \left\{\left(\omega\beta_1 \frac{\partial Z_1}{\partial I} + \omega\beta_2 \frac{\partial Z_2}{\partial I} - 1\right)(\beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2) \right.$$
$$\left. - \omega\,(\beta_1^2 s_{11} + 2\beta_1\beta_2 s_{12} + \beta_2^2 s_{22})\right\} \frac{d\beta_1}{\beta_1} \tag{2.44}$$

Efeito-Renda

A componente

$$\left(\omega\beta_1 \frac{\partial Z_1}{\partial I} + \omega\beta_2 \frac{\partial Z_2}{\partial I} - 1\right)(\beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2)$$

da expressão acima pode ser interpretada como o efeito-renda, o qual é negativo se as duas mercadorias são normais, ou seja, se suas elasticidades-renda são positivas. Para comprovar essa afirmação, basta notar que:

$$\omega\beta_1 \frac{\partial Z_1}{\partial I} + \omega\beta_2 \frac{\partial Z_2}{\partial I} = \frac{\omega\beta_1 Z_1}{I}\,\varepsilon_1 + \frac{\omega\beta_2 Z_2}{I}\,\varepsilon_2 \tag{2.45}$$

e:

$$\frac{\Pi_1 Z_1}{I}\,\varepsilon_1 + \frac{\Pi_2 Z_2}{I}\,\varepsilon_2 = \frac{(\omega\beta_1 + p_1\alpha_1)\,Z_1}{I}\,\varepsilon_1 + \frac{(\omega\beta_2 + p_1\alpha_1)\,Z_1}{I}\,\varepsilon_2 = 1$$

Daí, é fácil concluir-se que, se $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$, a expressão (2.45) é menor que a unidade.

Efeito-Substituição

A segunda componente na expressão (2.44)

$$-\ \omega\ [\beta_1^2 s_{11} + 2\beta_1\beta_2 s_{12} + \beta_2^2 s_{22}]$$

é positiva como vimos em (2.36). Essa componente pode ser denominada de efeito-substituição.

Explicação Alternativa da Correlação Negativa entre Horas de Trabalho e Salário

O aumento da produtividade do tempo usado no consumo significa que os coeficientes β_1 e β_2 diminuem. Tal diminuição produz um efeito-renda que aumenta o número de horas de trabalho e um efeito-substituição que as diminui. O enfoque de Becker conduz, então, a uma explicação alternativa para a correlação negativa observada entre horas de trabalho e salário. Na explicação tradicional, o efeito-renda predomina sobre o efeito-substituição. No enfoque de Becker, existe a possibilidade de uma explicação alternativa que é justamente o contrário da interpretação tradicional. O aumento da produtividade do tempo geraria um efeito-substituição maior do que o efeito-renda. Obviamente, essa explicação é parcial, pois foi obtida a partir das hipóteses simplistas de que os preços, a renda de propriedade e os demais coeficientes técnicos permaneceram constantes.

Aumento da Produtividade do Tempo no Consumo e no Trabalho $\times$ Horas de Trabalho

Admita-se que o aumento do salário unitário corresponda a um acréscimo da produtividade do tempo usado no trabalho. Suponha-se ainda que a produtividade do tempo no consumo e no trabalho aumente na mesma proporção, isto é:

$$\frac{d\beta_1}{\beta_1} = \frac{d\beta_2}{\beta_2} = - \frac{d\omega}{\omega}$$

Admita-se, também, que as demais variáveis exógenas permaneçam constantes, ou seja:

$$dp_1 = dp_2 = d\alpha_1 = d\alpha_2 = dR = 0$$

Inexistência de Efeito-Substituição

Face às hipóteses que acabamos de fazer, os preços das duas mercadorias, Π_1 e Π_2, permanecem os mesmos. Conseqüentemente, não existe mudança de preços relativos e não há efeito-substituição decorrente do aumento da produtividade do tempo no consumo e no trabalho.

Efeito-Renda e Correlação Negativa entre Horas de Trabalho e Salário

A equação diferencial (2.32) reduz-se neste caso à seguinte expressão:

$$dh = l_2 \left\{ \frac{l_1}{l_2} \left(1 - \frac{\omega t}{I} \varepsilon_1\right) + \left(1 - \frac{\omega t}{I} \varepsilon_2\right) \right\} \frac{d\omega}{\omega}$$

Com o objetivo de simplificar essa expressão, suponha que $I = \omega t$, ou seja, que não existam rendimentos provenientes de propriedades ou transferências. Portanto:

$$dh = l_2 \left\{ \frac{l_1}{l_2} (1 - \varepsilon_1) + (1 - \varepsilon_2) \right\} \frac{d\omega}{\omega}$$

A partir da equação acima, podemos tirar as seguintes conclusões:

i) quando $\varepsilon_1 = 1$, ε_2 é também igual à unidade e:

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} > 0$$

ii) quando $\varepsilon_1 > 1$ e $l_1/l_2 > 1$, temos que:

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} < 0$$

iii) quando $\varepsilon_1 < 1$ e $l_1/l_2 > 1$, concluímos que:

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} > 0$$

A segunda possibilidade (item *ii*) fornece uma outra interpretação alternativa para a correlação negativa observada entre horas de trabalho e salário unitário. A interpretação é de que as mercadorias intensivas no uso do tempo ($l_1 > l_2$) têm sido mercadorias de luxo, isto é, mercadorias para as quais a elasticidade-renda é maior que a unidade ($\varepsilon_1 > 1$).

III.2.2 — Produção com Retornos Constantes de Escala

As funções de produção (2.2) e (2.3), quando homogêneas do primeiro grau, satisfazem, por definição, à seguinte propriedade:

$$kZ_1 = f\ (kq_1,\ kl_1) \tag{2.46}$$

$$kZ_2 = g\ (kq_2,\ kl_2) \tag{2.47}$$

pois, multiplicando-se por um coeficiente de proporcionalidade k as quantidades dos fatores de produção, o nível de produção também é multiplicado por k. Assim, no caso de retornos constantes de escala as isoquantas unitárias caracterizam completamente a função de produção. Para se entender esse fato basta que se faça o coeficiente k, nas expressões (2.41) e (2.42), igual ao inverso do nível de produção de cada mercadoria, isto é:

$$1 = f\left(\frac{q_1}{Z_1},\ \frac{l_1}{Z_1}\right) = f\ (\alpha_1,\ \beta_1) \tag{2.48}$$

$$1 = g\left(\frac{q_2}{Z_2},\ \frac{l_2}{Z_2}\right) = g\ (\alpha_2,\ \beta_2) \tag{2.49}$$

onde $\alpha_i = q_i/Z_i$ e $\beta_i = l_i/Z_i$ são os coeficientes técnicos de produção. Cumpre observar que esses coeficientes técnicos não são mais fixos, como na seção anterior, mas podem variar em virtude da possibilidade de substituição de fatores nas funções de produção.

A produção de cada mercadoria, segundo as condições de equilíbrio (2.11) e (2.12), é feita de tal modo que o seu custo é mínimo. Além disso, devido à homogeneidade do primeiro grau da função de produção, são proporcionais seu custo e seu nível. Em conseqüência, e exemplificando com a primeira mercadoria, os coeficientes técnicos α_1 e β_1 são determinados através da solução do seguinte problema:

minimizar o custo unitário

$$\Pi_1 = \omega\beta_1 + p_1\alpha_1$$

com a condição de que a restrição técnica

$$f\ (\alpha_1,\ \beta_1) = 1$$

seja satisfeita.

O problema acima é idêntico ao da minimização de custos de empresa, que compra os fatores de produção a preços dados no mercado. Segue-se, então, que as conclusões apresentadas no Capítulo VI aplicam-se aqui integralmente.

Os coeficientes técnicos α_i e β_i, variáveis exógenas quando os fatores de produção se combinam em proporções fixas, são agora variáveis endógenas e função dos preços dos fatores, isto é:

$$\alpha_i = \alpha_i (p_i, \omega) \tag{2.50}$$

$$\beta_i = \beta_i (p_i, \omega) \tag{2.51}$$

As derivadas parciais dessas duas equações, de acordo com as propriedades que têm de satisfazer às equações de demanda de fatores de produção, obedecem às seguintes condições:

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial p_i} < 0, \ \frac{\partial \alpha_i}{\partial \omega} > 0 \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial p_i} > 0, \ \frac{\partial \beta_i}{\partial \omega} < 0 \tag{2.53}$$

$$p_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_i} + \omega \frac{\partial \alpha_i}{\partial \omega} = 0 \tag{2.54}$$

$$p_i \frac{\partial \beta_i}{\partial p_i} + \omega \frac{\partial \beta_i}{\partial \omega} = 0 \tag{2.55}$$

O sentido dessas duas últimas equações é o de que as equações de demanda por α_i e β_i são homogêneas do grau zero. O coeficiente técnico α_i, segundo (2.52), varia em sentido contrário ao preço p_i, o mesmo ocorrendo com β_i em relação ao salário ω, de acordo com (2.53). O coeficiente técnico α_i responde positivamente ao aumento do salário unitário ω, enquanto β_i responde positivamente a variações do preço p_i.

Variações do Custo Marginal

Quando os preços dos fatores se alteram, o custo marginal de produção de cada mercadoria também muda. Em termos infinitesimais, temos que:

$$d\Pi_i = \alpha_i dp_i + p_i d\alpha_i + \beta_i d\omega + \omega d\beta_i, \ i = 1, 2 \tag{2.56}$$

Observe-se, porém, que uma das condições para que o custo de produção seja mínimo é que a taxa marginal de substituição técnica seja igual à relação de preços dos fatores. Assim:

$$p_i d\alpha_i + \omega d\beta_i = 0$$

e a equação (2.56) reduz-se a:

$$d\Pi_i = \alpha_i dp_i + \beta_i d\omega \tag{2.57}$$

Equações de Demanda

No presente caso, as equações de demanda pelas duas mercadorias consumidas pelo indivíduo são idênticas às equações (2.21) e (2.22). Obviamente, todas as propriedades dessas duas equações aplicam-se igualmente aqui.

As equações de demanda das duas mercadorias como funções dos preços dos bens e serviços do salário unitário e da renda integral passam agora a ser escritas como:

$$Z_1 = \phi_1 \ (p_1, \ p_2, \ \omega, \ I) \tag{2.58}$$

$$Z_2 = \phi_2 \ (p_1, \ p_2, \ \omega, \ I) \tag{2.59}$$

A diferença entre estas duas equações e as (2.27) e (2.28) é que agora os coeficientes técnicos α_i e β_i são endógenos no modelo e não aparecem, conseqüentemente, como argumentos das equações (2.58) e (2.59).

Equação de Oferta de Horas de Trabalho

O procedimento para a obtenção da equação de oferta de horas de trabalho é igual ao usado anteriormente. Assim:

$$h = h \ (p_1, \ p_2, \ \omega, \ I) \tag{2.60}$$

Com o objetivo de calcular-se as derivadas parciais da equação acima, devemos levar em conta que:

$$d\alpha_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_i} \, dp_i + \frac{\partial \alpha_i}{\partial \omega} \, d\omega \tag{2.61}$$

e:

$$d\beta_i = \frac{\partial \beta_i}{\partial p_i} \, dp_i + \frac{\partial \beta_i}{\partial \omega} \, d\omega \tag{2.62}$$

Substituindo-se esses valores na equação (2.32), obtemos:

$$\begin{aligned} dh = & - \left[\alpha_1\beta_1 s_{11} + \alpha_1\beta_2 s_{21} + Z_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial p_1} \right] dp_1 \\ & - \left[\alpha_2\beta_1 s_{12} + \alpha_2\beta_2 s_{22} + Z_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial p_2} \right] dp_2 \\ & - \left[\beta_1^2 s_{11} + 2\beta_1\beta_2 s_{12} + \beta_2^2 s_{22} + Z_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial \omega} + Z_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial \omega} \right] d\omega \\ & - \left(\beta_1 \frac{\partial Z_1}{\partial I} + \beta_2 \frac{\partial Z_2}{\partial I} \right) (dR + h d\omega - q_1 dp_1 - q_2 dp_2) \end{aligned} \tag{2.63}$$

Os coeficientes desta equação diferencial contêm as principais propriedades que a equação de oferta de horas de trabalho deve obedecer. A seguir, cuidaremos de explicitar tais propriedades.

Horas de Trabalho $\times$ Preço dos Bens e Serviços

A derivada parcial de h em relação ao preço p_i, mantido constante o nível de utilidade, é igual a:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial p_i}\right|_{u=ct} = -\left[\alpha_i\beta_i s_{ii} + \alpha_i\beta_j s_{ji} + Z_i \frac{\partial \beta_i}{\partial p_i}\right], \quad \begin{matrix} i \neq j \\ i, j = 1, 2 \end{matrix} \tag{2.64}$$

Como $\Pi_i s_{ii} + \Pi_j s_{ji} = 0$, a equação (2.64) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial p_i}\right|_{u=ct} = -\left[\frac{\alpha_i \Pi_i}{\omega}\left(\frac{\omega p_i}{\Pi_i} - \frac{\omega\beta_j}{\Pi_j}\right) s_{ii} + Z_i \frac{\partial \beta_i}{\partial p_i}\right] \tag{2.65}$$

Quando a mercadoria i for menos intensiva no uso do tempo, isto é, quando

$$\frac{\omega\beta_i}{\Pi_i} < \frac{\omega\beta_j}{\Pi_j}$$

ambas as expressões dentro dos colchetes em (2.65) serão positivas. Logo, neste caso, temos que:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial p_i}\right|_{u=ct} < 0$$

Todavia, quando a mercadoria i for mais intensiva no uso do tempo, nada se pode dizer sobre o sinal de (2.65).

O efeito-preço é expresso através da seguinte equação de Slutsky:

$$\frac{\partial h}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial h}{\partial p_i}\right|_{u=ct} - q_i \frac{\partial h}{\partial R} \tag{2.66}$$

onde:

$$\frac{\partial h}{\partial R} = -\left(\beta_1 \frac{\partial Z_1}{\partial I} + \beta_2 \frac{\partial Z_2}{\partial I}\right)$$

Horas de Trabalho $\times$ Salário Unitário

É fácil concluir-se a partir de (2.63) que o efeito-substituição é dado por:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial \omega}\right|_{u=ct} = -\left[\beta_1^2 s_{11} + 2\beta_1\beta_2 s_{12} + \beta_2^2 s_{22} + Z_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial \omega} + Z_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial \omega}\right] \tag{2.67}$$

Como a forma quadrática

$$\beta_1^2 s_{11} + 2\beta_1\beta_2 s_{12} + \beta_2^2 s_{22}$$

é negativa e as derivadas parciais $\partial\beta_i/\partial\omega$, $i = 1, 2$, são também negativas, segue-se que:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial\omega}\right|_{u = ct} > 0$$

A equação de Slutsky é obtida reunindo-se os coeficientes que multiplicam $d\omega$ na expressão (2.63). O resultado é:

$$\frac{\partial h}{\partial\omega} = \left.\frac{\partial h}{\partial\omega}\right|_{u = ct} + h\,\frac{\partial h}{\partial R} \tag{2.68}$$

O sinal de (2.68) é ambíguo quando $\partial h/\partial R < 0$.

Horas de Trabalho $\times$ Rendas Patrimoniais

Quanto à variação das horas de trabalho com relação a variações do nível de rendimentos provenientes de outras fontes que não o trabalho, obtemos de (2.63) o seguinte resultado:

$$\frac{\partial h}{\partial R} = -\left(\beta_1\,\frac{\partial Z_1}{\partial I} + \beta_2\,\frac{\partial Z_2}{\partial I}\right)$$

Quando ambas as mercadorias forem normais no sentido de que suas elasticidades-renda forem positivas, o sinal de $\partial h/\partial R$ será negativo.

Progresso Tecnológico na Produção Familiar

No caso da função de produção com proporções fixas dos fatores, examinou-se o efeito do aumento de produtividade do tempo sobre a alocação de recursos do consumidor, através da diminuição exógena dos valores dos coeficientes técnicos.

Quando a produção se concretiza via funções de produção com retornos constantes de escala, o mesmo tipo de análise pode ser desenvolvido. Basta que se introduza um argumento adicional na função de produção que represente progresso tecnológico. Admitamos que essa variável seja representada pela letra grega τ. As equações (2.50) e (2.51) passariam a ser expressas por:

$$\alpha_i = \alpha_i\,(p_i, \omega, \tau) \tag{2.69}$$

$$\beta_i = p_i\,(\beta_i, \omega, \tau) \tag{2.70}$$

As derivadas parciais dessas equações em relação a τ seriam negativas,

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial\tau} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\beta_i}{\partial\tau} < 0$$

pois a um progresso tecnológico maior deve corresponder menor quantidade de insumos por unidade de produto.

A partir de (2.69) e (2.70) poder-se-ia desenvolver todo o estudo de estática comparativa, o que deixamos de fazer, pois os resultados são, basicamente, os mesmos a que chegamos no caso de função de produção com proporções fixas dos fatores.

III.3 — Estudo de Oferta de Mão-de-Obra: Oliveira (1978)

Em um trabalho pioneiro, Oliveira estuda vários problemas relacionados com a oferta de mão-de-obra no Brasil, com base em dados de uma pesquisa de orçamento familiar realizada na cidade de Belo Horizonte no ano de 1972.

Esta seção terá como objetivo apresentar de maneira sumária alguns dos resultados obtidos por Oliveira. Mais especificamente, apresentaremos apenas os resultados da equação de oferta de horas de trabalho pelos adultos do sexo masculino e os referentes ao estudo da participação das mulheres casadas na força de trabalho.

III 3.1 — A Equação de Oferta de Horas de Trabalho

A equação de oferta de horas de trabalho para adultos do sexo masculino, especificada por Oliveira, corresponde à equação (1.54) da primeira seção deste capítulo. A forma funcional usada foi a seguinte:

$$\log h_i = a_0 + a_1\omega_i + a_2\omega_i^2 + a_3W_i + a_4R_i + \sum_{k=1}^{5} b_k Z_{k,i} + \xi_i \qquad (3.1)$$

onde o índice i refere-se ao indivíduo, h representa o número de horas trabalhadas durante o mês, ω é o salário mensal do indivíduo, W é o total de rendimentos do trabalho dos outros membros da família, R é o total de rendimentos provenientes de outras fontes e as variáveis Z_k representam as seguintes características pessoais ou familiares:

Z_1 = idade do indivíduo;

Z_2 = variável *dummy* para captar o efeito de experiência no trabalho (*seniority*) do indivíduo. Essa variável toma o valor 1 para aqueles indivíduos que estão no mesmo emprego há cinco ou mais anos. Em caso contrário, a variável *dummy* é igual a zero;

Z_3 = variável *dummy* para captar o efeito de migração. Essa variável toma o valor 1 para aqueles indivíduos que migraram nos últimos cinco anos. Em caso contrário, a variável *dummy* é igual a zero;

Z_4 = variável para captar o efeito do tamanho da família no número de horas trabalhadas pelo chefe da família. Essa variável é igual ao número de crianças na família;

Z_5 = variável para captar o efeito do total de dívidas da família. Essa variável ou é do tipo *dummy* ou é igual à prestação mensal na amortização de dívida contraída com a compra de automóvel e televisão. No caso de *dummy*, seu valor é igual a 1 quando existem prestações de automóvel e televisão. Em caso contrário, a *dummy* é igual a zero.

Os sinais esperados, *a priori*, segundo Oliveira, para os coeficientes das variáveis incluídas no vetor Z, são comentados a seguir.

O coeficiente b_1 da variável idade deve ser positivo, pois os jovens tendem a trabalhar um número de horas menor, enquanto os mais idosos, devido à legislação trabalhista brasileira, tendem a trabalhar um número de horas maior. Quando se exclui da amostra os velhos e os jovens não há nenhuma razão para se esperar, *a priori*, um sinal positivo ou negativo para o coeficiente b_1.

O coeficiente b_2 deve ser positivo, pois os trabalhadores com menos experiência tenderão a ter uma jornada de trabalho mais longa para compensar a falta de experiência.

No que toca ao sinal do parâmetro b_3, coeficiente da variável Z_3, seu sinal esperado, *a priori*, deve ser positivo, pois os migrantes, para uma mesma taxa de salário, tendem a trabalhar mais do que os nativos por duas razões. Primeiro, para poder cobrir os custos de migração e, em segundo lugar, porque acredita-se que os migrantes sejam mais motivados para o trabalho do que os nativos.

O parâmetro b_4, coeficiente da variável Z_4, tem o sinal esperado positivo, pois, para uma mesma taxa de salário, uma família mais numerosa necessita uma renda maior.

O coeficiente b_5 deve ser positivo, pois, *ceteris paribus*, uma família com um maior nível de endividamento precisa de uma renda mais elevada.

A amostra usada para estimar-se os parâmetros da equação de oferta de horas de trabalho abrange os adultos do sexo masculino com as seguintes características: chefes de família, empregados e que tenham trabalhado na semana de referência da pesquisa efetuada. Portanto, estão excluídos da amostra selecionada os seguintes indivíduos: adultos que não sejam chefes de família, empregados por conta própria, empregadores, os trabalhadores que receberam ajuda financeira da família e os desempregados. Desta amostra, foram selecionadas duas subamostras: uma que inclui somente indivíduos na faixa etária dos 25 aos 55 anos de idade e uma segunda que abrange todos os indivíduos na faixa etária dos 18 aos 65 anos de idade.

No tocante à variável salário do chefe da família, duas alternativas foram usadas nas regressões. Na primeira, o salário é definido como igual ao salário médio, que é obtido dividindo-se o salário total no mês pelo número de horas trabalhadas. Essa alternativa traz pelo menos dois problemas. Com efeito, se a taxa de salário for função do número de horas trabalhadas, como é o caso, em geral, para aqueles indivíduos que trabalharam horas extras a uma taxa de salário mais elevada do que a normal, o salário médio será diferente do salário marginal. Este último é relevante, do ponto de vista teórico, para a análise empírica. Outro ponto que se deve levar em consideração é que o salário médio não leva em conta os impostos que o indivíduo é obrigado a pagar. Assim, a segunda alternativa para a variável salário na regressão (3.1), usada por Oliveira, foi o salário marginal líquido, obtido fazendo-se algumas correções nos dados para horas extras de trabalho e impostos pagos.

Cabe observar que a especificação da equação (3.1) inclui um termo quadrático na variável salário. Tal fato prende-se à hipótese de que a equação de oferta de horas de trabalho é do tipo não linear, como, por exemplo, no caso da curva dobrada para trás da Figura III.2.

As Tabelas III.1 e III.2 contêm os resultados obtidos por Oliveira para as duas subamostras consideradas. Nelas estão indicadas as estimativas dos parâmetros da equação de oferta de horas de trabalho para as duas alternativas da variável salário, bem como para diferentes métodos de estimação.

Antes de analisar os resultados contidos nas duas tabelas, cabe salientar que a interpretação dos coeficientes das variáveis salário e renda na equação (3.1), mesmo na hipótese de que o efeito-substituição cruzado seja nulo, é um pouco complicada, pois os coeficientes de cada variável econômica na equação de oferta de horas de trabalho são formados por uma mistura de coeficientes que refletem efeitos-preço e renda. Este fato pode ser facilmente constatado examinando-se as fórmulas dos coeficientes f_1, f_2 e f_3 na expressão (1.66).

A Tabela III.1 contém as estimativas dos parâmetros da equação de oferta de horas de trabalho dos adultos do sexo masculino na faixa etária dos 25 aos 55 anos de idade. A Tabela III.2 fornece as estimativas para o caso da amostra que abrange os homens na faixa etária dos 18 aos 65 anos de idade.

Pode-se afirmar que, de um modo geral, para as estimativas de ambas as tabelas, as diversas alternativas quanto à definição da variável salário e ao método de estimação não produzem resultados substancialmente diferentes. Observe-se que foram usados dois métodos de estimação: mínimos quadrados ordinários e variáveis instrumentais. As variáveis instrumentais usadas para se calcular o salário "imputado" foram a educação e a idade do indivíduo.

Usou-se o método das variáveis instrumentais devido à possibilidade de existência de correlação entre a variável salário e a perturbação aleatória da equação (3.1). Tal correlação poderia existir em virtude de erros de medida na geração da variável salário. Todavia, os resultados das Tabelas III.1 e III.2 evidenciam que esse tipo de problema não nos deve preocupar.

Em todas as regressões de ambas as tabelas o coeficiente do salário, além de significativo, é negativo, mostrando que salário e horas de trabalho são negativamente correlacionados. A oferta de horas de trabalho é bastante inelástica às variações do salário, pois as elasticidades-preço estão compreendidas entre os valores — 0,07 e — 0,03.

O termo quadrático correspondente ao salário é significativo e sua inclusão nas regressões conduz a melhores coeficientes de determinação R^2. Vale observar que os valores de R^2 são bastante baixos, fato que não nos deve preocupar, pois o valor baixo de R^2 é usual neste tipo de estudo.

A inclusão do termo quadrático conduz a um resultado bastante interessante quanto ao formato da curva de oferta de mão-de-obra. Com efeito, ao invés da tradicional curva "dobrada para trás" (*backward bending*), os resultados obtidos por Oliveira implicam uma curva "dobrada para frente" (*forward bending*). A Figura III.4 mostra uma curva de oferta de mão-de-obra que inclui um trecho "dobrado para frente", o trecho *ABC*, e outra parte "dobrada para trás", *BCD*. Os resultados de Oliveira correspondem ao trecho *ABC* da

Tabela III.1

EQUAÇÃO DE OFERTA DE HORAS DE TRABALHO: OLIVEIRA (1978) (AMOSTRA: HOMENS NA FAIXA ETÁRIA DE 25-55 ANOS DE IDADE)

Constante	Salário (ω_1)	(Salário)^2 [$(\omega_1)^2$]	Rendimentos de Outras Fontes (R)	Rendimentos de Outros Membros da Família (W_2)	Idade (Z_1)	Experiência de Trabalho (Z_2)	Migração (Z_3)	Número de Crianças (Z_4)	Dívida do Consumidor (Z_5)	R^2	F	Elasticidade-Preço	Número da Equação
5,351 (141,81)	—0,01101 (5,65)	—	—$0{,}1216\times10^{-3}$ (3,79)	—	$0{,}5814\times10^{-3}$ (0,58)	—0,05208 (3,28)	0,06376 (3,01)	0,01639 (3,24)	0,03535 (1,71)	0,06	14,48	—0,054	1
5,372 (138,42)	—0,02443 (3,91)	$0{,}9166\times10^{-3}$ (2,26)	—$0{,}1247\times10^{-3}$ (3,89)	—	$0{,}8036\times10^{-3}$ (0,79)	— 0,04991 (3,14)	0,05827 (2,74)	0,01551 (3,06)	0,04080 (1,96)	0,07	13,34	—0,076	2
5,365 (141,08)	—0,01309 (6,47)	—	—	$0{,}2139\times10^{-4}$ (1,31)	$0{,}2197\times10^{-3}$ (0,22)	—0,5000 (3,13)	0,06046 (2,85)	0,01829 (3,57)	—	0,05	14,24	—0,065	3
5,378 (143,45)	—0,01183 (5,69)	—	—$0{,}1084\times10^{-3}$ (3,35)	$0{,}1886\times10^{-4}$ (1,15)	—$0{,}4263\times10^{-3}$ (0,42)	—	—	0,01631 (3,17)		0,05	14,54	—0,058	4
5,349 (145,95)	—0,01336 (10,70)	—	—$0{,}7170\times10^{-4}$ (2,27)	—	$0{,}6562\times10^{-3}$ (0,68)	—0,04778 (3,00)	0,06959 (3,38)	0,01787 (3,64)	0,04724 (2,35)	0,11	26,92	—0,066	5
5,381 (144,96)	—0,02384 (8,90)	$0{,}3315\times10^{-3}$ (4,41)	—$0{,}6475\times10^{-4}$ (2,06)	—	$0{,}6074\times10^{-3}$ (0,63)	—0,04517 (2,93)	0,06577 (3,21)	0,01700 (3,48)	0,05831 (2,90)	0,12	26,27	—0,102	6
5,350 (140,83)	—0,00677 (4,14)	—	—$0{,}1167\times10^{-3}$ (3,93)	—	—$0{,}7037\times10^{-4}$ (0,07)	—0,05446 (3,41)	0,06678 (3,14)	0,01839 (3,63)	0,02651 (1,28)	0,05	11,98	—0,038	7
5,434 (133,68)	—0,03788 (6,43)	0,00150 (5,49)	—$0{,}1126\times10^{-3}$ (3,82)	—	—$0{,}2409\times10^{-3}$ (0,24)	—0,05234 (3,31)	0,06953 (2,89)	0,01558 (3,09)	0,04149 (2,01)	0,07	14,46	—0,118	8
5,376 (141,63)	—0,00847 (4,90)	—	—	$0{,}1599\times10^{-4}$ (1,05)	—0,00121 (1,19)	—	—	0,01951 (3,78)	—	0,03	10,21	—0,047	9
5,374 (142,12)	—0,00756 (3,99)	—	—$0{,}1067\times10^{-3}$ (3,56)	$0{,}1208\times10^{-4}$ (0,80)	—$0{,}1076\times10^{-2}$ (1,07)	—	—	0,01811 (3,51)	—	0,03	10,77	—0,042	10
5,345 (144,28)	—0,00885 (9,06)	—	—$0{,}6969\times10^{-4}$ (2,36)	—	$0{,}3171\times10^{-3}$ (0,32)	—0,04797 (3,06)	0,07354 (3,53)	0,01824 (3,67)	0,04266 (2,10)	0,09	21,68	—0,049	11
5,364 (144,29)	—0,01585 (7,81)	$0{,}1691\times10^{-3}$ (3,93)	—$0{,}7092\times10^{-4}$ (2,14)	—	$0{,}4704\times10^{-3}$ (0,48)	—0,04688 (3,01)	0,06556 (3,15)	0,01727 (3,49)	0,05046 (2,48)	0,10	21,08	—0,078	12

FONTE: Oliveira (1978).

OBS.: Os números entre parênteses são as estatísticas t. A variável dependente das regressões de números 1 a 6 é o salário marginal, enquanto para as de números 7 a 26 o salário é medido pelo salário médio. O método de estimação das equações 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9 e 10 é o método de variáveis instrumentais. Para as equações de números 5, 1, 11 e 12 o método de estimação é o método de mínimos quadrados ordinários.

Tabela III.2

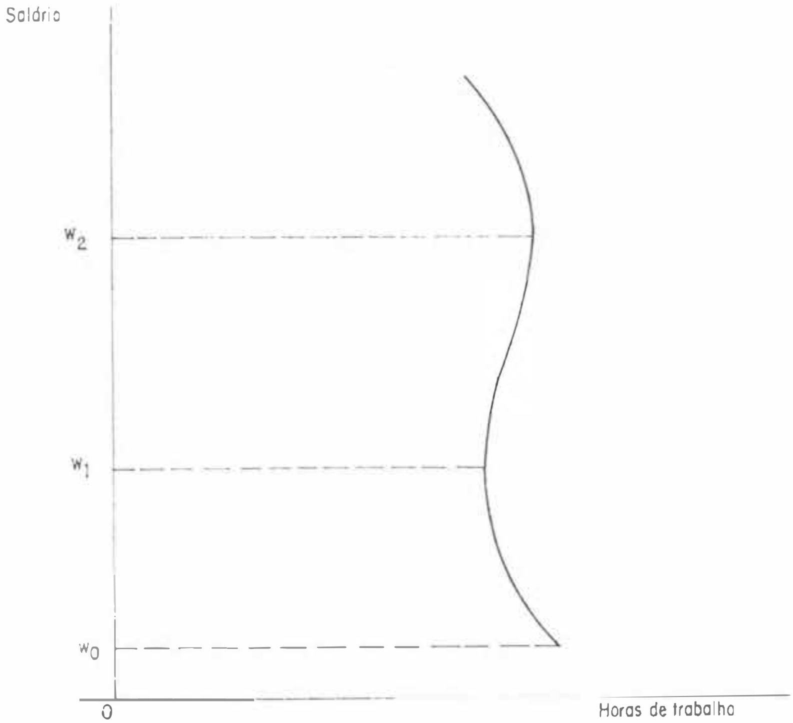
EQUAÇÃO DE OFERTA DE HORAS DE TRABALHO: OLIVEIRA (1978) (AMOSTRA: HOMENS NA FAIXA ETÁRIA DE 18-65 ANOS DE IDADE)

Constante	Salário (ω_1)	(Salário)^2 $[(\omega_1)^2]$	Rendimentos de Outras Fontes (R)	Rendimentos de Outros Membros da Família (W_2)	Idade (Z_1)	Experiência de Trabalho (Z_2)	Migração (Z_3)	Número de Crianças (Z_4)	Dívida do Consumidor (Z_5)	R^2	F	Elasticidade-Preço	Número da Equação
5,315 (189,63)	—0,01185 (6,66)	—	—0,1948 $\times 10^{-3}$ (6,81)	—	0,1823 $\times 10^{-2}$ (2,51)	—0,05846 (3,88)	0,04986 (2,59)	0,01671 (3,60)	0,01497 (2,14)	0,08	23,56	—0,057	1
5,335 (183,23)	—0,02387 (4,62)	0,8127 $\times 10^{-3}$ (2,48)	—0,1969 $\times 10^{-3}$ (6,89)	—	0,1974 $\times 10^{-2}$ (2,71)	—0,05702 (3,79)	0,04496 (2,33)	0,01616 (3,48)	0,04545 (2,32)	0,09	21,44	—0,077	2
5,342 (194,77)	—0,01222 (6,42)	—	—0,1865 $\times 10^{-3}$ (6,45)	0,8048 $\times 10^{-5}$ (0,60)	0,8342 $\times 10^{-3}$ (1,17)	—	—	0,01540 (3,28)	—	0,07	26,15	—0,059	3
5,324 (196,97)	—0,01645 (11,67)	0,3795 $\times 10^{-4}$ (3,17)	—0,7476 $\times 10^{-4}$ (2,47)	—	0,1620 $\times 10^{-2}$ (2,37)	—0,04884 (3,37)	0,05257 (2,84)	0,01896 (4,27)	0,05397 (2,87)	0,16	40,57	—0,062	4
5,318 (198,58)	—0,01345 (13,54)	—	—0,6069 $\times 10^{-4}$ (2,03)	—	0,1566 $\times 10^{-2}$ (2,28)	—	0,05228 (2,82)	0,01892 (4,24)	0,1204 $\times 10^{-3}$ (2,27)	0,15	44,53	—0,065	5
5,314 (187,63)	—0,00704 (4,52)	—	—0,1906 $\times 10^{-3}$ (7,23)	—	0,1052 $\times 10^{-2}$ (1,47)	—0,06005 (3,96)	0,05355 (2,77)	0,01928 (4,14)	0,03292 (1,68)	0,07	19,68	—0,039	6
5,403 (172,91)	—0,04099 (7,44)	0,1647 $\times 10^{-2}$ (6,42)	—0,8111 $\times 10^{-3}$ (6,94)	— —	0,8341 $\times 10^{-3}$ (1,17)	—0,05769 (3,85)	0,04647 (2,42)	0,01731 (3,75)	0,04645 (2,30)	0,09	22,76	—0,126	7
5,339 (192,11)	—0,00684 (4,09)	—	—0,1858 $\times 10^{-3}$ (6,98)	—0,1308 $\times 10^{-5}$ (0,10)	0,9612 $\times 10^{-4}$ (0,13)	—	—	0,01749 (3,71)	—	0,06	20,64	—0,038	8
5,311 (194,84)	—0,01083 (10,24)	0,1683 $\times 10^{-4}$ (3,60)	—0,7220 $\times 10^{-4}$ (2,54)	—	0,1500 $\times 10^{-2}$ (2,16)	—0,04947 (3,37)	0,05631 (3,01)	0,01887 (4,19)	0,04821 (2,53)	0,13	34,17	—0,059	9
5,306 (195,69)	—0,00907 (11,56)	—	—0,6076 $\times 10^{-4}$ (2,14)	—	0,1392 $\times 10^{-2}$ (2,00)	—0,05041 (3,43)	0,05517 (2,94)	0,01886 (4,18)	0,8896 $\times 10^{-4}$ (1,66)	0,13	36,73	—0,045	10

FONTE: Oliveira (1978).

OBS.: Os números entre parênteses são as estatísticas t. A variável dependente nas regressões de números 1 a 5 é o salário marginal líquido, enquanto para as regressões restantes (6 a 10) o salário é definido em termos médios. Os métodos de estimação empregados são os seguintes: regressões 1, 2, 3, 6, 7 e 8 — variáveis instrumentais; e regressões 4, 5, 9 e 10 — mínimos quadrados ordinários.

Figura III . 4
CURVA DE OFERTA DE MÃO-DE-OBRA



curva de oferta da Figura III.4. Oliveira argumenta que o formato da curva "dobrada para frente" está mais de acordo com a situação de salários baixos, nos países subdesenvolvidos, pois poucas horas de trabalho, numa situação como essa, seriam um dado inconsistente com a própria sobrevivência do indivíduo.

É interessante observar que o formato da curva de oferta da Figura III.4, incluindo as partes dobradas para frente e para trás, somente poderia ser testado se na especificação da equação (3.1) se incluísse um termo adicional: o salário elevado ao cubo. Como isto não foi feito, não se pode inferir que para salários elevados a curva deixe de apresentar uma nova mudança de concavidade.

No que concerne ao coeficiente da variável que mede os rendimentos de outros membros da família, as Tabelas III.1 e III.2 mostram que este coeficiente não é significativamente diferente de zero. As razões para este resultado, segundo Oliveira, podem ser atribuídas aos seguintes fatores: efeito-substituição cruzado diferente de zero, erros de medida na variável, comportamento patriarcal da família brasileira, ou, ainda, a tradição machista de nossa cultura.

No tocante à variável rendimentos de outras fontes, todos os coeficientes desta variável, em ambas as tabelas, são negativos e significativos. Esse fato mostra que o número de horas trabalhadas decresce quando os rendimentos de outras fontes aumentam.

Quanto aos coeficientes das variáveis que representam experiência, migração, tamanho da família (= número de crianças) e endividamento do consumidor, seus sinais são corretos e, em geral, significativos. Assim, quanto maior a experiência de trabalho, menor o número de horas trabalhadas; o fato de o indivíduo ser migrante aumenta a jornada de trabalho; uma família mais numerosa leva o seu chefe a trabalhar mais; o chefe de uma família com maior nível de endividamento em geral trabalha um número maior de horas.

Quanto ao coeficiente da variável idade, os resultados das Tabelas III.1 e III.2 apontam na direção esperada, isto é, para a faixa etária de 25-55 anos a idade não exerce qualquer influência sobre as horas de trabalho. No caso da amostra que inclui os jovens e os velhos, a da faixa etária dos 18 aos 65 anos de idade, os resultados da Tabela III.2 corroboram a hipótese de que a idade influencia positivamente as horas de trabalho.

III.3.2 — A Participação na Força de Trabalho

O estudo da participação de membros de um determinado grupo na força de trabalho envolve modelos econométricos com variáveis qualitativas, pois tal participação é uma variável do tipo dicotômica: o indivíduo participa ou não na força de trabalho.

O modelo econométrico utilizado por Oliveira para estudar a presença das mulheres casadas na força de trabalho foi o logit. Começaremos, então, esta subseção apresentando o modelo logit para, em seguida, fazer um resumo dos resultados obtidos em sua pesquisa.

Modelo Logit

Admita que o salário ω que um indivíduo pode obter no mercado seja dado pela seguinte equação:

$$\log \omega = X_1' \gamma_1 + X_2' \gamma_2 + u \qquad (3.2)$$

onde, por simplicidade, não estamos usando nenhum índice para denotar o indivíduo a que a equação se refere, X_1 e X_2 são dois vetores que serão especificados mais adiante, γ_1 e γ_2 são os respectivos parâmetros destes vetores e u é a perturbação aleatória cujas propriedades serão discutidas a seguir.

Suponha que o valor ω^s que o indivíduo atribui ao seu tempo, quando não está trabalhando, seja função das variáveis que compõem os vetores X_1 e Z, de acordo com a seguinte equação:

$$\log \omega^s = X_1' \beta_1 + Z' \beta_2 + v \qquad (3.3)$$

onde β_1 e β_2 são parâmetros que correspondem aos vetores X_1 e Z, respectivamente, e v é a perturbação aleatória. Observe-se que estamos admitindo a existência de um conjunto de variáveis que influenciam tanto o salário ω de mercado como também o preço sombra do tempo ω^s, pois o vetor X_1 é comum às equações (3.2) e (3.3).

Quando o salário de mercado for maior ou igual ao preço sombra do tempo, $\omega \geqslant \omega^s$, o número de horas trabalhadas será positivo. Neste caso, associaremos ao número de horas trabalhadas uma variável *dummy* cujo valor será igual a 1. Por outro lado, quando o salário de mercado for inferior ao preço sombra do tempo, $\omega < \omega^s$, o número de horas trabalhadas será igual a zero e a variável *dummy* será igual a zero, isto é:

$$\text{Se } \omega \geqslant \omega^s \Rightarrow h > 0 \Rightarrow D = 1$$

$$\text{Se } \omega < \omega^s \Rightarrow h = 0 \Rightarrow D = 0$$

onde D é a variável *dummy*.

A probabilidade P de um indivíduo participar na força de trabalho será então dada pela seguinte expressão:

$$P\ (h > 0) = P\ (D = 1) = P\ (\omega \geqslant \omega^s) \tag{3.4}$$

Substituindo-se os valores de ω e ω^s, dados pelas equações (3.2) e (3.3), na expressão anterior, resulta na seguinte probabilidade:

$$P\ (D = 1) = P\ [X_1'\ (\gamma_1 - \beta_1) + X_2'\ \gamma_2 - Z'\ \beta_2 \geqslant \xi] \tag{3.5}$$

onde $\xi = v - u$.

Admita-se que a variável aleatória ξ tenha uma distribuição logística normalizada. A função de distribuição para essa variável aleatória é dada por:

$$F\ (x) = P\ (\xi \leqslant x) = \frac{1}{1 + e^{-x\pi/\sigma\sqrt{3}}} \tag{3.6}$$

Logo, dessa expressão e da equação (3.5), segue-se que a probabilidade de um indivíduo participar na força de trabalho é igual a:

$$P\ (D = 1) = \\ = \frac{1}{1 + \exp\left\{[-X_1'\ (\gamma_1 - \beta_1) - X_2'\ \gamma_2 + Z'\ \beta_2]\ \dfrac{\pi}{\sigma\sqrt{3}}\right\}} \tag{3.7}$$

onde a notação exp { } indica o número natural e elevado à expressão entre chaves.

Cabe fazer algumas observações sobre o problema de identificação existente nesse modelo. Em virtude de o coeficiente $\pi/\sigma\sqrt{3}$ multiplicar todos os parâmetros na expressão (3.7), é impossível, sem informação adicional, estimar-se separadamente cada parâmetro do modelo. Observe-se ainda que o vetor que multiplica X_1 em (3.7) é igual à diferença entre dois vetores, γ_1 e β_1, de maneira que, sem informação adicional, é também impossível separar da estimativa de $\gamma_1 - \beta_1$ os coeficientes γ_1 e β_1. Todavia, o problema pode ser contornado a partir das estimativas dos parâmetros da equação que fornece o salário oferecido pelo mercado ao indivíduo. Com efeito, imagine que X_2 seja um escalar. Neste caso, é possível, a partir da estimativa de γ_2 na equação (3.2), obter-se a estimativa de σ com a ajuda de (3.7). As estimativas de γ_2, γ_1 e σ fazem com que todos os parâmetros do modelo sejam identificados. Quando X_2 for um vetor, com dois ou mais componentes, o modelo será superidentificado, pois existirão várias maneiras alternativas de se obter uma estimativa para o desvio-padrão σ.

A função de verossimilhança para uma amostra de tamanho N, onde N_1 indivíduos participam na força de trabalho e os restantes $N_2 = N - N_1$ não o fazem, é igual ao produto das seguintes probabilidades:

$$l = \prod_{N_1} P\,(D = 1) \prod_{N_2} P\,(D = 0) \tag{3.8}$$

Maximizando-se essa função com respeito aos parâmetros $(\gamma_1 - \beta_1)^*$, γ_2^* e β_2^*, onde os asteriscos indicam que os parâmetros estão multiplicados por $\pi/\sigma\sqrt{3}$, suas estimativas podem ser obtidas. Com base nas propriedades do método de máxima verossimilhança, pode-se testar hipóteses e construir-se intervalos de confiança para os parâmetros. A partir da regressão (3.2), obtêm-se estimativas dos parâmetros γ_1 e γ_2. Daí, então, como assinalamos no parágrafo anterior, ser fácil estimarem-se todos os parâmetros do modelo.

Especificação das Variáveis do Modelo

A fundamentação teórica da especificação da equação de salário oferecido é a teoria do capital humano. Segundo essa teoria, o salário que um indivíduo pode obter no mercado é função do investimento em capital humano, seja através do treinamento formal na escola, seja através do processo de aprendizagem no trabalho. Portanto, duas variáveis influenciam o salário do indivíduo: grau de escolaridade e experiência no trabalho.

As variáveis incluídas na equação (3.2) são, então, as seguintes: X_2 é igual ao número de anos de escolaridade da mulher; no vetor X_1 estão incluídas duas variáveis, idade (X_{11}) e idade elevada ao quadrado $(X_{12} = X_{11}^2)$. A idade, por falta de melhor informação, serve como *proxy* para a experiência de trabalho do indivíduo.

A razão de colocar-se a idade elevada ao quadrado como variável explicativa do salário prende-se ao fato de que, segundo a teoria do capital humano, a maior parte dos investimentos em capital humano tende a se realizar quando o indivíduo é jovem e, também, ao fato de que o processo de depreciação do capital humano intensifica-se com o aumento da idade do indivíduo. Espera-se, portanto, que o perfil do salário tenha um formato de *U* invertido.

A variável salário na equação (3.2) é igual ao salário médio mensal da mulher casada. Esta variável foi obtida de modo indireto e nenhuma correção foi introduzida para levar em conta pagamento diferenciado para horas extras e impostos pagos. Vale salientar que, obviamente, os dados de salários só são disponíveis para aquelas mulheres que trabalham. Na estimação dos parâmetros da equação de salário oferecido esse fato foi tomado em consideração, como comentaremos mais adiante.

Quanto à especificação da equação (3.3) do preço sombra de tempo, as seguintes variáveis estão incluídas no vetor Z:

Z_1 = rendimentos de outras fontes que não o trabalho;

Z_2 = rendimentos do trabalho de outros membros da família ou salário do chefe da família;

Z_3 = número de adultos na família, isto é, número de pessoas com 14 anos ou mais de idade que vivem na mesma residência;

Z_4 = número de crianças na família. Dois tipos de variáveis foram usadas neste caso: i) variáveis contínuas e iguais ao número de crianças em diversas faixas etárias; e ii) variáveis do tipo *dummy;*

Z_5 = variável *dummy,* com valor 1 se existir um ou mais empregados domésticos morando com a família. Caso contrário, a variável *dummy* é igual a zero;

Z_6 = variável *dummy,* cujo valor é igual a 1 se o chefe da família permaneceu desempregado por mais de duas semanas nos últimos 12 meses. Caso contrário, a variável *dummy* é igual a zero; e

Z_7 = variável *dummy,* cujo valor é igual a 1 se a mulher não for legalmente casada, isto é, se o casamento for do tipo consensual. Caso contrário, a variável *dummy* é igual a zero.

A teoria econômica sugere que o preço sombra do tempo é função dos salários dos diversos membros da família e dos rendimentos provenientes de outras fontes que não o trabalho. Daí a inclusão das variáveis Z_1 e Z_2 na equação do preço sombra do tempo. As demais variáveis foram incluídas com o objetivo de controlar outros fatores que, acredita-se, influenciem a decisão de participar na força de trabalho. A seguir, passamos a comentar cada uma dessas variáveis.

Presume-se que quanto maior o número de adultos existentes na família, menor o preço sombra do tempo da mulher casada, pois maior é a ajuda que essas pessoas podem dar nas tarefas domésticas. Portanto, *ceteris paribus,* a probabilidade de a mulher casada participar na força de trabalho aumenta.

A existência de crianças na família tende a aumentar o preço sombra do tempo da mulher casada, pois, em nossa sociedade, esta tem um papel importante no processo de criação dos filhos. Segue-se, portanto, que a participação da mulher casada na força de trabalho deve estar, *ceteris paribus,* negativamente correlacionada com o número de crianças na família.

As empregadas domésticas desempenham um papel bastante importante nas atividades domésticas em nossa sociedade, possivelmente devido à falta de oportunidades e aos baixos salários em atividades alternativas. Do ponto de vista da mulher casada, as empregadas domésticas contribuem para que o seu preço sombra do tempo seja mais baixo, propiciando, assim, *ceteris paribus,* uma maior participação da mulher casada na força de trabalho.

No que toca ao efeito da situação de desemprego do chefe da família sobre a decisão de trabalhar ou não da mulher casada, existem duas hipóteses. A primeira, denominada de "hipótese do trabalhador adicional", admite que o decréscimo da renda da família em virtude do desemprego de seu chefe faz com que outros membros da família procurem ingressar no mercado de trabalho. A segunda hipótese, denominada no jargão técnico de "hipótese do trabalhador desencorajado", presume que, num mercado com elevado grau de desemprego, aqueles que não estão empregados se sentem desincentivados a entrarem no mercado de trabalho em virtude dos baixos salários e da dificuldade de conseguirem empregos considerados razoáveis para suas qualificações. Dessa forma, o efeito líquido da situação de desemprego do chefe de família sobre a participação da mulher casada na força de trabalho é, *a priori*, incerto.

Quanto ao estado civil da mulher, as casadas legalmente tendem possivelmente a ter um preço sombra do tempo mais elevado do que aquelas cujos casamentos são do tipo consensual. Acredita-se que as mulheres que não são legalmente casadas sentem-se menos seguras e procuram ter uma participação maior na força de trabalho.

Cabe ainda observar que a variável anos de escolaridade incluída na equação de salário foi excluída da equação do preço sombra do tempo. Essa exclusão possibilita a identificação de todos os parâmetros do modelo. Segundo Oliveira, esta escolha foi ditada mais por considerações de ordem prática do que devido a argumentos de natureza teórica.

Um Sumário dos Resultados Empíricos

A amostra usada por Oliveira abrange as mulheres casadas na faixa etária dos 14 aos 54 anos de idade. Além desta amostra, foram feitas estimativas para duas subamostras. Uma delas inclui apenas as mulheres que não desempenham as funções de chefe de família. A segunda subamostra é composta somente pelas casadas cujos maridos estão trabalhando.

A Tabela III.3 contém os resultados da análise logit, a Tabela III.4 reporta estimativas da equação de salário oferecido e a Tabela III.5 as estimativas dos parâmetros de equação do preço sombra do tempo.

No que diz respeito à Tabela III.3, os resultados estatísticos são excelentes como se pode verificar pelo teste da razão de verossimilhança. De maneira geral, as estimativas não apresentam diferenças significativas no que concerne às diversas subamostras utilizadas na estimação dos parâmetros.

Os números entre colchetes na Tabela III.3 são os efeitos marginais da variável em questão sobre a participação da mulher casada na força de trabalho. Esse efeito marginal é definido pela derivada parcial da probabilidade em relação à variável considerada e é avaliado no ponto médio da amostra.

Os coeficientes das variáveis escolaridade, idade e idade elevada ao quadrado são todos significativos. O efeito marginal da idade é negativo, enquanto o efeito da escolaridade é positivo.

Uma conclusão bastante interessante a que chegou Oliveira é quanto à resposta da mulher casada ao estímulo de mercado. A elasticidade do salário (implícita) está compreendida entre 1,0 e 1,25, o que evidencia uma resposta bastante elevada na participação da mulher casada na força de trabalho quando seu salário aumenta.

O coeficiente da variável rendimentos provenientes de outras fontes não se mostra, em geral, significativo ao nível de 5%. No tocante à variável rendimentos do trabalho de outros membros da família ela se mostra significativa e com sinal negativo. Em virtude de ser esta variável endógena no modelo de

Tabela III.3

ANALISE LOGIT, PROBABILIDADE DE PARTICIPAÇÃO NA FORÇA DE TRABALHO: OLIVEIRA (1978)

Constante	Escolaridade (X_2)	Idade (X_{11})	(Idade)^2 (X_{12})	Rendimentos de Outras Fontes (Z_1)	Rendimentos de Outros Membros da Família (Z_2)	Salário do Chefe da Família (Z_2)	Número de Adultos (Z_3)	Número de Crianças (Z_4): < 3 (Z_{41})	3 — 6 (Z_{42})	7 — 13 (Z_{43})	< 14 (Z_{44})	Empregada Doméstica (Z_5)	Estado Civil (Z_6)	Situação de Emprego do Chefe da Família (Z_7)	Teste da Razão de Verossimilhança (Graus de Liberdade)	Elasticidade do Salário (Implícita)
–6,5878	0,2635	0,2667	–0,0039	$-0,2148 \times 10^{-3}$	$-0,2281 \times 10^{-3}$	—	0,1249	–0,4753	–0,1159	–0,0854	—	—	—	—	324,04	1,00
(8,79)	(14,09)	(6,02)	(6,00)	(1,76)	(5,87)		(3,42)	(4,84)	(1,64)	(1,78)					(9)	
	[0,049]	[–0,001]		[$-0,399 \times 10^{-4}$]	[$0,424 \times 10^{-4}$]		[0,0232]	[–0,0884]	[–0,0215]	[0,0159]						
–6,5440	0,2576	0,2648	–0,00388	$-0,2990 \times 10^{-3}$	$-0,3048 \times 10^{-3}$	—	0,1455	–0,4032	—	—	–0,0943	0,7623	0,9091	—	351,98	1,03
(8,66)	(13,51)	(5,91)	(5,91)	(2,39)	(7,15)		(4,12)	(3,92)			(2,60)	(4,33)	(3,50)		(10)	
	[0,0472]	[–0,0011]		[$0,547 \times 10^{-4}$]	[$-0,558 \times 10^{-4}$]		[0,0266]	[–0,0738]			[–0,0171]	[0,1584]	[0,1973]			
–7,0129	0,2952	0,2647	–0,0041	$-0,1360 \times 10^{-3}$	$-0,1982 \times 10^{-3}$	—	0,2047	–0,5074	–0,0243	–0,0880	—	—	—	—	358,79	0,98
(8,36)	(14,87)	(5,34)	(5,54)	(1,04)	(5,00)		(4,99)	(4,71)	(0,33)	(1,65)					(9)	
	[0,0488]	[–0,0034]		[$-0,225 \times 10^{-4}$]	[$-0,327 \times 10^{-4}$]		[0,0338]	[–0,0838]	[–0,0040]	[–0,0147]						
–7,1290	0,2924	0,2683	–0,00406	$-0,2016 \times 10^{-3}$	$-0,2713 \times 10^{-3}$	—	0,2198	–0,4643	—	—	–0,0630	0,7914	1,0639	0,5488	391,09	1,20
(8,33)	(14,95)	(5,34)	(5,61)	(1,57)	(5,86)		(5,62)	(3,94)			(1,60)	(4,24)	(3,82)	(2,79)	(11)	
	[0,0519]	[–0,0030]		[$-0,358 \times 10^{-4}$]	[$-0,482 \times 10^{-4}$]		[0,0391]	[–0,825]			[–0,0112]	[0,1611]	[0,2318]	[0,1094]		
–7,7229	0,3037	0,3050	–0,00457	$-0,2678 \times 10^{-3}$	$-0,2222 \times 10^{-3}$	—	0,1959	–0,4947	–0,0709	–0,0990	—	—	—	—	326,63	1,03
(7,56)	(14,16)	(5,08)	(5,19)	(1,11)	(4,66)		(4,22)	(4,23)	(0,75)	(1,52)					(9)	
	[0,0564]	[–0,0011]		[$-0,497 \times 10^{-4}$]	[$-0,413 \times 10^{-4}$]		[0,0364]	[0,0919]	[–0,0132]	[–0,0184]						
–7,5472	0,2907	0,2903	–0,0045	$-0,3553 \times 10^{-3}$	—	–0,0374	0,1760	–0,4799	–0,0757	–0,1027	—	—	—	—	351,00	1,08
(7,44)	(13,92)	(5,01)	(5,14)	(1,52)		(3,91)	(3,81)	(4,12)	(0,80)	(1,59)					(9)	
	[0,0545]	[–0,0013]		[$-0,666 \times 10^{-4}$]		[–0,00701]	[0,0330]	[–0,090]	[–0,0142]	[–0,0193]						
–7,8907	0,3012	0,3068	–0,00461	$-0,2910 \times 10^{-3}$	$-0,2963 \times 10^{-3}$	—	0,2143	–0,4353	—	—	–0,0860	0,7634	1,0093	0,6278	356,88	1,25
(8,41)	(14,18)	(5,58)	(5,74)	(1,48)	(6,14)		(4,94)	(3,75)			(2,04)	(4,04)	(3,04)	(2,89)	(11)	
	[0,0513]	[–0,0012]		[$-0,50 \times 10^{-4}$]	[$-0,50 \times 10^{-4}$]		[0,0365]	[–0,0741]			[0,0146]	[0,1492]	[0,2129]	[0,1227]		
–7,6904	0,2880	0,3002	–0,00453	$-0,4078 \times 10^{-4}$	—	–0,0482	0,1876	–0,4115	—	—	0,0892	0,6509	0,9740	0,6383	325,89	1,19
(7,61)	(13,24)	(5,05)	(5,19)	(1,77)		(4,56)	(4,10)	(3,14)			(3,41)	(3,42)	(2,73)	(2,56)	(11)	
	[0,04859]	[–0,0014]		[$-0,688 \times 10^{-4}$]		[–0,00813]	[0,0316]	[–0,0694]			[0,0150]	[0,1242]	[0,2032]	[0,1241]		

FONTE: Oliveira (1978).

OBS.: 1) As duas primeiras linhas desta tabela contêm as estimativas baseadas na amostra que inclui todas as mulheres casadas; as duas linhas seguintes mostram as estimativas para a subamostra que inclui as mulheres casadas mas cujos maridos são os chefes da família; as quatro últimas linhas desta tabela contêm as estimativas baseadas na subamostra correspondente às mulheres casadas cujos maridos estão trabalhando.

2) Os números entre parênteses são os valores assintóticos da estatística t.

3) Os números entre colchetes indicam o efeito marginal da variável em questão sobre a participação da mulher casada na força de trabalho. Estes números são avaliados no ponto médio da amostra.

4) A elasticidade do salário implícito, na última coluna da tabela, é calculada no ponto médio da amostra.

decisão familiar, Oliveira introduz a variável salário do chefe da família como alternativa para uma das subamostras onde este dado é disponível e os resultados permanecem os mesmos, ou seja, o coeficiente é negativo e significativo.

As variáveis número de adultos, empregada doméstica e estado civil da mulher são todas significativas, têm o sinal positivo, evidenciando o fato de que elas influenciam a participação da mulher casada na força de trabalho na direção esperada.

Quanto às variáveis que representam o número de crianças na família, elas apresentam o sinal negativo esperado *a priori*. Todavia, apenas a variável que representa o número de crianças com menos de três anos de idade é significativa. Oliveira atribui este fato a problemas de multicolinearidade com as variáveis que representam o número de crianças nas faixas etárias de três a seis e de sete a 13 anos de idade. Devido a este fato, variáveis *dummy* foram introduzidas para crianças com menos de três anos de idade e para crianças com menos de 14 anos. Neste caso, as variáveis *dummy* se mostram, em geral, significativas, evidenciando, inclusive, que a existência de crianças com menos de três anos de idade tem um efeito mais pronunciado na não participação da mulher casada no mercado de trabalho.

O coeficiente da variável que representa a situação de emprego do chefe da família evidencia o fato de que o desemprego deste aumenta a probabilidade de participação da mulher casada na força de trabalho. Esse resultado evidencia que a "hipótese do trabalhador adicional" não é rejeitada para a amostra estudada.

No que diz respeito aos resultados da Tabela III.4, o fato de se ter utilizado diferentes amostras nas estimativas dos parâmetros da equação do salário oferecido não conduz, como no caso anterior, a resultados com diferenças pronunciadas, pois os valores das estimativas dos parâmetros são praticamente os mesmos.

Tabela III.4

Constante	Escolaridade (X_2)	Idade (X_{11})	(Idade)^2 (X_{12})	Índice T	R^2	F
—3,5054 (5,37)	0,1958 (12,45)	0,1389 (3,40)	—0,00169 (3,41)	—0,1381 (1,93)	0,50	86,88
—3,4278 (4.65)	0,1951 (9,57)	0,1422 (3,60)	—0,00184 (3,19)	- 0,5043 (0,67)	0,55	85,33
—3,5444 (4,67)	0,1984 (9,89)	0,1472 (3,65)	—0,00191 (3,25)	—0,6411 (0,88)	0,54	81,33
—3,239 (4,23)	0,1882 (9,18)	0,1380 (3,47)	—0,00178 (2,95)	—0,0208 (0,27)	0,53	80,95

FONTE: Oliveira (1978).

OBS: 1) A primeira linha desta tabela contém as estimativas baseadas na amostra que inclui todas as mulheres casadas; a segunda linha mostra as estimativas para a subamostra que inclui as mulheres casadas mas cujos maridos são os chefes da família; as duas últimas linhas desta tabela contêm as estimativas baseadas na subamostra correspondente às mulheres casadas cujos maridos estão trabalhando. 2) Os números entre parênteses são os valores assintóticos da estatística *t*.

Tabela III.5

Constante	Idade (X_{11})	(Idade)² (X_{12})	Rendimentos de Outras Fontes (Z_1)	Rendimentos de Outros Membros da Família (Z_2)	Número de Adultos (Z_3)	Número de Crianças (Z_4): < 3 (Z_{41})	3 — 6 (Z_{42})	7 — 13 (Z_{43})	< 14 (Z_{44})	Empregada Doméstica (Z_5)	Situação de Emprego do Chefe da Família (Z_6)	Estado Civil (Z_7)
1,55256	−0,06237	0,00126	$0,2273 \times 10^{-3}$	$0,2317 \times 10^{-3}$	−0,11059	0,30647	—	—	0,07099	−0,57942	—	−0,69100
1,3289	−0,03340	0,000869	$0,1094 \times 10^{-3}$	$0,1810 \times 10^{-2}$	−0,14666	0,30979			0,04203	−0,5280	−0,3661	−0,7098
1,65319	−0,05488	0,00113	$0,1917 \times 10^{-3}$	$0,1934 \times 10^{-3}$	0,14116	0,28673	—	—	0,05665	−0,50285	−0,41353	−0,66482
1,73156	−0,05817	0,00118	$0,2665 \times 10^{-3}$	0,03150	−0,12259	0,26890	—	—	0,05828	−0,42535	−0,41711	−0,63648

FONTE: Oliveira (1978).

OBS.: As estimativas da primeira linha desta tabela foram obtidas a partir das estimativas da primeira linha da Tabela III.4 e da segunda linha da Tabela III.3; as estimativas da segunda linha, a partir da segunda linha da Tabela III.4 e da quarta linha da Tabela III.3; as estimativas da terceira linha, a partir da terceira linha da Tabela III.4 e da penúltima linha da Tabela III.3; as estimativas da quarta linha desta tabela foram obtidas a partir das estimativas contidas na quarta linha da Tabela III.4 e na última linha da Tabela III.3.

Em virtude de se dispor de observações de salários somente para aquelas mulheres que estão participando na força de trabalho, existe um problema de tendenciosidade nas estimativas causado pelo problema de seletividade de amostra. A inclusão do índice T na equação de salário como variável adicional tem como objetivo eliminar a tendenciosidade causada por este problema. Todavia, os resultados da Tabela III.4 evidenciam que este viés não se constitui em problema para as amostras analisadas e, em geral, os coeficientes do índice T não são significativos.

As variáveis escolaridade, idade e idade elevada ao quadrado são bastante significativas. O perfil do salário tem o formato de U invertido como era de se esperar *a priori.*

A Tabela III.5 contém as estimativas da equação do preço sombra do tempo obtidas a partir das estimativas nas Tabelas III.3 e III.4, com o procedimento indicado quando tratamos do modelo logit. Oliveira não apresenta erros-padrão para essas estimativas e por isto a tabela não traz estes valores.

Os coeficientes das diversas variáveis apresentam o sinal esperado *a priori,* pois os rendimentos de outras fontes, os rendimentos provenientes do trabalho de outros membros da família e o número de crianças variam no mesmo sentido do preço sombra do tempo, enquanto as variáveis número de adultos, existência de empregadas domésticas na família, situação de emprego do chefe da família e estado civil da mulher casada apresentam um coeficiente negativo. Cabe ainda observar que o preço sombra do tempo da mulher em relação à idade tem um perfil do tipo U, apresentando, todavia, uma pequena curvatura. Este tipo de evidência é consistente com os resultados obtidos por outros pesquisadores para os Estados Unidos. Não obstante, são resultados que demandam uma explicação.

III.4 — Exercícios

1. A função-utilidade do consumidor é expressa por:

$$u(q, l) = A\ [\delta\ q^{-\rho} + (1 - \delta)\ l^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

Supondo-se que o salário-hora é igual a ω e que o total de rendimentos do capital é igual a R, derive a equação de oferta de horas de trabalho.

2. A partir da função-utilidade:

$$u(q, l) = q^{\alpha}\ l^{\beta}$$

a) Derive a equação de oferta de mão-de-obra.

b) Supondo que a renda do capital R é igual a zero, a elasticidade-preço compensada da oferta de mão-de-obra é igual a zero?

3. No modelo de alocação do tempo, admita que o indivíduo deriva satisfação do seu trabalho, de sorte que sua função-utilidade é expressa por $u(q, h, l)$, onde q é a quantidade de bens e serviços, h o número de horas trabalhadas e l o número de horas de lazer. Neste caso, o equilíbrio do consumidor será tal que o número de horas dedicadas ao trabalho será sempre positivo $(h > 0)$?

4. Um agricultor que produz apenas para sua própria subsistência defronta-se com a seguinte função de produção:

$$q = \gamma h^{\delta}, \quad 0 < \delta < 1$$

onde δ e γ são parâmetros. A função-utilidade deste agricultor é expressa por:

$$u = q^{\alpha} \, l^{\beta}$$

a) Quais os valores de equilíbrio de q e l?

b) Qual a equação de oferta de horas de trabalho?

c) A partir de que salário ele estaria disposto a abandonar a agricultura de subsistência?

d) Ilustre graficamente suas respostas.

5. A função-utilidade do indivíduo é dada por:

$$u\ (q,\ l) = \mu_1 \log\ (q - \gamma_1) + \mu_2 \log\ (l - \gamma_2)$$

onde μ_1, μ_2, γ_1 e γ_2 são parâmetros.

a) Qual a equação de oferta de horas de trabalho?

b) Calcule as funções-utilidade indireta e de custo.

c) Indique como você calcularia um índice verdadeiro de salário real a partir da construção de uma série para salários que mantivesse constante o nível de utilidade de um período considerado como base.

6. A função-utilidade de uma família com duas pessoas é dada por:

$$u\ (q,\ l_1,\ l_2) = q^{\alpha} \, l_1^{\beta} \, l_2^{\gamma}$$

onde l_1 e l_2 são os tempos que cada um gasta com lazer.

a) Quais são as equações de oferta de trabalho de cada membro?

b) Supondo-se que um dos membros não trabalha, qual a equação da oferta de trabalho do outro?

c) Qual o valor que o indivíduo que não trabalha atribui ao seu tempo?

7. A função-utilidade do consumidor é expressa por:

$$u = Z_1^{\alpha} \, Z_2^{\beta}$$

e as mercadorias Z_1 e Z_2 são produzidas de acordo com os seguintes processos de produção:

$$Z_1 = \min\ \{q_1,\ l_1\}$$

$$Z_2 = \min\ \left\{\frac{q_2}{2},\ l_2\right\}$$

a) Qual a curva de possibilidades de produção de Z_1 e Z_2 para um dado conjunto de preços?

b) Qual a equação de oferta de trabalho?

8. A função-utilidade do consumidor depende apenas de duas mercadorias, ou seja, $u = u(Z_1, Z_2)$, e elas são produzidas a partir das seguintes funções de produção:

$$Z_1 = \min \left\{ \frac{q_1}{\alpha_1}, \frac{l_1}{\beta_1} \right\}$$

$$Z_2 = \min \left\{ \frac{q_2}{\alpha_2}, \frac{l_2}{\beta_2} \right\}$$

Suponha que os dois bens, q_1 e q_2, são livres no sentido de que seus preços são iguais a zero.

Mostre como você analisaria as conseqüências de mudanças nos coeficientes técnicos do fator de produção tempo sobre o consumo das duas mercadorias.

9. Uma família tem preferências representadas pela seguinte função-utilidade:

$$u(B, T) = B^{\alpha} T^{1-\alpha}$$

onde T = transporte e B = outros bens.

a) Qual é a elasticidade-preço da demanda de transporte?

b) Qual é a elasticidade-renda da demanda de transporte?

Considere agora que a família produz transporte de acordo com a seguinte função de produção:

$$T = \min \{G, C\}$$

onde G = gasolina e C = serviços prestados pelo automóvel.

c) Qual é a elasticidade-preço da demanda de gasolina?

d) Qual é a elasticidade-renda da demanda de gasolina?

10. Certo ou Errado. Justifique a resposta:

a) No trecho em que a curva de oferta de trabalho tiver uma inclinação negativa, a elasticidade-preço é, em valor absoluto, inferior à unidade;

b) Quando a elasticidade-renda do lazer é igual a 1, a curva de oferta de trabalho não pode ter um trecho com inclinação negativa;

c) Quando o imposto sobre a renda do trabalho aumenta, o número de horas dedicadas ao lazer também aumenta;

d) O pagamento de um salário-hora mais elevado para horas extras trabalhadas diminui o número de horas dedicadas ao lazer;

e) O aumento do imposto de renda sobre rendimentos do capital diminui o número de horas dedicadas ao lazer.

III.5 — Bibliografia

Ashenfelter, O., e Heckmann. The estimation of income and substitution effects in a model of family labor supply. *Econometrica,* 42:73-85, 1974.

Becker, G. S. A theory of the allocation of time. *The Economic Journal,* pp. 493-517, 1965.

———. *Economic theory.* New York, Alfred A. Knopf, 1971.

Cain, G. G., e Watts, W. W. *Income maintenance and labor supply — econometric studies.* Chicago, Rand McNally, 1973.

Gregg, Lewis H. Hours of work and hours of leisure. In: Burton Jr., J. F., Benham, L. K., Vaughn III, W. M., e Flanagan, R. J., orgs. *Readings in labor market analysis.* New York, Holt, Rinehart and Winston, 1971.

Heckman, J. Shadow prices, market wages and labor supply. *Econometrica,* 42:679-94, 1974.

Intriligator, M. D. *Mathematical optimization and economic theory.* Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1971.

Kosters, M. H. *Income and substitution effects in a family labor supply model.* The Rand Corporation, 1966.

Mincer, J. Labor-force participation of married women. In: University National Bureau Commitee for Economic Research. *Aspects of labor economics.* Princeton, Princeton Univ. Press, 1962.

———. Labor-force participation and unemployment: a review of recent evidence. In: Gordon, R. A., e Gordon, M. S., orgs. *Prosperity and unemployment.* New York, John Wiley, 1966.

Oliveira, D. A. B. *Labour supply and employment in Belo Horizonte, Brazil.* Dissertação Doutoral inédita. The London School of Economics and Political Science, 1978.

Pollak, R. Conditional demand functions and consumption theory. *Quarterly Journal of Economics,* 83:209-27, 1969.

Roberts, B., e Schulze, D. L. *Modern mathematics and economic analysis.* New York, W. W. Norton, 1973.

Capítulo IV

ALOCAÇÃO INTERTEMPORAL

Este capítulo tem como objetivo aplicar a teoria do consumidor ao problema de alocação de recursos do consumidor, numa perspectiva intertemporal, em que as decisões são tomadas levando-se em conta um certo horizonte de tempo ao invés de envolverem apenas um único período. Este enfoque é adequado quando se quer compreender as decisões do consumidor com respeito à alocação dos seus recursos entre poupança, consumo, compra de bens duráveis de consumo e demanda de moeda.

O capítulo se inicia com uma breve resenha da função-consumo keynesiana que serviu de ponto de partida para trabalhos subseqüentes que enfocaram o consumo num contexto de alocação intertemporal do nível de riqueza. Depois de introduzir os elementos básicos da teoria fisheriana de escolha intertemporal, apresentamos três modelos baseados neste enfoque: a hipótese da renda relativa de Duesenberry, a hipótese do ciclo de vida de Modigliani-Brumberg-Ando e a hipótese da renda permanente de Friedman. No final da primeira seção discute-se a hipótese da poupança forçada que, segundo alguns economistas, seria um mecanismo através do qual a inflação beneficiaria o processo de crescimento econômico.

A segunda seção apresenta um modelo de alocação da riqueza entre bens de consumo e bens de consumo duráveis, introduzindo-se o conceito de custo de uso de um bem durável, que desempenha um papel bastante importante na determinação da quantidade demandada de bens de consumo duráveis.

A terceira seção apresenta a visão neoclássica da demanda de moeda, que é tratada de maneira similar a um bem de consumo durável, pois, de acordo com este enfoque, a moeda é demandada em função dos serviços que ela é capaz de prestar.

A quarta seção, eminentemente empírica, é dedicada à apresentação dos resultados de dois trabalhos sobre demanda de automóveis realizados no Brasil.

IV.1 — A Determinação do Consumo

IV.1.1 — A Hipótese da Renda Absoluta

Uma das principais contribuições de Keynes, sem dúvida alguma, foi a formulação da função-consumo. De acordo com Keynes (1936, p. 98), "a propensão a consumir é uma função bastante estável, de maneira que, em geral, o montante do consumo global depende principalmente do montante da renda global, ambas medidas em termos reais, sendo as mudanças na função consideradas de importância secundária". Em símbolos, esta proposição traduz-se através da equação:

$$c = f(y) \tag{1.1}$$

onde c é o consumo real total e y é a renda real.

IV.1.1.1 — A Lei Psicológica Fundamental

Keynes (1936, p. 99) prossegue afirmando que "a lei psicológica fundamental em que nos podemos basear com inteira confiança, tanto *a priori*, partindo do nosso conhecimento da natureza humana, como *a posteriori*, valendo-nos dos ensinamentos da experiência, consiste em que os homens estejam dispostos, de um modo geral e em média, a aumentar seu consumo à medida que sua renda cresça, embora não na mesma proporção". Esta proposição significa que a propensão marginal a consumir, definida como a derivada do consumo em relação à renda, é inferior à unidade e maior que zero, ou seja:

$$0 < \frac{dc}{dy} < 1 \tag{1.2}$$

IV.1.1.2 — Propensão Marginal a Consumir × Nível de Renda

Embora Keynes não dê grande ênfase ao assunto, ele sugere também que, após as necessidades básicas de um indivíduo e sua família estarem satisfeitas, uma proporção maior da renda será poupada quando essa aumentar. Esta proposição equivale a afirmar que a propensão marginal a consumir decresce com o aumento da renda:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dc}{dy}\right) = \frac{d^2c}{dy^2} < 0 \tag{1.3}$$

Além da renda, Keynes citou outros fatores objetivos que afetam o nível de consumo e listou ainda uma categoria de fatores secundários, de caráter subjetivo, que afetariam a propensão a consumir de um indivíduo. O leitor interessado deve consultar Keynes para um conhecimento mais detalhado desses fatores.

IV.1.1.3 — A Hipótese da Renda Absoluta

De um ponto de vista econométrico a especificação da função-consumo (1.1) é incompleta por várias razões. Em primeiro lugar, é imperativo que se escolha a forma funcional da equação (1.1). A maioria dos estudos pioneiros da função-consumo admitiu que a relação entre consumo e renda seria linear, isto é:

$$c = \alpha + \beta y \tag{1.4}$$

Observe-se, então, que a propensão marginal a consumir é constante e igual a β. Esta equação não comporta, portanto, a proposição contida na desigualdade (1.3), sugerida por Keynes, de que a propensão marginal a consumir decresce com o nível de renda. É interessante observar, ainda, que a forma linear admite implicitamente que a propensão média a consumir definida por

$$\frac{c}{y} = \alpha \frac{1}{y} + \beta \tag{1.5}$$

decresce com o aumento do nível de renda, pois à medida que y aumenta o termo α/y decresce, supondo-se que $\alpha > 0$.

IV.1.1.4 — Definição das Variáveis Renda e Consumo

Na especificação da função-consumo deve-se resolver o problema de definição das variáveis ou, em outras palavras, o que se deve entender por consumo e renda. Quanto à renda, a variável relevante é a renda disponível das famílias. No consumo deve-se incluir a compra de bens de consumo não duráveis e o valor dos serviços prestados pelo estoque de bens de consumo duráveis possuído pelas famílias. Isto significa dizer que a compra de bens de consumo duráveis durante o período não deve ser incluída no total do consumo. Contudo, em alguns casos, é bastante difícil atribuir um valor para os serviços prestados pelos bens de consumo duráveis, pois esses serviços, em geral, não são transacionados no mercado. Isso se deve ao fato de que o mercado de aluguel de bens de consumo duráveis, mesmo nos países mais desenvolvidos, é bastante incipiente. Tendo em vista a dificuldade de medir-se os serviços dos bens de consumo duráveis e, às vezes, a não desagregação dos dados de consumo na contabilidade nacional, muitas vezes obtidos por resíduo, um grande número de estudos utilizou a variável consumo como sendo os gastos com bens de consumo em geral, sejam duráveis ou não. É claro que esse porcedimento é incorreto. Todavia, representa um compromisso para que se possa estimar a função-consumo em um grande número de situações. Nessas circunstâncias, a especificação da função-consumo deve incorporar variáveis que expliquem o investimento bruto em bens de consumo duráveis, pois o consumo total é igual à soma do consumo propriamente dito com o investimento bruto em bens de consumo duráveis.

IV.1.1.5 — A Hipótese da Renda Absoluta Questionada

Logo após a II Guerra Mundial as estimativas da função-consumo então existentes nos Estados Unidos levaram a erros de previsões bastante grandes para o consumo. Estas previsões subestimaram o consumo e, em conseqüência, previram um nível de desemprego bastante elevado no período de pós-guerra, o que não ocorreu. Em decorrência, passou-se a questionar a hipótese da renda absoluta. Adicionalmente, dados levantados por Kuznets mostraram que, para os Estados Unidos, no longo prazo, a propensão média era igual à propensão marginal a consumir, em conflito com a formulação implícita na hipótese da renda absoluta. Por outro lado, estudos com observações de orçamentos familiares, também nos Estados Unidos, revelaram que a propensão a poupar aumentava com o nível de renda. É claro que esses dois tipos de evidências, aparentemente contraditórias, estavam a exigir uma formulação adequada da função-consumo.

A rejeição da hipótese da renda absoluta levou vários pesquisadores a procurarem formulações alternativas que fossem capazes de explicar a evidência empírica existente. O primeiro alvo nessa busca foi o exame mais aprofundado das fundações sobre as quais se assentava a função-consumo keynesiana. Como vimos, Keynes baseou sua formulação numa "lei psicológica fundamental", o que, do ponto de vista teórico, é deficiente, pois carece de uma teoria que explique o processo de decisão dos indivíduos no que diz respeito ao consumo. Nessa perspectiva, a função-consumo era uma hipótese à procura de uma teoria. Basicamente, a escolha do indivíduo na concepção keynesiana estava restrita às opções de consumir ou poupar a renda ganha no período considerado.

As teorias de consumo desenvolvidas a partir da década de 50 utilizaram-se da concepção fisheriana de que o consumo presente resulta de um processo de escolha intertemporal, isto é, da escolha entre consumo em diversos pontos do tempo, condicionado pela restrição orçamentária traduzida pela riqueza do indivíduo.

IV.1.2 — A Teoria Fisheriana da Escolha Intertemporal

Para fixarmos idéias, admitamos um consumidor com um horizonte de planejamento de dois anos. É claro que essa é uma hipótese simplista, que tem, porém, a vantagem de possibilitar tratarmos um problema complexo usando um gráfico com duas dimensões.

IV.1.2.1 — A Restrição Orçamentária do Consumidor

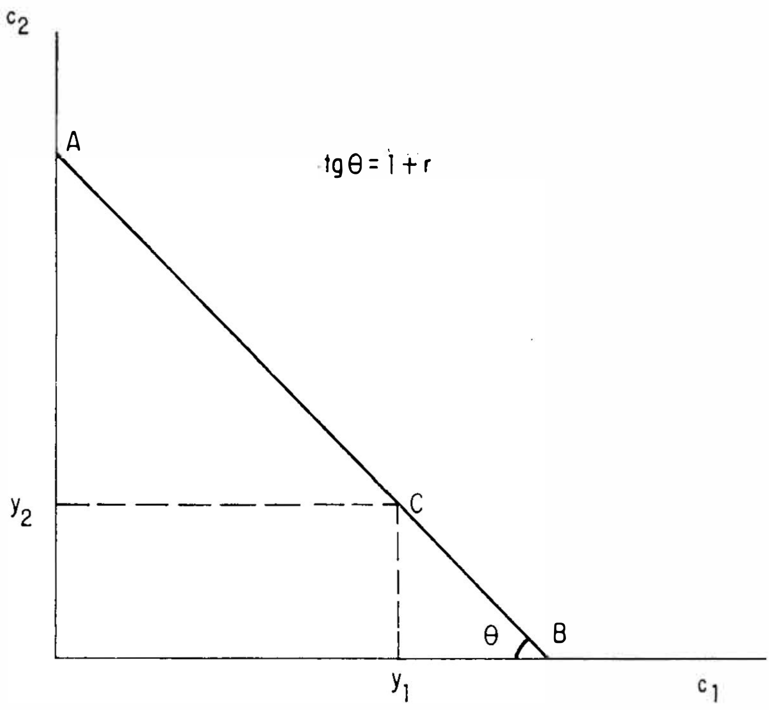
Prosseguindo, admitamos que o consumidor receba uma renda igual a y_1 no início do primeiro ano e uma renda y_2 no início do segundo. Suponhamos, também, que a taxa de juros de mercado seja constante e igual a r. O valor atual W do fluxo de rendimentos desse indivíduo no início do primeiro ano é dado por:

$$y_1 + \frac{y_2}{1+r} = W \qquad (1.6)$$

Graficamente, medindo-se o consumo realizado no segundo período no eixo vertical e o consumo relativo ao primeiro ano no eixo horizontal, a reta *AB* na Figura IV.1 traduz as possibilidades máximas existentes de consumo, para o indivíduo, nos dois períodos. O ponto *A* corresponde ao montante de consumo que o indivíduo poderia ter no segundo período caso não consumisse nada no anterior. Em contrapartida, o ponto *B* corresponde ao total de consumo que o indivíduo poderia ter no primeiro período na hipótese de não consumir nada no segundo.

Figura IV.1

A RESTRIÇÃO ORÇAMENTÁRIA DO CONSUMIDOR



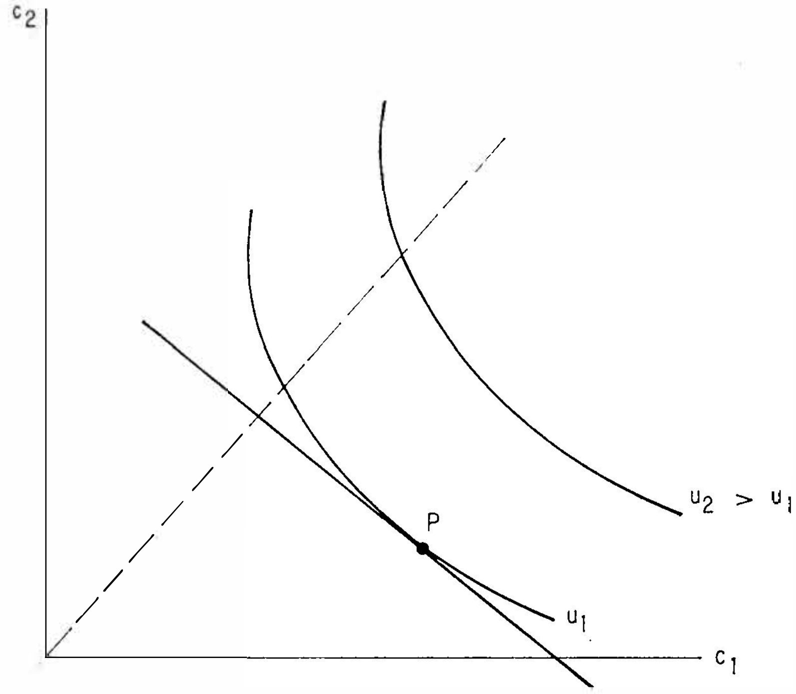
A tangente do ângulo θ mede a taxa pela qual o consumidor pode trocar quantidades consumidas nos dois períodos. Essa taxa é o preço do consumo no primeiro período em relação ao consumo no segundo período, que é igual a $(1+r)$. Portanto, quando a taxa de juros sobe (decresce), o consumo no primeiro período fica mais caro (barato) em relação ao consumo no segundo período.

IV.1.2.2 — Preferências do Consumidor: As Curvas de Indiferença

A teoria do consumidor admite que as curvas de indiferença traduzem os gostos e preferências do consumidor. Estas curvas de indiferença são decrescentes e convexas em relação à origem. A tangente em um ponto da curva de indiferença, por exemplo, no ponto *P* da Figura IV.2, mede a taxa (marginal) pela qual o consumidor está disposto a trocar consumo no primeiro por consumo no segundo período, ou seja, é a taxa de preferência intertemporal do consumidor.

Figura IV.2

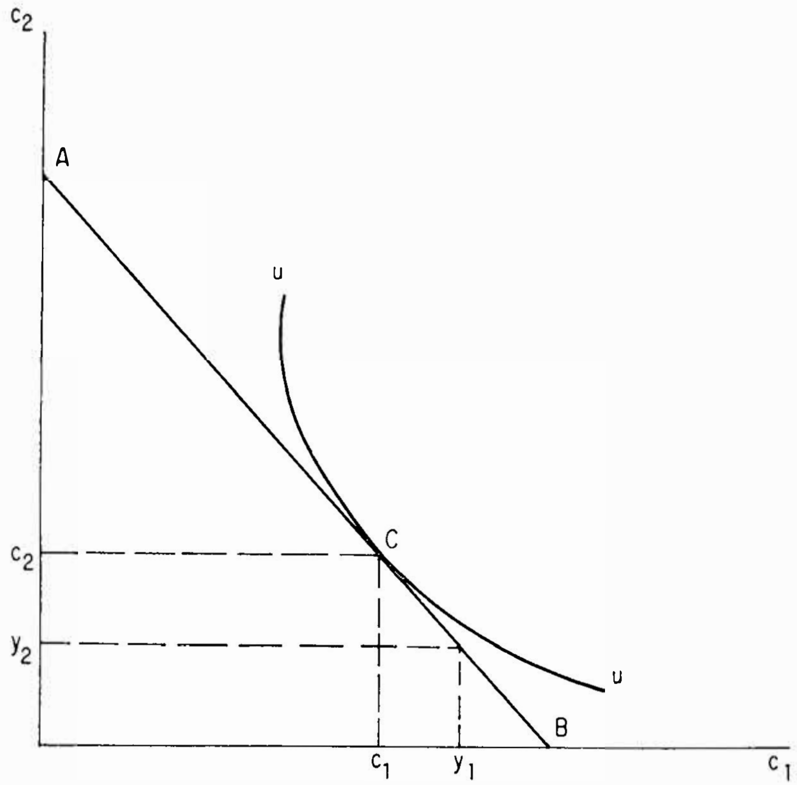
PREFERÊNCIAS DO CONSUMIDOR



IV.1.2.3 — A Estrutura de Consumo Ótima e a Função-Consumo

O problema do consumidor consiste em escolher os níveis de consumo nos dois períodos, c_1 e c_2, respectivamente, de tal maneira que sua restrição orçamentária seja satisfeita e que a utilidade derivada do fluxo do consumo seja máxima. A Figura IV.3 reúne os elementos fundamentais na escolha do con-

Figura IV. 3
EQUILÍBRIO DO CONSUMIDOR



sumidor: a reta de orçamento AB e a curva de indiferença u. O ponto C representa, então, a escolha ótima do consumidor. Portanto, o consumo em um período, digamos c_1, depende do nível de riqueza W e da taxa de juros r, isto é:

$$c_1 = f\ (W,\ r) \tag{1.7}$$

O excesso da renda sobre o consumo é igual à poupança no período, isto é:

$$s_1 = y_1 - c_1 = y_1 - f\,(W,\ r) \tag{1.8}$$

No exemplo da Figura IV.3, a poupança s_1 no primeiro período é positiva. Essa poupança é aplicada no mercado de capitais a uma taxa de juros r para fazer face ao excesso de consumo sobre a renda no segundo período.

IV.1.2.4 — Efeitos de Variação da Taxa de Juros sobre o Consumo

O aumento da taxa de juros r acarreta dois efeitos. O efeito-substituição indica que o consumidor irá substituir o produto que ficou mais caro, consumo no período 1, pelo produto que ficou mais barato, consumo no período 2. O efeito-renda refere-se ao efeito da variação da riqueza na variação do consumo. No caso de aumento da taxa de juros a riqueza decresce e na hipótese de que as elasticidades-riqueza sejam positivas o consumo nos dois períodos decresce. O efeito-preço é a soma algébrica dos efeitos-substituição e renda. É interessante notar que, dependendo da elasticidade-riqueza, o efeito-preço pode ter um sinal ambíguo e, em conseqüência, o aumento da taxa de juros pode fazer que a poupança tanto cresça como decresça.

A teoria que acabamos de apresentar ainda é bastante vaga quanto ao comportamento do consumidor. As teorias da função-consumo desenvolvidas a partir da década de 50 são mais explícitas quanto às hipóteses relativas às curvas de indiferenças do consumidor e, em conseqüência, produzem hipóteses mais específicas acerca da função-consumo, como veremos a seguir.

IV.1.3 — A Hipótese da Renda Relativa

A teoria da renda relativa desenvolvida por Duesenberry parte da hipótese de que as preferências dos consumidores são interdependentes, ao contrário da teoria tradicional que assume independência de preferências. Esta idéia ficou popularizada, inclusive nos países subdesenvolvidos, pelo "efeito-demonstração", o qual consiste no aumento do consumo por uma família devido ao contato com bens considerados superiores adquiridos por outras famílias. É importante ressaltar que este aumento de consumo não resulta de variações de preços ou de renda, mas sim da imitação por alguns indivíduos de padrões de consumo de outros membros da sociedade.

Analiticamente, a teoria da renda relativa parte de uma função-utilidade do tipo:

$$u_i = u_i\left(\frac{c_{i1}}{R_i}, \ldots, \frac{c_{in}}{R_i}, \frac{A_{i1}}{R_i}, \ldots, \frac{A_{in}}{R_i}\right) \qquad (1.9)$$

onde u_i indica a utilidade do consumidor i, c_{ik} o consumo do consumidor i no período k, A_{ik} o valor dos ativos que o consumidor i possui no período k e R_i é o consumo "médio" dos outros consumidores, isto é:

$$R_i = \sum_j \alpha_{ij} c_j$$

O coeficiente α_{ij} é o peso atribuído pelo consumidor i ao consumo do indivíduo j e c_j representa o consumo do consumidor j.

É importante observar que os argumentos da função-utilidade (1.9) dependem não só de variáveis controladas pelo consumidor a que se referem, mas também de variáveis concernentes a outros consumidores. Assim é que as variáveis consumo e ativo que entram em (1.9) estão divididas pelo índice R_i que mede a influência do padrão de consumo dos demais consumidores no i-ésimo consumidor.

A partir da função-utilidade (1.9) e da restrição orçamentária do consumidor i, obtém-se o consumo, ou seja:

$$\frac{c_i}{R_i} = f\left(\frac{y_{i1}}{R_i}, \ldots, \frac{y_{in}}{R_i}, \frac{A_i}{R_i}, r_1, \ldots, r_n\right) \tag{1.10}$$

onde $r_1, \ldots, r_n$ são as taxas de juros nos períodos 1, ..., n, respectivamente, e y_{ik} é a renda do consumidor i no período k.

IV.1.3.1 — A Taxa de Poupança no Longo Prazo Independe do Nível de Renda

Admitamos agora que a renda do indivíduo aumente de uma certa proporção k e que as seguintes variáveis ou relações permaneçam as mesmas: a) a distribuição de renda: b) a taxa de juros atual e as taxas de juros esperadas para o futuro; c) a relação entre as rendas atuais e as rendas esperadas no futuro; e d) a distribuição etária da população.

A primeira hipótese implica que todas as rendas aumentem na mesma proporção k e as três primeiras hipóteses, conjuntamente, implicam que os diversos ativos aumentem também na proporção k. Segue-se, então, que, se um conjunto de c_i é uma solução ótima para os consumidores, na nova situação de equilíbrio resultante do aumento de todas as rendas na proporção k, os consumos kc_i serão uma solução ótima. Logo, em equilíbrio, a taxa de poupança independe do nível de renda. Esta conclusão da teoria da renda relativa está de acordo com a evidência coletada por Kuznets, que mostra uma taxa de poupança constante no longo prazo.

A taxa de poupança agregada, apesar de ser independente, no longo prazo, do nível de renda absoluta, varia em função: a) da taxa de juros; b) da relação entre a renda corrente e a renda esperada; c) da distribuição da renda; d) da distribuição etária da população; e e) da taxa de crescimento da população.

Contudo, acredita Duesenberry que, devido a descontinuidades das funções de preferências dos indivíduos, somente mudanças substanciais nas variáveis acima provocariam alterações sensíveis na taxa de poupança agregada.

IV.1.3.2 — A Taxa de Poupança no Curto Prazo Depende do Nível de Renda

No curto prazo, em uma situação de desequilíbrio, quando a renda de um indivíduo aumenta em proporção k e as hipóteses assinaladas anteriormente são verificadas, observa-se que inicialmente o consumo dos outros indivíduos não aumenta. Em conseqüência, a relação y_i/R_i aumenta, pois R_i permanece estável. Segue-se que a taxa de poupança, inicialmente, aumenta. À medida que os demais membros da sociedade vão ajustando seus padrões de consumo face ao aumento da renda ocorrido, o consumo do indivíduo i vai aumentando também e eventualmente a taxa de poupança volta à posição inicial de equilíbrio de longo prazo. Conclui-se, então, a partir dessa análise, que num dado ponto do tempo a taxa de poupança será maior para aqueles indivíduos com uma renda relativamente maior do que para aqueles que têm uma renda relativamente menor. Esta conclusão concorda com a evidência obtida a partir dos estudos de orçamentos familiares de que a taxa de poupança aumenta com o nível de renda.

IV.1.3.3 – Um Modelo para Dados de Séries Temporais

As principais idéias da hipótese da renda relativa podem ser incorporadas num modelo bastante simples para ser aplicado a dados de séries temporais. Com efeito, Duesenberry propôs uma equação em que a taxa de poupança é função da razão entre a renda corrente e a maior renda verificada no passado (= pico prévio da renda):

$$\frac{s_t}{y_t} = a \frac{y_t}{y_0} + b, \qquad \begin{array}{l} a > 0 \\ b < 0 \end{array} \qquad (1.11)$$

onde s_t é a poupança no período t, y_t a renda disponível no período t e y_0 é a maior renda verificada antes do período t.

Quando $y_t = y_0$, a taxa de poupança independe do nível de renda, pois, da equação anterior, resulta:

$$\frac{s_t}{y_t} = a \frac{y_t}{y_t} + b = a + b$$

A taxa de poupança é então constante e igual a $a + b$.

Durante períodos em que a renda y_t é menor do que o pico prévio de renda y_0, a taxa de poupança aumenta com o nível de renda desde que $a > 0$.

Quando a renda é sempre crescente, o pico prévio da renda coincide com a renda do período anterior. Nesse caso, a especificação da equação (1.11) passa a ser dada por:

$$\frac{s_t}{y_t} = a \frac{y_t}{y_{t-1}} + b$$

IV.1.4 — A Hipótese do Ciclo da Vida

A hipótese do ciclo da vida, devida a Ando-Brumberg-Modigliani, baseia-se no fato de que um indivíduo com um período adicional L de vida trabalha durante N períodos e permanece aposentado os restantes $M = L - N$ anos de sua vida. Considere, então, um indivíduo com uma idade T e admita que estamos no ano t. Para esse indivíduo, o fluxo de consumo no período restante de sua vida será dado por:

$$c_t, c_{t+1}, \ldots, c_{t+L}$$

onde c_i indica o consumo do indivíduo no i-ésimo período. A utilidade associada a este fluxo de consumo é expressa por:

$$u(c_t, c_{t+1}, \ldots, c_{t+L}) \tag{1.12}$$

Esta função-utilidade admite implicitamente que o indivíduo não deriva qualquer utilidade de uma herança que porventura venha a deixar para seus herdeiros. Entretanto, não seria difícil incluir a herança que o indivíduo planejasse deixar como uma variável adicional na função-utilidade, e os resultados a serem obtidos a seguir não seriam substancialmente alterados.

IV.1.4.1 – A Restrição Orçamentária do Consumidor

O fluxo de rendimentos reais provenientes do trabalho, durante a parte da vida em que o indivíduo está trabalhando, é dado por:

$$\omega_t, \omega^e_{t+1}, \ldots, \omega^e_{t+N}$$

onde ω_t é a renda do trabalho obtida no período t e ω^e_i é a renda esperada do trabalho no i-ésimo ano.

Na hipótese de que a taxa de juros seja igual a r e invariável com o tempo, a riqueza atual do indivíduo é:

$$W_t = W_{t-1} + \omega_t + \sum_{i=t+1}^{t+N} \frac{\omega^e_i}{(1+r)^{i-t}} \tag{1.13}$$

onde W_{t-1} é o patrimônio do indivíduo no início do período t e supõe-se que os rendimentos do trabalho são recebidos no início de cada período.

Levando-se em conta a hipótese de que o indivíduo não pretenda deixar nem tampouco espere receber herança durante o período de vida que lhe resta, o valor atual do fluxo de despesas com consumo deve ser igual ao valor atual de sua riqueza:

$$\sum_{i=t}^{t+L} \frac{c_i}{(1+r)^{i-t}} = W_{t-1} + \omega_t + \sum_{i=t+1}^{t+N} \frac{\omega^e_i}{(1+r)^{i-t}} \tag{1.14}$$

Em outras palavras, esta expressão afirma que o consumidor irá gastar todo o seu patrimônio, durante sua vida, na aquisição de bens e serviços de consumo.

IV.1.4.2 — A Seleção do Fluxo Ótimo de Consumo

O indivíduo escolhe, de acordo com a teoria do consumidor, o fluxo de consumo ótimo maximizando a função-utilidade, de tal maneira que o seu orçamento seja satisfeito. O problema do consumidor consiste, então, em maximizar a função-utilidade

$$u(c_t, c_{t+1}, \ldots, c_{t+L})$$

com a condição de que a restrição orçamentária seja satisfeita:

$$\sum_{i=t}^{t+L} \frac{c_i}{(1+r)^{i-t}} = W_{t-1} + \omega_t + \sum_{i=t+1}^{t+N} \frac{\omega_i^e}{(1+r)^{i-t}}$$

Esta formulação, entretanto, é bastante ampla. A teoria do ciclo da vida, da mesma forma que a teoria da renda permanente, como veremos adiante, é mais específica acerca da função-utilidade ao assumir que:

"A função-utilidade é homogênea com respeito ao consumo em diferentes pontos de tempo; ou, equivalentemente, se o indivíduo recebe uma unidade adicional de riqueza, ele irá alocar esta unidade no consumo em diferentes pontos do tempo na mesma proporção em que teria alocado sua riqueza total antes deste acréscimo" [Ando-Modigliani (1963, p. 56)].

Esta hipótese implica, como será mostrado depois, que a estrutura de consumo é determinada por:

$$\begin{aligned} c_{t+1} &= k_1 c_t \\ c_{t+2} &= k_2 c_t \\ &\vdots \\ c_{t+L} &= k_L c_t \end{aligned}$$

onde k_i, $i = 1, 2, \ldots, L$, independe do nível de riqueza total W_t, porém depende da taxa de juros e da função-utilidade. Substituindo estes valores na restrição orçamentária (1.14), obtemos:

$$c_t + \frac{k_1 c_t}{(1+r)} + \frac{k_2 c_t}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{k_L c_t}{(1+r)^L} =$$

$$= W_{t-1} + \omega_t + \sum_{i=t+1}^{t+N} \frac{\omega_i^e}{(1+r)^{i-t}}$$

Colocando c_t em evidência na expressão acima, temos:

$$c_t \left[1 + \frac{k_1}{(1+r)} + \frac{k_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{k_L}{(1+r)^L} \right] =$$

$$= W_{t-1} + \omega_t + \sum_{i=t+1}^{t+N} \frac{\omega_i^e}{(1+r)^{i-t}}$$

Concluímos, a partir desta equação, que o consumo do indivíduo com uma idade T no período t é proporcional à riqueza total do indivíduo no início deste período:

$$c_t = k^T \left[W_{t-1} + \omega_t + \sum_{i=t+1}^{t+N} \frac{\omega_i^e}{(1+r)^{i-t}} \right] \tag{1.15}$$

onde o coeficiente de proporcionalidade k^T é expresso por:

$$k^T = \left[1 + \frac{k_1}{(1+r)} + \frac{k_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{k_L}{(1+r)^L} \right]^{-1}$$

O coeficiente k^T depende, portanto, da taxa de juros e da função-utilidade, a qual traduz os gostos e preferências do consumidor.

A renda média anual esperada do indivíduo pode ser definida através de:

$$\bar{\omega}_t^e = \frac{1}{N} \sum_{i=t+1}^{t+N} \frac{\omega_i^e}{(1+r)^{i-t}}$$

Substituindo-se esta expressão em (1.15), resulta:

$$c_t = k^T W_{t-1} + k^T \omega_t + k^T N \bar{\omega}_t^e$$

IV.1.4.3 — O Problema de Agregação

O consumo c_t dado pela equação anterior expressa, como já frisamos anteriormente, o consumo no ano t de um indivíduo com a idade T. Para obtermos o consumo de todos os indivíduos com a idade T no período t, temos que somar o consumo de todos os indivíduos com esta idade, ou seja:

$$c_t^* = \sum c_t = \left(\frac{\sum k^T W_{t-1}}{W_{t-1}^*} \right) W_{t-1}^* + \left(\frac{\sum k^T \omega_t}{\omega_t^*} \right) \omega_t^*$$
$$+ \left(\frac{\sum k^T N \bar{\omega}_t^e}{(\omega_t^e)^*} \right) (\omega_t^e)^* \tag{1.16}$$

onde as variáveis com asteriscos referem-se a totais para os indivíduos com a idade T e os sinais de somatórios devem ser entendidos como referindo-se à soma para todos os indivíduos com idade T. Os coeficientes de W_{t-1}, ω_t^* e $(\omega_t^e)^*$ são médias ponderadas dos coeficientes k, isto é:

$$\alpha^* = \sum k^T \frac{W_{t-1}}{W_{t-1}^*}, \qquad W_{t-1}^* = \sum W_{t-1}$$

$$\beta^* = \sum k^T \frac{\omega_t}{\omega_t^*}, \qquad \omega_t^* = \sum \omega_t$$

$$\gamma^* = \sum k^T N \frac{\bar{\omega}_t^e}{(\omega_t^e)^*}, \qquad (\omega_t^e)^* = \sum \bar{\omega}_t^e$$

Usando esta notação, podemos escrever a equação (1.16) na seguinte forma:

$$c_t^* = \alpha^* \; W_{t-1}^* + \beta^* \; \omega_t^* + \gamma^* \; (\omega_t^e)^*$$

O consumo total será igual à soma dos consumos dos indivíduos com diferentes idades no período t, ou seja:

$$c_t = \Sigma \; c_t^*$$

Este processo de agregação não é tão simples, pois algumas hipóteses precisam ser feitas para que a agregação conduza a resultados manejáveis. Por ora, basta afirmar que dentro de certas hipóteses a agregação dos consumos dos indivíduos com idades diferentes conduz à seguinte equação para o consumo total c_t no período t: [1]

$$c_t = \alpha W_{t-1} + \beta\omega_t + \gamma\omega_t^e \tag{1.17}$$

onde W_{t-1} é o total da riqueza da comunidade no início do período t, ω_t é a renda total do trabalho durante o período t e ω_t^e é a renda média esperada do trabalho no início do ano t.

IV.1.4.4 — A Homogeneidade de Função-Utilidade

Uma hipótese básica da teoria do ciclo da vida é de que a função-utilidade (1.12) é homogênea com relação ao consumo em diferentes pontos do tempo. Segue-se então que:

$$u \; (\mu c_t, \; \mu c_{t+1}, \; \ldots, \; \mu c_{t+L}) = \mu^m \quad u \, (c_t, \; c_{t+1}, \; \ldots, \; c_{t+L})$$

onde μ é um fator de proporcionalidade e $m > 0$ é o grau de homogeneidade da função-utilidade. Fazendo-se $\mu = 1/c_t$, obtém-se a partir da equação anterior a expressão:

$$u \, (c_t, \; c_{t+1}, \; \ldots, \; c_{t+L}) = c_t^m \; u \left(1, \; \frac{c_{t+1}}{c_t}, \; \frac{c_{t+2}}{c_t}, \; \ldots, \; \frac{c_{t+L}}{c_t} \right)$$

IV.1.4.5 — A Determinação da Estrutura Ótima de Consumo

Denominando as proporções c_{t+1}/c_t, c_{t+2}/c_t, $\ldots$, c_{t+L}/c_t de k_1, k_2, $\ldots$, k_L, respectivamente, temos que:

$$u \, (c_t, \; c_{t+1}, \; \ldots, \; c_{t+L}) = c_t^m \; u \, (1, \; k_1, \; k_2, \; \ldots, \; k_L)$$

[1] Utilizaremos a letra c para denotar também o consumo total. Ficará claro no texto quando este símbolo se referir ao indivíduo.

Com a finalidade de maximizar a função-utilidade (1.12) sujeita à restrição orçamentária (1.13), formamos a equação de Lagrange:

$$l = c_t^m \, u(1, k_1, k_2, \ldots, k_L)$$
$$+ \lambda^* \left\{ W_t - c_t \left[1 + \frac{k_1}{(1+r)} + \frac{k_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{k_L}{(1+r)^L} \right] \right\}$$

Nesta expressão levamos em conta a homogeneidade da função-utilidade e escrevemos a restrição orçamentária usando os parâmetros k_i ao invés dos níveis de consumo dos períodos subseqüentes a t. Observe, então, que o problema da escolha de $c_t, c_{t+1}, \ldots, c_{t+L}$ é equivalente ao problema de escolha de $c_t, k_1, k_2, \ldots, k_L$. As condições de primeira ordem para a maximização de l com respeito a $c_t, k_1, k_2, \ldots, k_L$ são dadas por:

$$\frac{\partial l}{\partial c_t} = m c_t^{m-1} u(1, k_1, k_2, \ldots, k_L) - \lambda^* \left[1 + \frac{k_1}{(1+r)} + \ldots + \frac{k_L}{(1+r)^L} \right] = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial k_1} = c_t^m \frac{\partial u}{\partial k_1} - \lambda^* c_t \frac{1}{(1+r)} = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial k_2} = c_t^m \frac{\partial u}{\partial k_2} - \lambda^* c_t \frac{1}{(1+r)^2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial l}{\partial k_L} = c_t^m \frac{\partial u}{\partial k_L} - \lambda^* c_t \frac{1}{(1+r)^L} = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda^*} = W_t - c_t \left[1 + \frac{k_1}{(1+r)} + \ldots + \frac{k_L}{(1+r)^L} \right] = 0$$

É fácil concluir a partir deste sistema de equações que os valores de $k_1, k_2, \ldots, k_L$ independem do nível de riqueza W_t.

IV.1.4.6 – Renda Esperada: As Hipóteses de Ando-Modigliani

A função-consumo, de acordo com a hipótese do ciclo de vida, é expressa por (1.17), a qual repetimos por conveniência:

$$c_t = \alpha W_{t-1} + \beta \omega_t + \gamma \omega_t^e \qquad (1.18)$$

Esta equação para ser estimada requer valores do consumo c_t, da riqueza W_{t-1}, da renda ω_t e da renda esperada ω_t^e. Esta última variável não é observada e, em conseqüência, temos que formular alguma hipótese que relacione ω_t^e com variáveis que possam ser observadas. Ando e Modigliani sugeriram três hipóteses que passamos a descrever.

Hipótese 1. A primeira hipótese de Ando-Modigliani é bastante simples e supõe que a renda esperada é proporcional à renda observada:

$$\omega_t^e = \Theta\omega_t$$

onde o coeficiente de proporcionalidade Θ é aproximadamente igual a 1. Neste caso, a função-consumo (1.18) reduz-se a:

$$c_t = \alpha W_{t-1} + \beta_1\omega_t \tag{1.19}$$

onde $\beta_1 = \beta + \Theta\gamma$.

Hipótese 2. A segunda hipótese sugerida, porém não utilizada, por Ando-Modigliani é a de que a renda média esperada pode ser aproximada por uma média geométrica decrescente das rendas passadas, isto é:

$$\omega_t^e = \frac{1-\lambda}{1-\lambda L}\,\omega_t,\ 0 \leqslant \lambda < 1 \tag{1.20}$$

onde L é o operador de defasagens: $L^i X_t = X_{t-i}$.

Combinando-se as equações (1.20) e (1.18), tem-se:

$$c_t = \alpha W_{t-1} + \beta\omega_t + \gamma\,\frac{(1-\lambda)}{1-\lambda L}\,\omega_t$$

Multiplicando-se ambos os lados desta equação por $(1 - \lambda L)$ e rearranjando os termos, obtém-se:

$$c_t = \lambda c_{t-1} + \alpha W_{t-1} - \alpha\lambda W_{t-2} + [\beta + \gamma\ (1-\lambda)]\ \omega_t - \beta\lambda\omega_{t-1} \tag{1.21}$$

Observe-se que nesta equação existem quatro coeficientes a estimar, α, β, γ e λ, e cinco variáveis independentes, c_{t-1}, W_{t-1}, W_{t-2}, ω_t e ω_{t-1}. A equação é, portanto, superidentificada.

Hipótese 3. A terceira hipótese de Ando-Modigliani, quanto à renda esperada ω_t^e, leva em conta o fato de que parte da mão-de-obra, em geral, está desempregada. Neste caso, a renda média esperada para aqueles que estão empregados é proporcional à renda média deste grupo, isto é:

$$\omega_t^e = b_1\,\frac{\omega_t}{M_t}$$

onde M_t é o total das pessoas empregadas e o valor de b_1 é próximo da unidade. Para aqueles que estão desempregados admite-se que a renda média esperada é também proporcional à renda média daqueles que estão empregados, porém o coeficiente de proporcionalidade é bastante inferior ao daqueles que estão empregados, isto é:

$$(\omega_t^e)^d = b_2 \frac{\omega_t}{M_t},\ b_2 << b_1$$

onde $(\omega_t^e)^d$ representa a renda média esperada para os trabalhadores que estão desempregados.

A renda total esperada é, portanto, igual à soma da renda esperada dos que estão empregados e daqueles que estão desempregados:

$$\omega_t^e = M_t \omega_t^e + D_t (\omega_t^e)^d = M_t b_1 \frac{\omega_t}{M_t} + (P_t - M_t)\, b_2 \frac{\omega_t}{M_t} =$$

$$= (b_1 - b_2)\,\omega_t + b_2 \frac{P_t}{M_t}\,\omega_t$$

onde $P_t = M_t + D_t$ é o total da força de trabalho. Substituindo-se o valor de ω_t^e na equação (1.18), obtém-se:

$$c_t = \alpha W_{t-1} + \beta\omega_t + \gamma\,(b_1 - b_2)\,\omega_t + \gamma b_2 \frac{P_t}{M_t}\,\omega_t$$

Simplificando-se a equação acima, resulta:

$$c_t = \alpha W_{t-1} + [\beta + \gamma\,(b_1 - b_2)]\,\omega_t + \gamma b_2 \frac{P_t}{M_t}\,\omega_t \qquad (1.22)$$

Se b_1 for próximo de 1, segue-se que:

$$\beta + \gamma\,(b_1 - b_2) + \gamma b_2 \cong \beta + \gamma$$

ou seja, a soma dos coeficientes de ω_t e $(P_t/M_t)\,\omega_t$ é aproximadamente igual à soma dos coeficientes de ω_t e ω_t^e.

IV.1.4.7 — Inexistência de Dados sobre Riqueza

Além da formulação de alguma hipótese relativa à renda esperada ω^e, a estimação da função-consumo (1.18) pressupõe a existência de dados de riqueza. Nem sempre isto é possível. Contudo, este problema pode ser contornado tendo em vista que o acréscimo de riqueza entre dois períodos é igual à poupança realizada durante o período:

$$W_{t-1} = s_{t-1} + W_{t-2}$$

onde s_{t-1} é a poupança no período $t - 1$. Quando a renda esperada for especificada de acordo com a primeira hipótese de Ando-Modigliani, podemos proceder do seguinte modo. Subtraindo-se da equação (1.19) a mesma equação defasada de um período, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
c_t - c_{t-1} &= \alpha\,(W_{t-1} - W_{t-2}) + \beta_1(\omega_t - \omega_{t-1}) = \\
&= \alpha s_{t-1} + \beta_1(\omega_t - \omega_{t-1})
\end{aligned} \tag{1.23}
$$

A expressão que aparece depois do segundo sinal de igualdade na equação anterior foi obtida levando-se em conta a igualdade entre poupança e variação do nível de riqueza.

A estimação da equação (1.23) requer apenas dados de consumo, renda e poupança, dispensando, portanto, dados de riqueza.

Observando-se que a poupança no período $t - 1$ é igual ao excesso da renda total y_{t-1} sobre o consumo naquele período,

$$s_{t-1} = y_{t-1} - c_{t-1}$$

a equação (1.23) passa a ser escrita na seguinte forma:

$$c_t = (1 - \alpha)\,c_{t-1} + \alpha y_{t-1} + \beta_1(\omega_t - \omega_{t-1}) \tag{1.24}$$

Note que nesta equação a soma dos coeficientes de c_{t-1} e y_{t-1} é igual à unidade.

Nos parágrafos acima mostramos como evitar o problema que ocorre quando não existem dados sobre riqueza para o caso da primeira hipótese da renda esperada sugerida por Ando-Modigliani. O mesmo procedimento poderia ser desenvolvido para as demais hipóteses desses autores.

IV.1.4.8 — Implicações da Hipótese do Ciclo da Vida: A Propensão a Consumir no Longo Prazo

Como já assinalamos anteriormente, um dos fatos empíricos observados para a economia americana é que, no longo prazo, a propensão marginal a consumir é igual à propensão média a consumir. A hipótese do ciclo da vida é consistente com esse fato, como veremos a seguir.

Para tal finalidade, admita que a taxa de crescimento da renda proveniente do trabalho é constante e igual a η_ω e que a taxa de retorno do patrimônio é constante e igual a r. Portanto, no ano t a renda total y_t da coletividade é igual à soma da renda proveniente do trabalho ω_t mais a renda rW_{t-1} proveniente dos ativos que os indivíduos possuem:

$$y_t = \omega_t + rW_{t-1}$$

Substituindo-se o valor de ω_t dado por esta expressão na função-consumo (1.19), tem-se:

$$c_t = \alpha W_{t-1} + \beta_1(y_t - rW_{t-1}) = \beta_1 y_t + (\alpha - r\beta_1)\,W_{t-1} \tag{1.25}$$

A poupança no período t é igual ao excesso da renda sobre o consumo:

$$s_t = y_t - c_t \tag{1.26}$$

Combinando-se as equações (1.26) e (1.25), obtém-se:

$$s_t = (1 - \beta_1)\, y_t - (\alpha - r\beta_1)\, W_{t-1}$$

Tendo em vista que a poupança é igual ao acréscimo de riqueza no período, $s_t = W_t - W_{t-1}$, a taxa de crescimento da riqueza no período t é igual a:

$$\eta = \frac{W_t - W_{t-1}}{W_{t-1}} = \frac{(1 - \beta_1)\, y_t}{W_{t-1}} - (\alpha - r\beta_1) =$$

$$= \eta_\omega + (1 - \beta_1)\left[\frac{y_t}{W_{t-1}} - \frac{\eta_\omega + \alpha - r\beta_1}{1 - \beta_1}\right] \tag{1.27}$$

Denominando-se por h a expressão:

$$h = \frac{\eta_\omega + \alpha - r\beta_1}{1 - \beta_1}$$

a equação (1.27) passa a ser escrita como:

$$\eta = \eta_\omega + (1 - \beta_1)\left[\frac{y_t}{W_{t-1}} - h\right] \tag{1.28}$$

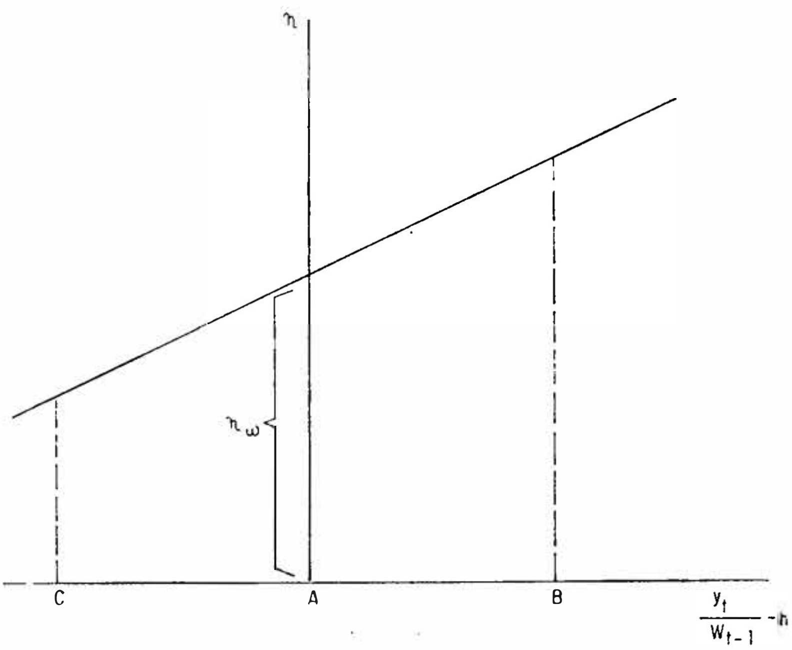
A partir desta equação podemos concluir que, se a razão entre a renda total no período t e a riqueza patrimonial no início desse período for superior a h, a taxa de crescimento do patrimônio será superior à taxa de crescimento da renda do trabalho no ano t. A Figura IV.4 mede no eixo vertical a taxa de crescimento da riqueza patrimonial e no eixo horizontal a diferença entre a razão y_t/W_{t-1} e o parâmetro h. Quando $y_t/W_{t-1} > h$, a taxa de crescimento da riqueza tende a baixar (movimento de B em direção a A). Da mesma forma, quando $y_t/W_{t-1} < h$, a taxa de crescimento da riqueza η tende a aumentar. Portanto, no longo prazo y_t/W_{t-1} converge para h, isto é: $y_t/W_{t-1} = h$, no longo prazo.

A propensão média a consumir no longo prazo, obtida a partir de (1.25) e do fato de que $h = y_t/W_{t-1}$ é dada por:

$$\frac{c_t}{y_t} = \beta_1 + (\alpha - r\beta_1)\frac{W_{t-1}}{y_t} = \beta_1 + \frac{\alpha - r\beta_1}{h} \tag{1.29}$$

Esta equação mostra claramente que a propensão média a consumir no longo prazo independe do nível de renda. É interessante observar que, na hipótese

Figura IV.4
CONVERGÊNCIA DE TAXA DE CRESCIMENTO DA RIQUEZA



de a taxa de crescimento da renda do trabalho ser igual a zero, o parâmetro h assume o valor:

$$h = \frac{\alpha - r\beta_1}{1 - \beta_1}$$

Portanto, nesse caso particular, a propensão média a consumir é igual a 1:

$$\frac{c_t}{y_t} = \beta_1 + \frac{\alpha - r\beta_1}{\alpha - r\beta_1} \cdot (1 - \beta_1) = 1$$

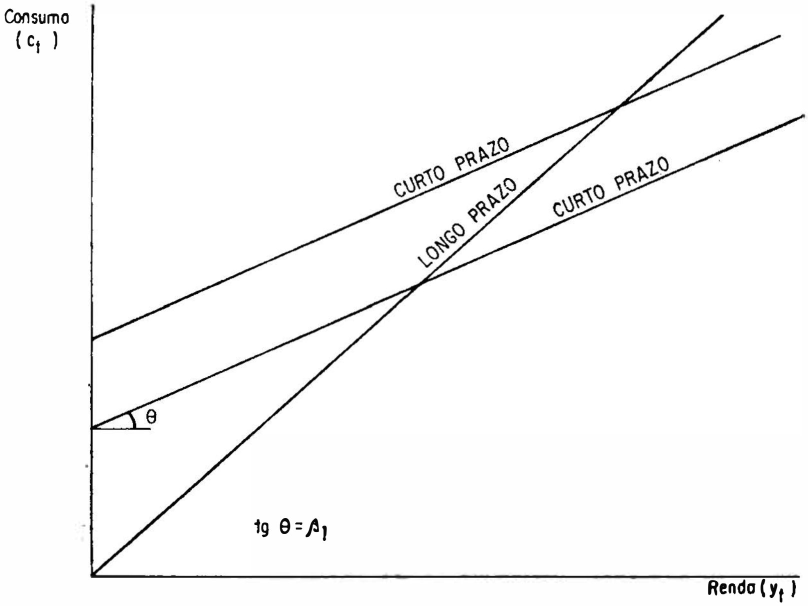
ou seja, se a renda do trabalho for estacionária, a riqueza da economia não estará aumentando porque toda renda estaria sendo usada no consumo de bens e serviços.

IV.1.4.9 – Curto $\times$ Longo Prazo

A Figura IV.5 mostra as equações de consumo para o curto e para o longo prazo. No longo prazo, a propensão média é igual à propensão marginal. No curto prazo, de acordo com (1.25), a propensão marginal é inferior à propensão média, conforme a evidência empírica baseada em dados de orçamentos familiares.

Figura IV . 5

CONSUMO: CURTO X LONGO PRAZO



IV.1.4.10 — Inexistência de Dados de Patrimônio e de Rendimentos do Trabalho

Em algumas circunstâncias não se dispõe de dados relativos ao patrimônio nem tampouco sobre os rendimentos do trabalho. Mesmo neste caso ainda é possível testar a hipótese do ciclo da vida. Sem embargo, admita-se que a função-consumo seja especificada por:

$$c_t = \alpha W_{t-1} + \beta_1 \omega_t + \varepsilon_t \qquad (1.30)$$

onde adicionou-se a variável estocástica ε_t à equação (1.19). Subtraindo-se da equação (1.30) a mesma equação defasada de um período, obtém-se:

$$c_t - c_{t-1} = \alpha (W_{t-1} - W_{t-2}) + \beta_1 (\omega_t - \omega_{t-1}) + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

Por outro lado, sabe-se que $y_t = \omega_t + rW_{t-1}$. Logo:

$$y_t - y_{t-1} = \omega_t - \omega_{t-1} + r (W_{t-1} - W_{t-2})$$

Substituindo-se o valor de $\omega_t - \omega_{t-1}$ desta equação na expressão anterior, resulta:

$$c_t - c_{t-1} = (\alpha - \beta_1 r) (W_{t-1} - W_{t-2}) + \beta_1 (y_t - y_{t-1}) + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

Levando-se em conta o fato de que $W_{t-1} - W_{t-2}$ é igual à poupança s_{t-1}, que por sua vez é igual à diferença entre a renda e o consumo em $t - 1$, a equação acima reduz-se a:

$$c_t = (1 - \alpha + \beta_1 r)\, c_{t-1} + (\alpha - \beta_1 r - \beta_1)\, y_{t-1} + \\ + \beta_1 y_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} \qquad (1.31)$$

Nesta equação as variáveis independentes são o consumo defasado, a renda total defasada e a renda total no período corrente. Conseqüentemente, nesta formulação não se precisa de dados sobre patrimônio e rendimentos do trabalho. Observe-se ainda que na equação acima a soma dos coeficientes de c_{t-1}, y_t e y_{t-1} é igual à unidade. Cabe ressaltar que o processo de estimação dos parâmetros da equação (1.31) dependerá das propriedades que se atribuir à parte estocástica da equação.

IV.1.5 – A Hipótese da Renda Permanente

A teoria da renda permanente desenvolvida por Friedman assemelha-se bastante à teoria do ciclo da vida de Modigliani-Brumberg-Ando. Com efeito, Friedman partiu também da função-utilidade intertemporal:

$$u\,(c_t,\ c_{t+1},\ \ldots,\ c_{t+L})$$

e da restrição orçamentária:

$$W_t = \sum_{i=t}^{t+L} \frac{c_i}{(1+r)^{i-t}}$$

para obter, com auxílio da hipótese de homogeneidade da função-utilidade, o consumo como sendo proporcional ao nível da riqueza, ou seja:

$$c_t^p = \delta W_t \qquad (1.32)$$

Observe-se que agora o nível da riqueza W_t inclui não somente os rendimentos do capital humano como também o valor dos demais ativos que o indivíduo possuir. O coeficiente de proporcionalidade depende das preferências e gostos do indivíduo, através da função-utilidade $u(\ )$, e da taxa de juros. O índice p da variável consumo reflete o fato de que c_t^p é o consumo planejado ou, como prefere Friedman, o consumo permanente.

IV.1.5.1 – A Função-Consumo da Unidade Familiar

Até este ponto a hipótese da renda permanente coincide com a do ciclo da vida. A grande inovação da contribuição friedmaniana reside na introdução do conceito da renda permanente, que, para Friedman, é igual ao valor dos bens e serviços que o indivíduo poderia consumir deixando intacta a sua riqueza.

A renda permanente é, portanto, igual ao produto da taxa de juros pelo nível de riqueza:

$$y_t^p = r_t W \tag{1.33}$$

Combinando-se as duas últimas equações, obtém-se:

$$c_t^p = \delta^* \ (r, \ u) \ y_t^p \tag{1.34}$$

onde $\delta^* \ (r, \ u) = \delta/r$. A notação $\delta^* \ (r, \ u)$ indica que o coeficiente de proporcionalidade entre o consumo permanente e a renda permanente depende da taxa de juros e das características embutidas na função-utilidade.

A formulação expressa na equação (1.34) pressupõe um mundo sem incertezas. Friedman acredita que a introdução de incerteza no modelo acarreta, basicamente, apenas mudança no fator de proporcionalidade $\delta^* \ (r, \ u)$, que passa a depender, para captar os efeitos da existência de incertezas, de um parâmetro τ. Este parâmetro é igual à razão entre a riqueza proveniente do capital não humano e a renda permanente. Assim, τ procura traduzir o fato de que a riqueza proveniente do capital humano não apresenta a mesma liquidez que outros ativos certamente possuem. Cabe lembrar que o capital humano não pode ser vendido, sendo permitida apenas a venda dos seus serviços. A idéia subjacente à introdução do parâmetro τ é a de que quando maior τ — o patrimônio do indivíduo apresenta maior liquidez — maior é a proporção da renda que pode ser consumida. Levando-se em conta o parâmetro τ, a equação (1.34) passa a ser reescrita como:

$$c_t^p = k \ (r, \ \tau, \ u) \ y_t^p \tag{1.35}$$

onde $k \ (r, \ \tau, \ u)$ substituiu o coeficiente $\delta^* \ (r, \ u)$.

IV.1.5.2 — A Função-Consumo Agregada

A equação (1.35) refere-se ao consumo de um indivíduo ou unidade familiar. Para obter-se o consumo agregado, da economia como um todo, é preciso adicionar-se o consumo de todos os indivíduos. Com esta finalidade Friedman admite, como hipótese de trabalho, que a distribuição de r, τ e u é independente da distribuição da renda permanente. Assim, o consumo agregado será proporcional à renda permanente agregada, isto é:

$$c_t^p = k y_t^p \tag{1.36}$$

onde agora, embora estejamos usando a mesma notação de (1.35), c_t^p e y^p referem-se a volumes *per capita* e não individuais. O coeficiente de proporcionalidade k pode variar, pois depende dos momentos da distribuição conjunta de r, τ e u.

A especificação estatística, e portanto completa, da hipótese de renda permanente é um caso particular do modelo de erro nas variáveis, bastante popular nos livros-textos de econometria. Com o objetivo de tornar a compreensão da hipótese da renda permanente mais completa, passamos a apresentar o modelo de erro nas variáveis. Em seguida, voltamos a discutir a hipótese da renda permanente.

IV.1.5.3 — O Modelo de Erro nas Variáveis

Admita-se que a variável Z_t^* depende linearmente da variável X_t^* através da equação:

$$Z_t^* = \alpha + \beta X_t^* \tag{1.37}$$

onde α e β são parâmetros. Suponha-se, também, que as variáveis Z_t^* e X_t^* não são observadas mas que as observações existentes Z_t e X_t são medidas com erro de Z_t^* e X_t^*, ou seja:

$$Z_t = Z_t^* + \varepsilon_t \tag{1.38}$$

$$X_t = X_t^* + v_t \tag{1.39}$$

onde ε_t e v_t são os erros contidos em Z_t e X_t, respectivamente.

Por hipótese, as variáveis ε_t, v_t e X_t^* são distribuídas independentemente de acordo com as seguintes distribuições:

a) ε_t é normal com média zero e variância σ_ε^2: ε_t é $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$;

b) v_t é normal com média zero e variância σ_v^2: v_t é $N(0, \sigma_v^2)$;

c) X_t^* é normal com média μ e variância $\sigma_{x^*}^2$: X_t^* é $N(\mu, \sigma_{x^*}^2)$.

Substituindo-se a equação (1.37) em (1.38), resulta:

$$Z_t = \alpha + \beta X_t^* + \varepsilon_t \tag{1.40}$$

Tendo em vista que Z_t e X_t são combinações lineares de variáveis distribuídas normalmente, segue-se que a distribuição conjunta de Z_t e X_t é normal. Os momentos dessa distribuição podem ser obtidos do seguinte modo. De (1.39) e (1.40) temos que os valores esperados de X_t e Z_t são iguais a:

$$EX_t = EX_t^* + Ev_t = \mu + 0 = \mu \tag{1.41}$$

$$EZ_t = E\alpha + E\beta X_t^* + E\varepsilon_t = \alpha + \beta\mu + 0 = \alpha + \beta\mu \tag{1.42}$$

As variâncias de X_t e Z_t são obtidas facilmente a partir das equações (1.39) e (1.40), pois:

$$\text{Var } X_t = \text{Var } X_t^* + \text{Var } v_t = \sigma_{x^*}^2 + \sigma_v^2 \tag{1.43}$$

$$\text{Var } Z_t = \beta^2 \text{ Var } X_t^* + \text{Var } \varepsilon_t = \beta^2\sigma_{x^*}^2 + \sigma_\varepsilon^2 \tag{1.44}$$

onde Var denota a variância da variável assinalada. Observe-se que na obtenção de (1.44) levamos em conta o fato de que as variáveis X_t^* e ε_t são independentes.

A covariância entre X_t e Z_t é, por definição:

$$\text{Cov}\ (X_t,\ Z_t) = E(X_t - EX_t)\ (Z_t - EZ_t)$$

onde Cov indica covariância. Substituindo-se as expressões dos valores esperados de X_t e Z_t nesta definição, obtém-se:

$$\begin{aligned} \text{Cov}\ (X_t,\ Z_t) &= E\ (X_t - \mu)\ (Z_t - \alpha - \beta\mu) = \\ &= E\ [\,(X_t^* - \mu) + v_t]\ [\beta\,(X_t^* - \mu) + \varepsilon_t] = \beta\sigma^2_{x^*} \end{aligned} \tag{1.45}$$

A expressão depois do último sinal de igualdade em (1.45) resultou do fato de que X_t^*, v_t e ε_t são variáveis aleatórias independentes.

Imagine-se agora que se disponha de estimativas das médias, das variâncias e da covariância entre X e Z, isto é: $\bar{x}$ é uma estimativa do valor esperado de X_t, $\bar{Z}$ uma estimativa de EZ_t, m_{xx} uma estimativa de Var X_t, m_{zz} uma estimativa de Var Z_t e m_{xz} uma estimativa de Cov $(X_t,\ Z_t)$. Então, das equações que fornecem estas esperanças matemáticas, resulta:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \mu \\ \bar{Z} &= \alpha + \beta\mu \\ m_{xx} &= \sigma^2_{x^*} + \sigma^2_v \\ m_{zz} &= \beta\sigma^2_{x^*} + \sigma^2_\varepsilon \\ m_{xz} &= \beta\sigma^2_{x^*} \end{aligned} \tag{1.46}$$

Observe-se que neste sistema temos cinco equações e seis parâmetros: α, β, μ, σ^2_v, σ^2_ε e $\sigma^2_{x^*}$. Sendo assim, é impossível, sem informação adicional, conhecer-se todos os parâmetros do modelo a partir de dados de uma amostra. Em linguagem técnica, o modelo clássico de erro nas variáveis não é identificado. Para a identificação do modelo é necessário que alguma restrição ou informação adicional seja imposta sobre os parâmetros do modelo. Como veremos a seguir, a hipótese da renda permanente é formalmente equivalente ao modelo de erro nas variáveis quando se impõe a condição de que α é igual a zero, o que conduz à identificação do modelo.

IV.1.5.4 – A Hipótese da Renda Permanente

A especificação completa da hipótese da renda permanente requer a explicitação das ligações entre as variáveis consumo permanente e renda permanente, que são construtos teóricos, e as variáveis consumo e renda observadas. Quanto ao consumo observado c_t, de acordo com Friedman, este consta de duas parcelas, o consumo permanente c_t^p e o consumo transitório c_t^T:

$$c_t = c_t^p + c_t^T \tag{1.47}$$

Por sua vez, a renda observada y_t é igual à soma da renda permanente y_t^p e da renda transitória y_t^T, isto é:

$$y_t = y_t^p + y_t^T \tag{1.48}$$

As equações (1.47) e (1.48) não são mais do que puras definições. Para que a hipótese da renda permanente tenha conteúdo empírico é preciso ir mais adiante e estabelecer-se hipóteses que inter-relacionem variáveis permanentes e transitórias. O núcleo central da hipótese friedmaniana é o de que as variáveis permanentes não são correlacionadas com as variáveis transitórias e que estas não são correlacionadas entre si, isto é:

$$\rho(c_t^p, c_t^T) = \rho(y_t^p, y_t^T) = \rho(c_t^T, y_t^T) = 0 \tag{1.49}$$

onde ρ ( ) indica a correlação entre as variáveis listadas entre os parênteses. A hipótese de que os componentes permanentes e transitórios não estão correlacionados é bastante plausível e não traz maiores problemas. Contudo, a hipótese de que renda e consumo transitórios não estão correlacionados é bastante forte, pois implica que qualquer rendimento não esperado deixa de ser aplicado no consumo, e sim no aumento do patrimônio do consumidor. É bom lembrar que no consumo não se inclui a compra de bens duráveis mas somente o valor dos serviços prestados por tais bens. Em síntese, a hipótese da renda permanente consiste no seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} c_t^p &= k y_t^p \\ c_t &= c_t^p + c_t^T \\ y_t &= y_t^p + y_t^T \\ \rho(c_t^p, c_t^T) &= \rho(y_t^p, y_t^T) = \rho(c_t^T, y_t^T) = 0 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Alternativamente, a hipótese da renda permanente pode ser colocada em termos de logaritmos ao invés de níveis, como em (1.50). Neste caso, teremos:

$$\begin{aligned} &\log c_t^p = \log k + \log y_t^p \\ &\log c_t = \log c_t^p + \log c_t^T \\ &\log y_t = \log y_t^p + \log y_t^T \\ &\rho(\log y_t^T, \log y_t^p) = \rho(\log c_t^T, \log c_t^p) = \rho(\log c_t^T, \log y_t^T) = 0 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Quando se admite que os valores esperados das variáveis transitórias são nulos e que as variáveis c_t^T, y_t^T e y_t^p têm distribuições normais, a hipótese da renda permanente é equivalente ao modelo de erros nas variáveis. No caso do sistema (1.50) a restrição $\alpha = 0$ é imposta, enquanto no sistema de logaritmos (1.51) a restrição adicional refere-se ao parâmetro β, que é igual à unidade.

IV.1.5.5 — Propensão Marginal $\times$ Propensão Média a Consumir

As estimativas da propensão marginal e da propensão média a consumir, seja com dados de séries temporais ou de corte transversal, através da regressão simples do consumo observado contra a renda observada,

$$c_t = \alpha + \beta y_t + \varepsilon_t \tag{1.52}$$

conduzem à conclusão de que a propensão média a consumir varia com o nível de renda e não coincide, portanto, com a propensão marginal, pois o intercepto α é positivo. Esse resultado, à primeira vista, contradiz a hipótese da renda permanente, segundo a qual o consumo é proporcional ao nível de renda. Todavia, uma análise mais acurada dos estimadores de mínimos quadrados ordinários da regressão simples (1.52) mostrará que esse resultado é, na verdade, previsto pela hipótese da renda permanente.

A explicação simples para essa conclusão aparentemente contraditória reside no fato de que a regressão correta, segundo a hipótese da renda permanente, teria como variável explicativa a renda permanente e não a observada. Assim, ao invés da regressão (1.52) se deveria estimar os parâmetros da seguinte regressão:

$$c_t = ky_t^P + c_t^T \tag{1.53}$$

O uso da renda observada como uma *proxy* para a renda permanente, que não é observada, leva à obtenção de estimativas viesadas para os parâmetros da regressão. Para provar esta proposição, comecemos pela fórmula do estimador de mínimos quadrados ordinários de β, na regressão (1.52), que é a seguinte:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{n} (c_t - \bar{c})(y_t - \bar{y})/n}{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2/n}$$

onde $\bar{c}$ e $\bar{y}$ indicam as médias das variáveis c_t e y_t, respectivamente, e n é o tamanho da amostra.

Quando n cresce, o limite em probabilidade do denominador de $\hat{\beta}$ é igual à variância de y:

$$\text{limp} \sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2/n = \text{Var } y$$

Como a renda observada é igual à soma das rendas permanente e transitória, segue-se que a variância da renda é igual à soma das variâncias da renda permanente e da renda transitória:

$$\text{Var } y = \text{Var } y^P + \text{Var } y^T$$

Os desvios do consumo e da renda observada em relação às suas respectivas médias podem ser escritos, a partir de (1.50), do seguinte modo:

$$c_t - \bar{c} = k\,(y_t^p - \bar{y}^p) + (c_t^T - \bar{c}^T)$$

$$y_t - \bar{y} = (y_t^p - \bar{y}^p) + (y_t^T - \bar{y}^T)$$

onde $\bar{c}^T$, $\bar{y}^T$ e $\bar{y}^p$ são os valores médios do consumo transitório, da renda transitória e da renda permanente, respectivamente. Substituindo-se estas expressões no numerador de $\hat{\beta}$, obtém-se:

$$\sum_{t=1}^{n} (c_t - \bar{c})\,(y_t - \bar{y}) = k \sum_{t=1}^{n} (y_t^p - \bar{y}^p)^2/n + k \sum_{t=1}^{n} (y_t^p - \bar{y}^p)\,(y_t^T - \bar{y}^T)/n$$

$$+ \sum_{t=1}^{n} (c_t^T - \bar{c}^T)\,(y_t^p - \bar{y}^p)/n + \sum_{t=1}^{n} (c_t^T - \bar{c}^T)\,(y_t^T - \bar{y}^T)/n$$

A hipótese da renda permanente supõe que as correlações entre esta e a transitória, entre consumo transitório e renda permanente e entre consumo transitório e renda transitória são todas iguais a zero. Conclui-se daí que o limite em probabilidade do numerador de $\hat{\beta}$ é igual a:

$$\operatorname{limp} \sum_{t=1}^{n} (c_t - \bar{c})\,(y_t - \bar{y})/n = k \operatorname{limp} \sum_{t=1}^{n} (y_t^p - \bar{y}^p)^2/n = k \operatorname{Var} y^p$$

O limite em probabilidade do estimador $\hat{\beta}$ de mínimos quadrados ordinários é, então, igual a:

$$\operatorname{limp} \hat{\beta} = k \frac{\operatorname{Var} y^p}{\operatorname{Var} y^p + \operatorname{Var} y^T}$$

A razão entre as variâncias, que multiplica o parâmetro k nesta equação, é, obviamente, menor do que 1. Logo, $\hat{\beta}$ é um estimador viesado e subestima o verdadeiro valor de k, isto é:

$$\operatorname{limp} \hat{\beta} < k$$

O estimador do intercepto da regressão simples (1.52) é dado pela fórmula:

$$\hat{\alpha} = \bar{c} - \hat{\beta}\,\bar{y}$$

Alternativamente:

$$\hat{\alpha} = \bar{c}^p + \bar{c}^T - \hat{\beta}(\bar{y}^p + \bar{y}^T)$$

Como $\bar{c}^p = k\bar{y}^p$ e as médias do consumo transitório e da renda transitória são iguais a zero, o limite em probabilidade de $\hat{\alpha}$ é igual a:

$$\operatorname{limp} \hat{\alpha} = k\bar{y}^p - (\operatorname{limp} \hat{\beta})\,\bar{y}^p = (k - \operatorname{limp} \hat{\beta})\,\bar{y}^p > 0$$

Observe-se que o limite em probabilidade de $\hat{\alpha}$ é positivo em virtude de $\hat{\beta}$ subestimar k.

A hipótese da renda permanente implica, então, que os estimadores dos parâmetros α e β de regressão simples do consumo contra a renda observada são viesados:

$$\text{limp } \hat{\alpha} > 0$$

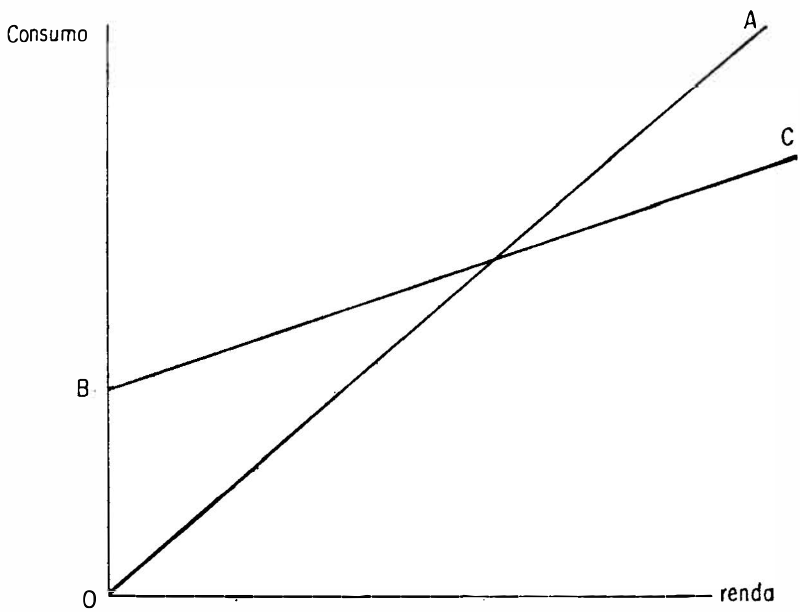
e:

$$\text{limp } \beta < K$$

A Figura IV.6 mostra a interpretação gráfica destes resultados. A reta OA é a função-consumo de acordo com a hipótese da renda permanente: o consumo é proporcional à renda permanente. A reta BC é a regressão estimada quando se utiliza dados observados de consumo e renda. A sua inclinação é inferior à da reta OA e o intercepto OB é positivo. Assim, a reta BC é uma estimativa incorreta, quando se utilizam dados observados provenientes de corte transversal ou de séries temporais, da verdadeira função-consumo.

Figura IV. 6

ESTIMATIVAS VIESADAS DOS PARÂMETROS DA FUNÇÃO – CONSUMO



IV.1.5.6 – A Hipótese da Renda Permanente e Dados de Séries Temporais

Uma versão bastante simples da hipótese da renda permanente para ser aplicada a dados de séries temporais foi proposta por Friedman. Esta versão baseia-se no mecanismo de expectativa adaptada de Cagan (1956). A renda permanente, segundo este mecanismo, é uma média ponderada, com pesos declinando geometricamente, das rendas passadas:

$$y_t^p = (1-\lambda)\, y_t + (1-\lambda)\, \lambda y_{t-1} + (1-\lambda)\, \lambda^2 y_{t-2} + \ldots =$$
$$= (1-\lambda)\, (1 + \lambda L + \lambda^2 L^2 + \ldots)\, y_t$$

onde L é o operador de defasagens: $LX_t = X_{t-1}$.

A idéia contida nesta formulação é a de que as rendas observadas devem ser "aplainadas" para se chegar a uma medida do conceito de renda permanente, que é mais estável do que a renda observada. Como $1 + \lambda L + \lambda^2 L^2 + \ldots = 1/1 - \lambda L$, para λ compreendido entre zero e 1, a renda permanente passa a ser escrita do seguinte modo:

$$y_t^p = \frac{1-\lambda}{1-\lambda L}\, y_t, \quad 0 \leqslant \lambda < 1 \tag{1.54}$$

Combinando-se as equações (1.53) e (1.54), obtém-se:

$$c_t = k y_t^p + c_t^T = k\, \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda L}\, y_t + c_t^T$$

Multiplicando-se ambos os lados desta equação por $1 - \lambda L$, resulta:

$$c_t = \lambda c_{t-1} + k\,(1-\lambda)\, y_t + c_t^T - \lambda c_{t-1}^T \tag{1.55}$$

O consumo no período corrente é função do consumo no período anterior e da renda corrente, e não existe intercepto na equação (1.55). O único problema que surge nesta especificação diz respeito à parte aleatória $c_t^T - \lambda c_{t-1}^T$. O método de estimação a ser empregado na obtenção dos parâmetros λ e k dependerá das propriedades que se atribuir a este termo estocástico.

IV.1.6 – Consumo e Inflação: A Hipótese da Poupança Forçada

Alguns economistas no Brasil têm afirmado que a inflação é benéfica ao processo de crescimento econômico, pois a inflação reduziria o consumo, aumentando, conseqüentemente, a poupança. A última parte desta afirmação constitui a idéia básica da poupança forçada. Alguns pesquisadores têm testado a hipótese da poupança forçada com a seguinte função-consumo:

$$c_t = \alpha + \beta y_t + \gamma^* p_t + \varepsilon_t \tag{1.56}$$

onde p_t é a taxa de inflação e os demais símbolos têm o significado dado anteriormente. O teste efetuado diz respeito à hipótese nula $H_0: \gamma^* = 0$ contra a hipótese alternativa de que $H_1: \gamma^* < 0$.

IV.1.6.1 — Consumo e Inflação Não Antecipada

Cabe fazer algumas modificações na formulação acima. Uma das proposições bastante conhecida da teoria econômica é a de que uma inflação integralmente antecipada pelos agentes econômicos não tem qualquer efeito sobre as variáveis reais da economia.[2] Sendo assim, a formulação (1.56) implica erro de especificação, pois a taxa de inflação esperada foi deixada fora do modelo. Com efeito, o consumo real, de acordo com a teoria tradicional, dependeria da inflação não antecipada, ou seja:

$$c_t = \alpha + \beta y_t + \gamma (p_t - p_t^e) + \varepsilon_t \qquad (1.57)$$

O sinal do coeficiente γ seria negativo, pois o aumento da taxa de inflação desencoraja o consumo atual, enquanto o aumento da taxa de inflação esperada tenderia a aumentar o consumo presente. A comparação das equações (1.56) e (1.57) evidencia o fato de que os estimadores dos coeficientes β e γ^* serão tendenciosos. No caso do coeficiente γ^*, o seu viés será positivo, pois o valor esperado de $\hat{\gamma}^*$, o estimador de mínimos quadrados ordinários de γ^*, será igual a:

$$E\hat{\gamma}^* - \gamma = - \gamma \rho > 0$$

O sinal positivo do viés resulta do fato de que a correlação ρ entre a taxa de inflação e a taxa de inflação esperada é positiva, enquanto o coeficiente γ é negativo.

No longo prazo, de acordo com a equação (1.57), quando $p_t = p_t^e$, a inflação é neutra com relação ao consumo, pois neste caso o consumo real é função apenas da renda real:

$$c_t = \alpha + \beta y_t + \varepsilon_t$$

IV.1.6.2 — Consumo e Ilusão Monetária

A formulação (1.57) ainda é restritiva, pois impõe, *a priori*, que os coeficientes das variáveis p_t e p_t^e sejam iguais e de sinais contrários. Sem dúvida, a equação (1.57) resulta da expressão:

$$c_t = \alpha + \beta y_t + \gamma_1 p_t + \gamma_2 p_t^e + \varepsilon_t$$

quando se impõe a condição $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$. De um ponto de vista econométrico é preferível testar-se a hipótese de que a soma dos coeficientes γ_1 e γ_2 é nula

[2] Obviamente, a quantidade demandada de moeda é afetada, pois a caixa real decresce com o aumento da taxa de inflação esperada, como se verá na terceira seção deste capítulo.

do que impor-se, *a priori,* esta condição. A equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$c_t = \alpha + \beta y_t + \gamma_1 (p_t - p_t^e) + (\gamma_1 + \gamma_2) p_t^e + \varepsilon_t$$

Esta equação mostra claramente que a inflação beneficia a poupança desde que ela não seja plenamente antecipada. Obviamente, com o decorrer do processo inflacionário, os agentes econômicos passam a perceber corretamente a inflação e esta deixará de ter qualquer efeito sobre o consumo se $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$. No caso de $\gamma_1 + \gamma_2$ ser diferente de zero, o que corresponderia à existência de ilusão monetária por parte dos agentes econômicos, a inflação poderia aumentar o consumo desde que $\gamma_1 + \gamma_2$ fosse positivo. Por outro lado, se $\gamma_1 + \gamma_2$ fosse negativo a inflação teria um efeito positivo sobre a poupança no longo prazo. É claro que, se existir ilusão monetária, nada se pode dizer, *a priori,* acerca do sinal de $\gamma_1 + \gamma_2$, pois enquanto γ_1 é negativo γ_2 é positivo. Todavia, fica claro que a existência de ilusão monetária impossibilita uma conclusão firme acerca do efeito da taxa de inflação sobre o consumo no longo prazo.

IV.2 — A Demanda de Bens de Consumo Duráveis

A contabilidade nacional inclui, em geral, no item consumo pessoal, a compra, pelas unidades familiares, de bens de consumo duráveis realizada num dado período. Esse procedimento, entretanto, não é correto; isto, porque a compra de um bem durável como um automóvel, uma geladeira, uma televisão, um fogão, etc., não corresponde a um consumo pela família que adquiriu tal bem, mas a um investimento que irá aumentar o estoque de capital físico das unidades familiares, possibilitando o aumento da produção de bens e serviços de consumo pelos elementos da própria unidade familiar. Segue-se, então, que a contabilidade nacional deveria fazer, em relação aos bens duráveis, a distinção entre acréscimos ao estoque no período e o valor dos bens e serviços de consumo produzidos com a utilização do estoque existente. O primeiro item, acréscimo do estoque de bens duráveis, seria contabilizado como um investimento e o segundo, a produção de bens e serviços de consumo com o emprego dos bens duráveis, se incluiria no consumo. Em outras palavras, a compra de bens de consumo duráveis pelos indivíduos é, de certo modo, equivalente à compra de máquinas e equipamentos pelas empresas. É de se esperar que a teoria da demanda de bens de consumo duráveis seja bastante similar à teoria do investimento da empresa.

Um bem de consumo durável, seja ele qual for, é, portanto, adquirido pelo fato de que, possivelmente combinado com outros bens e serviços, produz bens e serviços que são consumidos pelos membros das unidades familiares. Em conseqüência, os modelos desenvolvidos recentemente se fundamentam na idéia básica de que a demanda de bens de consumo duráveis é derivada dos serviços prestados por estes bens.

IV.2.1 — O Enfoque do Custo de Uso do Bem

Um bem de consumo durável é comprado pelos serviços que dele se obtém e não pelo bem em si mesmo.[3] É claro que para alguns bens duráveis é possível comprar o próprio serviço não havendo necessidade de sua compra, o que certamente pressupõe a existência de um mercado de serviços do bem durável. Por exemplo, poder-se-ia, ao invés de comprar, alugar um automóvel ou um televisor, ou outro bem durável qualquer. Contudo, para a maioria dos bens duráveis o mercado de aluguel é incipiente ou inexistente.

Mesmo sendo obrigado a comprar o bem durável a fim de consumir os serviços prestados pelo mesmo, o indivíduo pode basear sua decisão no custo de utilização deste equipamento para a prestação do serviço. O enfoque do custo de uso enfatiza este custo como um determinante básico na demanda de bens de consumo duráveis.

Admita-se que os serviços prestados por um bem de consumo durável sejam proporcionais ao estoque do bem e que a utilidade associada ao fluxo de bens e serviços consumidos pelo consumidor seja expressa por:

$$u = u\,[K_t, c_t, K_{t+1}, c_{t+1}, \ldots, K_{t+N}, c_{t+N}] \tag{2.1}$$

onde K_i representa os serviços do bem durável no período i, c_i o consumo de outros bens e serviços no mesmo período e N o horizonte de planejamento do consumidor.

A compra de bens de consumo duráveis no i-ésimo período é igual ao acréscimo líquido do estoque mais a reposição ocorrida durante o período, isto é:

$$I_i = K_i - (1 - \delta)\, K_{i-1} \tag{2.2}$$

onde δ, a taxa de depreciação, é suposta constante.

As despesas do consumidor na aquisição de bens e serviços estão limitadas pelo seu orçamento:

$$\sum_{i=t}^{t+N} \frac{p_i c_i + v_i I_i}{(1 + r)^{i-t}} = W^T \tag{2.3}$$

onde r é a taxa de juros, admitida constante no período de planejamento, p_i e v_i são, respectivamente, os preços do bem de consumo durável no i-ésimo período, e I_i é a quantidade de bens duráveis adquirida no período a que o índice se refere. Quanto à riqueza W^T, esta compreende: i) o valor atual da renda de propriedade que o indivíduo espera receber entre t e $t + N$; ii) o valor atual da renda do capital humano durante o mesmo período; e iii) o valor atual do estoque de capital do bem durável que o consumidor possuir ao final do N-ésimo período. É importante observar que ao definir a riqueza W^T desta

[3] Obviamente é possível imaginar situações em que o bem durável é comprado pelo bem em si mesmo. Todavia, este não parece ser o caso geral.

maneira estamos admitindo que o consumidor vende, a preços de mercado, todo o estoque do bem durável ao final do período de planejamento. A riqueza W^T é, portanto, expressa por:

$$W^T = W^* + \frac{(1-\delta)\, v_{t+N+1}\, K_{t+N}}{(1+r)^{N+1}} \tag{2.4}$$

onde W^* é o valor atual das rendas de propriedade e do capital humano.

Substituindo (2.2) em (2.3), temos:

$$\sum_{i=t}^{t+N} \frac{p_i c_i + v_i[K_i - (1-\delta)\, K_{i-1}]}{(1+r)^{i-t}} = W^T \tag{2.5}$$

A restrição orçamentária (2.5) pode ser escrita, alternativamente, do seguinte modo:

$$\sum_{i=t}^{t+N} \frac{p_i c_i + \Pi_i K_i}{(1+r)^{i-t}} = W^* + v_t\, (1-\delta)\, K_{t-1} = W \tag{2.6}$$

A equação (2.6) foi obtida levando-se em conta (2.4). A riqueza W inclui o valor do bem durável que o indivíduo possui no início do período t. A variável Π_i,

$$\Pi_i = v_i - \frac{(1-\delta)\, v_{i+1}}{(1+r)} \tag{2.7}$$

é o custo de uso do bem, ou seja, é o custo para o consumidor utilizar-se do bem durável no período i. Este custo, como se pode depreender de (2.7), é igual ao preço unitário do bem de consumo durável no início do período i, menos o valor atual do bem de consumo durável no período seguinte, deduzida deste valor a depreciação ocorrida durante a unidade de tempo do modelo.

O problema do consumidor consiste em maximizar a função-utilidade (2.1) com a condição de que a restrição orçamentária (2.6) seja satisfeita. Para tal finalidade, formamos a expressão de Lagrange:

$$l = u\,[K_t, c_t, \ldots, K_{t+N}, c_{t+N}] + \lambda \left[W - \sum_{i=t}^{t+N} \frac{p_i c_i + \Pi_i K_i}{(1+r)^{i-t}} \right] \tag{2.8}$$

A condição de primeira ordem para obter-se o máximo de (2.8) é que as derivadas parciais de l com respeito a c_i e K_i sejam iguais a zero, isto é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial K_i} &= \frac{\partial u}{\partial K_i} - \lambda \frac{\Pi_i}{(1+r)^{i-t}} = 0, \; i = t, t+1, \ldots, t+N \\ \frac{\partial l}{\partial c_i} &= \frac{\partial u}{\partial c_i} - \lambda \frac{p_i}{(1+r)^{i-t}} = 0, \; i = t, t+1, \ldots, t+N \end{aligned} \tag{2.9}$$

Estas equações afirmam que, em equilíbrio, as utilidades marginais são proporcionais aos preços dos respectivos bens ou serviços. No caso do bem durável, a utilidade marginal do serviço desse bem é proporcional ao custo de utilização do mesmo.

O valor dos serviços prestados pelo bem de consumo durável, para o consumidor, no i-ésimo período, é igual a:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial K_i} \cdot \frac{1}{\lambda}\right] \cdot (1+r)^{i-t}$$

Em equilíbrio, de acordo com (2.9), este valor é igual a Π_i, o custo do usuário no período i. Uma interpretação simples e sugestiva desta condição de equilíbrio pode ser dada em termos de taxas de retorno. Com efeito, ao final do i-ésimo período a condição (2.9) é equivalente a: [4]

$$\frac{\partial u}{\partial K_i} \cdot \frac{(1+r)^{i+1-t}}{\lambda v_i} = r + \delta - \dot{v}_i + \delta \dot{v}_i \qquad (2.10)$$

onde $v_{i+1}/v_i = 1 + \dot{v}_i$, isto é, $\dot{v}_i$ mede os ganhos de capital devido à variação do preço do bem de consumo durável. O lado esquerdo da equação (2.10) é a taxa de retorno dos serviços do bem de consumo durável. Esta taxa, em equilíbrio, é igual à soma algébrica das taxas de juros, de depreciação e de ganhos de capital (desprezando-se o termo $\delta \dot{v}_i$).

A solução do sistema formado pelas equações de equilíbrio e pela restrição orçamentária implica que a quantidade demandada do bem de consumo durável no período t depende do custo de uso do bem no próprio período, Π_t, dos custos de uso nos períodos seguintes descontados pela taxa de juros, $\Pi_{t+1}/(1+r)$, ..., $\Pi_{t+N}/(1+r)^N$, dos preços do bem de consumo durante o horizonte de planejamento, p_t, $p_t/(1+r)$, ..., $p_{t+N}/(1+r)^N$ e da riqueza W. Em símbolos:

$$K_t^d = f\left(\Pi_t, \frac{\Pi_{t+1}}{1+r}, \ldots, p_t, \frac{p_{t+1}}{1+r}, \ldots, W_t\right) \qquad (2.11)$$

Esta equação para ser operacional do ponto de vista econométrico requer que sejam feitas hipóteses com relação às expectativas presentes acerca dos preços dos bens de consumo e de consumo duráveis nos períodos subseqüentes ao atual. Admita-se que se espera hoje que os preços aumentem a uma taxa, por período, igual à da inflação g. A taxa de juros real é, então, obtida através da relação fisheriana:

$$1 + r = (1+\rho)\ (1+g)$$

Como todos os preços aumentarão a uma taxa, por período, igual à da inflação g, e devido à homogeneidade de grau zero nos preços e na riqueza,

[4] A equação (2.10) é obtida dividindo-se os termos da primeira equação de (2.9) por v_i e rearranjando-se os mesmos.

a equação de demanda (2.11) pode ser escrita como função do custo de uso real, Π_t/p_t, da riqueza real, W_t/p_t, e de taxa de juros real ρ_t, isto é:

$$K_t^d = k\left(\frac{\Pi_t}{p_t}, \frac{W_t}{p_t}, \rho_t\right) \qquad (2.12)$$

Alternativamente, poderíamos adotar como hipótese de trabalho que a função-utilidade (2.1) seja separável e homogênea. Neste caso, a decisão do consumidor poderia ser concebida como realizada em duas etapas. Na primeira o consumidor decidiria, a partir da sua riqueza, o total da despesa de consumo em cada período. Em seguida, dado o total de consumo a ser efetuado em cada período, o indivíduo trataria de alocar estes recursos entre os diversos bens e serviços à sua disposição. Cabe assinalar que este tipo de decisão em duas etapas é consistente com a teoria da função-consumo apresentada anteriormente. Com efeito, a teoria da função-consumo trata da escolha intertemporal do consumo agregado, o qual, de acordo com as teorias da renda permanente e do ciclo da vida, é proporcional à riqueza do indivíduo. A demanda dos serviços dos bens de consumo duráveis depende dos preços relativos dos diversos bens e serviços e da despesa total de consumo. Este, por sua vez, é função da riqueza. Segue-se, então, que a demanda de bens de consumo duráveis obtida através da hipótese de separabilidade e homogeneidade da função-utilidade (2.1) é similar àquela obtida acima e expressa pela equação (2.12).

IV.2.1.1 — O Custo de Uso do Bem

O custo para o usuário, de um bem de consumo durável, no período t, é expresso através de (2.7), que repetimos aqui por conveniência:

$$\Pi_t = v_t - \frac{(1-\delta)\, v_{t+1}}{(1+r)} \qquad (2.13)$$

Em primeiro lugar, devemos observar que o custo Π_t é medido no início do período t. Quando for conveniente expressar o custo, ao final do período, basta multiplicar-se ambos os lados de (2.13) por $(1+r)$, isto é:

$$\begin{aligned} \Pi_t^* &= (1+r)\,\Pi_t = (1+r)\, v_t - (1-\delta)\, v_{t+1} = \\ &= rv_t + v_t - (1-\delta)\, v_{t+1} \end{aligned} \qquad (2.14)$$

A segunda linha desta equação evidencia o fato de que o custo para o usuário, medido ao final do período t, é igual à soma dos juros que o indivíduo deixou de receber por ter comprado o bem, mais a diferença entre o valor de compra e o valor de revenda do bem de consumo durável.

A segunda observação que cabe fazer diz respeito à unidade em que os preços são medidos. No caso de usar-se preços correntes, a taxa de juros deve ser a de juros nominal, enquanto, na hipótese de usar-se preços reais, a de juros real.

Admitindo-se que o bem de consumo durável tenha um mercado de segunda mão onde são transacionados bens usados e que o valor de um bem novo menos a depreciação, $(1-\delta) v_{t+1}$, é igual ao preço de um bem com um período de uso, o custo de uso do bem poderia ser obtido com a seguinte fórmula:

$$\Pi(m, s, t) = v(m, s, t) - \frac{v^e(m, s+1, t+1)}{(1+r)} \tag{2.15}$$

onde $\Pi(m, s, t)$ e $v(m, s, t)$ indicam o custo de uso e o preço unitário, respectivamente, de um equipamento da marca m, com idade s, no período t. O preço v deve incluir impostos e taxas que incidam sobre o bem durável em questão. Um ponto importante no cômputo do custo para o usuário, empregando a fórmula (2.15), é que ao início do período t o preço $v^e(m, s+1, t+1)$ é desconhecido, ou seja, este preço é o esperado, no período t, do bem durável no período seguinte. Alguma hipótese relativa ao preço esperado deve ser feita. Uma hipótese simplista, *a posteriori*, é a de que as previsões dos agentes econômicos se realizaram e que, portanto, os preços observados no período $t+1$ eram os previstos no período t: $v^e(m, s+1, t+1) = v(m, s+1, t+1)$. Outra opção é admitir-se que o preço de um equipamento com $s+1$ períodos de vida hoje é igual ao de um equipamento com $s+1$ períodos amanhã, ou seja $v^e(m, s+1, t+1) = v(m, s+1, t)$. As implicações dessas duas alternativas podem ser vistas claramente escrevendo-se o custo de uso do bem ao final do período t, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \Pi^*(m, s, t) &= rv(m, s, t) + v(m, s, t) - v^e(m, s+1, t+1) = \\ &= rv(m, s, t) + [v(m, s, t) - v(m, s+1, t)] \\ &\quad + [v(m, s+1, t) - v^e(m, s+1, t+1)] \end{aligned}$$

O termo $v(m, s, t) - v(m, s+1, t)$ mede a depreciação do equipamento, enquanto que a expressão $v(m, s+1, t) - v^e(m, s+1, t+1)$ é igual ao ganho (ou perda) do capital esperado no período t. A primeira hipótese mencionada quanto ao preço esperado, qual seja, $v^e(m, s+1, t+1) = v(m, s+1, t+1)$, significa admitir que todo o ganho de capital efetivamente ocorrido era esperado no início do período t. A segunda hipótese, ao fazer $v^e(m, s+1, t+1) = v(m, s+1, t)$, implica que não se espera ter ganho de capital durante o período t. É claro que essas duas hipóteses são casos-limite, havendo, portanto, inúmeras possibilidades intermediárias. Contudo, o pesquisador dificilmente poderá escapar de algum grau de arbitrariedade quanto à escolha da hipótese de trabalho.

IV.2.2 — O Enfoque da Economia da Produção Familiar

Um bem de consumo durável não é consumido diretamente, pois é um bem de produção utilizado juntamente com outros bens e serviços e mão-de-obra, na produção de bens e serviços que são, estes sim, consumidos pelos indivíduos. Em outras palavras, bens e serviços são comprados no mercado e transformados com o auxílio do estoque de capital familiar, isto é, do estoque do bem durável. A utilidade para o indivíduo é derivada diretamente dos bens e serviços que o bem durável ajuda a produzir, e apenas indiretamente dos serviços prestados pelo bem durável. Denominando-se por d_i a quantidade dos bens de consumo produzida com o auxílio do bem durável no período i e por c_i o consumo de outros bens e serviços no mesmo período, a utilidade do consumidor associada aos fluxos de consumo entre os períodos t e $t+N$ é expressa por:

$$u = u\ [d_t, c_t, d_{t+1}, c_{t+1}, \ldots, d_{t+N}, c_{t+N}] \tag{2.16}$$

O bem de consumo produzido por intermédio do bem durável utiliza-se não-somente deste fator de produção mas também de outros fatores simbolizados aqui pela letra X, isto é, X_i é a quantidade dos diversos insumos usados na produção da quantidade consumida d_i. O processo de produção utilizado para produzir-se d_i é, por hipótese, do tipo proporções fixas:

$$\begin{aligned} K_i &= ad_i \\ & \qquad\qquad i = t, t+1, \ldots, t+N \\ X_i &= bd_i \end{aligned} \tag{2.17}$$

O coeficiente a mede a quantidade de serviços do bem durável, no período do modelo, necessária para produzir uma unidade de d_i. O coeficiente b mede a quantidade de outros insumos necessária para a produção de uma unidade d_i.

O orçamento do consumidor contém os gastos com a compra dos bens de consumo c_i, os gastos com a compra dos insumos X_i e o valor da aquisição de bens duráveis no período, isto é:

$$\sum_{i=t}^{t+N} \frac{p_i c_i + q_i X_i + v_i I_i}{(1+r)^{i-t}} = W^T \tag{2.18}$$

onde q_i é o preço unitário, no período $t+i$, do bem X.

A compra de bens de consumo duráveis no período i é igual ao acréscimo líquido do estoque mais a reposição durante o período:

$$I_i = K_i - (1-\delta) K_{i-1} \tag{2.19}$$

Substituindo-se (2.19) na equação de orçamento (2.18), temos:

$$\sum_{i=t}^{t+N} \frac{p_i c_i + q_i X_i + v_i\ [K_i - (1-\delta) K_{i-1}]}{(1+r)^{i-t}} = W^T \tag{2.20}$$

Alternativamente, podemos escrever esta equação do seguinte modo:

$$\sum_{i=t}^{t+N} \frac{p_i c_i + q_i X_i + \Pi_i K_i}{(1+r)^{i-t}} = W \tag{2.21}$$

onde Π_i e W^T têm o mesmo significado que o das equações (2.6) e (2.7).

Substituindo-se (2.17) em (2.21), resulta:

$$\sum_{i=t}^{t+N} \frac{p_i c_i + (bq_i + a\Pi_i)\, d_i}{(1+r)^{i-t}} = W \tag{2.22}$$

onde o coeficiente de d_i é o custo unitário do bem de consumo produzido com os serviços do bem de consumo durável, isto é:

$$\pi_i = bq_i + a\Pi_i \tag{2.23}$$

O problema do consumidor consiste em maximizar a função-utilidade com a condição de que a restrição orçamentária seja satisfeita. A expressão de Lagrange para este problema de máximo é:

$$l = u\,[d_t, c_t, \ldots, d_{t+N}, c_{t+N}] + \lambda \left[W - \sum_{i=t}^{t+N} \frac{p_i c_i + \pi_i d_i}{(1+r)^{i-t}} \right] \tag{2.24}$$

As condições de primeira ordem para que l seja um máximo são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial d_i} &= \frac{\partial u}{\partial d_i} - \lambda \frac{\pi_i}{(1+r)^{i-t}} = 0, \; i = t, \ldots, t+N \\ \frac{\partial l}{\partial c_i} &= \frac{\partial u}{\partial c_i} - \lambda \frac{p_i}{(1+r)^{i-t}} = 0, \; i = t, \ldots, t+N \end{aligned} \tag{2.25}$$

Estas equações implicam que as utilidades marginais dos bens e serviços consumidos são proporcionais aos respectivos preços.

Admitindo-se a validade das mesmas hipóteses da seção anterior quanto às expectativas de preços futuros, ou quanto ao formato da função-utilidade, a quantidade demandada d_t é função do próprio preço π_t, do preço p_t, da riqueza W_t e da taxa de juros r_t:

$$d_t = f(\pi_t, p_t, r_t, W_t) \tag{2.26}$$

Os serviços do bem durável são proporcionais à quantidade d_i em vista de (2.17). Por outro lado, admitindo-se que os serviços do bem durável são proporcionais ao estoque desse bem, segue-se que a quantidade demandada do bem durável no período t é dada por:

$$K_t = af(\pi_t, p_t, r_t, W_t)$$

No caso mais geral em que a função de produção admite substitutibilidade entre os fatores de produção,

$$d_i = g(K_i, X_i), \; i = t, \ldots, t+N$$

o preço π_i do bem de consumo produzido dentro da unidade familiar passa a ser dado por:

$$\pi_i = \frac{dX_i}{dd_i} q_i + \frac{dK_i}{dd_i} \Pi_i$$

onde os coeficientes de q_i e Π_i são variáveis que dependem da relação de preços dos fatores utilizados.

IV.2.2.1 — O Custo do Serviço

O custo do serviço produzido com a utilização do bem de consumo durável é calculado de acordo com a expressão (2.23), ou seja:

$$\pi_t = a\Pi_t + bq_t$$

onde Π_t é o custo do usuário e q_t é o custo de outros insumos usados na produção dos serviços consumidos pelo indivíduo.

No caso de automóvel, o serviço seria medido em número de passageiros-quilômetro transportados no automóvel, na unidade de tempo do modelo. A interpretação dos coeficientes técnicos a e b seria:

$$a = \frac{K_t}{d_t} = \frac{\text{Estoque de Automóveis}}{\text{Número de Passageiros-Quilômetro Transportados}}$$

$$b = \frac{X_t}{d_t} = \frac{\text{Quantidade de Insumo Usado}}{\text{Número de Passageiros-Quilômetro Transportados}}$$

Denominemos por:

$\pi(m, s, t)$ = custo do passageiro-quilômetro transportado no automóvel de marca m, com s períodos de uso, no período t;

$d(m, s, t)$ = número de passageiro-quilômetro transportado nos automóveis de marca m, com s períodos de uso, no período t;

$X(m, s, t)$ = quantidade de insumos utilizados nos automóveis de marca m, com s períodos de uso, no período t.

Os coeficientes $a(m, s, t)$ e $b(m, s, t)$, para cada marca e período de uso, seriam obtidos por:

$$a(m, s, t) = \frac{K(m, s, t)}{d(m, s, t)}$$

$$b(m, s, t) = \frac{X(m, s, t)}{d(m, s, t)}$$

Segue-se, então, que o custo do passageiro-quilômetro transportado seria:

$$\pi(m, s, t) = \frac{\Pi(m, s, t)\, K(m, s, t) + X(m, s, t)\, q(m, s, t)}{d(m, s, t)}$$

Note-se que o preço do insumo X, $q(m, s, t)$, não é o mesmo para todos os carros pois certamente os custos de manutenção e operação são diferentes, tanto com relação a marcas diferentes, como também para diferenças de idade nos automóveis.

Um problema de difícil solução no cálculo do preço π, sem dúvida, é a obtenção do número de passageiros-quilômetro transportados para cada tipo de veículo, e aí talvez resida a principal dificuldade na aplicação do enfoque da economia da produção familiar.

IV.3 — A Demanda de Moeda

A função-utilidade (2.1) pressupõe que o consumidor deriva utilidade apenas dos serviços prestados pelos bens de consumo duráveis e do consumo dos demais bens e serviços. Esta hipótese é um pouco restrita, pois em uma economia de mercado moderna os consumidores retêm em seus *portfolios,* além de bens de consumo duráveis, outros ativos dos quais, também, derivam utilidade dos serviços prestados pelos mesmos. Este certamente é o caso com a moeda que é um ativo que o consumidor demanda em virtude dos serviços prestados pela mesma.

Com a finalidade de incorporar a moeda no modelo de alocação intertemporal, admita-se que a função-utilidade do consumidor é expressa por:

$$u = u\left(K_t, c_t, \frac{M_t}{p_t}, \ldots, K_{t+N}, c_{t+N}, \frac{M_{t+N}}{p_{t+N}}\right) \tag{3.1}$$

onde M_i é o estoque nominal da moeda no início do i-ésimo período, M_i/p_i é o estoque real de moeda em termos de poder de compra de bens de consumo e os demais símbolos têm o mesmo significado das seções anteriores. Continuamos a adotar a hipótese de que o fluxo de serviços é proporcional ao estoque existente. Assim M_i/p_i mede o fluxo de serviços prestados pela moeda no i-ésimo período.

Admita-se, ainda, que a moeda não se deprecia fisicamente e indicaremos por ΔM_i a variação do encaixe nominal no i-ésimo período, isto é:

$$\Delta M_i = M_i - M_{i-1}$$

Suponha-se, também, que a retenção de moeda não proporciona qualquer retorno pecuniário. O consumidor usará o seu patrimônio durante o período de planejamento na aquisição de bens de consumo, na compra de bens de consumo duráveis e no aumento do estoque nominal de moeda, de tal modo que a restrição orçamentária seja atendida, isto é:

$$\sum_{i=t}^{t+N} \frac{p_i c_i + v_i I_i + \Delta M_i}{(1+r)^{i-t}} = W^T$$

onde W^T é o valor atual do patrimônio do indivíduo:

$$W^T = W^* + \frac{(1-\delta)\, v_{t+N+1}\, K_{t+N} + M_{t+n}}{(1+r)^{N+1}}$$

e W^* é o valor atual das rendas de propriedade e do capital humano. O segundo termo desta expressão é o valor atual do estoque de bens de consumo duráveis e de moeda ao final do período de planejamento.

Como o investimento bruto, por período, no bem de consumo durável é igual à soma da variação do estoque com a reposição da parte do estoque do bem durável que se depreciou,

$$I_i = K_i - (1-\delta)\, K_{i-1}$$

segue-se que a restrição orçamentária do consumidor pode ser escrita como:

$$\sum_{i=t}^{t+N} \frac{p_i c_i + \Pi_i K_i + v_i m_i}{(1+r)^{i-t}} = W \qquad (3.2)$$

onde W inclui o valor do bem durável, assim como o estoque de moeda que o indivíduo possui no início do período t:

$$W = W^* + v_t (1 - \delta) K_{t-1} + M_{t-1}$$

O custo de uso do bem durável é, como na seção precedente, expresso por:

$$\Pi_i = v_i - \frac{(1-\delta) v_{i+1}}{1+r} \qquad (3.3)$$

O símbolo m_i na última restrição orçamentária indica a quantidade real de moeda, $m_i = M_i/p_i$, e v_i é o custo de uso de moeda, que é igual a:

$$v_i = \frac{p_i r}{1+r} \qquad (3.4)$$

O custo de uso da moeda é o custo que se incorre para se utilizar os serviços de moeda, ou seja, para cada unidade de consumo que se retém sob a forma de moeda, no i-ésimo período, o custo dessa unidade é de v_i cruzeiros, custo este que depende do preço do bem de consumo e da taxa de juros. Observe-se que o custo total dos serviços prestados pelo estoque de moeda M_i é igual ao produto do custo de uso pela quantidade real de moeda, $v_i M_i$, que por sua vez é igual ao valor atual, no início do período, do total de juros que se deixa de ganhar pela aplicação de recursos sob a forma de moeda, isto é:

$$v_i M_i = \frac{r M_i}{1+r}$$

O problema do consumidor consiste em maximizar a função-utilidade (3.1) com condição de que a restrição orçamentária (3.2) seja satisfeita. A expressão de Lagrange para este problema de máximo condicionado é a seguinte:

$$l = u(K_t, c_t, m_t, \ldots, K_{t+N}, c_{t+N}, m_{t+N})$$
$$+ \lambda \left[W - \sum_{i=t}^{t+N} \frac{p_i c_i + \Pi_i K_i + v_i m_i}{(1+r)^{i-t}} \right]$$

A condição de primeira ordem para o máximo da função l é a de que suas derivadas parciais com respeito a K_i, c_i e m_i sejam iguais a zero, isto é:

$$\frac{\partial l}{\partial c_i} = \frac{\partial u}{\partial c_i} - \lambda \frac{p_i}{(1+r)^{i-t}} = 0, \quad i = t, \ldots, t+N$$

$$\frac{\partial l}{\partial K_i} = \frac{\partial u}{\partial K_i} - \lambda \frac{\Pi_i}{(1+r)^{i-t}} = 0, \quad i = t, \ldots, t+N$$

$$\frac{\partial l}{\partial m_i} = \frac{\partial u}{\partial m_i} - \lambda \frac{v_i}{(1+r)^{i-t}} = 0, \quad i = t, \ldots, t+N$$

Este conjunto de $3(N+1)$ equações juntamente com a restrição orçamentária permitem determinar as $3(N+1)$ equações de demanda de bens de consumo, de bens de consumo duráveis e de moeda e a equação do multiplicador de Lagrange λ, que pode ser interpretado como a utilidade marginal da riqueza. As conclusões da teoria do consumidor se aplicam a este caso e a matriz de Slutsky é negativa semidefinida.

A condição de equilíbrio segundo a qual a utilidade marginal da moeda é proporcional ao custo de uso da moeda,

$$\frac{\partial u}{\partial m_i} = \lambda \frac{v_i}{(1+r)^{i-t}}$$

pode ser interpretada em termos de taxas de retorno. Com efeito, o valor do fluxo de serviços prestado pela moeda, avaliado em cruzeiros do final do i-ésimo período, é igual a:

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial m_i} (1+r)^{i+1-t}$$

A taxa de retorno do fluxo de serviços é obtida dividindo-se este valor pelo preço p_i do bem de consumo:

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial m_i} (1+r)^{i+1-t} \frac{1}{p_i}.$$

Segue-se da condição de proporcionalidade entre utilidades marginais e preços que a taxa de retorno do fluxo de serviços da moeda é, em equilíbrio, igual à taxa de juros:

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial m_i} (1+r)^{i+1-t} \frac{1}{p_i} = r$$

A equação de demanda de moeda, obtida a partir das condições de proporcionalidade entre utilidades marginais e preços na posição de equilíbrio e da restrição orçamentária, expressa a quantidade demandada de moeda como função dos preços dos bens de consumo, p_t, $p_{t+1}/1+r, \ldots,$ dos custos de uso do bem durável, Π_t, $\Pi_{t+1}/1+r, \ldots,$ dos custos de uso de moeda, v_t, $v_{t+1}/1+r, \ldots,$ e da riqueza total W. Em símbolos:

$$m_t = m\left(\Pi_t, \frac{\Pi_{t+1}}{1+r}, \ldots, p_t, \frac{p_{t+1}}{1+r}, \ldots, v_t, \frac{v_{t+1}}{1+r}, \ldots, W_t\right) \quad (3.5)$$

Podemos repetir aqui os comentários inseridos abaixo da equação de demanda de bens de consumo duráveis, equação (2.11), da seção precedente. A equação (3.5) para ser operacional do ponto de vista econométrico requer que sejam feitas hipóteses com relação às expectativas presentes acerca dos preços dos bens de consumo e de consumo duráveis nos períodos subseqüentes ao atual. Admita-se que se espera hoje que os preços aumentem a uma taxa, por período, igual à da inflação g. A taxa de juros real é, então, obtida através da relação fisheriana:

$$1 + r = (1+\rho)(1+g)$$

Como todos os preços aumentarão a uma taxa, por período, igual à taxa de inflação g, e devido à homogeneidade de grau zero nos preços e na riqueza, a equação de demanda (3.5) pode ser escrita como função dos preços relativos dos serviços do bem durável e da moeda em termos de bens de consumo, Π_t/p_t e v_t/p_t, da taxa de juros real esperada ρ_t e da riqueza real W_t/p_t, isto é:

$$m_t = m\left(\frac{\Pi_t}{p_t}, \frac{v_t}{p_t}, \rho_t, \frac{W_t}{p_t}\right)$$

Quando o preço v_t do bem durável não se modificar em relação ao preço p_t do bem de consumo, a equação de demanda anterior pode ser escrita como:

$$m_t = m\left(r_t, g_t, \frac{W_t}{p_t}\right)$$

ou, alternativamente:

$$m_t = m\left(\rho_t, g_t, \frac{W_t}{p_t}\right)$$

Na primeira equação, a quantidade demandada de moeda é função da taxa de juros nominal r_t, da taxa de inflação esperada g_t e da riqueza real W_t/p_t. Na segunda equação, a quantidade demandada de moeda é função da taxa de juros real esperada, das taxas de inflação esperada e de riqueza real. De qualquer modo, as taxas de juros, nominal ou real, além da taxa de inflação esperada, são variáveis explicativas da demanda de moeda.

IV.4 — A Demanda de Automóveis no Brasil

Uma boa parte dos modelos desenvolvidos para explicar a demanda de bens de consumo duráveis — apesar de salientarem o fato, já assinalado anteriormente, de que a demanda de bens de consumo duráveis é uma demanda derivada dos serviços prestados por esses bens — não incorporou esta idéia diretamente na análise. Com efeito, de acordo com esses modelos, a demanda de bens de consumo duráveis, como a demanda de qualquer outro bem, é baseada na teoria do consumidor apresentada no Capítulo I. Esta teoria, como sabemos, afirma que a demanda por um bem qualquer depende do seu preço, dos preços de outros bens e serviços que lhes são complementares e substitutos, da renda e dos gostos e preferências do consumidor. Assim, denominando por K_t^d o estoque do bem durável demandado pelo consumidor ao final do período t, v_t o preço do bem durável em questão, p_t o preço de outros bens e serviços adquiridos pelo indivíduo, e y_t a renda nominal do consumidor, a quantidade demandada é expressa através da função:

$$K_t^d = K_t^d \quad (v_t, p_t, y_t, Z_t) \tag{4.1}$$

onde Z_t é um vetor que representa outras variáveis que porventura influenciem a demanda do bem durável em estudo. Entre as variáveis que são candidatas potenciais a serem incluídas no vetor Z_t, devemos salientar uma variável que capte as variações nas condições de crédito, pois grande parte dos bens duráveis são comprados através de crédito e, em geral, condições de crédito como entrada mínima, número máximo de prestações, taxa de juros, são regulamentadas pelas autoridades monetárias tanto no Brasil como em outros países.

O acréscimo no estoque de bens duráveis num dado período é igual à diferença entre o estoque K_t no final do período t e o estoque K_{t-1} no início do mesmo período. Em geral, admite-se que o processo de ajustamento entre o estoque desejado e o atual não é instantâneo e que este se dá através de um mecanismo de ajustamento parcial, isto é:

$$K_t - K_{t-1} = \lambda\,(K_t^d - K_{t-1}) \tag{4.2}$$

Observe que, se λ for igual a 1, o estoque no final do período será igual ao estoque desejado ao final do mesmo período.

O investimento de reposição do bem durável no período é, por hipótese, proporcional ao estoque no início do período t:

$$R_t = \delta K_{t-1}$$

onde R_t é a reposição ocorrida no período e δ é a taxa de reposição.

A compra de bens duráveis no período, I_t, é igual ao acréscimo líquido do estoque $K_t - K_{t-1}$, mais a reposição R_t, ou seja:

$$I_t = K_t - K_{t-1} + \delta K_{t-1} \tag{4.3}$$

Substituindo-se (4.1) em (4.2), e o resultado em (4.3), obtemos:

$$I_t = \lambda K_t^d\,(v_t, p_t, y_t, Z_t) + (\delta - \lambda)\,K_{t-1} \tag{4.4}$$

Observe-se que o coeficiente de K_{t-1} tanto pode ser negativo como positivo dependendo de $\delta < \lambda$ ou $\delta > \lambda$, respectivamente. A equação acima é, basicamente, o modelo usado em um bom número de estudos de bens de consumo duráveis.

IV.4.1 — O Estudo de Baumgarten (1972)

Um estudo pioneiro de demanda de automóveis no Brasil foi realizado por Baumgarten (1972). Este estudo, basicamente, aplica a teoria tradicional do consumidor, como acabamos de descrever, à especificação da demanda de automóveis. A seguir, apresentam-se os modelos usados por Baumgarten, bem como procede-se a uma análise crítica dos métodos empregados na sua pesquisa.

A equação de demanda de estoque usada por Baumgarten é semelhante à especificada em (4.1). Todavia, quatro diferentes modelos são estudados por Baumgarten.

Modelo A. No primeiro modelo a equação de demanda de estoque é:

$$K_t^d = \beta_0 + \beta_1 \frac{v_t}{d_t} + \beta_2 \frac{y_t^a}{N_t} + \beta_3 \frac{y_t^*}{N_t} \tag{4.5}$$

onde:

d_t = índice de preços de carros novos;
v_t = vida média esperada para carros novos;
y_t^* = renda disponível no setor privado no período t;
y_t^a = renda disponível do setor privado acumulada nos períodos $t-3$, $t-2$, $t-1$ e t; e
N_t = população.

Substituindo-se o valor de K_t^d dado em (4.5) na equação (4.4), obtém-se:

$$I_t = \lambda\beta_0 + \lambda\beta_1 \frac{v_t}{d_t} + \lambda\beta_2 \frac{y_t^a}{N_t} + \lambda\beta_3 \frac{y_t^*}{N_t} + (\delta - \lambda) K_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4.6}$$

onde ε_t é uma variável aleatória com média nula, variância finita e serialmente independente.

A primeira linha da Tabela IV.1 contém os resultados da regressão acima. O coeficiente da variável preço apresenta o sinal correto mas tem elevado erro-padrão. O coeficiente da renda disponível no período corrente tem elevado erro-padrão e o seu sinal é negativo. A estatística de Durbin-Watson é baixa, evidenciando autocorrelação dos resíduos.

Modelo B. No segundo modelo, Baumgarten admite que a equação de ajustamento parcial ao invés de linear como (4.2) é logarítmica, ou seja:

$$\log K_t - \log K_{t-1} = \lambda (\log K_t^d - \log K_{t-1}) \tag{4.7}$$

Da mesma forma, a equação (4.5) passa a ser logarítmica, isto é:

$$\log K_t^d = \beta_0 + \beta_1 \log \frac{v_t}{d_t} + \beta_2 \log \frac{y_t^a}{N_t} + \beta_3 \log \frac{y_t^*}{N_t} \tag{4.8}$$

Combinando-se estas duas últimas equações, obtém-se:

$$\log K_t = \lambda\beta_0 + \lambda\beta_1 \log \frac{v_t}{d_t} + \lambda\beta_2 \log \frac{y_t^a}{N_t} + \lambda\beta_3 \log \frac{y_t^*}{N_t} + (1 - \lambda) \log K_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4.9}$$

A segunda linha da Tabela IV.1 apresenta as estimativas do modelo expresso nesta equação. O coeficiente da variável preço tem o sinal contrário ao indicado pela teoria e seu erro-padrão é elevado. O coeficiente de ajustamento apesar de significativo é pequeno ($\lambda = 0{,}06721$), indicando um processo de ajustamento bastante lento.

Tabela IV.1

DEMANDA DE AUTOMÓVEIS NO BRASIL: BAUMGARTEN (1972)

	Variável Dependente	Constante	v_t/d_t	y_t^a/N_t	y_t/N_t	K_{t-1}	v_t^u/p_t	t	D_t^*	*Dummy*	R^2 / DW
1	I_t	—7166,92	—863,50	3097,1	—1048,8	0,0465	—	—		—	0,8739
			(1709,4)	(1175,0)	(934,77)	(0,0064)					1,256
2	K_t^*	1,4912	0,04009	—0,294	0,01811	0,93279	—	—	—	—	0,99910
			(0,04118)	(0,09515)	(0,01323)	(0,0087)					1,41907
3	K_t^*	—0,2208	—4,0093	8,3064	—0,0404	—	—	—	—	—	0,7592
			(0,5776)	(1,3817)	(0,3096)						0,2738
4	λ_t^{**}	108,6135	2,6461	—0,005	—0,04824	—	—0,8288	—	—	—	0,6327
			(1,0514)	(1,3722)	(0,2979)		(0,1357)				1,255
5	λ_t^{**}	112,1202	3,7786	—10,054	—1,153	—	0,50545	0,212	—	—	0,65901
			(1,3057)	(1,5376)	(0.29364)		(0,95127)	(0,14963)			1,34846
6	K_t^*	0,0414	—3,4927	7,744	—0,042	—	—	—	—	—	0,7720
			(0,5005)	(1,1972)	(0,2682)						0,2833
7	λ_t^{**}	60,0816	2,8807	—5,1793	—0,1803	—	—0,7781	—	—0,2083	—	0,68785
			(0,7652)	(1,8452)	(0,2131)		(0,1437)		(0,3929)		1,151
8	λ_t^{**}	—154,7379	4,2344	—14,033	—0,07211	—	0,8233	0,2199	0,9879	—	0,70242
			(1,2366)	(2,5467)	(0,2815)		(0,9214)	(0,1426)	(0,5173)		1,5124
9	K_t^{**}	—22,0965	—2,2904	6,9001	0,0201	—	—	—	—	—	0,9354
			(0,4630)	(0,4837)	(0,1610)						0,1995
10	λ_t^*	5,44415	4,8915	—4,6177	—0,55938	—	—0,82216	—	—	2,6477	0,69215
			(1,6531)	(3,078)	(0,58441)		(0,2015)			(0,4858)	1,24807
11	K_t^{**}	—19,9658	—1,9087	6,2811	—	—	—	—	—	—	0,9435
			(0,3757)	(0,3829)							0,2334
12	λ_t^*	5,49818	4,4410	—13,934	—3,3620	—	0,3558	—	2,0957	2,742	0,78271
			(1,5917)	(5,2801)	(0,5538)		(0,5206)		(1,0349)	(0,3759)	1,511
13	I_t^*	5,69294	—0,34505	2,3927	—0,12482	—	—0,20175	—	—	—	0,862
			(0,30142)	(0,53587)	(0,10557)		(0,03662)				0,9455
14	I_t^*	5,24074	—0,13419	—0,351	—0,15445	—	0,096098	—	0,63673	—	0,91327
			(0,2494)	(0,8229)	(0,0856)		(0,0817)		(0,1624)		1,996
15	I_t^{**}	0,26605	—0,48820	2,242	—0,10594	—	—0,49847	—	—	—	0,87401
			(0,4232)	(0,5365)	(0,10182)		(0,2994)				0,97302
16	I_t^*	5,47368	—0,44274	0,28882	—0,13567	—	0,2286	—	0,49075	—	0,91311
			(0,3584)	(0,7294)	(0,08661)		(0,3296)		(0,14345)		1,73897

FONTE: Baumgarten (1972).

NOTAS: a) Os valores entre parênteses são os erros-padrão.

b) Um asterisco ao lado da variável dependente indica que a forma funcional da equação é do tipo log-log. Dois asteriscos indicam que, além de a forma ser do tipo log-log, as variáveis independentes são aquelas representadas no numerador, isto é: v_t, y_t^a, y_t e v_t^u ao invés de v_t/d_t, y_t^a/N_t, y_t/N_t e v_t^u/p_t, respectivamente.

c) O significado dos símbolos usados na tabela é dado no texto.

Modelo C. No terceiro modelo, Baumgarten admite que não houve sucateamento no período de análise e que o investimento se dá de acordo com:

$$I_t = \lambda_t \, (K_t^d - K_{t-1}) \tag{4.10}$$

onde o parâmetro de ajustamento λ_t depende do período t. Em outras palavras, o parâmetro λ varia com o tempo. A especificação desse parâmetro é estabelecida de acordo com a equação:

$$\log \lambda_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 \log y_t^* + \gamma_3 \log y_t^a + \gamma_4 \log v_t + \gamma_5 \log \frac{v_t^u}{p_t} + \varepsilon_{1t} \tag{4.11}$$

onde ε_{1t} é o erro aleatório, v_t^u é um índice de preços de carros usados e t é o tempo, introduzido para captar mudanças nos gostos e preferências. Pelo menos duas observações cabem aqui, quanto à especificação desta equação. Em primeiro lugar, ela é completamente *ad hoc,* pois inexiste teoria econômica que suporte tal formulação. Em segundo lugar, o parâmetro λ_t estando compreendido entre zero e 1, a estimação da equação anterior deixa de ser um assunto trivial, na hipótese de que valores de λ_t sejam conhecidos. Mais adiante, retornaremos a este assunto.

Quanto à equação de demanda de estoque, esta continua a ser especificada por (4.8). A terceira linha da Tabela IV.1 contém os resultados daquela regressão na hipótese de que $\log K_t^d$ é o valor esperado de $\log K_t$:

$$\log K_t = \log K_t^d + \varepsilon_{2t} = \beta_0 + \beta_1 \log \frac{v_t}{d_t} + \beta_2 \log \frac{y_t^a}{N_t} + \beta_3 \log \frac{y_t^*}{N_t} + \varepsilon_{2t} \tag{4.12}$$

onde o erro aleatório segue as propriedades tradicionais. Depois de estimar esta equação por mínimos quadrados ordinários — os resultados estão contidos na terceira linha da Tabela IV.1 —, Baumgarten constrói os valores de λ_t de acordo com a expressão:

$$\log \lambda_t = \log \frac{I_t}{K_t^d - K_{t-1}} \tag{4.13}$$

onde K_t^d é obtido a partir de (4.12). Com os valores assim obtidos de λ_t, faz-se, então, a regressão (4.11). A quarta e a quinta linhas da Tabela IV.1 reportam os valores dessa regressão, sem e com o tempo como variável independente, respectivamente.

O procedimento que acabamos de descrever contém sérios problemas de especificação econométrica. Com efeito, Baumgarten admite que ambas as equações (4.7) e (4.12) — são válidas, isto é:

$$\log K_t = \lambda_t \log K_t^d + (1 - \lambda_t) \log K_{t-1}$$

e:

$$\log K_t = \log K_t^d + \varepsilon_{2t}$$

Multiplicando-se esta equação por λ_t e então subtraindo-se o resultado da primeira, obtém-se:

$$(1 - \lambda) \log K_t = (1 - \lambda_t) \log K_{t-1} - \lambda_t \varepsilon_{2t}$$

Desde que λ_t seja diferente de 1, podemos dividir ambos os lados desta expressão por $(1 - \lambda_t)$ para obter:

$$\log K_t - \log K_{t-1} = - \frac{\lambda_t}{1 - \lambda_t} \varepsilon_{2t} \qquad (4.14)$$

O significado desta equação é que o logaritmo do estoque de automóveis é um caminho aleatório (*random walk*) com a variância variável, e que, portanto, a melhor previsão do logaritmo do estoque de automóveis no período t é o logaritmo do estoque de automóveis no período anterior. Acreditamos que esta implicação das hipóteses adotadas por Baumgarten não seja uma propriedade "desejada" para tal tipo de estudo.

Por outro lado, se λ_t for igual à unidade, a equação (4.11) deixa de ter sentido, mas neste caso a regressão (4.12) passa a ter significado, isto é, se λ_t for igual à unidade, o modelo deixa de ser contraditório.

Modelo D. O quarto modelo especificado por Baumgarten admite que haja sucateamento no período estudado e calcula a depreciação ocorrida em função da taxa de depreciação estimada com base nos preços do mercado de segunda mão, isto é:

$$D_t^* = \delta^* K_{t-1}$$

onde δ^* é a taxa de depreciação estimada. Por ter estimado a depreciação de acordo com esta expressão, Baumgarten usa a seguinte equação para o investimento bruto no período t:

$$I_t = \lambda_t (K_t^d - K_{t-1}) (D_t^*)^{\gamma_6} \qquad (4.15)$$

Esta equação quando combinada à (4.11) produz:

$$\log \frac{I_t}{K_t^d - K_{t-1}} = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 \log y_t^* + \gamma_3 \log y_t^a$$

$$+ \gamma_4 \log v_t + \gamma_5 \log \frac{v_t^u}{p_t} + \gamma_6 \log D_t^* + \varepsilon_{1t}$$

Da mesma forma que no modelo anterior, a equação (4.12) é usada para o estoque desejado de automóveis.

Novamente para este modelo cabem os mesmos comentários apresentados para o modelo C: da maneira como está formulado ele é contraditório.

As linhas 6, 7 e 8 da Tabela IV.1 apresentam os resultados obtidos por Baumgarten para este último modelo. Para a equação do estoque — linha 6 — o coeficiente de renda do trimestre não é significativo e a estatística de Durbin-Watson é bastante baixa. evidenciando uma elevada correlação serial dos resíduos. As estimativas das linhas 7 e 8 divergem quanto à introdução do tempo como variável explicativa, inclusão esta que muda substancialmente os valores dc alguns parâmetros.

As demais linhas da Tabela IV.1 contêm várias estimativas para especificação alternativas. A nona linha da Tabela IV.1 apresenta os coeficientes da demanda de estoque, sem depreciação, com as variáveis v_t, y_t^a e y_t^* como variáveis independentes ao invés de v_t/d_t, y_t^a/N_t e y_t^*/N_t, respectivamente. As alterações observadas nos coeficientes não são de grande magnitude.

A décima linha da Tabela IV.1 contém os coeficientes de uma regressão de λ_t, em logaritmos, onde foi introduzida uma variável *dummy* para captar situações peculiares do período analisado. Esta variável mostra-se significativa, o mesmo ocorrendo com as variáveis-preço. Os coeficientes das variáveis-renda apresentam elevados erros-padrão e a estatística de Durbin-Watson aponta para a existência de autocorrelação dos resíduos.

A décima segunda linha da Tabela IV.1 contém os resultados de uma regressão do logaritmo do estoque de automóveis contra as variáveis v_t e y_t^a. Os coeficientes dessas variáveis são significativos e a estatística de Durbin-Watson é bastante baixa. Os resultados seguintes, na linha 13, pertencem a uma regressão do logaritmo de λ_t, incluindo-se agora a depreciação computada como variável explicativa. Ela é significativa e alguns coeficientes sofrem mudanças nos seus valores.

As quatro últimas regressões, cujos resultados constam da Tabela IV.1, são especificações alternativas de demanda-fluxo de automóveis, não se levando em conta aí os problemas de ajustamento de estoques. O leitor atento examinando esses resultados observará que as equações que não incluem D_t^* como variável explicativa apresentam elevada correlação serial dos resíduos e a introdução dessa variável altera as estimativas dos coeficientes das outras variáveis.

IV.4.2 — O Estudo de Milone (1973)

Milone, como Baumgarten, estudou a demanda de automóveis no Brasil usando o enfoque tradicional da teoria do consumidor. O período da análise é 1961/69 e os dados utilizados são trimestrais.

Basicamente, dois modelos foram usados por Milone. Em um ele usou para variável dependente o estoque de automóveis, com a especificação indicada na equação (4.1) em forma linear:

$$K_t = a_0 + \alpha_1 \frac{v_t}{p_t} + \alpha_2 y_t + \alpha_3 Z_t + \varepsilon_t \qquad (4.16)$$

Antes de comentarmos os resultados de Milone cabe fazer algumas observações com relação aos dados usados.

O preço v_t corresponde a um índice de preços de carros novos elaborado pelo autor do trabalho. O índice p_t é o índice geral de preços da *Conjuntura Econômica*. A série da renda real y_t^* é a construída por Pastore (1969). Quanto à série de estoque de capital, esta é obtida dividindo-se o valor corrente da frota de automóveis pelo índice de preços de carros novos. Aparentemente, o valor corrente da frota foi obtido adicionando-se cruzeiros de dois períodos diferentes sem se ajustar a unidade de medida, pois a série de estoque foi obtida adicionando-se o investimento líquido em cada período. Obviamente, se este for o caso, o estudo de Milone fica bastante prejudicado face ao erro de variável introduzido no modelo.

A Tabela IV.2 contém os resultados obtidos por Milone para a equação (4.16). Nas duas primeiras linhas da tabela α_3 é igual a zero, ou seja, as variáveis independentes são apenas preço e renda, e as especificações linear e logarítmica são estimadas respectivamente. Os coeficientes das variáveis têm o sinal correto, são significativos e as elasticidades-preço e renda são maiores que 1 em valor absoluto.

Na terceira linha da Tabela IV.2 a variável meios de pagamentos (conceito M_1) é introduzida na equação de demanda de automóveis, o que equivale a ter-se $Z_t = M_t$ na equação (4.16). O sinal do coeficiente de M_t é positivo, porém não é significativo, enquanto os sinais dos outros coeficientes não sofrem mudanças significativas.

Tabela IV.2

DEMANDA DE AUTOMÓVEIS NO BRASIL: MILONE (1973)

Variável Dependente	Constante	$\frac{r_t}{p_t}$	y_t^*	M_t	r_t	R^2	DW
K_t	—1513,7180	—11,7797 (2,4696)	20,5389 (2,2339)	—	—	0,9423	—
log K_t	0,7936	—1,6080 (0,2408)	2,4653 (0,3465)	—	—	0,9432	0,8012 0,5991
K_t	—1887,3962	—10,8966 (2,4726)	17,4579 (2,8971)	0,6318 (0,3910)	—	0,9467	—
log K_t	1,0952	—1,8724 (0,1972)	2,2703 (0,2749)	—	0,4995 (0,1072)	—	—
I_t	—572,1308	—0,2663 (0,5003)	3,5181 (0,4525)	—	—	0,8604	—
log I_t	—2,7847	—0,5500 (0,2886)	2,6603 (0,4153)	—	—	0,8611	—
log K_t $(\hat{\rho})$	1,7521	—1,9259 (0,2212)	1,2686 (0,2705)	—	—		1,1000

FONTE: Milone (1973).

NOTAS: a) Os valores entre perênteses são os erros-padrão.

b) Quando a variável dependente for em logaritmo, o mesmo ocorre com as independentes. A variáve log $K_t(\hat{\rho})$ é dada por: log $K_t(\hat{\rho})$ = log $K_t - \hat{\rho}$ log K_{t-1}, onde $\rho = 0,55991$. As variáveis independentes da referida regres são sofreram a mesma transformação.

c) O significado dos símbolos usados na tabela é dado no texto.

Na quarta linha da Tabela IV.2 a variável taxa de juros real é introduzida na equação de demanda de automóveis; isto equivale a ter-se $Z_t = r_t$ na equação (4.16). O sinal do coeficiente é contrário ao esperado pelo autor do trabalho e bastante significativo. É possível que este fato esteja ligado a um erro de especificação ou de medição da variável. No seu trabalho, Milone não diz que taxa de juros real foi usada. Aparentemente, a taxa de juros real é uma taxa *ex post,* obtida pela diferença entre a taxa de juros nominal cobrada pelas Companhias de Crédito e Financiamento e a da inflação verificada no período.

A última linha da Tabela IV.2 contém os resultados obtidos com a estimação da equação (4.16), com $Z_t = 0$, levando-se em conta a autocorrelação dos resíduos indicada pela estatística de Durbin-Watson na última coluna da segunda linha da Tabela IV.2. Observe-se que o coeficiente da renda sofre uma redução substancial, enquanto o do preço aumenta um pouco em valor absoluto. Este fato parece indicar que o problema com a especificação, cuja estimação consta da segunda linha da Tabela IV.2, não seja a autocorrelação dos resíduos, mas possivelmente alguma variável deixada fora do modelo.

No segundo modelo usado por Milone a variável dependente é a compra de carros novos, em termos reais, e corresponde à especificação da equação (4.4) na forma linear, isto é:

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 \frac{v_t}{p_t} + \beta_2 y_t^* + \beta_3 Z_t + (\delta - \lambda) K_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (4.17)$$

Milone admite que $\beta_3 = 0$ e, implicitamente, que $\delta = \lambda$. Esta segunda hipótese é bastante duvidosa seja do ponto de vista teórico ou empírico. Por isso deveria ser testada e não imposta, *a priori,* no modelo.

A Tabela IV.2 contém resultados da estimação da equação (4.17) nas formas linear e logarítmica. Em ambas, as variáveis preço e renda são significativas.

IV.5 — Exercícios

1. No texto utilizou-se a hipótese de homogeneidade da função-utilidade na demonstração da proposição de que o consumo, para uma dada taxa de juros, é proporcional à riqueza nas teorias do ciclo da vida e da renda permanente. Mostre que chega-se a este mesmo resultado a partir de uma função-utilidade intertemporal homotética.

2. A função-utilidade intertemporal do consumidor é expressa por:

$$u\ (c_1, c_2) = c_1^{\alpha} c_2^{\beta}$$

Sua renda no primeiro período é igual a y_1, e ele espera ganhar y_2 cruzeiros no segundo período.

a) Qual a taxa de preferência intertemporal quando $c_1 = c_2$?

b) Supondo-se que a taxa de juros é igual a r, qual o nível de consumo no primeiro período?

c) Qual o nível de poupança no segundo período?

3. A função-utilidade intertemporal do indivíduo é dada por:

$$u(c_t, c_{t+1}, \ldots, c_{t+L}) = \prod_{i=0}^{L} c_{t+i}$$

onde L indica o número de anos adicionais que ele espera viver. Seu salário real anual no período t é igual a ω e ele acredita que permanecerá neste nível durante os $N\,(< L)$ períodos adicionais que planeja continuar na força de trabalho. Seu patrimônio no início do período t é igual a W. A taxa de juros real de mercado é igual a r e não se antecipa hoje que ocorra mudanças no futuro.

a) Qual a equação de consumo no período t?

b) Quais os perfis da renda, do consumo e do patrimônio durante o ciclo de vida?

4. Defina renda permanente como aquela que seria igual a um nível de consumo constante durante todos os períodos de planejamento. Quando o horizonte de planejamento aumenta indefinidamente ($N \rightarrow \infty$) qual a relação que a renda permanente assim definida guarda com o conceito de renda permanente de Friedman?

5. A função-utilidade intertemporal do consumidor é expressa por:

$$u_t = \prod_{i=0}^{N} c_{t+i}\, K_{t+i}$$

onde K_i representa os serviços do bem de consumo durável no período i, c_i o consumo de outros bens e serviços no mesmo período e N é o horizonte de planejamento do indivíduo.

Admita que os preços dos bens de consumo e de consumo duráveis são, respectivamente, iguais a p_t e v_t, e que a taxa de juros real de mercado é igual a r. Suponha que os preços permanecerão constantes no futuro.

a) Qual a equação de demanda do bem de consumo durável no período t?

b) Qual a expressão da função-consumo no período t?

c) A contabilidade nacional brasileira inclui no consumo os gastos no período com a aquisição de bens duráveis. Qual a equação para o período t, do consumo assim definido?

6. Certo ou Errado. Justifique sua resposta.

a) A propensão marginal a consumir, de acordo com a teoria fisheriana, não pode ser menor do que zero nem tampouco maior do que 1;

b) Um aumento do nível de renda acarreta um incremento maior no nível de consumo quando este aumento ao invés de transitório é permanente;

c) Um aumento antecipado na taxa de inflação não afeta o nível de consumo;

d) A função-consumo $c = \alpha + \beta y$ é inconsistente com a teoria fisheriana de alocação intertemporal dos recursos do consumidor;

e) Um aumento da Taxa Rodoviária Única (TRU), que todos os automóveis estão obrigados a pagar aqui no Brasil, não afetaria a demanda de automóveis;

f) Quando a taxa de juros é igual a zero, o nível de consumo será o mesmo em todos os períodos se a função-utilidade for homotética;

g) Se a taxa de juros for igual a zero, o consumidor não terá nenhum incentivo para poupar e, conseqüentemente, consumirá em cada período toda sua renda;

h) Numa economia em que os trabalhadores gastam toda sua renda na compra de bens de consumo e os capitalistas dedicam a este objetivo uma pequena fração de seus lucros, a soma dos coeficientes a_1 e a_2 da função-consumo $c = a_1\omega + a_2y$ é igual a 1 (ω é o total dos salários e y é a renda real agregada); e

i) Se o consumo for proporcional à riqueza, a propensão marginal a consumir no longo prazo é igual a 1, desde que o nível de consumo seja constante no longo prazo.

IV.6 — Bibliografia

ANDO, A., e MODIGLIANI, F. The life cycle hypothesis of savings: aggregate implications and tests. *American Economic Review*, 53:55-84, 1963.

BAUMGARTEN, A. L. Demanda de automóveis no Brasil. *Revista Brasileira de Economia*, 26:203-97, 1972.

CHOW, G. C. Statistical demand functions for automobiles and their use for forecasting. In: HARBERGER, A. C., org. *The demand for durable goods*. Chicago, The University of Chicago Press, 1960.

CRAGG, J. C., e UHLER, R. S. The demand for automobiles. *Canadian Journal of Economics*, 3:386-406, 1970.

DUESENBERRY, J. S. *Income, saving and the theory of consumer behavior*. Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1949.

FELDSTEIN, M. S., e ROTHSCHILD, M. Towards an economic theory of replacement investment. *Econometrica*, 42:393-423, 1974.

FISHER, I. *The theory of interest*. New York, Macmillan, 1930.

FRIEDMAN, M. *A theory of consumption function*. Princeton, Princeton University Press, 1957.

———. The quantity theory of money a restatement. In: FRIEDMAN, M., org. *Studies in the quantity theory of money*. Chicago, The University of Chicago Press, 1956.

HALL, R. E. Technical change and capital from the point of view of the dual. *The Review of Economic Studies,* 35:35-46, 1968.

HAMBURGER, M. J. Interest rates and the demand for consumer durable goods. *American Economic Review,* 57:131-53, 1967.

HESS, A. C. Household demand for durable goods: the influences of rates of return and wealth. *Review of Economics and Statistics,* 55:9-15, 1973.

—. A comparison of automobile demand equations. *Econometrica,* 45: 683-701, 1977.

KEYNES, J. M. *The general theory of employment, interest and money.* Londres, Harcourt, 1936.

KUZNETS, S. Proportion of capital formation to national product. *American Economic Review,* 42:507-26, 1952.

MIKESELL, R. F., e ZINSER, J. R. The nature of the savings function in developing countries: a survey of the theoretical and empirical literature. *Journal of Economic Literature,* 11:1-26, 1973.

MILONE, P. C. *Estudo de bens duráveis de consumo: estudo de demanda de automóveis.* Dissertação de Mestrado. Faculdade de Economia e Administração da Universidade de São Paulo, 1973.

MODIGLIANI, F., e ANDO, A. The permanent income and the "life cycle" hypothesis of savings behavior: comparisons and tests. In: FRIEND, I., e JONES, R., orgs. *Consumption and saving.* Vol. II. Philadelphia, University of Pennsylvania Press.

MODIGLIANI, F., e BRUMBERG, R. Utility analisys and the consumption function: an interpretation of cross-section data. In: KURIHARA, K., org. *Post-Keynesian economics.* Rutgers University Press, 1954.

MODIGLIANI, F., e TARANTELLI, E. The consumption function in a developing economy and the Italian experience. *American Economic Review,* 65:825-42, 1975.

WYKOFF, F. C. Capital depreciation in the postwar period: automobiles. *Review of Economics and Statistics,* 52:168-72, 1970.

———. A user cost approach to new automobile purchases. *The Review of Economic Studies,* 40:377-90, 1974.

Segunda Parte

TEORIA DA PRODUÇÃO E CUSTO

Capítulo V

FUNÇÃO DE PRODUÇÃO

Este capítulo tem como escopo o estudo da função de produção. Inicialmente, introduz-se os conceitos e definições básicos. Em seguida apresentam-se de maneira detalhada as propriedades das funções de produção Cobb-Douglas e CES. A quarta seção trata de outras funções de produção que não são tão populares mas que procuram generalizar essas duas funções no sentido de abrangerem situações em que a elasticidade de substituição e a elasticidade de escala são variáveis. A última seção do capítulo é dedicada a uma resenha sumária de alguns trabalhos empíricos sobre função de produção realizados no Brasil.

V.1 — Conceitos e Definições Básicos

A função de produção é uma relação técnica que associa a cada dotação de fatores de produção a máxima quantidade de produto obtida a partir da utilização desses fatores. Assim, se denominarmos por $X_1, X_2, \ldots, X_n$ as quantidades (de serviços) dos n fatores usados na produção da quantidade Q de produto, a função de produção pode ser formalmente representada por:

$$Q = Q\,(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{1.1}$$

A função de produção (1.1) sumaria, para um dado instante do tempo, o estoque de conhecimento tecnológico existente na produção do bem a que se refere.

V.1.1 — Propriedades da Função de Produção

Admite-se, em geral, que a função de produção $Q = Q(X)$, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, satisfaz as seguintes hipóteses:

Hipótese 1 — É impossível produzir-se alguma coisa a partir de nada.

O conteúdo desta hipótese é bastante simples, pois ele afirma que, se a quantidade de fatores de produção for igual a zero, $X = 0$, a quantidade de produto também será igual a zero:

$$Q(0) = 0$$

Hipótese 2 — A função de produção é uma função não decrescente nas quantidades de fatores.

O significado desta hipótese é que, se a dotação de fatores aumentar, o nível de produção também aumentará, ou quando muito permanecerá inalterado. Assim, se $X' \geqslant X$, segue-se então que:

$$Q(X') \geqslant Q(X)$$

Hipótese 3 — A função de produção é quase-côncava.

Esta hipótese afirma que, se as quantidades de fatores X' e X produzirem a mesma quantidade de produto, $Q(X') = Q(X)$, então uma combinação linear dos mesmos, $\alpha X' + (1 - \alpha) X$, produzirá uma quantidade pelo menos igual àquela produzida por cada uma das dotações, isto é:

$$Q[\alpha X' + (1 - \alpha) X] \geqslant Q(X') = Q(X)$$

Admite-se, também, que a função de produção possua uma região onde ela é côncava. Cabe lembrar que toda função côncava é quase-côncava, mas a recíproca não é verdadeira. O significado dessa hipótese adicional é o de que a função de produção tenha uma região onde os retornos de escala sejam decrescentes, condição a que a tecnologia usada por uma empresa em equilíbrio de concorrência perfeita tem de satisfazer, como será visto no Capítulo **VII**.

Hipótese 4 — A função de produção possui derivadas contínuas de segunda ordem.

O objetivo desta hipótese é possibilitar o uso do cálculo diferencial aos problemas da teoria da empresa de sorte a facilitar a obtenção dos principais resultados que, vale ressaltar, de modo geral, independem desta hipótese.

V.1.2 — Produtividades Média e Marginal

A produtividade média de um fator, *PMe*, é definida pela relação entre a quantidade de produto e a quantidade de fator usada na sua produção, ou seja:

$$PMe_i = \frac{Q}{X_i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

A produtividade marginal de um fator, *PMg*, é igual à razão entre o acréscimo de produto e o acréscimo de fator, mantendo-se constantes as quantidades dos demais fatores. Em termos matemáticos, a produtividade marginal do fator i

é dada pela derivada parcial do produto Q em relação à quantidade do fator X_i, isto é:

$$PMg_i = \frac{\partial Q}{\partial X_i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.3}$$

A elasticidade do produto com relação ao fator i, η_i, é igual à razão entre as produtividades marginal e média, isto é:

$$\eta_i = \frac{PMg_i}{PMe_i} = \frac{\partial Q}{\partial X_i} \frac{X_i}{Q} \tag{1.4}$$

A elasticidade η_i mede a variação percentual no produto quando a quantidade no fator i varia em 1%.

A produtividade marginal de um fator é decrescente (crescente) quando, aumentando-se a quantidade desse fator e mantendo-se constantes as quantidades dos demais, a produtividade marginal decresce (cresce). Em símbolos:

$$\frac{\partial PMg_i}{\partial X_i} = \frac{\partial^2 Q}{\partial X_i^2} < 0 \, (> 0) \tag{1.5}$$

A produtividade média de um fator é máxima quando as produtividades marginal e média são iguais. Para verificar essa propriedade basta derivar a produtividade média (1.2) em relação a X_i e igualar o resultado a zero:

$$\frac{\partial PMe_i}{\partial X_i} = -\frac{Q}{X_i^2} + \frac{1}{X_i} \frac{\partial Q}{\partial X_i} = 0 \tag{1.6}$$

De (1.6) resulta:

$$\frac{Q}{X_i} = \frac{\partial Q}{\partial X_i}$$

Uma condição suficiente para que o ponto acima seja de máximo é que a produtividade marginal do fator seja decrescente, pois então a derivada segunda da produtividade média será negativa.

V.1.3 — Retornos de Escala

Os retornos de escala medem a variação na produção quando todos os fatores variam na mesma proporção. Assim, se multiplicarmos por λ as quantidades de todos os fatores, a produção pode aumentar na mesma proporção, em uma proporção maior que a do aumento dos fatores, ou em uma proporção menor à do incremento dos fatores. No primeiro caso, a função de produção apresenta retornos de escala constantes. No segundo, a função de produção tem retornos de escala crescentes e no último caso os retornos de escala são decrescentes.

Os retornos de escala podem ser medidos através da elasticidade de escala, definida através da razão entre a variação percentual no produto e a variação eqüiproporcional em todos os fatores de produção, ou seja:

$$\eta = \frac{dQ}{Q} \div \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dQ}{d\lambda} \cdot \frac{\lambda}{Q} = \frac{d \log Q}{d \log \lambda} \tag{1.7}$$

onde:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dX_i}{X_i}, \; i = 1, \ldots, n$$

A elasticidade de escala é igual à soma das elasticidades do produto:

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \tag{1.8}$$

Com efeito, a diferencial da equação (1.1) é igual a:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial X_1} dX_1 + \ldots + \frac{\partial Q}{\partial X_n} dX_n \tag{1.9}$$

Alternativamente, a equação (1.9) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\partial Q}{\partial X_1} \frac{X_1}{Q} \frac{dX_1}{X_1} + \ldots + \frac{\partial Q}{\partial X_n} \frac{X_n}{Q} \frac{dX_n}{X_n} \tag{1.10}$$

Para uma variação proporcional de todos os fatores igual a $d\lambda/\lambda$, tem-se, de (1.10), que:

$$\frac{dQ}{Q} = \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i \right) \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{1.11}$$

pois $\eta_i = \frac{\partial Q}{\partial X_i} \cdot \frac{X_i}{Q}$. Logo, da definição (1.7) e da expressão (1.11) obtém-se a equação (1.8). Portanto, conhecendo-se a elasticidade-produto em um dado ponto da função de produção, a elasticidade-escala é facilmente calculada com o auxílio de (1.8).

V.1.4 — Isoquantas

Com freqüência os economistas utilizam-se de gráficos de duas dimensões para mostrar relações existentes entre três variáveis. Admitamos, então, que na produção de Q são usados apenas dois fatores. Assim, a função de produção (1.1) reduz-se à expressão:

$$Q = Q(X_1, X_2) \tag{1.12}$$

Para uma dada quantidade Q_0 de produto, a função de produção nos dá as quantidades de fatores que podem ser combinadas para obter-se Q_0, isto é:

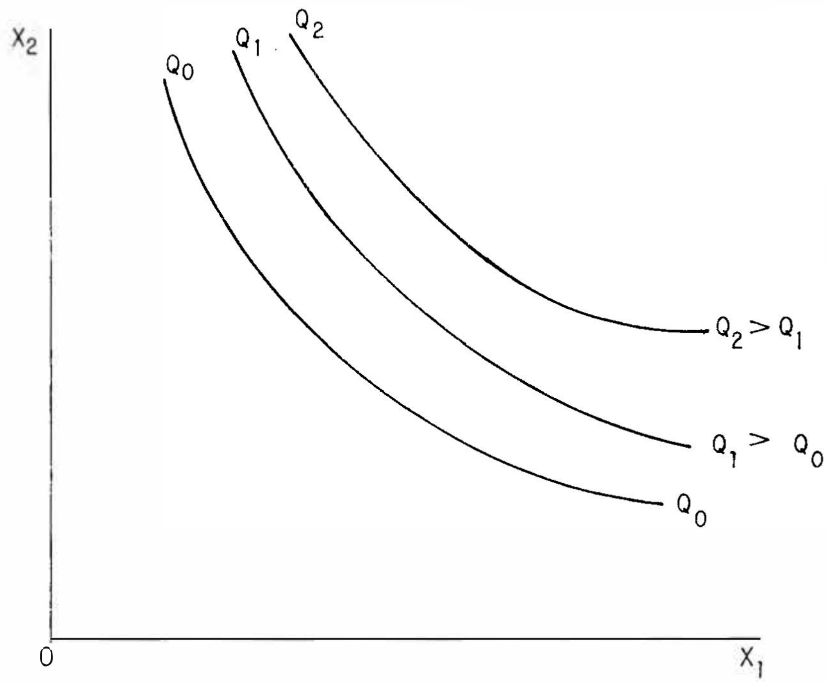
$$Q_0 = Q(X_1, X_2) \tag{1.13}$$

A curva acima é denominada de isoquanta. Graficamente marcando-se a quantidade X_2 no eixo vertical e a quantidade X_1 no eixo horizontal, a curva Q_0Q_0 representa a isoquanta (1.13).

A isoquanta é uma curva decrescente, pois, de acordo com a Hipótese 2, as produtividades marginais dos fatores não são negativas, e é convexa em relação à origem porque pela Hipótese 3 a função de produção é quase-côncava.

Figura V.1

ISOQUANTAS



A taxa marginal de substituição técnica entre fatores, que denominamos por τ, é igual ao acréscimo da quantidade de fator necessária para manter a produção constante quando se decresce a quantidade do segundo fator em uma unidade. Em símbolos, temos:

$$\tau = -\frac{dX_2}{dX_1}$$

É fácil de se concluir, a partir de (1.13), que a taxa marginal de substituição técnica é igual à razão entre as produtividades marginais, pois:

$$\frac{\partial Q}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial Q}{\partial X_2} dX_2 = dQ_0 = 0$$

Segue-se, portanto, da expressão acima que:

$$\tau = -\frac{dX_2}{dX_1} = \frac{\partial Q/\partial X_1}{\partial Q/\partial X_2} \qquad (1.14)$$

A elasticidade de substituição entre dois fatores é definida como a variação percentual na proporção de fatores quando a taxa marginal de substituição técnica varia em 1%. Mais rigorosamente, definimos a elasticidade de substituição pela expressão:

$$\sigma = \frac{d\,(X_2/X_1)\;/\;(X_2/X_1)}{d\tau/\tau} = \frac{d\,\log\,(X_2/X_1)}{d\,\log\,\tau} \qquad (1.15)$$

Observe-se que a elasticidade de substituição σ é definida ao longo de uma isoquanta. Através da Figura V.2 é fácil perceber que σ é sempre um número não negativo.

A Figura V.2.a apresenta o caso de uma função de produção com elasticidade de substituição infinita em virtude de ser constante a taxa marginal de substituição τ. A função de produção nesse exemplo, em que os fatores de produção são substitutos perfeitos, é expressa por:

$$Q = a_1X_1 + a_2X_2 \qquad (1.16)$$

onde a_1 e a_2 são parâmetros e iguais às produtividades marginais dos fatores que estão multiplicando na expressão acima.

A Figura V.2.b apresenta o caso em que a elasticidade de substituição entre os fatores de produção é igual a zero, pois a proporção dos fatores usados na produção é fixa. A expressão analítica da função de produção em proporções fixas é dada por:

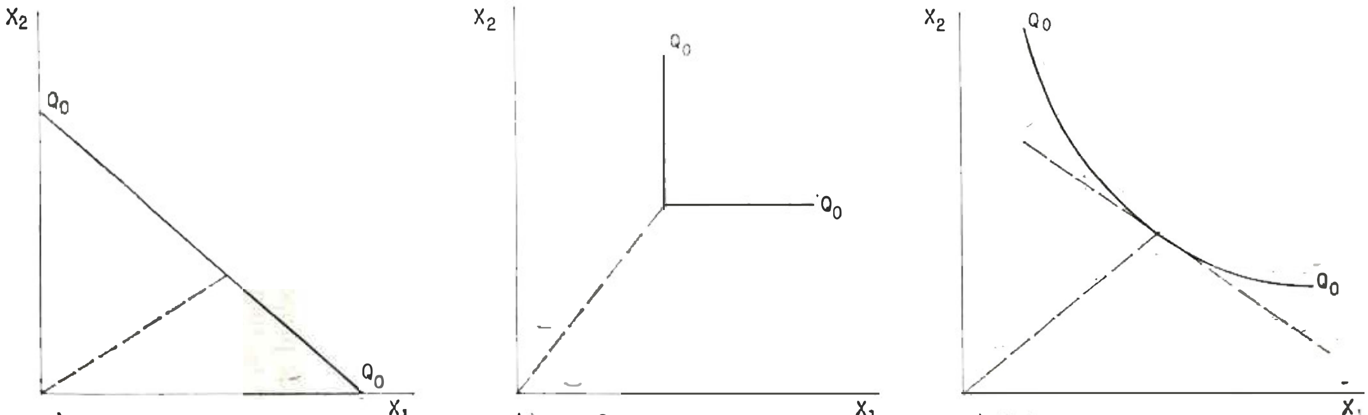
$$Q = \min \left\{ \frac{X_1}{\alpha_1}, \frac{X_2}{\alpha_2} \right\} \qquad (1.17)$$

onde α_1, o coeficiente técnico associado ao primeiro fator, é igual ao número de unidades do fator X_1 necessárias para se produzir uma unidade de Q. O coeficiente técnico α_2 corresponde ao segundo fator e tem interpretação análoga ao coeficiente α_1. Obviamente para que não haja sobra de nenhum fator os fatores X_1 e X_2 devem ser combinados, segundo (1.17), de acordo com a proporção:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Figura V. 2

ELASTICIDADES DE SUBSTITUIÇÃO



a) $\sigma = \infty$ b) $\sigma = 0$ c) $0 < \sigma < \infty$

O exemplo da Figura V.2.c corresponde ao caso mais geral em que a elasticidade de substituição está compreendida entre zero e infinito. Nas três seções que se seguem estudaremos várias funções de produção que se enquadram nesse caso mais geral.

V.2 — A Função de Produção Cobb-Douglas

A função de produção Cobb-Douglas é definida por:

$$Q = \gamma K^{\alpha} L^{\beta} \tag{2.1}$$

onde Q é a quantidade de produto obtida a partir das quantidades de serviços do capital K e da mão-de-obra L. O parâmetro γ é um parâmetro de eficiência, pois para dados K e L quanto maior γ maior a quantidade de produto obtido a partir dessa dotação de fatores. As interpretações dos parâmetros α e β serão dadas a seguir. É usual escolher-se as unidades de medida dos serviços do capital e da mão-de-obra de tal maneira que K e L meçam também os estoques desses fatores. A seguir usaremos essa convenção, não fazendo distinção entre as quantidades de serviços e de estoque do fator.

V.2.1 — Produtividades Marginais

A produtividade marginal de mão-de-obra é obtida derivando-se a expressão (2.1) com relação a L, ou seja:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \gamma K^{\alpha} \beta L^{\beta-1} = \beta\gamma \frac{K^{\alpha} L^{\beta}}{L} \tag{2.2}$$

Da igualdade acima segue-se que a produtividade marginal da mão-de-obra é proporcional à sua produtividade média Q/L, isto é:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \beta \frac{Q}{L} \tag{2.3}$$

O coeficiente β de proporcionalidade entre as duas produtividades é a elasticidade de produto η_L com relação à mão-de-obra, pois multiplicando-se ambos os lados de (2.3) por L/Q obtém-se:

$$\eta_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \frac{L}{Q} = \beta \tag{2.4}$$

A produtividade marginal do capital é definida pela derivada do produto com relação ao capital. Aplicando-se esta definição à equação (2.1), resulta:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha \frac{Q}{K} \tag{2.5}$$

A expressão (2.5) mostra que a produtividade marginal do capital é proporcional à produtividade média do capital. O coeficiente de proporcionalidade α é igual à elasticidade do produto em relação ao capital η_K, pois de (2.5) temos:

$$\eta_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{K}{Q} = \alpha \tag{2.6}$$

V.2.2 — Retornos de Escala

Aumentando-se proporcionalmente todos os fatores de produção de um coeficiente λ, o aumento de produção resultante é igual a $\lambda^{\alpha+\beta}$. Com efeito, multiplicando-se por λ as quantidades de K e L em (2.1), obtemos:

$$\gamma (\lambda K)^{\alpha} \ (\lambda L)^{\beta} = \gamma \lambda^{\alpha+\beta} K^{\alpha} L^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} Q \tag{2.7}$$

É fácil concluir-se da expressão acima que os retornos de escala na função Cobb-Douglas são medidos pela soma dos parâmetros α e β. Os seguintes casos são possíveis:

a) $\alpha + \beta > 1$, retornos crescentes de escala;

b) $\alpha + \beta = 1$, retornos constantes de escala;

c) $\alpha + \beta < 1$, retornos decrescentes de escala.

V 2.3 — Elasticidade de Substituição

A taxa marginal τ de substituição entre os fatores é proporcional à relação capital/mão-de-obra. Para confirmar este fato basta que se divida (2.3) por (2.5), isto é:

$$\tau = \frac{\partial Q / \partial L}{\partial Q / \partial K} = \frac{\beta Q / L}{\alpha Q / K} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{K}{L} \tag{2.8}$$

Denominando por k a relação capital/mão-de-obra, K/L, e tomando-se os logaritmos de ambos os lados da expressão (2.8), temos:

$$\log k = \log \alpha/\beta + \log \tau \tag{2.9}$$

Segue-se de (2.9) que a elasticidade de substituição entre o capital e a mão-de-obra na função de produção Cobb-Douglas é unitária, bastando lembrar que a elasticidade de substituição σ é definida por:

$$\sigma = \frac{d \log k}{d \log \tau} = 1 \tag{2.10}$$

V.2.4 — Progresso Tecnológico

A função de produção Cobb-Douglas incorporando progresso tecnológico neutro, no sentido de Hicks (1946), é definida por:

$$Q = \gamma e^{\phi t} K^{\alpha} L^{\beta} \tag{2.11}$$

onde t é o tempo e ϕ um novo parâmetro da função de produção. Cabe lembrar que no progresso tecnológico neutro, no sentido de Hicks, a taxa marginal de substituição não muda com o passar do tempo, pois as produtividades marginais da mão-de-obra e do capital crescem à mesma taxa.

Tomando-se o logaritmo neperiano de ambos os lados da expressão (2.11), obtemos:

$$\log Q = \log \gamma + \phi t + \alpha \log K + \beta \log L \tag{2.12}$$

Diferenciando-se a expressão acima em relação ao tempo, resulta:

$$\frac{dQ}{dt}\frac{1}{Q} = \phi + \alpha \frac{dK}{dt}\frac{1}{K} + \beta \frac{dL}{dt}\frac{1}{L} \tag{2.13}$$

A equação (2.13) afirma que a taxa de crescimento do produto, $dQ/dt . 1/Q$, é igual à soma de três parcelas. A primeira reflete o progresso tecnológico e é igual ao parâmetro ϕ. A segunda mede a contribuição do crescimento do estoque de capital, (dK/dt) $(1/K)$, e a última parcela corresponde à contribuição da mão-de-obra para o crescimento do produto.

Uma maneira alternativa de escrever a equação (2.13) é obtida observando-se que dK/dt é igual ao investimento em capital físico I e dL/dt é igual ao investimento em capital humano H, na suposição de que toda mão-de-obra seja qualificada. A taxa de crescimento do produto passa, então, a ser expressa por:

$$\frac{dQ}{dt}\frac{1}{Q} = \phi + \alpha \frac{I}{Q}\frac{Q}{K} + \beta \frac{H}{Q}\frac{Q}{L} \tag{2.14}$$

A contribuição do capital físico para o crescimento do produto, de acordo com (2.14), é igual à elasticidade do produto vezes a taxa de investimento em capital físico, I/Q, vezes a relação média produto/capital. A contribuição de mão-de-obra, por sua vez, é igual à elasticidade do produto em relação à mão-de-obra, vezes a taxa de investimento em capital humano H/Q, vezes a relação produto/capital humano.

V.2.5 — Especificação Econométrica

Do ponto de vista econométrico, a especificação da função de produto Cobb-Douglas contida em (2.12) está incompleta, pois a parte estocástica da equação não foi especificada. Seguindo a tradição, *ad hoc* sem dúvida, porém tradicional, adicionamos à equação (2.12) a variável aleatória ε_t com média nula, variância constante e serialmente independente, isto é:

$$\log Q_t = \log \gamma + \phi t + \alpha \log K_t + \beta \log L_t + \varepsilon_t \tag{2.15}$$

Na hipótese de que o erro ε_t não seja correlacionado com K_t e L_t, pode-se aplicar a técnica de mínimos quadrados ordinários à equação (2.15) para estimar-se os parâmetros γ, ϕ, α e β. Uma estimativa dos retornos de escala é dada por $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$, onde acentos circunflexos indicam as estimativas de cada parâmetro.

V.2.6 — A Empresa em Equilíbrio de Concorrência Perfeita

A condição necessária para uma empresa estar em equilíbrio, num regime de concorrência perfeita, é a de que as produtividades marginais dos fatores sejam iguais aos preços reais dos fatores.[1] Assim, segue-se de (2.3) e (2.5) que, no caso de uma empresa cuja restrição técnica é expressa através de uma função Cobb-Douglas, a condição necessária é:

$$\beta \frac{Q}{L} = \frac{\omega}{p} \tag{2.16}$$

e:

$$\alpha \frac{Q}{K} = \frac{r}{p} \tag{2.17}$$

Os preços dos fatores, ω da mão-de-obra e r do capital, assim como o preço p do produto, são exógenos para a firma. As variáveis endógenas para a empresa são: a quantidade a ser produzida e as quantidades de fatores a serem usadas. As equações (2.1), (2.16) e (2.17) formam um sistema de três equações a três incógnitas, isto é:

$$\begin{aligned} \log Q_i - \alpha \log K_i - \beta \log L_i &= \log \gamma + \varepsilon_{1i} \\ \log Q_i - \log L_i &= -\log \beta + \log \frac{\omega}{p} + \varepsilon_{2i} \\ \log Q_i - \log K_i &= -\log \alpha + \log \frac{r}{p} + \varepsilon_{3i} \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde o índice i denota a empresa i e os erros aleatórios ε_{1i}, ε_{2i} e ε_{3i} foram adicionados às equações.

Imagine que se disponha de dados de corte transversal para várias empresas e que se deseja estimar os coeficientes da função de produção, quais sejam, os coeficientes da primeira equação no sistema (2.18). Essa tarefa não será possível porque a função de produção não é identificada no modelo acima. Desde que

[1] Para uma demonstração deste fato veja a primeira seção do Cap. VII.

os preços são os mesmos para todas as empresas, temos apenas uma variável exógena e três coeficientes para serem estimados (α, β, γ) na primeira equação em (2.18). Logo a condição de ordem para a identificação da equação não é satisfeita.[2] Observe-se, entretanto, que as duas outras equações do modelo, em princípio, são identificadas, e os coeficientes α e β poderiam ser estimados indiretamente através das equações:

$$\log \frac{\omega L_i}{pQ_i} = \log \beta + \varepsilon_{2i} \tag{2.19}$$

e

$$\log \frac{rK_i}{pQ_i} = \log \alpha + \varepsilon_{3i} \tag{2.20}$$

V.3 — A Função de Produção CES

A função de produção CES proposta inicialmente por quatro economistas, Arrow, Chenery, Minhas e Solow (1961), embora outros pesquisadores também tenham chegado independentemente à mesma função, como é o caso de Brown e Cani (1963), de Kendrick e Sato (1963) e possivelmente muitos outros, é definida por:

$$Q = \gamma \, [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) L^{-\rho}]^{-\nu/\rho} \tag{3.1}$$

onde Q, K e L têm o mesmo significado que na função Cobb-Douglas e δ, ρ e ν são parâmetros, cujos significados serão dados mais adiante.

V.3.1 — Produtividades Marginais

A produtividade marginal da mão-de-obra é obtida derivando-se Q em (3.1) com respeito à mão-de-obra L:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = - \frac{\nu}{\rho} \gamma \, [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) L^{-\rho}]^{-\nu/\rho - 1} \cdot (1 - \delta) \; (- \rho) \; L^{-\rho - 1} \tag{3.2}$$

Depois de algumas simplificações, a expressão acima reduz-se a:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \nu (1 - \delta) \; \gamma^{-\rho/\nu} \frac{Q^{1+\rho/\nu}}{L^{1+\rho}} \tag{3.3}$$

[2] A condição de ordem para identificação, que é uma condição necessária mas não suficiente, requer que o número de variáveis exógenas do modelo seja maior ou igual ao número de parâmetros a estimar-se na equação.

A elasticidade do produto em relação à mão-de-obra não é constante como no caso da função Cobb-Douglas, mas varia com o produto Q e a mão-de-obra L de acordo com a fórmula:

$$\eta_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \frac{L}{Q} = \nu (1 - \delta)\, \gamma^{-\rho/\nu} \frac{Q^{\rho/\nu}}{L^{\rho}} \tag{3.4}$$

A produtividade marginal do capital e a elasticidade do produto em relação ao capital são calculadas da mesma maneira como foram obtidos esses conceitos relativos à mão-de-obra. O resultado a que se chega é:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \nu\delta\gamma^{-\rho/\nu} \frac{Q^{1+\rho/\nu}}{K^{1+\rho}}$$

$$\eta_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{K}{Q} = \nu\delta\gamma^{-\rho/\nu} \frac{Q^{\rho/\nu}}{K^{\rho}} \tag{3.5}$$

Como a produtividade marginal da mão-de-obra é positiva, o mesmo ocorrendo com a produtividade marginal do capital, segue-se das equações (3.3) e (3.5) que o coeficiente δ deve estar compreendido entre zero e 1 $(0 < \delta > 1)$.

V.3.2 — Retornos de Escala

Quando o capital e a mão-de-obra aumentam em uma mesma proporção, λ, o produto aumenta de λ^{ν}. Este resultado é obtido multiplicando-se K e L em (3.1) por λ, isto é:

$$\gamma\, [\delta (\lambda K)^{-\rho} + (1 - \delta) (\lambda L)^{-\rho}]^{-\nu/\rho} =$$

$$= \lambda^{\nu}\gamma\, [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) L^{-\rho}]^{-\nu/\rho} = \lambda^{\nu} Q \tag{3.6}$$

O parâmetro ν mede, então, os retornos de escala da função de produção, havendo três possibilidades:

a) $\nu > 1$, retornos crescentes de escala;
b) $\nu = 1$, retornos constantes de escala; e
c) $\nu < 1$, retornos decrescentes de escala.

V.3.3 — Elasticidade de Substituição

A taxa marginal τ de substituição técnica entre o capital e a mão-de-obra, igual à razão entre as produtividades marginais desses fatores, é obtida facilmente de (3.3) e (3.5), isto é:

$$\tau = \frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K} = \frac{1 - \delta}{\delta} \left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho} \tag{3.7}$$

Denominando novamente por k a relação K/L, e tomando logaritmos naturais de ambos os lados da equação acima, resulta:

$$\log k = -\frac{1}{1+\rho}\log\frac{1-\delta}{\delta} + \frac{1}{1+\rho}\log\tau \qquad (3.8)$$

A elasticidade de substituição entre os fatores é igual à derivada de log k em relação ao log τ. Logo, da expressão (3.8), segue-se que:

$$\sigma = \frac{d\log k}{d\log\tau} = \frac{1}{1+\rho} \qquad (3.9)$$

Portanto, a elasticidade de substituição é constante, daí o nome CES (constant elasticity of substitution), e igual a $1/1+\rho$. Lembrando que a elasticidade de substituição é um número não-negativo, conclui-se que o parâmetro ρ é um número maior ou igual a -1 $(\rho \geqslant -1)$.

V.3.4 — Parâmetro δ: A Intensidade de Capital do Processo Produtivo

O parâmetro δ é de distribuição, indicando o grau de intensidade de capital do processo produtivo. Quanto maior δ, que está compreendido entre zero e 1, maior a relação capital/mão-de-obra para qualquer relação de preços. A essa conclusão se chega facilmente derivando-se o log k na expressão (3.8) com relação a δ. Obtém-se então:

$$\frac{\partial\log k}{\partial\delta} = \frac{\sigma}{\delta(1-\delta)} > 0 \qquad (3.10)$$

A expressão acima é positiva porque $\sigma > 0$ e $0 < \delta < 1$.

V.3.5 — A Razão entre as Elasticidades de Produto e a Relação Capital/Mão-de-Obra

A razão entre a elasticidade do produto em relação à mão-de-obra e a elasticidade do produto com relação ao capital, obtida dividindo-se (3.4) por (3.6), é igual a:

$$\frac{\eta_L}{\eta_K} = \frac{1-\delta}{\delta}k^{\rho} \qquad (3.11)$$

Em equilíbrio competitivo, a razão η_L/η_K é igual à razão entre as participações da mão-de-obra e do capital no produto. O valor de η_L/η_K, de acordo com (3.11), depende de k, ρ e δ. Daí, chamar-se o parâmetro δ de parâmetro de distribuição.

Tomando-se o logaritmo de ambos os lados de (3.11) e lembrando que $\rho = (1 - \sigma)/\sigma$, temos:

$$\log \frac{\eta_L}{\eta_K} = \log \frac{1-\delta}{\delta} + \frac{1-\sigma}{\sigma} \log k \tag{3.12}$$

Da equação (3.12), obtém-se:

$$\frac{\partial \log \eta_L/\eta_K}{\partial \log k} = \frac{1-\sigma}{\sigma} \tag{3.13}$$

De acordo com (3.13), quando a elasticidade de substituição é inferior à unidade, a razão entre as elasticidades η_L/η_K aumenta com a relação capital/mão-de-obra k. Quando a elasticidade de substituição é unitária, a razão η_L/η_K é invariante com respeito a k. Verifica-se também que a razão η_L/η_K diminui quando k aumenta se a elasticidade de substituição é superior à unidade.

V.3.6 — Casos Particulares de Função CES

A função de produção CES é uma generalização de várias funções de produção. A seguir, passamos a mostrar como se obtém alguns casos particulares, que são os mais conhecidos. Para essa finalidade, trataremos, nos dois primeiros exemplos abaixo, apenas da função de produção com retornos constantes de escala.

a) Quando ρ se aproxima de -1 ($\rho \to -1$) a elasticidade de substituição tende para mais infinito ($\sigma \to +\infty$), o que significa dizer que existe substituição perfeita entre os fatores. A função de produção (3.1) reduz-se, então, à expressão:

$$Q = \gamma\,[\delta K + (1-\delta) L] = \gamma\delta K + \gamma(1-\delta) L \tag{3.14}$$

As isoquantas correspondentes à função de produção (3.14) são linhas retas, paralelas entre si, como na Figura V.2a, mostrando o fato de a taxa marginal de substituição técnica ser constante em virtude da substituição perfeita entre os fatores.

b) Quando ρ se aproxima de mais infinito ($\rho \to \infty$), a elasticidade de substituição tende para zero. Nesse caso, a função de produção CES reduz-se a uma função de produção em proporções fixas, denominada por alguns autores de função de produção Leontief. Com o objetivo de demonstrar esta proposição, reescrevemos a função de produção (3.1) da seguinte forma:

$$Q = \gamma\,[\delta^{\rho} K^{-\rho} + (1-\delta)^{\rho} L^{-\rho}]^{-1/\rho} \tag{3.15}$$

A equação (3.15) pode ser escrita também nas seguintes formas alternativas:

$$Q = \frac{\gamma K/\delta}{\left[1 + \left(\frac{K/\delta}{L/(1-\delta)}\right)^{\rho}\right]^{1/\rho}} \tag{3.16}$$

$$Q = \frac{\gamma L/1-\delta}{\left[1 + \left(\frac{L/(1-\delta)^{\rho}}{K/\delta}\right)\right]^{-1/\rho}} \tag{3.17}$$

Para o caso em que $K/\delta < L(1-\delta)$ o limite de Q quando ρ se aproxima de mais infinito ($\rho \to \infty$) é igual a:

$$\lim_{\rho \to \infty} Q = \gamma \frac{K}{\delta} \tag{3.18}$$

Isso porque, para o caso considerado, tem-se:

$$\lim_{\rho \to \infty} \left[1 + \left(\frac{K/\delta}{L/(1-\delta)}\right)^{\rho}\right]^{1/\rho} = 1$$

Conseqüentemente, de (3.16) decorre (3.18). Por outro lado, quando:

$$\frac{L/(1-\delta)}{K/\delta} < 1$$

o limite de Q é dado por:

$$\lim_{\rho \to \infty} Q = \gamma \frac{L}{1-\delta} \tag{3.19}$$

pois, neste caso, o denominador de (3.17) se aproxima de 1 quando $\rho \to \infty$:

$$\lim_{\rho \to \infty} \left[1 + \left(\frac{L/1-\delta}{K/\delta}\right)^{\rho}\right]^{1/\rho} = 1$$

Concluímos, a partir das expressões (3.18) e (3.19), que o limite de Q é igual ao mínimo dos dois números contidos naquelas equações, ou seja:

$$\lim_{\rho \to \infty} Q = \min \left\{ \frac{K}{\delta/\gamma}, \frac{L}{(1-\delta)/\gamma} \right\} \tag{3.20}$$

onde a notação min indica o mínimo dos dois números entre colchetes. Como o leitor poderá verificar, (3.20) permanece válida para o caso de igualdade $L/(1-\delta) = K/\delta$.

As isoquantas correspondentes à função de produção (3.20) são linhas em ângulo reto como indicado na Figura V.2b.

c) Quando ρ se aproxima de zero ($\rho \to 0$), a elasticidade de substituição tende para a unidade e a função de produção CES reduz-se à função de produção Cobb-Douglas. Com o objetivo de demonstrar este fato, introduzimos a seguinte notação:

$$Z(\rho) = \delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \tag{3.21}$$

e

$$\phi(\rho) = \log Z(\rho) \tag{3.22}$$

Os símbolos $Z(\rho)$ e $\phi(\rho)$ indicam que Z e ϕ são funções do parâmetro ρ. Prosseguindo, tomemos as derivadas de ϕ e Z com respeito a ρ:

$$\phi'(\rho) = \frac{d}{d\rho}\phi(\rho) = \frac{dZ(\rho)}{d\rho}\frac{1}{Z(\rho)} = \frac{Z'(\rho)}{Z(\rho)} \tag{3.23}$$

$$Z'(\rho) = \frac{d}{d\rho} Z(\rho) = -[\delta K^{-\rho} \log K + (1-\delta) L^{-\rho} \log L] \tag{3.24}$$

As derivadas de (3.23) e (3.24) com respeito a ρ são então dadas por:

$$\phi''(\rho) = \frac{d^2}{d\rho^2}\phi(\rho) = \frac{d^2Z(\rho)}{d\rho^2}\frac{1}{Z(\rho)} - \frac{dZ(\rho)}{d\rho}\frac{\frac{dZ(\rho)}{d\rho}}{Z(\rho)^2} =$$

$$= \frac{Z''(\rho)}{Z(\rho)} - \left[\frac{Z'(\rho)}{Z(\rho)}\right]^2 \tag{3.25}$$

e:

$$Z''(\rho) = \frac{d^2Z(\rho)}{d\rho^2} = \delta K^{-\rho}\log^2 K + (1-\delta) L^{-\rho}\log^2 L \tag{3.26}$$

O próximo passo na nossa demonstração consiste em expandir $\phi(\rho)$ em série de Taylor, em torno do ponto $\rho = 0$. Dessa forma, obtém-se:

$$\phi(\rho) = \phi(0) + \rho\phi'(0) + \frac{\rho^2}{2}\phi''(0) + \dots \tag{3.27}$$

Levando-se em conta as equações (3.21) - (3.26), a expressão (3.27) pode ser escrita como:

$$\phi(\rho) = \log Z(0) + \rho\frac{Z'(0)}{Z(0)} + \frac{\rho^2}{2}\left[\frac{Z''(0)}{Z(0)} - \left(\frac{Z'(0)^2}{Z(0)}\right)\right] + \dots \tag{3.28}$$

As equações (3.21), (3.24) e (3.26) produzem, respectivamente, os seguintes resultados para $\rho = 0$:

$$Z(0) = 1, \log Z(0) = 0$$

$$Z'(0) = -[\delta \log K + (1-\delta) \log L]$$

$$Z''(0) = \delta \log^2 K + (1-\delta) \log^2 L$$

Substituindo-se os valores acima na equação (3.28), obtém-se, depois de algumas simplificações, a seguinte expressão para $\phi(\rho)$:

$$\phi(\rho) = -\rho\,\delta \log K - \rho\,(1-\delta) \log L + \frac{\rho^2}{2}\,\delta\,(1-\delta)\,(\log K - \log L)^2 \quad (3.29)$$

onde os termos de terceira ordem em diante, em (3.28), foram desprezados.

As equações (3.1) e (3.21) nos possibilitam escrever a função de produção CES do seguinte modo:

$$Q = \gamma\,[Z(\rho)]^{-\nu/\rho} \quad (3.30)$$

ou, alternativamente, em logaritmos:

$$\log Q = \log \gamma - \frac{\nu}{\rho} \log Z(\rho) = \log \gamma - \frac{\nu}{\rho}\,\phi(\rho) \quad (3.31)$$

O termo depois do segundo sinal de igualdade em (3.31) foi obtido levando-se em consideração a definição (3.22).

Combinando-se as equações (3.29) e (3.31), resulta:

$$\log Q = \log \gamma + \nu\delta \log K + \nu(1-\delta) \log L - \frac{\nu\rho\delta(1-\delta)}{2}\,[\log K - \log L]^2 \quad (3.32)$$

É fácil concluir-se, baseado na expressão acima, que a função de produção CES reduz-se à função de produção Cobb-Douglas, quando $\rho = 0$. Com efeito, de (3.32) temos, nesse caso, que:

$$\log Q = \log \gamma + \nu\delta \log K + \nu(1-\delta) \log L \quad (3.33)$$

ou

$$Q = \gamma K^{\nu\delta} L^{\nu(1-\delta)} \quad (3.34)$$

A equação (3.34) é idêntica à equação (2.1) quando faz-se $\nu\delta = \alpha$ e $\nu(1-\delta) = \beta$.

V.3.7 — Equilíbrio Competitivo e a Elasticidade de Substituição

Em equilíbrio competitivo a produtividade marginal da mão-de-obra é igual ao salário real. Assim, da equação (3.3), resulta que:

$$\nu (1 - \delta) \gamma^{-\rho/\nu} \frac{Q^{1+\rho/\nu}}{L^{1+\rho}} = \frac{\omega}{p} \tag{3.35}$$

onde ω é o salário nominal e p é o preço do produto. Tomando-se o logaritmo neperiano de ambos os membros de (3.35) e rearranjando-se alguns termos da expressão assim obtida, tem-se:

$$\log q = \text{constante} + \frac{\nu}{\nu + \rho} \log \frac{\omega}{p} - \frac{\rho (1 - \nu)}{\nu + \rho} \log L \tag{3.36a}$$

ou, de forma alternativa:

$$\log q = \text{constante} + \frac{1}{1 + \rho} \log \frac{\omega}{p} + \frac{\rho}{1 + \rho} \left(1 - \frac{1}{\nu} \right) \log Q \tag{3.36b}$$

onde $q = Q/L$ é a produtividade média da mão-de-obra. No caso particular de $\nu = 1$ — retornos constantes de escala — a equação (3.36) simplifica-se, pois:

$$\log q = \text{constante} + \sigma \log \frac{\omega}{p} \tag{3.37}$$

A equação (3.37) mostra que a elasticidade de substituição é o coeficiente do logaritmo do salário real, quando se faz uma regressão da produtividade média contra o salário real (ambos em logaritmos).

Equações semelhantes às (3.36) e (3.37) são obtidas quando se iguala a produtividade marginal do capital ao preço real dos serviços do capital, isto é:

$$\log \frac{Q}{K} = \text{constante} + \frac{\nu}{\nu + \rho} \log \frac{r}{p} - \frac{\rho (\nu - 1)}{\nu + \rho} \log K$$

ou

$$\log \frac{Q}{K} = \text{constante} + \frac{1}{1 + \rho} \log \frac{r}{p} + \frac{\rho}{1 + \rho} \left(1 - \frac{1}{\nu} \right) \log Q$$

onde r é o preço unitário dos serviços do capital. Na hipótese de $\nu = 1$, a equação anterior passa a ser dada por:

$$\log \frac{Q}{K} = \text{constante} + \frac{1}{1 + \rho} \log \frac{r}{p}$$

e o coeficiente do logaritmo do custo real do capital ($\log r/p$) é igual à elasticidade de substituição entre fatores.

V.3.8 — Especificação Econométrica

A função de produção CES não é linear nos seus parâmetros, de maneira que a estimação dos parâmetros dessa função não se constitui assunto tão trivial. Por exemplo, se o pesquisador achar conveniente que o termo estocástico ε_t deva ser colocado aditivamente na equação (3.1), a equação a estimar-se é dada por:

$$Q_t = \gamma\ [\delta K_t^{-\rho} + (1 - \delta) L_t^{-\rho}]^{-\nu/\rho} + \varepsilon_t \tag{3.38}$$

O método de regressão linear múltipla não pode ser aplicado em (3.38), pois os parâmetros não entram linearmente na referida equação. Todavia, o método de mínimos quadrados não linear poderia ser aplicado para estimar-se os parâmetros de (3.38). O problema com este método é o seu custo computacional, não tanto em termos de tempo de computador, mas pelo fato de que este método nem sempre é incluído nos programas enlatados, normalmente disponíveis nos centros de pesquisa aplicada.

Justamente pelo fato de a função de produção CES ser não-linear, Kmenta desenvolveu uma aproximação dessa função que é linear nos seus parâmetros. Nas páginas anteriores usamos essa versão de Kmenta para mostrar que a função CES engloba a função Cobb-Douglas como um caso particular. Acrescentando um termo estocástico ε_t à equação (3.32), obtemos o modelo que Kmenta usou para estimar os parâmetros ν, δ e ρ, isto é:

$$\log Q_t = \text{constante} + \nu\delta \log K_t + \nu (1 - \delta) \log L_t$$
$$- \frac{\nu\rho\delta\ (1 - \delta)}{2} [\log K_t - \log L_t]^2 + \varepsilon_t \tag{3.39}$$

Observe-se, então, que a equação acima, embora não sendo linear nos parâmetros originais ν, δ e ρ, é linear nos parâmetros $\nu\delta$, $\nu\ (1 - \delta)$ e $-\ \nu\rho\delta\ (1 - \delta)\ /2$. Portanto, a aplicação de mínimos quadrados ordinários à equação (3.39) possibilita, indiretamente, a estimação dos parâmetros ν, δ e ρ.

Quando o pesquisador estiver interessado apenas na elasticidade de substituição e acreditar firmemente que os retornos de escala são constantes, a equação (3.37) produz a seguinte especificação:

$$\log q_t = \text{constante} + \sigma \log \frac{\omega_t}{p_t} + \varepsilon_t \tag{3.40}$$

Essa foi a forma usada no trabalho pioneiro de Arrow, Chenery, Minhas e Solow para estimar a elasticidade de substituição. Obviamente, se os retornos de escala não forem constantes, o uso da equação (3.40) leva a erro de especificação, pois o modelo a estimar seria obtido a partir da equação (3.36), ou seja:

$$\log q_t = \text{constante} + \frac{\nu}{\nu + \rho} \log \frac{\omega_t}{p_t} - \frac{\rho\ (1 - \nu)}{\nu + \rho} \log L_t + \varepsilon_t \tag{3.41}$$

O coeficiente do logaritmo da mão-de-obra é negativo em virtude de os retornos de escala não poderem ser crescentes para uma empresa em equilíbrio competitivo. É evidente, comparando-se as equações (3.40) e (3.41), que o coeficiente do logaritmo do salário real em (3.40) nada tem a ver com a elasticidade de substituição quando o verdadeiro modelo é dado pela equação (3.41), ou seja, quando os retornos de escala não forem constantes.

V.3.9 — A Função CES e a Transformação de Box-Cox

Uma técnica que pode ser utilizada para a estimação dos parâmetros da função de produção CES consiste na aplicação da transformação de Box-Cox. Para essa finalidade, tomemos, em primeiro lugar, o caso particular de retornos constantes de escala. A função CES pode ser escrita como:

$$Q^{-\rho} = \gamma^{-\rho}\,\delta\,(K^{-\rho} - L^{-\rho}) + \gamma^{-\rho}\,L^{-\rho} \tag{3.42}$$

É fácil verificar-se que a expressão

$$\frac{Q^{-\rho}-1}{-\rho} = \frac{L^{-\rho}-1}{-\rho} + \gamma^{-\rho}\,\delta\left[\frac{K^{-\rho}-1}{-\rho} - \frac{L^{-\rho}-1}{-\rho}\right] + \frac{\gamma^{-\rho}-1}{-\rho}\left[1 + (-\rho)\,\frac{L^{-\rho}-1}{-\rho}\right] \tag{3.43}$$

é equivalente à equação (3.42) desde que $\rho \neq 0$. Adicionando-se o termo estocástico ε_t à equação (3.43) e introduzindo-se a notação $\mu = -\rho$, tem-se:

$$\frac{Q_t^{\mu}-1}{\mu} = \frac{L_t^{\mu}-1}{\mu} + a\left[\frac{K_t^{\mu}-1}{\mu} - \frac{L_t^{\mu}-1}{\mu}\right] + b\left[1 + \mu\,\frac{L_t^{\mu}-1}{\mu}\right] + \varepsilon_t \tag{3.44}$$

onde:

$$a = \gamma^{-\rho}\,\delta$$

$$b = \frac{\gamma^{-\rho}-1}{-\rho}$$

O modelo acima corresponde a uma aplicação da transformação de Box-Cox no estudo da função de produção CES. Cabe aqui fazer algumas observações quanto a essa aplicação. O coeficiente da primeira variável independente em (3.44) é igual à unidade. Tal fato não acarreta maiores problemas, pois o processo de estimação pode incorporar facilmente essa restrição. Observe-se, também, que o parâmetro μ é menor ou igual à unidade, pois $\rho \geqslant -1$.

Já foi demonstrado anteriormente que, se μ for igual a zero, a função de produção CES torna-se uma função do tipo Cobb-Douglas. Com auxílio da transformação (3.44), pode-se também demonstrar essa proposição. Com efeito, as variáveis do tipo $(X^{\mu} - 1)/\mu$ tendem para log X e

$$\mu \frac{L_t^{\mu} - 1}{\mu} = L_t^{\mu} - 1 = 0$$

quando $\mu \rightarrow 0$. Conseqüentemente, a equação (3.44) transforma-se em:

$$\log Q_t = a \log K_t + (1 - a) \log L_t + \log \gamma + \varepsilon_t \tag{3.45}$$

que é a equação de uma função de produção Cobb-Douglas com retornos constantes de escala.

Uma crítica à formulação implícita na equação (3.44), devida a Zellner (1971), é a de que seria muita coincidência que a transformação da variável Q com o parâmetro $\mu = -\rho = (\sigma - 1)/\sigma$, levasse esta variável a ter uma distribuição normal com variância constante. Assim, Zellner sugere a seguinte especificação:

$$\frac{Q^{\theta} - 1}{\theta} = \frac{Q^{\mu} - 1}{\mu} + \xi_t \tag{3.46}$$

onde $\theta = \phi\,\mu$ e ϕ é um parâmetro que pode variar livremente. Combinando-se, então, as equações (3.46) e (3.44), e fazendo-se uso da notação $X^{u} = (X^{\mu} - 1)/\mu$, resulta:

$$Q^{(\theta)} = L^{(\mu)} + a\,[K^{(\mu)} - L^{(\mu)}] + b\,[1 + \mu L^{(\mu)}] + \xi_t \tag{3.47}$$

A estimação dos parâmetros θ, μ, a e b pode ser feita usando-se o método de máxima verossimilhança. A única complicação adicional com a introdução do novo parâmetro θ diz respeito à localização do ponto de máximo da função de verossimilhança que tem de ser feita agora com um processo de busca em duas dimensões.

A generalização da aplicação da transformação de Box-Cox para o caso de funções de produção CES com retornos decrescentes ou crescentes de escala é imediata, pois o procedimento é idêntico ao caso dos retornos constantes de escala. A função CES (3.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Q^{-\rho/\nu} = \gamma^{-\rho/\nu}\,\delta\,(K^{-\rho} - L^{-\rho}) + \gamma^{-\rho/\nu}\,L^{-\rho} \tag{3.48}$$

É fácil constatar que a expressão

$$\begin{aligned}\frac{Q^{-\rho/\nu} - 1}{-\rho/\nu} = {} & \nu\,\frac{L^{-\rho} - 1}{-\rho} + \nu\,\gamma^{-\rho/\nu}\,\delta\left[\frac{K^{-\rho} - 1}{-\rho} - \frac{L^{-\rho} - 1}{-\rho}\right] \\ & + \frac{\gamma^{-\rho/\nu} - 1}{-\rho/\nu}\left[1 + (-\rho)\,\frac{L^{-\rho} - 1}{-\rho}\right]\end{aligned} \tag{3.49}$$

é equivalente à equação (3.48). Admitindo, como Zellner, que a transformação com o parâmetro $-\rho/\nu$ não induz, em geral, à normalidade da variável produção, postulamos que o novo parâmetro $\theta = \phi \ (-\rho/\nu)$ transforme Q_t em uma variável normal com variância estável, ou seja:

$$\frac{Q_t^{\theta} - 1}{\theta} = \frac{Q_t^{-\rho/\nu} - 1}{-\rho/\nu} + \xi_t \tag{3.50}$$

onde ξ_t é normal com média zero e variância constante. Substituindo-se o valor transformado de Q_t dado em (3.49) na equação (3.50), resulta:

$$Q_t^{(\theta)} = \nu L_t^{(\mu)} + a \ [K_t^{(\mu)} - L_t^{(\mu)}] + b \ [1 + \mu L_t^{(\mu)}] + \xi_t \tag{3.51}$$

onde os coeficientes a e b são dados por:

$$a = \nu \ \gamma^{-\rho/\nu} \ \delta$$

$$b = \frac{\gamma^{-\rho/\nu} - 1}{\rho/\nu}$$

Para a estimação dos parâmetros θ, μ, ν, a e b pode-se aplicar o método de máxima verossimilhança, como já assinalado no caso anterior.

V.3.10 — Relação Capital/Mão-de-Obra e Preços dos Fatores

Imagine-se que disponhamos de dados da relação capital/mão-de-obra, $k = K/L$, e dos preços dos fatores. A condição necessária para que uma empresa minimize os custos é que a taxa marginal de substituição técnica seja igual à relação entre os preços dos fatores. Assim, de acordo com a equação (3.9), a relação capital/mão-de-obra k relaciona-se aos preços relativos dos fatores ω/r através da equação:

$$\log k_t = -\sigma \log \frac{1 - \delta}{\delta} + \sigma \log \frac{\omega_t}{r_t} + \varepsilon_t \tag{3.52}$$

onde o termo aleatório ε_t foi adicionado à equação. Na hipótese de que o erro não esteja correlacionado com os preços dos fatores, pode-se aplicar mínimos quadrados ordinários à equação (3.52) para se obter estimativas dos parâmetros δ e σ.

V.3.11 — A Função de Produção CES e Projeções de Crescimento Econômico

Em um trabalho publicado com o título acima, Nelson (1965) examina as diferenças existentes entre projeções de crescimento econômico elaboradas com a função Cobb-Douglas e aquelas obtidas levando-se em conta o fato de que a elasticidade de substituição pode ser diferente da unidade. Para esse tipo de exercício, admita-se que a função de produção tenha retornos constantes de escala e que o progresso tecnológico seja do tipo neutro, isto é, a função de produção pode ser descrita por:

$$Q = A(t)\, f(K, L) \tag{3.53}$$

Derivando-se a equação (3.53) em relação ao tempo t, obtém-se:

$$\frac{dQ}{dt}\frac{1}{Q} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}\frac{dK}{dt}\frac{1}{K} + \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q}\frac{dL}{dt}\frac{1}{L} + \frac{\partial A}{\partial t}\frac{1}{A} \tag{3.54}$$

Levando-se em conta a hipótese de retornos constantes de escala, a equação (3.54) transforma-se em:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = (1 - b)\frac{\dot{K}}{K} + b\frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{A}}{A} \tag{3.55}$$

onde:

$$b = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = \frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial L}\Big/\frac{\partial Q}{\partial K}\right)L\frac{\partial Q}{\partial K}\left(\frac{K}{L}\right)}{Q\,(K/L)} = \frac{\tau(1 - b)}{k} \tag{3.56}$$

e a notação $\dot{X}$ indica a derivada da variável X com respeito ao tempo $\dot{X} = dX/dt$, e $k = K/L$. Em seguida, tomando-se logaritmos da equação (3.56), resulta:

$$\log b = \log \tau + \log(1 - b) - \log k \tag{3.57}$$

Derivando-se (3.57) com respeito ao tempo t, tem-se:

$$\frac{d \log b}{dt} = \frac{d \log \tau}{d \log k}\frac{d \log k}{dt} + \frac{d \log(1 - b)}{dt} - \frac{d \log k}{dt} \tag{3.58}$$

Lembrando que $\sigma = d \log k / d \log \tau$, depois de algumas manipulações algébricas chega-se à seguinte expressão:

$$\frac{db}{dt} = b(1 - b)\left(\frac{\sigma - 1}{\sigma}\right)\left(\frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{K}}{K}\right) \tag{3.59}$$

Admitindo-se que as taxas de crescimento do capital, $\dot{K}/K$, da mão-de-obra, $\dot{L}/L$, e do progresso tecnológico, $\dot{A}/A$, sejam aproximadamente constantes no período em análise, a derivada da taxa de crescimento do produto, $\dot{Q}/Q$, com respeito ao tempo t, de acordo com (3.55) é dada por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{Q}}{Q}\right) = b(1 - b)\left(\frac{\sigma - 1}{\sigma}\right)\left(\frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{K}}{K}\right)^2 \tag{3.60}$$

A produção Q é função do tempo t segundo a equação (3.53). Expandindo esta função em série de Taylor, em torno do ponto $t = t_0$, e retendo-se apenas termos até de segunda ordem, chega-se à expressão:

$$Q(t) \cong Q(t_0) + \frac{dQ}{dt}(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2Q}{dt^2}(t - t_0)^2 \qquad (3.61)$$

Adotando-se a notação:

$$\Delta Q = Q(t) - Q(t_0)$$

$$\Delta t = t - t_0$$

pode-se escrever (3.61) do seguinte modo:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}\frac{1}{Q} \cong \frac{\dot{Q}}{Q} + \frac{1}{2Q}\left(\frac{d}{dt}\frac{\dot{Q}}{Q} Q\right)\Delta t =$$

$$= \frac{\dot{Q}}{Q} + \left[\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\dot{Q}}{Q} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{Q}}{Q}\right)^2\right]\Delta t \qquad (3.62)$$

Desprezando-se o termo $(\dot{Q}/Q)^2$ na equação acima, obtém-se:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}\frac{1}{Q} \cong \frac{\dot{Q}}{Q} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{Q}}{Q}\right) \qquad (3.63)$$

que é uma aproximação para a taxa de crescimento do produto no período Δt.

Substituindo-se os valores de $\dot{Q}/Q$ e de $\frac{d}{dt}(\dot{Q}/Q)$, dados nas equações (3.55) e (3.60), respectivamente, na expressão acima, esta se transforma em:

$$\frac{\Delta Q}{Q} \cong \frac{\dot{A}}{A} + b_0\frac{\dot{L}}{L} + (1 - b_0)\frac{\dot{K}}{K} +$$

$$+ \frac{1}{2} b_0 (1 - b_0)\left(\frac{\sigma - 1}{\sigma}\right)\left(\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}\right)^2 \qquad (3.64)$$

onde o símbolo b_0 indica que o valor de b é avaliado no período t_0.

A equação (3.64) é uma fórmula aproximada para calcular-se a taxa de crescimento do produto em um dado período Δt, a partir das taxas de crescimento do progresso tecnológico, da mão-de-obra, do capital e dos parâmetros b_0 e σ. Observe-se que se o capital e a mão-de-obra crescerem à mesma taxa o último termo de (3.64) desaparece. O mesmo ocorre quando a elasticidade de substituição é unitária. Note-se, também, que os três primeiros termos de (3.64) correspondem aos de uma taxa de crescimento do produto calculada a partir de uma função de produção do tipo Cobb-Douglas. O último termo de (3.64) leva em conta a influência da elasticidade de substituição quando essa é diferente da unidade. Quando $\sigma > 1$, a função Cobb-Douglas subestimaria a taxa de crescimento do produto, enquanto o contrário ocorreria quando $\sigma < 1$.

A diferença no cálculo da taxa de crescimento do produto resultante da hipótese de um mundo com função do tipo Cobb-Douglas e daquela obtida supondo que a função relevante é CES estaria, então, no último termo da equação (3.64). Nelson argumenta com alguns exemplos numéricos que no curto prazo, para taxas de crescimento da relação capital/mão-de-obra "razoáveis", a correção introduzida com o termo

$$\frac{1}{2} b_0 (1 - b_0) \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma} \right) \left(\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \right)^2 \qquad (3.65)$$

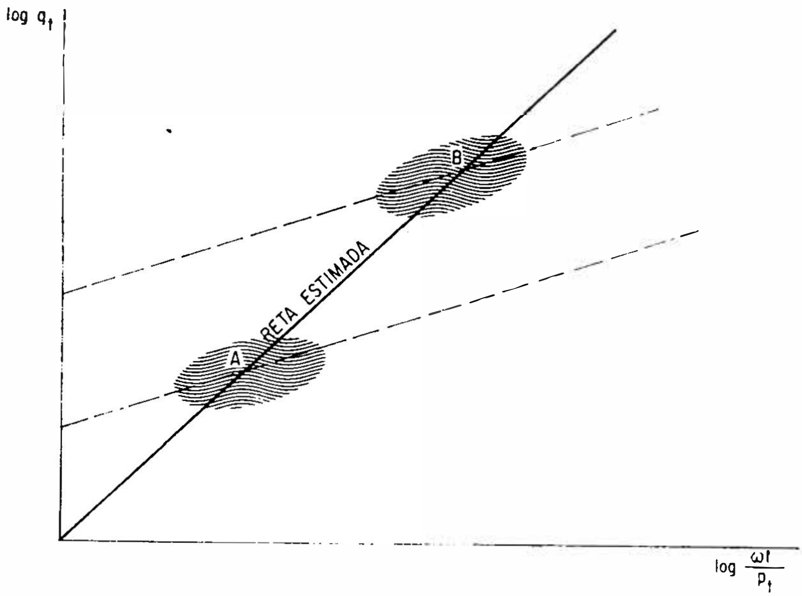
seria desprezível do ponto de vista prático. Com efeito, suponha que $b_0 = 0{,}7$, $\sigma = 0{,}5$ e que a relação capital/mão-de-obra cresce em 4% no período, isto é: $\dot{K}/K - \dot{L}/L = 0{,}04$. A expressão (3.65), para esses valores, é igual a $-0{,}00118$, ou $-0{,}01118\%$ em termos percentuais. Obviamente, do ponto de vista prático, o fato de a elasticidade de substituição ser igual a 0,5 não faria a mínima diferença no cálculo da taxa de crescimento do produto. Para um crescimento da relação capital/mão-de-obra de 100%, $\dot{K}/K - \dot{L}/L = 1$, a correção (3.65) seria igual, para $b_0 = 0{,}7$ e $\sigma = 0{,}05$, a $-0{,}105$, ou seja, $-10{,}5\%$. Nesse caso, a correção introduzida, levando-se em conta o fato de $\sigma \neq 1$, seria razoável mas não elevada.

V.3.12 — Estimativa da Elasticidade de Substituição

Grande número de estudos realizados, principalmente nos Estados Unidos, com o objetivo de estimar a elasticidade de substituição entre capital e trabalho chegaram a resultados diferentes conforme o tipo de dado utilizado. Assim, nas estimativas baseadas em dados de corte transversal, a elasticidade de substituição tende, em geral, a ser maoir que 1 ($\sigma > 1{,}0$). Por outro lado, nas estimativas obtidas a partir de séries temporais, a elasticidade de substituição está situada, em geral, em torno de 0,5 ($\sigma \cong 0{,}5$). Obviamente, esse tipo de resultado requer uma explicação, pois, *a priori*, nada nos leva a antecipá-lo. Embora se tenha dedicado bastante atenção a esse problema na literatura econômica, até agora não se chegou a uma conclusão quanto ao motivo da discrepância dos resultados. De maneira geral, o enfoque adotado no estudo deste problema é o de se procurar mostrar que por alguma razão, seja nos dados utilizados ou na especificação econométrica adotada, a elasticidade de substituição obtida a partir de dados de corte transversal está superestimada, ou que as estimativas obtidas com dados de série temporal estão subestimadas.

Para ilustrar esse tipo de análise tomemos um dos primeiros argumentos, devido a Leontief (1964), no caso de dados de corte transversal. Suponha-se que os dados de corte transversal sejam provenientes de um conjunto de unidades que podem ser grupadas em duas regiões A e B. A região B é mais rica do que a região A em termos de salário *per capita*. Admita-se também que a mão-de-obra da região B é mais eficiente do que a da região A. A Figura V.3 mostra que, nesse caso, os dados da região B estariam acima da equação verdadeira, que relaciona o logaritmo do produto *per capita* ao logaritmo do salário *per capita*, enquanto os dados da região *A* estariam abaixo da referida equação. Assim, a aplicação de mínimos quadrados aos dados da Figura V.3 levaria a estimar-se uma reta — a equação estimada da Figura V.3 — cujo coeficiente angular estaria próximo da unidade. Em conseqüência, apesar de a elasticidade de substituição na realidade ser inferior à unidade, a estimativa obtida seria viesada na direção do valor 1.

Figura V.3
TENDENCIOSIDADE NA ESTIMATIVA DE ELASTICIDADE DE SUBSTITUIÇÃO



V.4 — Outras Funções de Produção

A partir da descoberta da função de produção CES, uma generalização da função Cobb-Douglas, começou a surgir na literatura econômica uma boa quantidade de funções de produção que generalizam a função CES em várias direções. Algumas têm elasticidade de substituição variável ao invés de constante, outras possuem retornos de escala que dependem do nível de produção. Na verdade, o número de generalizações possíveis é incomensurável. A seguir, apresentaremos três exemplos desse tipo de generalização.

V.4.1 — Função de Produção Liu-Hildebrand-Bruno

A função de produção de Liu-Hildebrand-Bruno, de acordo com Nerlove (1967), é definida por:

$$Q = \gamma \left[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) \left(\frac{K}{L} \right)^{-m\rho} L^{-\rho} \right]^{-\nu/\rho} \tag{4.1}$$

onde m é um novo parâmetro e os demais coeficientes têm o mesmo significado que anteriormente. Quando $m = 0$, a função de produção (4.1) reduz-se à função CES. Quando $m = 1$, a função de produção acima é expressa por:

$$Q = \gamma K^{\nu}$$

que é uma função do tipo Leontief, onde o capital é o fator limitativo, e cujos retornos de escala não são constantes.

V.4.1.1 — Produtividades Marginais

A produtividade marginal da mão-de-obra é obtida derivando-se (4.1) em relação a L. O resultado é:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \nu\, \gamma^{-\rho/\nu} (1 - \delta)\, (1 - m) \left(\frac{K}{L} \right)^{-m\rho} L^{-(1+\rho)}\, Q^{1+\rho/\nu} \tag{4.2}$$

A expressão acima mostra que o parâmetro m deve ser menor que 1 para que a produtividade marginal da mão-de-obra seja positiva. Em equilíbrio competitivo, e quando $\nu = 1$, a produtividade marginal da mão-de-obra é igual ao salário real ω/p, ou seja:

$$\gamma^{-\rho} (1 - \delta)\, (1 - m) \left(\frac{Q}{L} \right)^{1+\rho} \left(\frac{K}{L} \right)^{-m\rho} = \frac{\omega}{p} \tag{4.3}$$

Tomando-se o logaritmo de ambos os membros de (4.3), e rearranjando-se alguns termos, resulta:

$$\log \frac{Q}{L} = - \frac{1}{1 + \rho} \log \gamma^{-\rho} (1 - \delta)\, (1 - m) + \frac{1}{1 + \rho} \log \frac{\omega}{p} + \frac{m\rho}{1 + \rho} \log \frac{K}{L} \tag{4.4}$$

Comparando-se as equações (3.37) e (4.4), verifica-se que a inclusão do termo contendo a razão capital/mão-de-obra $k = K/L$ permite testar a hipótese de que $m = 0$. É claro que, se $m \neq 0$, a estimação da equação (3.37) contém um erro de especificação e, conseqüentemente, as estimativas dos coeficientes serão viesadas. Quando $\nu \neq 1$, ao invés da equação (4.4), tem-se:

$$\log \frac{Q}{L} = \frac{1}{1 + \rho/\nu} \log \nu \gamma^{-\rho/\nu} (1 - \delta)(1 - m)$$

$$+ \frac{1}{1 + \rho/\nu} \log \frac{w}{p} + \frac{m\rho}{1 + \rho/\nu} \log \frac{K}{L} + \frac{\rho(1 - 1/\nu)}{1 + \rho/\nu} \log L \tag{4.5}$$

onde aparece no segundo membro da equação um termo contendo o logaritmo da mão-de-obra. Obviamente, para $\nu = 1$ esse termo desaparece e obtém-se novamente a equação (4.4).

A produtividade marginal do capital é igual à derivada de Q com respeito a K. De (4.1), obtém-se:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \nu \gamma^{-\rho/\nu} Q^{1+\rho/\nu} [\delta K^{-1-\rho} + (1 - \delta) m K^{-1-m\rho} L^{\rho m - \rho}]$$

$$= \nu \gamma^{\rho/\nu} Q^{1+\rho/\nu} K^{-1-\rho} [\delta + (1 - \delta) m K^{-m\rho+\rho}] \tag{4.6}$$

Para que a produtividade marginal do capital seja positiva é necessário que se tenha:

$$\delta + m(1 - \delta)\, k^{-m\rho+\rho} > 0$$

Quanto à elasticidade de escala, é fácil calcular a partir de (4.2) e (4.6) que $\eta = \eta_L + \eta_k = \nu$, ou seja, a função (4.1) é homogênea do grau ν.

V.4.1.2 — Elasticidade de Substituição

A taxa marginal de substituição técnica τ, igual à razão entre as produtividades marginais da mão-de-obra e do capital, é obtida dividindo-se (4.2) por (4.6):[3]

$$\tau = \frac{(1 - \delta)(1 - m) \left(\frac{Q}{L}\right)^{1+\rho} \left(\frac{K}{L}\right)^{-m\rho}}{\left(\frac{Q}{K}\right)^{1+\rho} \left[\delta + m(1 - \delta) \left(\frac{K}{L}\right)^{\rho(1-m)}\right]}$$

$$= \frac{(1 - \delta)(1 - m)\, k^{(1+\rho-m\rho)}}{[\delta + m(1 - \delta)\, k^{\rho(1-m)}]} \tag{4.7}$$

Tomando-se logaritmos de ambos os membros de (4.7), obtém-se:

$$\log \tau = \log (1 - \delta)(1 - m) + (1 + \rho - m\rho) \log k$$

$$- \log [\delta + m(1 - \delta)\, k^{\rho(1-m)}] \tag{4.8}$$

3 Para simplificar, estamos admitindo que $\nu = 1$ e $\gamma = 1$.

Derivando-se a equação acima com respeito a log τ, e simplificando-se o resultado, chega-se à seguinte expressão:

$$1 = \left[1 + \rho - m\rho - \frac{m(1-m)\ \rho(1-\delta)\ k^{\rho(1-m)}}{\delta + m\ (1-\delta)\ k^{\rho(1-m)}} \right] \frac{\partial \log k}{\partial \log \tau} \tag{4.9}$$

A elasticidade de substituição σ é igual a ∂ log k/∂ log τ. Logo, conclui-se de (4.9) que:

$$\sigma = \frac{1}{1 + \rho - m\rho \left(\dfrac{\delta + mk^{\rho(1-m)}}{\delta + m\ (1-\delta)\ k^{\rho(1-m)}} \right)} \tag{4.10}$$

Para simplificar a equação (4.10), temos que a elasticidade do produto em relação ao capital, obtida a partir da equação (4.6), é:

$$\eta_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{K}{Q} = \frac{\delta + m(1-\delta)\ k^{\rho(1-m)}}{\delta + (1-\delta)\ k^{\rho(1-m)}} \tag{4.11}$$

Comparando-se o coeficiente de $m\rho$ no denominador de (4.10) com o valor de η_K em (4.11) é fácil concluir-se que a elasticidade de substituição σ pode ser escrita como:

$$\sigma = \frac{1}{1 + \rho - \dfrac{m\rho}{\eta_K}} \tag{4.12}$$

Observe-se, na equação (4.11), que a elasticidade do produto em relação ao capital depende da relação capital/mão-de-obra, $k = K/L$. Portanto, de acordo com (4.12), a elasticidade de substituição também depende da relação k, isto é, para uma dada isoquanta a elasticidade de substituição é variável. Porém, ao longo de uma reta que passa pela origem a elasticidade de substituição é constante, pois k é constante ao longo de tal reta. Quando $m = 0$, $\sigma = 1/(1 + \rho)$, ou seja, a elasticidade de substituição é constante e independe da relação capital/mão-de-obra.

Expandindo-se a função (4.1) em série de Taylor, em torno do ponto $\rho = 0$, como no método de Kmenta para a função CES, obtém-se o seguinte resultado:

$$\log Q = \log \gamma + \nu [\delta + m(1-\delta)] \log K + \nu(1-m)(1-\delta) \log L$$
$$- \frac{\nu\rho}{2} (1-m)^2\ \delta(1-\delta)\ [\log K - \log L]^2 \tag{4.13}$$

É claro que quando $m = 0$ a equação acima é idêntica à equação (3.32) da função CES. Todavia, para valores de $m \neq 0$ a equação acima mostra que é impossível a partir de uma regressão do tipo:

$$\log Q_t = a_0 + a_1 \log K_t + a_2 \log L_t + a_3 [\log K_t - \log L_t]^2 + \varepsilon_t \tag{4.14}$$

identificar todos os cinco parâmetros do modelo: γ, ν, δ, m e ρ. Entretanto, é possível estimar-se, além do caso óbvio de γ, o parâmetro que mede os retornos de escala, pois:

$$a_1 + a_2 = \nu\,[\delta + m\,(1 - \delta)] + \nu\,(1 - m)\,(1 - \delta) = \nu \tag{4.15}$$

Quanto aos parâmetros δ, m e ρ é preciso alguma informação adicional para estimá-los. Na função CES admite-se, *a priori*, que $m = 0$. Mas, obviamente, nada impede que outras hipóteses sejam escolhidas pelo pesquisador.

V.4.2 — A Função de Produção Translog

A função de produção translog consiste numa função *trans*cendental *log*arítmica dos fatores de produção. No caso de dois fatores, a função translog é expressa por:

$$\begin{aligned} \log Q = {} & \alpha_0 + \alpha_L \log L + \alpha_K \log K + \beta_{LL} (\log L)^2 \\ & - 2\beta_{LK} (\log L)\,(\log K) + \beta_{KK} (\log K)^2 \end{aligned} \tag{4.16}$$

A equação (4.16) também pode ser escrita na seguinte forma:

$$Q = e^{f(K,\,L)} \tag{4.17}$$

onde $f(K, L)$ é função dos serviços do capital K e da mão-de-obra L, isto é:

$$\begin{aligned} f(K, L) = {} & \alpha_0 + \alpha_L \log L + \alpha_K \log K + \beta_{LL} (\log L)^2 \\ & - 2\beta_{LK} (\log L)\,(\log K) + \beta_{KK} (\log K)^2 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Observe-se que, se $\beta_{LL} = \beta_{LK} = \beta_{KK} = 0$, a função translog reduz-se à função Cobb-Douglas.

V.4.2.1 — Função de Produção Homotética

Uma função é ***homotética*** quando consiste numa transformação monotonicamente crescente de uma função homogênea. Portanto, qualquer função homogênea é homotética, mas uma função homotética nem sempre é homogênea. A função de produção translog é homotética quando $f(K, L)$ for uma função homogênea, pois e^f é uma transformação monotonicamente crescente. Para isso ocorrer, ou seja, para que $f(K, L)$ seja homogênea, basta que:

$$\beta_{LL} = \beta_{LK} = \beta_{KK} = \beta \tag{4.19}$$

V.4.2.2 — Retornos de Escala

Os retornos de escala da função de produção translog é igual à soma dos coeficientes α_L e α_K. Com efeito, um aumento proporcional de todos os fatores de produção implica que:

$$e^{f(\lambda K,\ \lambda L)} = e^{\log\ (\lambda^{\alpha_L+\alpha_K}\ Q)} = \lambda^{\alpha_L+\alpha_K}\ Q \tag{4.20}$$

Logo, o grau de homogeneidade de (4.16) é igual a $\alpha_L + \alpha_K$.

V.4.2.3 — Elasticidade de Substituição

As produtividades marginais da mão-de-obra e do captial, obtidas a partir de (4.16), ou de (4.17), são expressas por:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{Q}{L}\ (\alpha_L - 2\beta \log k) \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{Q}{K}\ (\alpha_K + 2\beta \log k) \tag{4.22}$$

Em termos de elasticidades-produto, temos que tanto a elasticidade do produto em relação à mão-de-obra quanto a elasticidade-produto em relação ao capital dependem de relação capital/mão-de-obra k, pois de (4.21) e (4.22) resulta:

$$\begin{aligned} \eta_L &= \alpha_L - 2\beta \log k \\ \eta_K &= \alpha_K + 2\beta \log k \end{aligned} \tag{4.23}$$

Obviamente, quando $\beta = 0$, $\eta_L = \alpha_L$ e $\eta_K = \alpha_K$ independem de k.

A taxa marginal de substituição técnica τ resulta de divisão de (4.21) por (4.22), ou seja:

$$\tau = k \left(\frac{\alpha_L - 2\beta \log k}{\alpha_K + 2\beta \log k} \right) \tag{4.24}$$

Tomando-se os logaritmos de ambos os membros de (4.24), obtém-se:

$$\log \tau = \log k + \log \left(\frac{\alpha_L - 2\beta \log k}{\alpha_K + 2\beta \log k} \right) \tag{4.25}$$

Derivando-se a expressão acima com respeito a log τ e efetuando-se um algebrismo tedioso, obtém-se, finalmente, a seguinte expressão para a elasticidade de substituição entre os fatores de produção:

$$\sigma = \frac{1}{1 - \dfrac{2\beta\ (\alpha_L + \alpha_K)}{(\alpha_L - 2\beta \log k)\ (\alpha_K + 2\beta \log k)}} \tag{4.26}$$

Como na função da subseção precedente, a de Liu-Hildebrand-Bruno, a função de produção translog tem uma elasticidade de substituição que depende da relação capital/mão-de-obra. Todavia, a função de produção translog não se reduz, em geral, à função de produção CES. Contudo, quando $\beta = 0$, como já foi ressaltado, a elasticidade de substituição é unitária, pois neste caso tem-se a função Cobb-Douglas como caso particular. Cabe salientar também que, quando $k \to \infty$, a relação capital/mão-de-obra cresce, a elasticidade de substituição σ tende para a unidade.

V.4.2.4 — A Função Translog e a Aproximação de Kmenta da CES

É interessante observar que a aproximação proposta por Kmenta para a função CES é, na verdade, um caso particular da função de produção translog. Fazendo-se em (4.16):

$$\beta = -\frac{\nu\rho\delta(1-\sigma)}{2} \quad \text{e} \quad c = \alpha_0 \tag{4.27}$$

obtém-se:

$$\log Q = c + \nu\delta \log K + \nu(1-\delta)\log L - \frac{\nu\rho\delta(1-\delta)}{2}[\log K - \log L]^2 \tag{4.28}$$

que é a aproximação de Kmenta dada em (3.32). Presume-se, então, que a aproximação de Kmenta para a função de produção CES consiste em uma boa aproximação quando ρ é próximo de zero, como aliás é de se esperar da expansão em série (3.27). Todavia, não se deve esperar de (4.28) uma boa aproximação para a função CES quando ρ é bastante diferente de zero.

V.4.3 — Função de Produção Zellner-Revankar

Zellner e Revankar (1969) sugeriram um método pelo qual se pode obter funções de produção generalizadas, seja quanto à elasticidade-escala, seja quanto à elasticidade de substituição. Um exemplo deste tipo de generalização é dado pela seguinte função de produção:

$$Qe^{\theta Q} = \gamma K^{\alpha(1-\delta)} L^{\alpha\delta} \tag{4.29}$$

onde θ é um novo parâmetro e os demais símbolos têm o mesmo significado de antes.

V.4.3.1 — Retornos de Escala

O retorno de escala de uma função de produção pode ser obtido através da elasticidade-escala, como indicado em (1.8). Esta equação mostra que, adicionando-se as elasticidades-produto do capital e da mão-de-obra, expressas no caso da função de produção (4.29) por:

$$\eta_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{K}{Q} = \frac{\alpha (1 - \delta)}{1 + \theta Q} \qquad (4.30)$$

$$\eta_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \frac{L}{Q} = \frac{\alpha\delta}{1 + \theta Q} \qquad (4.31)$$

obtém-se o coeficiente que traduz os retornos de escala. Portanto, a elasticidade-escala é dada por:

$$\eta = \eta_L + \eta_K = \frac{\alpha\delta}{1 + \theta Q} + \frac{\alpha (1 - \delta)}{1 + \theta Q} = \frac{\alpha}{1 + \theta Q} \qquad (4.32)$$

Quando $\theta = 0$, a elasticidade-escala é constante e igual a α. Observe-se que nesse caso a função de produção (4.29) é do tipo Cobb-Douglas. Quando $\theta > 0$, ao valor $Q = 0$ corresponde $\eta = \alpha$ e, quando $Q \to \infty$, a elasticidade η tende para zero. Logo, quando $\theta > 0$, a elasticidade-escala diminui com o aumento de produção. Por outro lado, quando $\theta < 0$, um caso menos plausível segundo Zellner-Revankar, à produção $Q = 0$ corresponde $\eta = \alpha$ e, se $Q = 1 - 1/\theta$, a elasticidade tende para mais infinito, ou seja, quando Q aumenta de zero para o valor $-1/\theta$, a elasticidade-escala tende a tomar valores cada vez maiores.

V.4.3.2 — Elasticidade de Substituição

A elasticidade de substituição entre fatores no caso da função de produção (4.29) é unitária, pois:

$$\tau = \frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K} = \frac{\frac{Q}{L} \frac{\alpha\delta}{1 + \theta Q}}{\frac{Q}{K} \frac{\alpha (1 - \delta)}{1 + \theta Q}} = \frac{K}{L} \cdot \frac{\delta}{1 - \delta} \qquad (4.33)$$

É fácil concluir-se de (4.33) que:

$$\sigma = \frac{d \log k}{d \log \tau} = 1 \qquad (4.34)$$

Cabe salientar que o método sugerido por Zellner-Revankar pode gerar funções de produção com elasticidades-substituição e escala variáveis. O exemplo apresentado aqui é de uma função de produção com elasticidade-escala variável, função do nível de produção. Todavia, é possível obter-se funções de produção mais gerais. Para maiores detalhes, deve-se consultar o trabalho de Zellner-Revankar.

V.5 — Estudos de Função de Produção

Esta seção tem como objetivo apresentar alguns estudos de função de produção realizados com dados brasileiros. Mais especificamente, apresentaremos uma resenha dos seguintes trabalhos empíricos: Rocca (1970) para a função Cobb-Douglas, Goodman, Sena e Albuquerque (1971), Macedo (1974), Scandizzo e Barbosa (1977) e Luque (1977) para a função de produção CES.

V.5.1 — Rocca (1970)

Uma das principais restrições que se faz ao uso da função Cobb-Douglas em estudos empíricos prende-se ao fato de que esta admite implicitamente que a elasticidade de substituição é igual à unidade. Rocca, depois de verificar, usando uma função CES, que, na maioria dos casos, a elasticidade de substituição nos dados por ele analisados era unitária, especificou a seguinte função de produção para diversos setores da indústria brasileira:

$$\frac{VA_{ij}}{E_{ij}} = a_0 \left(\frac{CV_{ij}}{E_{ij}}\right)^{a_1} \left(\frac{O_{ij}}{E_{ij}}\right)^{a_2} VAT_i^{a_3} \; e^{u_{ij}} \tag{5.1}$$

onde o índice i refere-se ao estado onde o estabelecimento industrial está localizado e o índice j indica a classe, segundo o número de trabalhadores, a que o estabelecimento pertence. Os coeficientes a_0, a_1, a_2 e a_3 são os parâmetros da função de produção, u_{ij} é a perturbação aleatória e os demais símbolos têm o seguinte significado:

VA = valor da transformação industrial do estabelecimento do setor industrial considerado;

CV = potência instalada, em cavalo-vapor, no estabelecimento;

O = média mensal dos trabalhadores empregados no estabelecimento durante os anos de censos (1949 e 1959);

VAT = valor da transformação industrial do setor industrial; e

E = número de estabelecimentos.

Usando-se a notação da equação (2.1), a função Cobb-Douglas pode ser escrita como:

$$Q_{ij} = \gamma_i \; K_{ij}^{\alpha} \; L_{ij}^{\beta} \; e^{u_{ij}} \tag{5.2}$$

Comparando-se essa expressão com a equação (5.1), pode-se verificar que a quantidade Q_{ij} é igual ao valor médio da transformação industrial por estabelecimento, $Q_{ij} = VA_{ij}/E_{ij}$, o estoque de capital K_{ij} é medido pela potência média instalada por estabelecimento, $K_{ij} = CV_{ij}/E_{ij}$, L_{ij} é igual ao número médio de trabalhadores por estabelecimento, $L_{ij} = Q_{ij}/E_{ij}$. O parâmetro γ_i é igual a:

$$\gamma_i = a_0 \; VAT_i^{a_3} \tag{5.3}$$

Segundo Rocca, essa especificação do parâmetro γ_i, função do valor da transformação industrial no estado, tem como objetivo captar o efeito de variáveis relacionadas ao grau de industrialização ou ao tamanho do mercado para produtos industriais sobre o nível de produção.

A amostra utilizada no estudo foi baseada nos Censos de 1950 e de 1960. No Censo de 1950, os estabelecimentos industriais com menos de dois trabalhadores não foram considerados, enquanto para o Censo de 1960 o primeiro grupo de estabelecimentos incluído na amostra emprega entre um e quatro trabalhadores. A amostra foi estratificada pelo número de trabalhadores por estabelecimento, dividida em 10 classes, das quais nove foram usadas nas estimativas.

A Tabela V.1 contém as estimativas dos parâmetros da função de produção (5.1) para os anos de 1950 e 1960. No que toca às estimativas dos coeficientes para o ano de 1950, a sua quase totalidade é significativa, o mesmo não ocorrendo para as estimativas com os dados do Censo de 1960. Vários coeficientes do estoque de capital não são significativos para o ano de 1960. Alguns desses coeficientes têm sinais negativos. Observe-se, também, que o coeficiente da variável valor da transformação industrial é na maioria dos casos significativo para ambas as amostras.

A soma dos coeficientes do capital e da mão-de-obra mede o grau de retornos de escala da função de produção. Segue-se, portanto, que o retorno de escala é estimado somando-se as estimativas de a_1 e a_2 na Tabela V.1. Todavia, para calcular-se o desvio-padrão dessa estimativa, com a finalidade de construir-se intervalos de confiança e testar-se hipóteses, seria necessário conhecer-se a covariância entre as estimativas de a_1 e a_2. Caso não se disponha do valor desta covariância, a seguinte alternativa pode ser utilizada. Multiplique-se ambos os lados de (5.1) pelo inverso do número médio de trabalhadores por estabelecimento, E_{ij}/O_{ij}. O resultado dessa multiplicação é igual a:

$$\frac{VA_{ij}}{Q_{ij}} = a_0 \left(\frac{CV_{ij}}{Q_{ij}}\right)^{a_1} \left(\frac{Q_{ij}}{E_{ij}}\right)^{a_1 + a_2 - 1} VAT_i^{a_3} e^{u_{ij}} \qquad (5.4)$$

Portanto, o coeficiente da variável número médio de trabalhadores por estabelecimento, O_{ij}/E_{ij}, é igual ao grau de retornos de escala quando somado à unidade.

A Tabela V.2 apresenta os resultados da estimação dos parâmetros da função (5.4). Como era obviamente de se esperar, os coeficientes a_1 e a_3 são os mesmos nas duas tabelas. Note-se, também, que os valores dos coeficientes de determinação R^2 são diferentes para o mesmo setor industrial, como constatamos comparando-se as Tabelas V.1 e V.2. Novamente esse resultado é esperado em virtude de as variáveis dependentes nas funções (5.4) e (5.1) serem diferentes.

Quanto ao grau de retornos de escala, para os dados do Censo de 1950, três coeficientes da variável O_{ij}/E_{ij} são negativos, apontando na direção de retornos decrescentes de escala. Todavia, a hipótese de retornos constantes de escala não é rejeitada em dois casos. Em três setores industriais a hipótese de retornos crescentes de escala não é rejeitada. No setor que agrega produtos alimentares, bebidas e fumo, a hipótese de que o coeficiente $a_1 + a_2 - 1$ é nulo, significando retornos constantes de escala, não é rejeitada.

Tabela V.1

FUNÇÃO DE PRODUÇÃO COBB-DOUGLAS: ROCCA (1970)

Grupos de Indústria	Constante	$\frac{CV_{ij}}{E_{ij}}$	$\frac{O_{ij}}{E_{ij}}$	VAT_i	R^2
Dados de 1950					
Minerais Não-Metálicos	0,20249	0,169 (0,047)	0,909 (0,068)	0,161 (0,028)	0,953
Metalurgia, Mecânica, Material Elétrico e Material de Transportes	0,51327	0,162 (0,070)	0,895 (0,085)	0,138 (0,026)	0,975
Madeira e Mobiliário	0,42672	0,262 (0,063)	0,817 (0,061)	0,131 (0,019)	0,960
Química e Produtos Farmacêuticos	0,52583	0,003 (0,052)	0,985 (0,071)	0,192 (0,032)	0,918
Têxtil	0,32353	0,141 (0,079)	0,756 (0,074)	0,202 (0,026)	0,955
Vestuário	0,19666	0,106 (0,030)	0,878 (0,047)	0,195 (0,022)	0,971
Produtos Alimentares, Bebidas e Fumo	0,43874	0,554 (0,077)	0,481 (0,087)	0,145 (0,033)	0,923
Dados de 1960					
Minerais Não-Metálicos	1,504	0,237 (0,034)	0,858 (0,055)	0,127 (0,028)	0,961
Metalurgia	1,649	0,124 (0,067)	0,948 (0,080)	0,137 (0,034)	0,953
Mecânica	1,107	—0,009 (0,075)	0,999 (0,076)	0,287 (0,026)	0,972
Material Elétrico	1,587	0,028 (0,097)	1,048 (0,099)	0,180 (0,065)	0,947
Material de Transporte	1,299	0,096 (0,063)	0,952 (0,064)	0,218 (0,031)	0,961
Madeira	1,623	0,216 (0,111)	0,887 (0,100)	0,100 (0,040)	0,866
Mobiliário	1,604	0,141 (0,047)	0,874 (0,054)	0,133 (0,026)	0,950
Papel e Papelão	2,000	-0,009 (0,072)	1,098 (0,104)	0,082 (0,057)	0,917
Borracha	2,440	0,095 (0,091)	0,878 (0,121)	0,054 (0,060)	0,853
Couro, Peles e Produtos Similares	1,872	0,110 (0,040)	0,950 (0,058)	0,076 (0,029)	0,940
Química	1,303	0,430 (0,109)	0,560 (0,127)	0,254 (0,053)	0,807
Produtos Farmacêuticos e Medicinais	1,105	0,136 (0,045)	0,956 (0,050)	0,322 (0,051)	0,948
Produtos de Perfumaria, Sabão e Velas	2,004	0,066 (0,088)	0,956 (0,124)	0,157 (0,062)	0,831
Plásticos	1,640	0,521 (0,130)	0,583 (0,143)	0,112 (0,087)	0,953
Têxtil	1,877	0,595 (0,088)	0,305 (0,088)	0,107 (0,045)	0,824
Vestuário	1,881	0,140 (0,030)	0,886 (0,041)	0,090 (0,023)	0,973
Produtos Alimentares	1,841	0,224 (0,039)	0,763 (0,040)	0,224 (0,039)	0,935
Bebidas	1,204	0,115 (0,054)	0,975 (0,075)	0,263 (0,038)	0,937
Fumo	2,510	0,364 (0,081)	0,734 (0,102)	—0,021 (0,072)	0,908
Editorial e Gráfica	1,757	0,294 (0,082)	0,680 (0,083)	0,147 (0,039)	0,899

FONTE: Rocca (1970).
NOTAS: a) Os valores entre parênteses são os erros-padrão das estimativas.
b) Para o significado dos demais símbolos, ver texto.

Tabela V.2

FUNÇÃO DE PRODUÇÃO COBB-DOUGLAS E RETORNOS DE ESCALA: ROCCA (1970)

Grupos de Indústria	Constante	$\frac{CV_{ij}}{O_{ij}}$	$\frac{O_{ij}}{E_{ij}}$	VAT_i	R^2
Dados de 1950					
Minerais Não-Metálicos	0,202	0,169 (0,047)	0,078 (0,034)	0,161 (0,028)	0,608
Metalurgia, Mecânica, Material Elétrico e Material de Transportes	0,513	0,162 (0,070)	0,058 (0,025)	0,138 (0,026)	0,538
Madeira e Mobiliário	0,426	0,262 (0,063)	0,080 (0,026)	0,131 (0,019)	0,466
Química e Produtos Farmacêuticos	0,525	—0,003 (0,052)	—0,017 (0,037)	0,192 (0,032)	0,309
Têxtil	0,323	0,141 (0,079)	—0,101 (0,022)	0,202 (0,026)	0,461
Vestuário	0,196	0,106 (0,030)	—0,014 (0,027)	0,195 (0,022)	0,668
Produtos Alimentares, Bebidas e Fumo	0,438	0,544 (0,077)	0,035 (0,033)	0,145 (0,033)	0,505
Dados de 1960					
Minerais Não-Metálicos	1,504	0,237 (0,034)	0,096 (0,029)	0,127 (0,028)	0,658
Metalurgia	1,649	0,124 (0,067)	0,072 (0,027)	0,137 (0,034)	0,337
Mecânica	1,107	—0,009 (0,075)	—0,010 (0,025)	0,287 (0,026)	0,674
Material Elétrico	1,587	0,028 (0,097)	0,077 (0,039)	0,180 (0,065)	0,265
Material de Transporte	1,299	0,096 (0,063)	0,049 (0,029)	0,218 (0,031)	0,530
Madeira	1,623	0,216 (0,111)	0,193 (0,050)	0,100 (0,040)	0,146
Mobiliário	1,604	0,141 (0,047)	0,015 (0,028)	0,133 (0,026)	0,366
Papel e Papelão	2,000	—0,009 (0,072)	0,088 (0,048)	0,082 (0,057)	0,118
Borracha	2,440	0,095 (0,091)	—0,025 (0,065)	0,054 (0,060)	0,320
Couro, Peles e Produtos Similares	1,872	0,110 (0,040)	0,060 (0,032)	0,076 (0,029)	0,229
Química	1,303	0,430 (0,109)	0,008 (0,055)	0,254 (0,053)	0,279
Produtos Farmacêuticos e Medicinais	1,105	0,136 (0,095)	0,093 (0,046)	0,322 (0,051)	0,604
Produtos de Perfumaria, Sabão e Velas	2,004	0,066 (0,088)	0,023 (0,069)	0,157 (0,062)	0,123
Plásticos	1,640	0,521 (0,130)	0,104 (0,050)	0,112 (0,087)	0,475
Têxtil	1,877	0,595 (0,088)	—0,098 (0,037)	0,107 (0,045)	0,332
Vestuário	1,881	0,140 (0,030)	0,027 (0,022)	0,090 (0,023)	0,490
Produtos Alimentares	1,841	0,224 (0,039)	—0,011 (0,023)	0,224 (0,039)	0,376
Bebidas	1,204	0,115 (0,054)	0,090 (0,039)	0,263 (0,038)	0,545
Fumo	2,510	0,364 (0,081)	0,099 (0,058)	—0,021 (0,072)	0,378
Editorial e Gráfica	1,757	0,294 (0,082)	—0,024 (0,041)	0,147 (0,039)	0,296

FONTE: Rocca (1970).

NOTAS: a) Os valores entre parênteses são os erros-padrão das estimativas.
b) Para o significado dos demais símbolos, ver texto.

Para os dados do Censo de 1960, a hipótese de retornos constantes de escala é rejeitada para seis setores, para os quais a evidência aponta na direção de retornos crescentes de escala.

A principal conclusão que emerge do estudo de Rocca é quanto à importância do valor da transformação industrial na explicação da produtividade industrial. Segundo Rocca, essa variável seria uma *proxy* para economias externas técnicas provenientes de diferenças na qualidade de insumos, capacidade gerencial, conhecimento tecnológico e diversificação industrial. Outra conclusão importante diz respeito à existência de retornos crescentes de escala em alguns setores industriais da economia brasileira.

V.5.2 — Goodman, Sena e Albuquerque (1971) e Macedo (1974)

Uma condição necessária para a minimização do custo de produção de uma empresa é de que a taxa marginal de substituição técnica seja igual à relação de preços dos fatores de produção. Quando a função de produção é do tipo CES, essa condição é obtida combinando-se as equações (3.3) e (3.5), ou seja:

$$\frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho} = \frac{\omega}{r} \tag{5.5}$$

ou, alternativamente:

$$\log \frac{K}{L} = \sigma \log \frac{\delta}{1-\delta} + \sigma \log \frac{\omega}{r} + \xi \tag{5.6}$$

onde adicionamos a perturbação estocástica ξ.

Goodman e associados utilizaram a especificação (5.6) para estimar os parâmetros δ e σ. Uma vez conhecidos esses parâmetros, eles usaram a seguinte regressão:

$$\log Q = \log \gamma + \nu \log [\hat{\delta} K^{-\hat{\rho}} + (1-\hat{\delta})\, L^{-\hat{\rho}}]^{-1/\hat{\rho}} + u \tag{5.7}$$

para estimar os parâmetros ν e γ. Note-se que $\hat{\delta}$ e $\hat{\rho}$, as estimativas de δ e ρ, são usadas para calcular-se a série da variável "independente" nessa regressão. Cabe ainda salientar que, embora este tipo de procedimento tenha sido bastante usado na literatura econométrica para estimar-se todos os parâmetros da função de produção CES, as propriedades dos estimadores da regressão (5.7), para pequenas amostras, não são conhecidas e certamente não são idênticas as propriedades dos estimadores do modelo de regressão tradicional.

Os dados usados por Goodman e associados para estimar os parâmetros da função de produção CES foram os de novos projetos industriais aprovados pela SUDENE para o período compreendido entre 1960 e abril de 1970. Um argumento que se pode levantar contra o uso desse tipo de dado é que eles são planejados, ao nível de projeto, e que podem não refletir a realidade por conter uma boa dose de erro.

O estoque de capital K é medido pelas inversões totais contempladas em cada projeto; L é mão-de-obra total a ser empregada no projeto; o salário ω é igual ao salário médio anual, incluindo-se aí os encargos sociais; a quantidade Q é igual ao valor agregado líquido anual. Quanto ao custo do capital, foram usadas duas alternativas. A primeira é definida pela taxa de retorno do capital, $r = (Q - \omega L) / K$, e a segunda alternativa é igual ao custo unitário do capital investido. Esse custo é dado por:

$$\pi = \frac{r_1 (K - C) + r_2 C}{K}$$

onde C é o capital próprio a ser utilizado no financiamento das inversões totais, $r_1 = 0{,}03$ e $r_2 = 0{,}15$ são as taxas para os recursos de terceiros e do capital próprio, respectivamente.

A Tabela V.3 mostra as estimativas da regressão (5.6) para as duas alternativas do custo do capital e para três métodos de estimação: mínimos quadrados ordinários e dois outros que levam em conta o problema de erros nas variáveis, que certamente, como mencionamos anteriormente, existe no tipo de dado utilizado.

Para o método de mínimos quadrados ordinários, coluna A da Tabela V.3, não existe grande discrepância entre os resultados obtidos com as duas alternativas do custo do capital. Todas as estimativas da elasticidade de substituição são significativas, diferentes de zero, em geral inferiores à unidade, embora em um bom número de setores a hipótese de que a elasticidade de substituição é unitária não é rejeitada.

No tocante aos resultados obtidos com o emprego do método de estimação do modelo de erros nas variáveis, colunas B e C da Tabela V.3, as estimativas divergem em vários aspectos: quanto à variável usada para o custo do capital, no que diz respeito ao método e também em relação às estimativas de mínimos quadrados. Entretanto, em todos os casos as estimativas da elasticidade de substituição são bastante superiores à unidade.

A Tabela V.4 apresenta as estimativas do parâmetro que mede os retornos de escala. Não se levando em conta o fato de que a interpretação dos desvios-padrão nesse caso deve ser feito com bastante cautela, a hipótese de retornos decrescentes de escala não é rejeitada para o grupo que engloba os seguintes setores industriais: química, materiais plásticos e produtos farmacêuticos.

No que concerne aos setores de borracha, couros e peles, fumo e diversos, alimentos e bebidas, madeira e mobiliário, metalurgia e minerais não-metálicos, a hipótese de retornos constantes de escala não é rejeitada. Para os setores de mecânica, material elétrico e de transporte, papel e papelão e têxtil e vestuário, a hipótese de retornos crescentes de escala não é rejeitada. Vale observar que Goodman e associados, no apêndice do trabalho, deduz a relação (5.6) a partir da hipótese de maximização de lucro de uma empresa em concorrência perfeita, o que é obviamente inconsistente com os resultados da Tabela V.4 no tocante à existência de retornos crescentes de escala em alguns setores industriais. Observe-se que a relação (5.6) foi deduzida aqui a partir da hipótese de minimização do custo de produção, embora ela também seja válida para uma empresa que maximiza o lucro em concorrência perfeita. Acontece que a hipótese de mini-

Tabela V.3

ESTIMATIVAS DA ELASTICIDADE DE SUBSTITUIÇÃO: GOODMAN E OUTROS (1971)

Grupos de Indústria		A			B		C	
		δ	σ	R^2	δ	σ	δ	σ
Minerais Não-Metálicos	π	0,541	0,88848 (0,12034)	0,43777	0,9189	2,30085	0,8039	1,89567
	r	0,8881	0,88107 (0,09082)	0,57343	0,5495	1,59404	0,5575	1,48322
Metalúrgica	π	0,707	0,71858 (0,11677)	0,31866	0,8667	1,75592	0,8165	1,90314
	r	0,9281	0,81135 (0,13071)	0,45579	0,5392	2,00907	0,5050	1,74988
Mecânica, Material Elétrico e de Transporte	π	0,829	0,60466 (0,10949)	0,34854	0,8705	1,54080	0,7849	1,53074
	r	0,9718	0,60641 (0,07860)	0,50644	0,6109	1,33851	0,5013	1,33510
Madeira e Mobiliário	π	0,598	0,76692 (0,25992)	0,26617	0,8395	1,42824	0,7512	1,60189
	r	0,9545	0,69544 (0,21517)	0,30326	0,5305	2,08132	0,5283	2,21059
Papel e Papelão	π	0,620	0,81449 (0,25369)	0,35180	0,8489	1,63756	0,7396	1,51014
	r	0,9780	0,61862 (0,26361)	0,22471	0,6678	2,81003	0,5833	2,55914
Química, Materiais Plásticos e Produtos Farmacêuticos	π	0,529	0,94529 (0,11529)	0,42965	0,9132	2,22511	0,8165	2,06078
	r	0,9822	0,64318 (0,07478)	0,47122	0,6855	1,34792	0,6047	1,41789
Têxtil, Vestuário e Calçados	π	0,628	0,79367 (0,11461)	0,35544	0,8984	2,36552	0,8236	2,44866
	r	0,9550	0,68226 (0,07376)	0,47380	0,6997	1,28643	0,6078	1,42268
Alimentos e Bebidas	π	0,775	0,93139 (0,11982)	0,36638	0,9305	2,81003	0,8276	2,46674
	r	0,901	0,84029 (0,08230)	0,53118	0,5413	1,73889	0,5215	1,74994
Borracha, Couros e Peles, Fumo e Diversos	π	0,501	0,86320 (0,13229)	0,47531	0,8996	1,92808	0,7899	1,75948
	r	0,8141	1,0111 (0,15059)	0,48959	0,6047	2,37350	0,5536	2,25288

FONTE: Goodman e outros (1971).

NOTAS: a) Coluna A; método dos mínimos quadrados ordinários; Colunas B e C: modelo de erro nas variáveis, estimado pelo método de Wald e Barlett [Ver Johnston (1963, pp. 148-75)].

b) Os valores entre parênteses são os erros-padrão das estimativas.

c) Para o significado dos demais símbolos, ver texto.

Tabela V.4

ESTIMATIVAS DOS RETORNOS DE ESCALA: GOODMAN E OUTROS (1971)

Grupos de Indústria	ν	R^2	Número de Projetos
Minerais Não-Metálicos	1,1586 (0,0796)	0,7390	56
Metalúrgica	1,0554 (0,0875)	0,8832	43
Mecânica, Material Elétrico e de Transporte	2,4507 (0,1627)	0,8162	55
Madeira e Mobiliário	1,1586 (0,1529)	0,7414	22
Papel e Papelão	1,9987 (0,1491)	0,9135	19
Química, Materiais Plásticos e Produtos Farmacêuticos	0,8311 (0,0402)	0,9265	36
Têxtil e Vestuário	5,6375 (0,3095)	0,8382	66
Alimentos e Bebidas	0,9357 (0,0785)	0,7207	57
Borracha, Couros e Peles, Fumo e Diversos	1,0702 (0,0548)	0,8444	72

FONTE: Goodman e outros (1971).
NOTAS: a) Os valores entre parênteses são os erros-padrão das estimativas.
b) Para o significado dos demais símbolos, ver texto.

mização do custo é consistente com retornos crescentes de escala, enquanto a maximização do lucro não o é, como veremos no capítulo seguinte.

Em situação de equilíbrio competitivo, como se verá com mais vagar no Cap. VII, o valor da produtividade marginal da mão-de-obra é igual ao seu custo unitário. Essa condição fornece a seguinte equação quando a função de produção é do tipo CES com retornos constantes de escala:

$$\log \frac{V}{L} = a_0 + \sigma \log \omega + u \tag{5.8}$$

onde u é o termo aleatório. Essa equação é idêntica à (3.37), quando se faz a produção Q igual ao valor adicionado V, o salário ω igual ao salário médio e a constante igual a a_0.

A especificação da equação (5.8) tem sido largamente utilizada para estimar-se a elasticidade de substituição. Macedo (1974) estimou com dados de corte transversal, do censo da indústria brasileira de 1970, os parâmetros da equação (5.8). A Tabela V.5 apresenta os resultados dessa estimativa para diversos setores industriais, bem como para o total da indústria. Como se pode observar, as estimativas de elasticidade de substituição estão próximas ou são maiores do que a unidade. Esse é um tipo de resultado a que se tem chegado com bastante freqüência em outros países quando se usa dados de corte transversal.

O objetivo primordial de Macedo ao estimar os parâmetros da equação (5.8) pelo método de mínimos quadrados ordinários não foi o de obter estimativas para as elasticidades de substituição, mas mostrar alguns problemas econométricos que lançam sérias dúvidas sobre a interpretação de estimativas de regressões do logaritmo do valor adicionado médio por trabalhador sobre o logaritmo do salário médio. Obviamente, por trás da especificação (5.8) estão algumas hipóteses, como, por exemplo, concorrência perfeita e retornos constantes de escala, que são julgadas por muitos economistas inadequadas para o setor industrial. Todavia, mesmo que, *a priori*, o econometrista seja bastante crédulo nessa hipótese, o problema apontado por Macedo ainda persiste em virtude de a variável salário ser definida através do salário médio.

O argumento de Macedo parte da seguinte identidade:

$$\frac{V}{L} \equiv A \, \frac{V}{W} \cdot \frac{W}{L} \tag{5.9}$$

onde W é o total da folha de pagamento com os trabalhadores e A é uma constante igual à unidade. Como o salário médio ω é igual a W/L, podemos reescrever a identidade anterior do seguinte modo:

$$\frac{V}{L} \equiv A \left(\frac{V}{W} \right)^{\theta_1} \omega^{\theta_2} \tag{5.10}$$

onde θ_1 e θ_2 são iguais à unidade. Por outro lado, desprezando-se o termo aleatório, a equação (5.8) pode ser escrita como:

$$\frac{V}{L} = a\omega^{\beta} \tag{5.11}$$

onde o parâmetro β é igual à elasticidade de substituição σ e a constante a é igual ao número e elevado a a_0.

Quando se compara as expressões (5.10) e (5.11), pode-se imaginar que o modelo (5.11) se constitui em uma equação incorretamente especificada a partir do "modelo" (5.10). Conseqüentemente, a análise de erro de especificação afirma que a esperança matemática do estimador de β, $E\hat{\beta}$, é dada por:

$$E\beta = \theta_2 + \theta_1 b = 1 + b \tag{5.12}$$

pois $\theta_1 = \theta_2 = 1$, e b é o coeficiente da seguinte regressão:

$$\log \frac{V}{W} = b_0 + b \log \omega + \text{erro} \tag{5.13}$$

Tabela V.5

ESTIMATIVAS DE ELASTICIDADE DE SUBSTITUIÇÃO: MACEDO (1974) — DADOS DE CORTE TRANSVERSAL (1969)

Grupo de Indústria	Constante	σ	R^2
Total	2,050 (36,21)	0,807 (11,69)	0,99
Não-Metálicos	4,553 (28,25)	0,811 (3,566)	0,41
Metalúrgica	1,667 (6,496)	0,838 (3,371)	0,39
Mecânica	1,525 (7,252)	1,076 (4.953)	0,61
Material Elétrico	1,888 (7,544)	0,950 (4,054)	0,62
Material de Transporte	1,332 (9,066)	1,128 (7,940)	0,78
Madeira	1,409 (3,652)	1,015 (1,648)	0,13
Mobiliário	1,534 (16,70)	0,808 (5,729)	0,63
Papel	1,694 (12,80)	0,973 (5,753)	0,67
Borracha	1,975 (8,238)	1,160 (3,755)	0,44
Couros	1,671 (18,29)	0,823 (5,749)	0,64
Bebidas	1,550 (9,213)	1,657 (11,25)	0,90
Química	2,555 (13,07)	0,704 (4,503)	0,52
Farmacêutica	1,928 (9,687)	1,348 (7,103)	0,76
Plásticos	1,578 (9,684)	1,247 (7,602)	0,82
Cosméticos	2,233 (11,73)	0,931 (4,026)	0,46
Têxtil	2,149 (9,097)	0,698 (2,031)	0,18
Vestuário	1,497 (15,61)	1,046 (7,684)	0,76
Alimentação	2.266 (22,36)	0,962 (7,976)	0,77
Fumo	1,921 (16,29)	1 259 (8,837)	0,80
Editorial e Gráfica	1,333 (5,689)	1,037 (4,884)	0,49

FONTE: Macedo (1974).
NOTA: Os valores entre parênteses são as estatísticas t de Student.

Observe-se que W/V é a participação da mão-de-obra no produto. A esperança matemática do estimador de β depende do valor do coeficiente b, sobre o qual passamos a fazer várias hipóteses.

Quando $b < 0$, a participação da mão-de-obra no produto, W/V, e o salário médio, ω, variam na mesma direção. Esse fato, como já vimos anteriormente, é consistente com a hipótese de que a elasticidade de substituição é menor que 1 $(\sigma < 1)$.

Quando $b > 0$, a participação da mão-de-obra no produto, W/V, e o salário médio, ω, variam em sentido contrário. Esse resultado é consistente com a hipótese de que a elasticidade de substituição é maior que 1 $(\sigma > 1)$.

Quando $b = 0$, existem duas possibilidades que têm de ser analisadas. A primeira é a de que a participação da mão-de-obra no produto é constante, o que é consistente com a hipótese de elasticidade de substituição unitária. A segunda possibilidade ocorre quando b é igual a zero e a participação da mão-de-obra no produto W/V varia aleatoriamente em relação ao salário médio ω. Nesse caso, $E\hat{\beta} = 1$, e a estimativa do coeficiente que se acredita representar a elasticidade de substituição está próxima da unidade. Esse resultado é inconsistente com a teoria, pois W/V varia aleatoriamente. Assim, a interpretação de β como a elasticidade de substituição fica prejudicada e deixa de ter sentido.

A principal conclusão da análise de Macedo é a de que se o coeficiente b for igual a zero e a participação da mão-de-obra no produto não for constante, nenhuma interpretação deve ser dada para a estimativa do coeficiente β, pois ela é simplesmente um artefato estatístico.

Macedo examinou o comportamento da relação W/V para os dados utilizados nas estimativas da Tabela V.5, comprovando, então, que na maioria dos casos não se deve interpretar a estimativa de β como uma elasticidade de substituição.

O mesmo argumento apresentado para a especificação (5.8) pode ser desenvolvido para a equação (5.6), bastando para isso que se parta, agora, da seguinte identidade:

$$\frac{K}{L} = A \frac{Kr}{L\omega} \frac{\omega}{r} \tag{5.14}$$

onde A é igual à unidade. Segue-se, portanto, que o mesmo problema ocorre com a interpretação do coeficiente que multiplica o logaritmo da relação de preços de fatores na equação (5.6).

V.5.3 — Scandizzo e Barbosa (1977) e Luque (1977)

A aproximação de Kmenta para a função de produção CES, dada pela equação (3.39) e repetida aqui por conveniência,

$$\log Q = a_0 + a_1 \log K + a_2 \log L + a_3 (\log K - \log L)^2 + \xi \tag{5.15}$$

onde $a_1 = v\delta$, $a_2 = v(1-\delta)$, $a_3 = -v\rho\delta(1-\delta)/2$ serviu de paradigma tanto no trabalho de Scandizzo e Barbosa como no de Luque. Como esse último autor estava mais diretamente interessado no parâmetro que mede os retornos de escala, ele subtraiu log L de ambos os lados de (5.15), obtendo:

$$\log \frac{Q}{L} = a_0 + a_1 \log \frac{K}{L} + (a_1 + a_2 - 1) \log L$$
$$+ a_3 (\log K - \log L)^2 + \xi \qquad (5.16)$$

Assim, o coeficiente da variável log L quando somado à unidade é igual à elasticidade de escala ν.

Os dados utilizados por Scandizzo e Barbosa são dados de corte transversal, levantados em estabelecimentos agrícolas em uma extensa pesquisa levada a efeito pela SUDENE em colaboração com o Banco Mundial.

Para fins de estimativa dos parâmetros da função de produção, o Nordeste foi dividido em sete zonas econômicas, a saber: A) vazio demográfico relativo; B) meio-norte; C) sertão semi-árido; D) sudeste semi-árido; E) leste úmido; F) sudeste úmido; e G) agreste.

O volume de produção Q é medido pelo valor adicionado por estabelecimento, o estoque de capital K é medido pelo valor total do capital, incluindo-se aí terra, benfeitorias, gado e equipamento, L é a quantidade de mão-de-obra usada no ano agrícola, medida em homens-ano.

A Tabela V.6 apresenta as estimativas dos parâmetros da função de produção para a amostra de todos os estabelecimentos agrícolas e para duas subamostras, uma composta por estabelecimentos classificados, *a priori*, como "eficientes" e outra por aqueles considerados "ineficientes". Os estabelecimentos foram classificados em uma categoria ou outra através do exame de gráficos que relacionavam as produtividades da mão-de-obra e do capital ou os coeficientes técnicos desses fatores.

No caso da amostra de todos os estabelecimentos, pode-se observar que as estimativas dos retornos de escala são aproximadamente iguais à unidade. No que diz respeito ao coeficiente a_3, suas estimativas sugerem uma função de produção Cobb-Douglas, pois elas não são significativamente diferentes de zero, com exceção das regiões B e F. Assim, para as demais regiões, a evidência aponta na direção de elasticidade de substituição unitária.

No tocante à subamostra dos estabelecimentos "eficientes", a elasticidade da escala está situada em torno do valor unitário. As estimativas do coeficiente a_3 são significativamente diferentes de zero, com exceção da região G, onde a hipótese da função Cobb-Douglas não seria rejeitada. Segundo Scandizzo e Barbosa, as estimativas de a_3 mostram que as elasticidades de substituição são superiores à unidade, exceto para a região F.

Para a subamostra dos estabelecimentos "ineficientes", as elasticidades de substituição, em geral, são menores que 1, segundo os autores do trabalho. Os retornos de escala são ligeiramente decrescentes. Quanto aos parâmetros de distribuição, eles apresentam valores mais baixos para a subamostra dos estabelecimentos ineficientes.

Um ponto importante que salientamos quando tratamos da função de produção de Liu-Hildebrand-Bruno e da função de produção translog diz respeito à impossibilidade de, a partir de uma especificação do tipo (5.15), se identificar o parâmetro ρ e, conseqüentemente, a elasticidade de substituição $\sigma = 1/1 + \rho$.

Tabela V.6

FUNÇÃO DE PRODUÇÃO CES: SCANDIZZO E BARBOSA (1977)

Zonas Econô-micas	Constante	K	L	K/L	δ	γ	σ	R^2	GL
A	5,390	0,246	0,858	0,014	0,225	1,094	0,932	0,446	515
	(0,085)	(0,055)	(0,080)	(0,019)					
B	5,651	0,245	0,702	0,062	0,259	0,947	0,746	0,290	640
	(0,093)	(0,056)	(0,078)	(0,020)					
C	5,521	0,418	0,695	—0,014	0,376	1,113	1,057	0,428	1.884
	(0,051)	(0,033)	(0,045)	(0,011)					
D	4,486	0,688	0,337	—0,012	0,671	1,025	1,056	0,400	276
	(0,218)	(0,177)	(0,225)	(0,040)					
E	5,447	0,433	0,605	—0,037	0,417	1,038	1,172	0,350	305
	(0,203)	(0,130)	(0,138)	(0,024)					
F	6,488	0,165	0,942	0,093	0,149	1,107	0,602	0,857	42
	(0,231)	(0,055)	(0,098)	(0,022)					
G	5,332	0,320	0,658	—0,004	0,327	0,978	1,019	0,257	700
	(0,122)	(0,063)	(0,093	(0,020)					
				Subamostra de Estabelecimentos "Eficientes"					
A	7,391	0,395	0,537	—0,074	0,424	0,932	1,482	0,941	26
	(0,100)	(0,032)	(0,065)	(0,014)					
B	8,085	0,495	0,424	—0,059	0,539	0,919	1,348	0,840	34
	(0,159)	(0,047)	(0,093)	(0,018)					
C	8,620	0,525	0,491	—0,053	0,417	1,016	1,264	0,930	23
	(0,150)	(0,042)	(0,090)	(0,013)					
D	6,746	0,709	0,251	—0,080	0,739	0,960	1,743	0,935	40
	(0,100)	(0,065)	(0,087)	(0,014)					
E	7,508	0,398	0,638	—0,054	0,384	1,036	1,238	0,953	30
	(0,114)	(0,054)	(0,057)	(0,015)					
F	6,555	0,133	0,227	0,133	0,226	1,006	0,569	0,940	28
	(0,182)	(0,019)	(0,039)	(0,019)					
G	8,045	0,566	0,483	—0,033	0,540	1,049	1,145	0,946	17
	(0,183)	(0,054)	(0,105)	(0,054)					
				Subamostra de Estabelecimentos "Ineficientes"					
A	2,643	0,380	0,595	0,061	0,359	1,081	0,803	0,903	17
	(0,163)	(0,124)	(0,144)	(0,031)					
B	2,768	0,183	0,785	0,137	0,189	0,968	0,520	0,899	14
	(0,168)	(0,159)	(0,217)	(0,045)					
C	2,293	0,171	0,721	0,082	0,192	0,892	0,628	0,950	16
	(0,143)	(0,115)	(0,120)	(0,023)					
D	2,552	0,264	0,757	0,068	0,259	1,021	0,742	0,931	16
	(0,203)	(0,162)	(0,198)	(0,034)					
E	3,007	0,454	0,403	—0,0004	0,530	0,857	1,002	0,818	13
	(0,231)	(0,174)	(0,256)	(0,031)					
F	5,445	0,774	0,246	—0,032	0,759	1,020	1,207	0,980	10
	(0,258)	(0,245)	(0,274)	(0,052)					
G	2,003	0,637	0,398	0,030	0,615	1,035	0,891	0,950	15
	(0,159)	(0,112)	(0,144)	(0,023)					

FONTE: Scandizzo e Barbosa (1977).

NOTAS: a) Os números entre parênteses são os erros-padrão das estimativas.

b) Zonas econômicas: A — vazio demográfico relativo, B — meio-norte, C — sertão semi-árido, D — sudeste semi-árido, E — leste úmido, F — sertão úmido e G — agreste.

c) Para o significado dos demais símbolos, ver texto.

Obviamente, quando o coeficiente do quadrado de log K/L for nulo pode-se afirmar que a função de produção é do tipo Cobb-Douglas, que tem elasticidade de substituição unitária. Todavia, em caso contrário não podemos calcular a elasticidade de substituição a não ser que se disponha de informações adicionais.

O estudo de Luque foi baseado em dados do Censo Industrial de 1970 e a amostra foi estratificada por estabelecimento, em oito classes, de acordo com o número de pessoal ocupado. Seguindo a sugestão de Rocca, no trabalho analisado anteriormente, Luque acrescentou a variável valor da transformação industrial de cada estado, como explicativa na equação (5.16), para captar o efeito de economias de ordem técnica sobre a produtividade do estabelecimento industrial.

Usando a mesma notação de Luque, a função de produção (5.16) foi especificada como:

$$\log \frac{va_{ij}}{p_{ij}} = a_0 + a_1 \log \frac{el_{ij}}{p_{ij}} + a_2 \log p_{ij} + a_3 (\log el_{ij} - \log p_{ij})^2$$
$$+ a_4 \log VAT_i + \xi_{ij} \qquad (5.17)$$

onde o índice i refere-se ao estado e o índice j denota a classe a que pertence o estabelecimento, $va_{ij} = VA_{ij}/E_{ij}$ é o valor adicionado médio por estabelecimento classificado no tamanho j, do estado i, $p_{ij} = P_{ij}/E_{ij}$ é a média mensal do pessoal ocupado dos estabelecimentos classificados no tamanho j, do estado i, $l_{ij} = EL_{ij}/E_{ij}$ é o consumo médio de energia elétrica observado em estabelecimentos do tamanho j, do estado i, e os demais símbolos têm o seguinte significado:

VA = valor da transformação industrial;

P = média mensal do pessoal ocupado;

VAT = valor da transformação industrial de cada estado;

EL = consumo de energia elétrica medido em kWh (quilowatt-hora); e

E = número de estabelecimentos.

A Tabela V.7 apresenta os resultados das estimativas obtidas por Luque. Os retornos de escala se mostram em geral superiores à unidade. Somente no setor têxtil a hipótese de retorno decrescente de escala não é rejeitada. Nos setores de produtos de matérias plásticas, de produtos alimentares e fumo a hipótese de retornos constantes de escala não é rejeitada. Nos demais setores industriais os retornos de escala são crescentes.

A variável valor da transformação industrial do estado não se mostra significativa nos seguintes setores: minerais não-metálicos, borracha, couros e peles, perfumaria, sabões e velas, têxtil e produtos alimentares. Nos demais setores o coeficiente dessa variável é significativo.

Quanto à hipótese de o coeficiente da variável que representa o quadrado do logaritmo da relação capital/mão-de-obra ser igual a zero, o que implicaria uma função do tipo Cobb-Douglas, ela não seria rejeitada para os seguintes

Tabela V.7

FUNÇÃO DE PRODUÇÃO CES PARA A INDÚSTRIA DE TRANSFORMAÇÃO: LUQUE (1977)

Setores	Constante	P_{ij}	$\frac{el_{ij}}{P_{ij}}$	$\left[\frac{el_{ij}}{P_{ij}}\right]^2$	VAT_i	R^2	Número de Obser-vações	Elasti-cidade de Escala
Minerais Não-Metálicos	1,4978	0,0546 (1,8692)	0,4056 (14,9612)	0,0160 (2,8369)	0,0103 (0,4987)	0,89	107	1,0546
Metalúrgica	—0,0728	0,2185 (4,1226)	0,1179 (1,1206)	—0,0176 (0,7388)	0,0166 (3,0345)	0,57	94	1,2185
Mecânica	—0,2605	0,1293 (3,4523)	0,3356 (2,7408)	—0,1738 (2,8605)	0,1645 (4,8841)	0,63	77	1,1293
Material Elétrico	0,6042	0,2458 (6,1631)	0,3037 (1,9638)	—0,2663 (2,0775)	0,0893 (2,2587)	0,71	53	1,2458
Material de Transporte	—0,0799	0,2105 (5,9862)	0,0674 (0,8202)	—0,0685 (1,6090)	0,1255 (4,1487)	0,73	72	1,2105
Madeira	—0,0223	0,2212 (7,7952)	0,0297 (0,6088)	0,0526 (2,2685)	0,1060 (4,9589)	0,65	91	1,2212
Mobiliário	0,1907	0,2719 (10,9903)	0,1972 (2,1241)	0,0610 (1,3151)	0,0802 (4,2003)	0,76	87	1,2719
Papel e Papelão	—0,7231	0,1575 (3,3035)	0,2454 (4,2935)	—0,0749 (3,5656)	0,1741 (4,2244)	0,75	47	1,1575
Borracha	1,7051	0,1254 (1,8891)	0,4040 (1,4285)	0,0277 (0,2398)	0,0096 (0,2355)	0,49	48	1,1254
Couro e Peles	0,9848	0,2236 (3,2648)	0,1290 (1,1853)	—0,0920 (2,2988)	0,0398 (0,0818)	0,71	38	1,2236
Química	1,0920	0,0804 (1,7538)	0,4140 (2,3446)	—0,0607 (1,6220)	0,1084 (3,0234)	0,38	76	1,0804
Produtos Farmacêuticos e Veterinários	—2,7945	0,2008 (1,9319)	—0,3135 (1,2953)	0,1455 (0,9673)	0,3628 (2,9016)	0,37	34	1,2008
Perfumaria, Sabões e Velas	1,5680	0,2724 (5,6852)	0,2633 (3,1465)	—0,0221 (0,4109)	0,0396 (0,8696)	0,71	45	1,2724
Produtos de Matérias Plásticas	—0,0945	0,0620 (0,7269)	0,3245 (0,7409)	0,0124 (0,0533)	0,1483 (2,2685)	0,40	36	1,0620
Têxtil	2,5659	—0,1594 (4,5191)	0,3095 (5,3680)	0,0566 (1,9011)	0,0209 (0,6124)	0,30	96	0,8406
Vestuário, Calçados e Artefatos de Tecidos	0,2678	0,1427 (6,6969)	0,0942 (0,7686)	—0,1108 (1,7276)	0,0990 (4,8188)	0,75	81	1,1427
Produtos Alimentares	2,1222	0,0378 (1,5331)	0,3512 (6,5174)	—0,0042 (0,1915)	0,0051 (0,2431)	0,49	141	1,0378
Bebidas	0,1804	0,2172 (6,3408)	0,3009 (5,4868)	—0,0582 (2,0017)	0,1048 (3,4781)	0,82	77	1,2172
Fumo	—10,1094	0,0916 (0,6409)	0,0692 (0,1740)	0,0784 (0,4730)	0,7851 (2,0492)	0,89	8	1,0916
Editorial e Gráfica	—0,1211	0,1885 (6,5592)	0,0976 (0,9675)	—0,0275 (0,2657)	0,1387 (6,1217)	0,71	90	1,1825
Química*	1,1837	0,1153 (3,0056)	0,4112 (7,6491)	—0,0626 (3,1223)	0,0917 (3,5749)	0,61	85	1,1153

FONTE: Luque (1977).
NOTAS: a) Os valores entre parênteses são as estatísticas t.
b) Para o significado dos demais símbolos, ver texto.

setores industriais: metalúrgica; material de transporte; mobiliário; borracha; química; produtos farmacêuticos e veterinários; perfumaria, sabões e velas; produtos de matérias plásticas; têxtil; vestuário, calçados e artefatos de tecidos; produtos alimentares; fumo; e editorial e gráfica. Portanto, entre 13 dos 21 setores industriais analisados a tecnologia pode ser descrita por uma função de produção Cobb-Douglas.

V.6 — Exercícios

1. Qual a restrição que o parâmetro ρ deve satisfazer para que a função

$$Q = \gamma\ [\delta K^{-\rho} + (1-\delta)\ L^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

seja uma função de produção?

2. Quais as restrições que os parâmetros α e β devem satisfazer para que a função

$$Q = \frac{X_1 - \alpha}{(X_2 - \beta)^2}$$

seja uma função de produção?

3. Mostre que as isoquantas da função de produção

$$Q = X_1 - 1 + [(X_1 - 1)^2 + 4\ (X_1 + X_2)]^{1/2}$$

são linhas retas não paralelas.

4. A função de produção $Q = Q\,(X_1, X_2)$ é homogênea do primeiro grau. Demonstre as seguintes proposições:

a) A matriz hessiana de $Q\,(X_1, X_2)$ não possui inversa;

b) A elasticidade de substituição entre os fatores é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial X_1}\ \dfrac{\partial Q}{\partial X_2}}{Q\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial X_1\,\partial X_2}}$$

c) Se a produtividade média de um fator crescer com o aumento da sua quantidade, a produtividade marginal do outro fator é negativa. Interprete este resultado a partir das propriedades que uma função de produção deve atender.

5. A produção de um bem pode ser feita a partir de dois processos de produção, de acordo com os seguintes coeficientes técnicos:

$$Q_I = \min\ \left\{\frac{X_1}{\alpha_1}, \frac{X_2}{\beta_1}\right\}$$

$$Q_{II} = \min\ \left\{\frac{X_1}{\alpha_2}, \frac{X_2}{\beta_2}\right\}$$

onde $\beta_1/\alpha_1 > \beta_2/\alpha_2$.

Trace o mapa de isoquantas da função de produção que combina os dois processos.

6. Qual o tipo de comportamento que se esperaria de uma empresa que minimizasse o custo de produção se, contrário à suposição adotada de quase-concavidade para a função de produção, as isoquantas tivessem sua concavidade voltada para a origem?

7. A elasticidade de escala de uma função de produção é definida pela seguinte expressão:

$$\varepsilon = \left. \frac{\partial \log Q\,(kX)}{\partial \log k} \right|_{k=1}$$

onde a notação indica que a derivada parcial deve ser avaliada para o valor de $k = 1$.

a) Prove que esta definição é equivalente à seguinte:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial X_i} \frac{X_i}{Q}$$

b) Para a função de produção

$$Q = [X_1^{-1/2} + X_2^{-3/2}]^{-1}$$

mostre que a elasticidade de escala é igual a 1 quando $X_2 = X_1^{1/3}$.

c) Mostre que para uma função de produção homotética a elasticidade de escala depende apenas do nível de produção.

8. Demonstre que a elasticidade de substituição entre os fatores da função de produção $Q = Q\,(X_1, X_2)$ pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$\sigma = \frac{(Q_1X_1 + Q_2X_2)\,Q_1Q_2}{X_1X_2\,(2Q_{12}Q_1Q_2 - Q_1^2Q_{22} - Q_2^2Q_{11})}$$

onde:

$$Q_i = \frac{\partial Q}{\partial X_i} \text{ e } Q_{ij} = \frac{\partial^2 Q}{\partial X_i\,\partial X_j}$$

a) Por que o valor de σ é sempre um número não negativo?

b) Verifique que a expressão anterior é equivalente à seguinte:

$$\sigma = \frac{(Q_1X_1 + Q_2X_2)\,F_{ij}}{X_1X_2F}$$

onde F é o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} O & Q_1 & Q_2 \\ Q_1 & Q_{11} & Q_{12} \\ Q_2 & Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

e F_{ij} é o cofator do elemento Q_{ij} do determinante F.

9. A elasticidade de substituição parcial entre os fatores i e j da função de produção $Q = Q(X_1, \ldots, X_n)$ é definida por:

$$\sigma_{ij} = \frac{(\Sigma\ Q_i X_i)\ F_{ij}}{X_i X_j F}$$

onde F é o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} O & Q_1 & \ldots & Q_n \\ Q_1 & Q_{11} & \ldots & Q_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_n & Q_{n1} & \ldots & Q_{nn} \end{bmatrix}$$

e Q_i e Q_{ij} têm o mesmo significado do exercício anterior, F_{ij} é o cofator de Q_{ij} do determinante F.

Mostre que a elasticidade de substituição parcial é constante para a seguinte função de produção:

$$Q = \left[\sum_{i=1}^{n} \delta_i X_i^{-\rho}\right]^{-1/\rho}$$

10. A função de produção homogênea do primeiro grau $Q = Q(K, L)$ é equivalente à seguinte função em termos *per capita*:

$$q = q\ (k)$$

onde $q = Q/L$ e $k = K/L$. Esta função é dita bem comportada se:

i) $\dfrac{\partial q}{\partial k} = q'\ (k) > 0$

ii) $\dfrac{\partial^2 q}{\partial k^2} = q''\ (k) < 0$

iii) $\lim\limits_{k \to 0} q'\ (k) = \infty$

iv) $\lim\limits_{k \to \infty} q'\ (k) = 0$

As funções de produção Cobb-Douglas e CES são bem comportadas?

11. Para a função de produção do exercício anterior, $q - q(k)$, mostre que:

a) As condições de equilíbrio em concorrência perfeita são dadas por:

$$\omega = q(k) - kq'(k)$$

$$r = q'(k)$$

onde ω e r são, respectivamente, o salário e a taxa de juros;

b) O salário e a relação capital/mão-de-obra variam no mesmo sentido;

c) A taxa de juros e a relação capital/mão-de-obra variam em sentidos contrários; e

d) A tangente em um ponto da fronteira de preços de fatores é igual à relação capital/mão-de-obra, isto é: $d\omega/dr = -k$.

12. Certo ou Errado. Justifique a sua resposta.

a) Para a função de produção $Q = Q(X_1, X_2)$ homogênea do grau 1, quando a produtividade marginal de um fator é decrescente a do outro também é;

b) A elasticidade de substituição entre fatores de uma função de produção homotética é sempre igual a 1; e

c) A função de produção

$$Q = \min \left\{ \frac{X_1}{\alpha_1}, \frac{X_2}{\beta} \right\}^{\delta}$$

apresenta retornos constantes de escala.

V.7 — Bibliografia

ARROW, K. J., CHENERY, H. B., MINHAS, B. S., e SOLOW, R. M. Capital-labor substitution and economic efficiency. *Review of Economics and Statistics*, 43:225-50, 1961.

BOX, G. E. P., e COX, D. R. An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, 26:211-32, 1964.

BROWN, M. *On the theory and measurement of technological change*. Cambridge, Cambridge University Press, 1966.

BROWN, M., org. *The theory and empirical analysis of production: studies in income and wealth*. Conference on Research in Income and Wealth. Vol. 31. New York, Columbia Univ. Press for National Bureau of Economic Research, 1967.

BROWN, M., e CANI, J. S. de. Technological change and the distribution of income. *International Economic Review,* 4:289-309, 1963.

CHRISTENSEN, L. R., JORGENSON, D. W., e LAU, L. J. Transcendental logaritmic production frontiers. *Review of Economics and Statistics,* 55:28-45, 1973.

COBB, C. W., e DOUGLAS, P. H. A theory of production. *American Economic Review,* 38:139-65, 1928.

FERGUSON, C. E. *The neoclassical theory of production and distribution.* Cambridge, Cambridge University Press, 1969.

FISHER, F. M. The existence of aggregate production functions. *Econometrica,* 37:533-77, 1969.

GOODMAN, David E., SENA, Júlio F. F., e ALBUQUERQUE, Roberto C. de. Os incentivos financeiros à industrialização do Nordeste e a escolha de tecnologias. *Pesquisa e Planejamento,* Rio de Janeiro, *1* (2) :329-66, dez. 1971.

GRILICHES, Z., e RINGSTAD, V. *Economies of scale and the form of the production function.* Amsterdam, North-Holland, 1971.

HICKS, J. R. *Value and capital.* 2.ª ed.; Oxford, Oxford Univ. Press, 1946.

JOHANSEN, L. *Production functions.* Amsterdam, North-Holland, 1972.

JOHNSTON, J. *Econometric methods.* Tóquio, McGraw-Hill, 1963.

KENDRICK, J. W., e SATO, R. Factor prices, productivity and growth. *American Economic Review,* 52:974-1.003, 1963.

LEONTIEF, W. An international comparison of factor costs and factor use (review article) . *American Economic Review,* 54:335-45, 1964.

LU, Y. C., e FLETCHER, L. B. A generalization for the CES production function. *Review of Economics and Statistics,* 50:449-552, 1968.

LUCAS, R. E. Labor capital substitution in U.S. manufacturing. In: HARBERGER, A. C., e BAILEY, M. J., orgs. *The taxation of income from capital.* Washington, D. C., Brookings Institution, 1969.

LUQUE, C. A. Elasticidade de escala e taxa efetiva de incentivos à exportação. *Pesquisa e Planejamento Econômico,* Rio de Janeiro, *7* (2) :405-22, ago. 1977.

NADIRI, M. I. Some approaches to the theory and measurement of total factor productivity: a survey. *Journal of Economic Literature,* 8:1.137-77, 1970.

NELSON, R. R. The CES production function and economic growth projections. *Review of Economics and Statistics,* 47:326-8, 1965.

Capítulo VI

CUSTO DE PRODUÇÃO

Este capítulo é dedicado ao estudo do custo de produção da empresa. A primeira seção formaliza o problema da escolha da tecnologia para uma firma que tem como objetivo minimizar o custo para um determinado volume de produção. A segunda seção trata das equações de demanda de fatores e estabelece as proposições que potencialmente podem ser refutadas a partir de verificação empírica do comportamento das empresas. A terceira seção cuida da função de custo, deriva as condições que tal função deve satisfazer, introduz as equações de custo marginal e de custo médio, mostra a dualidade que existe entre as funções de produção e de custo, e discute o problema de curto $\times$ longo prazo. A quarta seção apresenta dois exemplos de funções de custo, a Cobb-Douglas e a Translog, que ilustram o material desenvolvido na seção anterior. A última seção contém uma resenha com os principais resultados de dois trabalhos empíricos acerca da demanda de mão-de-obra desenvolvidos no Brasil.

VI.1 — Minimização do Custo

O custo total para uma empresa que produz um produto a partir de dois fatores de produção é dado por:

$$C = r_1 x_1 + r_2 x_2 \tag{1.1}$$

onde C é o custo total, x_1 e x_2 as quantidades dos fatores de produção e r_1 e r_2 os preços dos fatores. Admita-se que os preços r_1 e r_2 são fixos e não dependem das quantidades de fatores compradas pela empresa.

A quantidade máxima de produto que se pode obter com as quantidades de fatores x_1 e x_2 é expressa através da função de produção:

$$q = q\ (x_1,\ x_2) \tag{1.2}$$

Esta função, por hipótese, possui derivadas contínuas de primeira e de segunda ordens.

Imagine-se que a empresa deseja produzir uma determinada quantidade q_0 de produto. Obviamente, ela pode produzir a quantidade q_0 de diferentes maneiras, de acordo com a função de produção (1.2). Do ponto de vista econômico, selecionará uma combinação de fatores, caracterizando uma determinada técnica de produção, de tal modo que o custo total de produção seja mínimo. Analiticamente, o problema consiste em minimizar (1.1) de tal modo que a quantidade produzida seja igual a q_0, isto é:

minimizar

$$C = r_1 x_1 + r_2 x_2,$$

com a condição

$$q(x_1, x_2) = q_0$$

Este problema pode ser resolvido com o auxílio da expressão de Lagrange:

$$L = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \mu\,[q_0 - q(x_1, x_2)] \tag{1.3}$$

onde μ é o multiplicador de Lagrange.

VI.1.1 — Condições de Primeira Ordem

As condições de primeira ordem para que L seja um mínimo é que suas derivadas parciais com respeito a x_1 e x_2 e μ sejam nulas, ou seja:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = r_1 - \mu \frac{\partial q}{\partial x_1} = 0 \tag{1.4.a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = r_2 - \mu \frac{\partial q}{\partial x_2} = 0 \tag{1.4.b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = q_0 - q(x_1, x_2) = 0 \tag{1.4.c}$$

onde $\partial q/\partial x_1$ e $\partial q/\partial x_2$ são as produtividades marginais dos fatores 1 e 2, respectivamente. Alternativamente, as equações (1.4.a) e (1.4.b) podem ser combinadas do seguinte modo:

$$\frac{r_1}{\partial q/\partial x_1} = \frac{r_2}{\partial q/\partial x_2} = \mu \tag{1.5}$$

A expressão (1.5) afirma que a condição necessária para que o custo da empresa seja mínimo é que os preços dos fatores sejam proporcionais às suas respectivas produtividades marginais.

VI.1.2 — Condição de Segunda Ordem

A condição de segunda ordem para que a função (1.3) seja um mínimo é que a matriz das derivadas segundas da função de produção (1.2),

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

seja negativa semidefinida para todo vetor $z' = [z_1, z_2]$ que satisfaça a equação:

$$z_1 \frac{\partial q}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial q}{\partial x_2} = 0 \tag{1.7}$$

Observe-se que para $z_1 = r_2$ e $z_2 = - r_1$ a condição (1.7) é satisfeita, pois:

$$r_2 \frac{\partial q}{\partial x_1} - r_1 \frac{\partial q}{\partial x_2} = 0$$

segundo a equação (1.5). Segue-se, portanto, que para estes valores de z_1 e z_2 a matriz (1.6) deve ser negativa semidefinida para que a expressão de Lagrange L seja mínima. Logo:

$$[r_2 \;\vdots\; - r_1] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 \\ \cdots \\ - r_1 \end{bmatrix} \leqslant 0$$

Alternativamente, esta desigualdade é equivalente à seguinte condição:

$$r_2^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} - 2\, r_1 r_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} + r_1^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \leqslant 0 \tag{1.8}$$

É importante observar que a minimização dos custos, segundo (1.8), não implica produtividades marginais decrescentes nem tampouco é incompatível com rendimentos crescentes de escala. Cabe ainda ressaltar que a desigualdade (1.8) não é apenas um refinamento matemático, mas uma condição essencial para se estabelecer os teoremas da estática comparativa relativos à demanda de fatores, como veremos a seguir.

VI.2 — A Demanda de Fatores de Produção

A solução da equação (1.5), conjuntamente com a função de produção $q_0 = q\,(x_1, x_2)$, determina as quantidades de fatores x_1 e x_2 a serem utilizadas na produção de q_0. De uma maneira genérica podemos dizer que as quantidades demandadas de fatores são função dos preços de fatores e da quantidade q_0 a ser produzida, isto é: *

$$x_1 = x_1(r_1, r_2, q)$$
$$x_2 = x_2(r_1, r_2, q) \tag{2.1}$$

onde, por simplicidade, escrevemos q ao invés de q_0. Com o objetivo de estabelecer os sinais das derivadas parciais das funções de demanda (2.1) com respeito aos preços de fatores r_1 e r_2, e a quantidade de produto q, tomamos as diferenciais das equações (1.2) e (1.5):

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2} dx_2 = dq \tag{2.2}$$

$$d\left(r_1 \frac{\partial q}{\partial x_2}\right) = d\left(r_2 \frac{\partial q}{\partial x_1}\right) \tag{2.3}$$

Efetuando-se a diferencial indicada em (2.3) resulta:

$$\left(r_1 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} - r_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2}\right) dx_1 + \left(r_1 \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} - r_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2}\right) dx_2 =$$
$$= -\frac{\partial q}{\partial x_2} dr_1 + \frac{\partial q}{\partial x_1} dr_2 \tag{2.4}$$

As equações (2.2) e (2.4) formam um sistema de duas equações a duas incógnitas, quais sejam as diferenciais dx_1 e dx_2. Este sistema pode ser escrito em notação matricial da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} r_1 \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} - r_2 \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & r_1 \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} - r_2 \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial q}{\partial x_1} & \dfrac{\partial q}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial q}{\partial x_2} dr_1 + \dfrac{\partial q}{\partial x_1} dr_2 \\ dq \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Resolvendo-se o sistema linear acima obtém-se as seguintes expressões para as diferenciais dx_1 e dx_2:

$$dx_1 = -\frac{\left(\dfrac{\partial q}{\partial x_2}\right)^2}{|A|} dr_1 + \frac{\left(\dfrac{\partial q}{\partial x_1}\right)\left(\dfrac{\partial q}{\partial x_2}\right)}{|A|} dr_2$$
$$- \frac{\left(r_1 \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} - r_2 \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2}\right)}{|A|} dq \tag{2.6}$$

* Admitindo-se que as condições do teorema da função implícita sejam satisfeitas, isto é, que a matriz H seja inversível.

$$dx_2 = \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x_2}\right)}{|A|} dr_1 - \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial x_1}\right)^2}{|A|} dr_2$$

$$+ \frac{\left(r_1 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} - r_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2}\right)}{|A|} dq \qquad (2.7)$$

onde $|A|$ é dado por:

$$|A| = - \frac{\frac{\partial q}{\partial x_1}}{r_1} \left[r_2^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} - 2 r_1 r_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} + r_1^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \right] \qquad (2.8)$$

Observe-se que $|A|$ é positivo, pois a expressão entre colchetes na equação acima é negativa devido à desigualdade (1.8). Segue-se, portanto, que:

$$\frac{\partial x_1}{\partial r_1} = - \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial x_2}\right)^2}{|A|} < 0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial r_2} = - \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial x_1}\right)^2}{|A|} < 0 \qquad (2.9)$$

Com base nas equações acima podemos, então, estabelecer a seguinte proposição:

Proposição I. A quantidade demandada de um fator de produção aumenta (diminui) quando o preço do fator diminui (aumenta).

É fácil concluir-se a partir da comparação das equações (2.6) e (2.7) que:

$$\frac{\partial x_1}{\partial r_2} = \frac{\partial x_2}{\partial r_1} = \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x_2}\right)}{|A|} \qquad (2.10)$$

A expressão anterior nos leva a estabelecer a segunda proposição da equação de demanda de fatores de produção:

Proposição II. Para um mesmo acréscimo de preços de fatores de produção, a variação na quantidade demandada de um fator, quando o preço do segundo fator varia é igual à variação da quantidade demandada deste fator quando o preço do primeiro fator varia.

No caso particular de um processo de produção com dois fatores, o sinal das derivadas parciais em (2.10) é positivo, pois o sinal de $|A|$ é positivo. Contudo, no caso mais geral, isto é, quando existem mais de dois fatores, a proposição II continua sendo válida, enquanto o sinal das derivadas parciais do tipo (2.10) passa a ser ambíguo, ou seja, tanto pode ser negativo como positivo.

Proposição III. As equações de demanda de fatores de produção são homogêneas do grau zero em relação aos preços dos fatores de produção.

Com efeito, das expressões (2.9) e (2.10), temos que:

$$r_1 \frac{\partial x_1}{\partial r_1} + r_2 \frac{\partial x_1}{\partial r_2} = \frac{-r_1 \left[\frac{\partial q}{\partial x_2}\right]^2 + r_2 \frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial q}{\partial x_2}}{|A|}$$

$$= \frac{-r_1 \left[\frac{\partial q}{\partial x_2}\right]^2 + r_1 \frac{\partial q}{\partial x_2} \frac{\partial q}{\partial x_2}}{|A|} = 0$$

Observe-se que no último membro da expressão acima levamos em conta a condição de equilíbrio (1.5). Segue-se, então, pela aplicação do teorema inverso ao de Euler para funções homogêneas que a equação de demanda pelo fator x_1 é homogênea do grau zero em relação aos preços dos fatores, r_1 e r_2. O significado desta proposição é que na quantidade demandada de fatores só importam os preços relativos. De maneira análoga, se poderia demonstrar que a equação da demanda por x_2 é homogênea do grau zero em relação aos preços r_1 e r_2.

As Proposições I, II e III podem ser resumidas em uma única proposição:

Proposição: A matriz

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_1}{\partial r_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} \end{bmatrix}$$

é negativa semidefinida.

Com efeito, das expressões (2.9) e (2.10), podemos escrever:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial r_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial q}{\partial x_2}\right)^2 & \frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial q}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial q}{\partial x_2} & \left(\frac{\partial q}{\partial x_1}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

A forma quadrática $z' S z$, onde $z' = [z_1, z_2]$, é igual a:

$$z'S\, z = \frac{1}{|A|}\left[z_1^2 \left(\frac{\partial q}{\partial x_2}\right)^2 - 2\, z_1 z_2 \frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial q}{\partial x_2} + z_2^2 \left(\frac{\partial q}{\partial x_1}\right)^2\right]$$

$$= -\frac{1}{|A|}\left(z_1 \frac{\partial q}{\partial x_2} - z_2 \frac{\partial q}{\partial x_1}\right)^2 \tag{2.12}$$

Como $|A| > 0$, de acordo com (2.8), segue-se que $z'S\, z \leqslant 0$. Quando $z_1 = r_1$ e $z_2 = r_2$, a forma quadrática acima se anula em virtude da condição de equilíbrio (1.5).

Quanto às derivadas parciais das quantidades dos fatores, com respeito à quantidade de produto, tem-se de (2.6) e (2.7) que:

$$\frac{\partial x_1}{\partial q} = - \frac{r_1 \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} - r_2 \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2}}{|A|} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial q} = \frac{r_1 \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} - r_2 \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1^2}}{|A|} \tag{2.14}$$

Os sinais de $\partial x_1/\partial q$ e $\partial x_2/\partial q$ tanto podem ser negativos como positivos. Em geral, quando a produtividade marginal de um fator aumenta com o acréscimo na quantidade do outro fator:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} > 0$$

e quando as produtividades dos fatores são decrescentes,

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} < 0 \text{ e } \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} < 0$$

a quantidade demandada do fator varia no mesmo sentido da quantidade produzida, isto é:

$$\frac{\partial x_1}{\partial q} > 0 \text{ e } \frac{\partial x_2}{\partial q} > 0 \tag{2.15}$$

VI.3 — Função de Custo

Substituindo-se as quantidades demandadas de fatores dadas nas equações (2.1) na expressão de custo (1.1) obtém-se a função de custo, que é função dos preços dos fatores e da quantidade de produto. Em símbolos, tem-se:

$$C = C\,(q,\, r_1,\, r_2) \tag{3.1}$$

onde C é o custo mínimo para produzir a quantidade q, quando os preços dos fatores são r_1 e r_2.

VI.3.1 — Propriedades da Função de Custo

Em virtude de as equações de demanda dos fatores de produção serem homogêneas do grau zero em relação aos preços dos fatores, segue-se que a equação de custo (3.1) é homogênea do grau um em relação aos preços dos fatores. Logo, podemos enunciar:

Proposição I. A função de custo é homogênea do primeiro grau em relação aos preços dos fatores de produção.

As derivadas parciais de C com respeito aos preços dos fatores são iguais a:

$$\frac{\partial C}{\partial r_1} = x_1 > 0 \tag{3.2.a}$$

$$\frac{\partial C}{\partial r_2} = x_2 > 0 \tag{3.2.b}$$

ou seja, o custo total varia no mesmo sentido dos preços dos fatores de produção. Observe-se, também, que as expressões contidas em (3.2) afirmam que as equações de demanda de fatores (2.1) podem ser obtidas derivando-se o custo C com respeito a r_1 e a r_2. Para deduzir-se estes resultados basta que se derive $C = r_1 x_1 + r_2 x_2$ com respeito a r_1 e a r_2, respectivamente. No caso do primeiro fator, tem-se:

$$\frac{\partial C}{\partial r_1} = r_1 \frac{\partial x_1}{\partial r_1} + x_1 + r_2 \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \tag{3.3}$$

Pela Proposição II da segunda seção sabemos que $\partial x_2/\partial r_1 = \partial x_1/\partial r_2$. Logo, (3.3) transforma-se em:

$$\frac{\partial C}{\partial r_1} = x_1 + \left(r_1 \frac{\partial x_1}{\partial r_1} + r_2 \frac{\partial x_1}{\partial r_2} \right) \tag{3.4}$$

Como, pela Proposição III da Seção VI.2, o termo entre parênteses na equação acima é igual a zero, o resultado (3.2) é obtido. O que foi visto neste parágrafo pode ser resumido na seguinte proposição:

Proposição II. O custo total de produção varia no mesmo sentido dos preços dos fatores de produção e a equação de demanda por cada fator pode ser obtida derivando-se parcialmente a função de custo em relação ao preço em questão.

A derivada segunda do custo C com respeito ao preço do fator é negativa. Com efeito, derivando-se (3.4) com respeito a r_1 e a r_2, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r_1^2} = \frac{\partial x_1}{\partial r_1} < 0 \tag{3.5.a}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r_2^2} = \frac{\partial x_2}{\partial r_2} < 0 \tag{3.5.b}$$

onde os sinais de desigualdade são devidos à Proposição I da segunda seção deste capítulo. Quanto à derivada cruzada, conclui-se, com base na Proposição II da segunda seção, que:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r_2 \, \partial r_1} = \frac{\partial^2 C}{\partial r_1 \, \partial r_2} = \frac{\partial x_1}{\partial r_2} = \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \tag{3.6}$$

Estes resultados dão margem à seguinte proposição:

Proposição III. A função de custo é côncava nos preços dos fatores de produção. Isto é, a matriz

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 C}{\partial r_1^2} & \dfrac{\partial^2 C}{\partial r_1 \partial r_2} \\ \dfrac{\partial^2 C}{\partial r_2 \partial r_1} & \dfrac{\partial^2 C}{\partial r_2^2} \end{bmatrix}$$

é negativa semidefinida.

A verificação desta proposição é bastante simples, pois de (3.5) e (3.6), temos que:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 C}{\partial r_1^2} & \dfrac{\partial^2 C}{\partial r_1 \partial r_2} \\ \dfrac{\partial^2 C}{\partial r_2 \partial r_1} & \dfrac{\partial^2 C}{\partial r_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial x_1}{\partial r_1} & -\dfrac{\partial x_1}{\partial r_2} \\ -\dfrac{\partial x_2}{\partial r_1} & -\dfrac{\partial x_2}{\partial r_2} \end{bmatrix}$$

Como se demonstrou em (2.12), a matriz que aparece no lado direito da igualdade anterior é negativa semidefinida. Logo, a função de custo é côncava nos preços dos fatores de produção.

No tocante às derivadas cruzadas da função de custo, com relação ao preço de cada fator e à quantidade do produto, segue-se das equações (3.2.a) e (3.2.b) que:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q \, \partial r_1} = \frac{\partial}{\partial q}\left(-\frac{\partial C}{\partial r_1}\right) = -\frac{\partial x_1}{\partial q} \gtreqless 0 \qquad (3.7)$$

e

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q \, \partial r_2} = \frac{\partial}{\partial q}\left(-\frac{\partial C}{\partial r_2}\right) = -\frac{\partial x_2}{\partial q} \gtreqless 0 \qquad (3.8)$$

Os sinais destas expressões decorrem do fato de que a resposta da quantidade demandada de um fator quando o nível de produção varia é, *a priori*, ambígua. Em geral, quando a função de produção satisfaz às condições necessárias para que as desigualdades em (2.15) se verifiquem, os sinais de (3.7) e (3.8) são positivos.

Proposição IV. A função de custo é não-decrescente em relação ao nível de produção, isto é:

$$\frac{\partial C}{\partial q} \geqslant 0$$

Esta proposição será demonstrada logo adiante em conexão com a interpretação do multiplicador de Lagrange μ.

VI.3.2 — Custo Marginal

A derivada parcial do custo $C(q, r_1, r_2)$ com respeito à quantidade q é, por definição, o custo marginal de produção,

$$Cmg = \frac{\partial C}{\partial q} = \frac{\partial C}{\partial q}(q, r_1, r_2)$$

Esta função de custo marginal é homogênea do grau um nos preços dos fatores de produção. Isto significa dizer que se os preços de todos os fatores de produção aumentarem numa determinada proporção o custo marginal aumentará na mesma proporção. Esta propriedade decorre de a função de custo $C(q, r_1, r_2)$ ser homogênea do primeiro grau nos preços dos fatores.

Os sinais das derivadas parciais do custo marginal com respeito aos preços dos fatores de produção, em geral, são ambíguos. Com efeito, de acordo com os resultados contidos nas expressões (3.7) e (3.8), temos que:

$$\frac{\partial Cmg}{\partial r_i} = \frac{\partial^2 C}{\partial q\, \partial r_i} \gtreqless 0$$

Todavia, quando as produtividades marginais dos fatores forem decrescentes e a produtividade marginal de um aumentar com o acréscimo na quantidade do outro, a derivada parcial do custo marginal em relação ao preço do fator será positiva, ou seja, o custo marginal de produção e o preço do fator variarão no mesmo sentido.

VI.3.3 — Interpretação do Multiplicador de Lagrange μ

O multiplicador de Lagrange μ do problema de minimização do custo $C = r_1x_1 + r_2x_2$, como a condição de que a produção atinja o nível $q = q(x_1x_2)$, pode ser interpretado como o custo marginal de produção. Com a finalidade de provar esta proposição, começamos por derivar o custo $C = r_1x_1 + r_2x_2$ em relação ao nível de produção q:

$$\frac{\partial C}{\partial q} = r_1 \frac{\partial x_1}{\partial q} + r_2 \frac{\partial x_2}{\partial q}$$

Como, em equilíbrio, as produtividades marginais dos fatores de produção se tornam proporcionais aos seus preços, de acordo com a equação (1.5), repetida aqui por conveniência,

$$r_i = \mu \frac{\partial q}{\partial x_i}, \quad i = 1,2$$

a expressão anterior do custo marginal se transforma em:

$$\frac{\partial C}{\partial q} = \mu \left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial q} + \frac{\partial q}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial q} \right)$$

A restrição técnica, segundo a qual o nível de produção tem de satisfazer a função de produção $q = q(x_1,x_2)$, implica que:

$$\frac{\partial q}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial q} + \frac{\partial q}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial q} = 1$$

Logo, o multiplicador de Lagrange μ é igual ao custo marginal de produção:

$$\frac{\partial C}{\partial q} = \mu \geqslant 0$$

A desigualdade resulta de condição de equilíbrio (1.5).

VI.3.4 — Custo Marginal e Rendimentos de Escala

O custo marginal μ é igual à razão entre o preço do fator e a respectiva produtividade marginal, isto é:

$$\mu = \frac{\partial C}{\partial q} = \frac{r_1}{\partial q/\partial x_1} = \frac{r_2}{\partial q/\partial x_2} \tag{3.9}$$

Para saber-se como varia o custo marginal quando o nível de produção varia, temos que estabelecer o sinal da seguinte derivada:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{r_2}{\partial q/\partial x_2}\right) \tag{3.10}$$

Depois de algumas operações algébricas, obtém-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q^2} = -\frac{r_2}{\left(\frac{\partial q}{\partial x_2}\right)}\frac{1}{|A|}\left[\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2}\right)\right] \tag{3.11}$$

para a taxa de variação do custo marginal em relação à quantidade produzida.

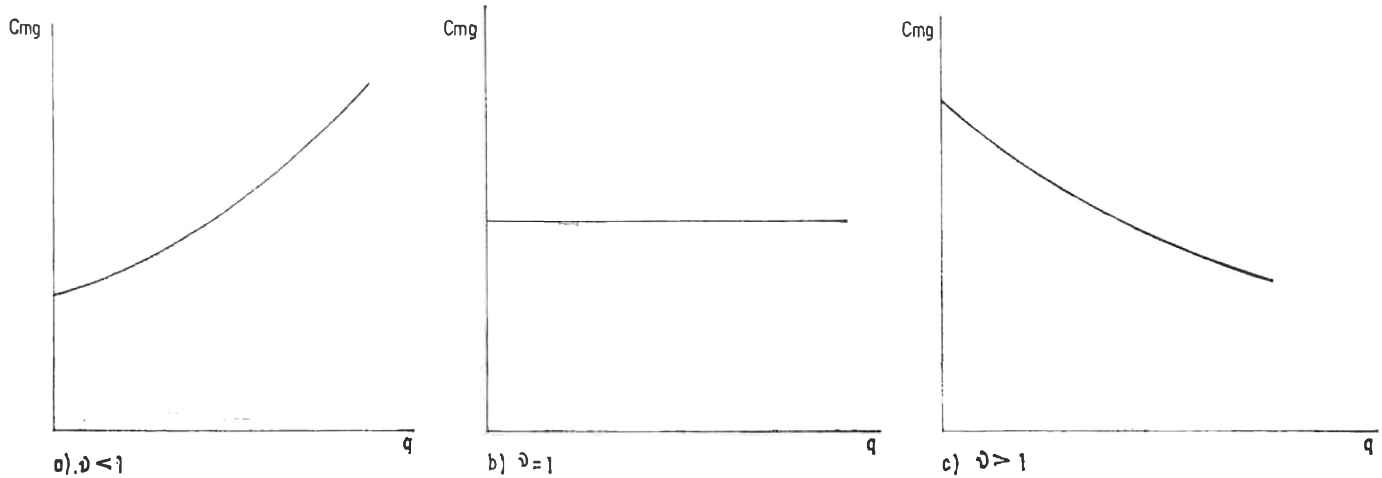
É fácil concluir-se de (3.11) que o sentido da variação do custo marginal depende do sinal da expressão entre colchetes na equação (3.11), isto é:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q^2} \gtreqless 0 \text{ quando } \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 \lesseqgtr \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2}\right) \tag{3.12}$$

Mais adiante, no Capítulo VII, mostra-se que para funções de produção homogênea a seguinte expressão é válida:

$$[x_1 \;\vdots\; x_2]\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 q}{\partial x_1\,\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_2 \end{bmatrix} = \nu(\nu - 1)\,q \tag{3.13}$$

Figura VI.1
CURVAS DE CUSTO MARGINAL



onde ν é o retorno de escala da função de produção. Quando $\nu < 1$, a forma quadrática (3.13) é negativa; para $\nu = 1$ a forma quadrática é zero, enquanto para $\nu > 1$ a forma quadrática é positiva. O sinal da expressão entre colchetes na equação (3.11) está associado ao sinal do determinante da matriz em (3.13). Daí conclui-se que:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q^2} \gtreqless 0 \text{ quando } \nu \lesseqgtr 1$$

Em palavras, as desigualdades acima afirmam que: i) o custo marginal aumenta com o nível de produção para retornos decrescentes de escala; ii) o custo marginal é invariante com o nível de produção quando os retornos de escala são constantes; e iii) o custo marginal diminui quando os retornos de escala são crescentes. As Figuras VI.1a, VI.1b e VI.1c ilustram os três casos, respectivamente.

VI.3.5 — Custo Médio, Marginal e Rendimentos de Escala

O custo médio é definido pela razão entre o custo total e o nível de produção, isto é:

$$Cm = \frac{C}{q} = r_1 \frac{x_1}{q} + r_2 \frac{x_2}{q} = \frac{C(q, r_1, r_2)}{q} \tag{3.14}$$

onde Cm indica o custo médio. Substituindo-se o valor de r_2 dado pela condição de equilíbrio,

$$r_2 = r_1 \frac{\partial q / \partial x_2}{\partial q / \partial x_1}$$

em (3.14), resulta:

$$Cm = \frac{C}{q} = \frac{r_1}{\partial q / \partial x_1} \left[\frac{x_1 \dfrac{\partial q}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial q}{\partial x_2}}{q} \right] \tag{3.15}$$

Lembrando-se que a razão entre o preço do fator e a produtividade marginal é igual ao custo marginal, e levando-se em conta o teorema de Euler para funções homogêneas

$$x_1 \frac{\partial q}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial q}{\partial x_2} = \nu\, q,$$

a equação de custo médio (3.15) reduz-se a:

$$Cm = \nu\; Cmg \tag{3.16}$$

onde $\mu = Cmg$. Portanto: i) quando $\nu > 1$ o custo médio é maior que o custo marginal; ii) quando $\nu = 1$ o custo médio é igual ao custo marginal; e iii) quando $\nu < 1$ o custo marginal é maior que o custo médio.

VI.3.6 — Custo para Função de Produção Homotética

Como já vimos no capítulo anterior, uma função de produção é homotética quando resulta de uma transformação monotônica crescente de uma função homogênea do primeiro grau. Admita-se, então, que a função

$$q = q(x_1 \, x_2) = F \, [f(x_1, \, x_2)]$$

seja homotética, o que significa dizer que $f(x_1, x_2)$ é homogênea do primeiro grau e que $F' = \partial F / \partial f$ é positiva. Demonstraremos a seguir que neste caso o custo de produção pode ser escrito como um produto de duas funções: uma que envolve apenas o nível de produção e outra que depende somente dos preços dos fatores de produção.

Inicialmente substituindo-se a condição de equilíbrio (1.5) na equação de custo (1.1) e levando-se em conta que

$$\frac{\partial q}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial f} \, \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} C &= \mu \frac{\partial F}{\partial f} \, \frac{\partial f}{\partial x_1} \, x_1 + \mu \frac{\partial F}{\partial f} \, \frac{\partial f}{\partial x_2} \, x_2 \\ &= \mu \frac{\partial F}{\partial f} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \, x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \, x_2 \right) \end{aligned}$$

A expressão que aparece entre parênteses nesta equação, de acordo com o teorema de Euler, é igual a f, pois $f(x_1, x_2)$ é homogênea do primeiro grau. Logo, o custo de produção é igual a:

$$C = \mu \, \frac{\partial F}{\partial f} \cdot f \qquad (3.17)$$

Como F é uma função monotônica crescente, $F' > 0$, segue-se que a função inversa de F. pode ser escrita do seguinte modo:

$$f = F^{-1}(q)$$

Conclui-se, então, que o produto de $\partial F / \partial f$ por f depende apenas do nível de produção, ou seja:

$$\frac{\partial F}{\partial f} \cdot f = \psi(q)$$

Portanto, o custo de produção C em (3.17) é igual ao produto do custo marginal, $\mu = \partial C / \partial q$, pela função $\psi(q)$. Isto é:

$$C = \frac{\partial C}{\partial q} \psi(q)$$

Como o diferencial do custo é igual ao custo marginal vezes a diferencial da quantidade, segue-se da igualdade anterior que:

$$\frac{dC}{C} = \frac{dq}{\psi(q)}$$

A integração desta equação resulta em:

$$\log C = \log g(q) + \log c(r)$$

onde o termo $\log c(r)$ é a constante de integração, que depende dos preços dos fatores de produção. A equação acima afirma que no caso de função de produção homotética a função de custo é igual ao produto das duas funções: $g(q)$ e $c(r)$. Isto é:

$$C = g(q)\, c(r) \tag{3.18}$$

Não é difícil provar que se q for homogênea do primeiro grau o custo total de produção será proporcional ao nível de produção de acordo com:

$$C = q\, c(r)$$

VI.3.7 — Dualidade entre Custo e Função de Produção

É importante observar que existe uma dualidade entre a função de custo (3.1) e a função de produção (1.2). Como vimos, associada a uma dada função de produção, via condições de equilíbrio (1.5), é obtida uma curva de custo. Inversamente, uma função de produção corresponde a uma curva de custo, desde que apresente as propriedades a que esta curva deva satisfazer. Com efeito, conhecida a função de custo $C(q, r_1, r_2)$ as equações de demanda de fatores são obtidas tomando-se as suas derivadas com respeito aos preços r_1 e r_2, respectivamente, de acordo com a expressão (3.2), ou seja:

$$\frac{\partial C}{\partial r_1} = x_1 = x_1(q, r_1, r_2)$$

e

$$\frac{\partial C}{\partial r_2} = x_2 = x_2(q, r_1, r_2)$$

Estas equações de demanda de fatores são homogêneas do grau zero em relação aos preços dos fatores. Assim, podemos escrevê-las do seguinte modo:

$$x_1 = x_1 \left(q, \frac{r_1}{r_2}, 1 \right) = X_1 \ (q,r)$$

e

$$x_2 = x_2 \left(q, \frac{r_1}{r_2}, 1 \right) = X_2 \ (q,r)$$

onde r é igual à relação de preços r_1/r_2. Desde que as equações acima satisfaçam às condições do teorema da função implícita, elas podem ser resolvidas para q e r como funções das quantidades dos fatores x_1 e x_2. Logo:

$$q = q \ (x_1, x_2) \tag{3.19}$$

e

$$r = r \ (x_1, x_2) \tag{3.20}$$

A função (3.19) nada mais é do que a função de produção (1.2). Quanto à interpretação da equação (3.20), esta representa o caminho de expansão da empresa, ou seja, a combinação de fatores de produção que está associada a um dado preço relativo dos fatores.

A dualidade existente entre as funções de produção e de custo implica que, do ponto de vista econométrico, é indiferente estimar-se uma ou outra equação, pois, de acordo com a dualidade, os parâmetros de uma podem ser obtidos facilmente a partir dos parâmetros da outra função.

VI.3.8 — A Fronteira de Preços de Fatores

A fronteira de preços de fatores é definida como a relação entre os preços dos fatores de produção que corresponde a valores fixos do custo total e do nível de produção. Assim, para a função de custo $C\ (q, r_1, r_2)$ e para os valores $C = C_0$ e $q = q_0$, a fronteira de preços de fatores será dada pela seguinte função implícita:

$$C \ (q_0, r_1, r_2) = C_0$$

Alternativamente, expressando-se r_2 em função de r_1, e dos parâmetros C_0 e q_0, tem-se:

$$r_2 = r_2 \ (r_1, q_0, C_0)$$

A Figura VI.2 mostra esta fronteira de preços de fatores. O preço r_2 está medido no eixo das ordenadas enquanto o eixo das abscissas mede o valor de r_1. A curva é negativamente inclinada, pois diferenciando-se $C(q_0, r_1, r_2) = C_0$, obtém-se para o coeficiente de dr_1 a seguinte derivada parcial:

$$\left.\frac{\partial r_2}{\partial r_1}\right|_{C_0,\, q_0} = - \frac{\partial C / \partial r_1}{\partial C / \partial r_2} = - \frac{x_1}{x_2} < 0$$

No último sinal de igualdade nesta expressão levou-se em conta a Proposição II da função de custo.

Observe-se, ainda, que o coeficiente angular da tangente a um ponto da fronteira de preços *FF* é igual à proporção de fatores utilizada e que o coeficiente angular que liga este ponto à origem dos eixos é igual à relação de preços de fatores. Assim a uma isoquanta em ângulo reto corresponde uma fronteira de preços de fatores linear: a isoquanta *AA* corresponde à fronteira *BB* na Figura VI.3; uma isoquanta linear está associada a uma fronteira de preços de fatores em ângulo reto, como indicado pelas letras *BB* na Figura VI.3.

Figura VI.2

FRONTEIRA DE PREÇOS DE FATORES

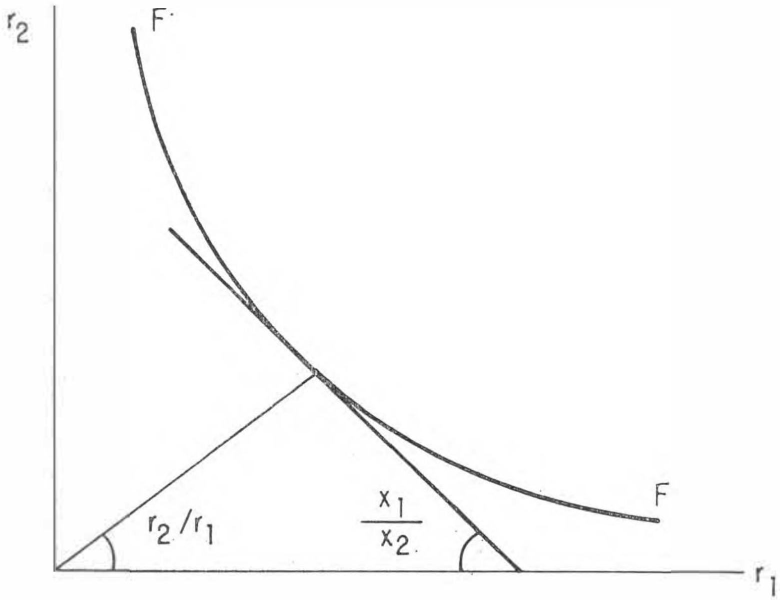
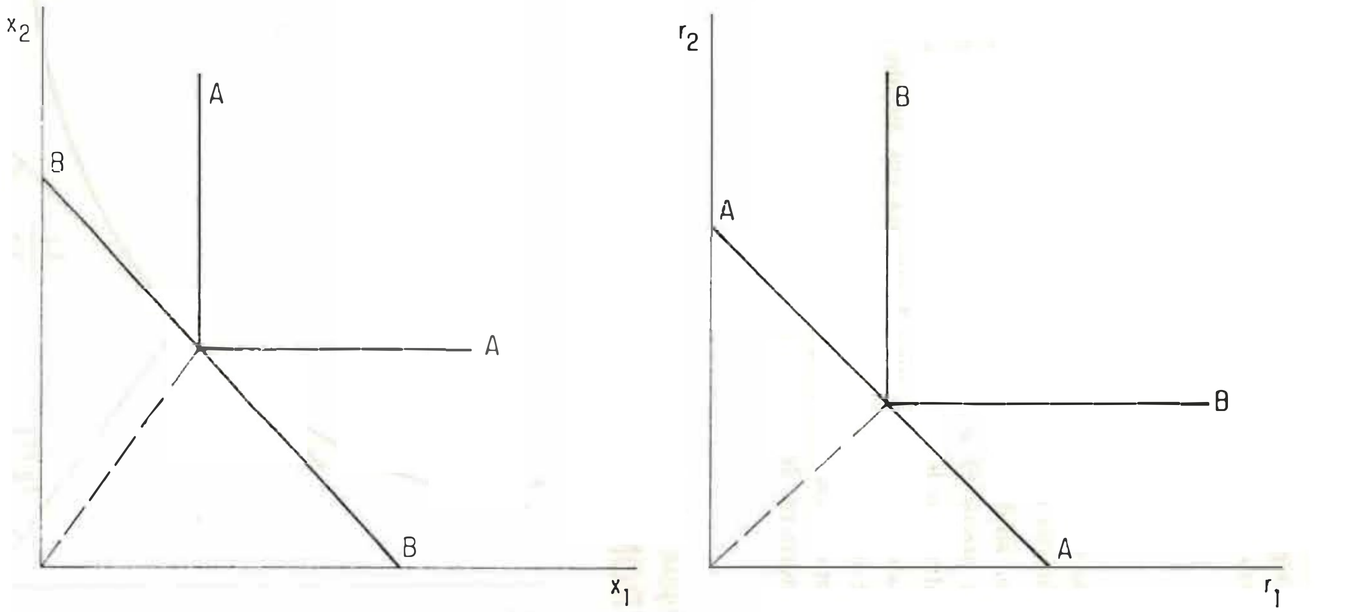


Figura VI.3

ISOQUANTAS E FRONTEIRAS DE PREÇOS



VI.3.9 — Problema Dual da Minimização do Custo

Imagine que uma empresa dispõe de um montante de recursos igual a C_0 e que seu programa de produção deva ser preparado tendo em vista esta limitação orçamentária. Suponha-se, também, que o objetivo da empresa consista em maximizar o nível de produção de tal modo que o custo total da produção seja igual a C_0, isto é, maximizar

$$q = q\,(x_1,\ x_2)$$

com a condição

$$r_1\ x_1 + r_2\ x_2 = C_0$$

Este problema de maximização condicionada pode ser resolvido com o auxílio da equação de Lagrange:

$$L = q\ (x_1,\ x_2) + \lambda\ [C_0 - r_1\ x_1 - r_2\ x_2]$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange.

As condições de primeira e segunda ordens para este problema são idênticas às respectivas condições do problema de minimização condicionada do custo de produção. Ademais, se o nível de produção q for a solução do problema acima para um dado nível de custo C_0, este será o custo mínimo quando a restrição da produção for igual a q_0. Conseqüentemente, são duais os problemas de minimização condicionada ao custo e de maximização condicionada da produção.

VI.3.10 — Curto Prazo × Longo Prazo

A função de custo estudada até aqui pressupõe que o empresário possa escolher livremente as quantidades de todos os fatores de produção, o que significa dizer que todos sejam variáveis. Esta hipótese consubstancia o que os economistas denominam, no jargão técnico, de *longo prazo.* Observe-se que longo prazo não quer dizer que o intervalo de tempo seja necessariamente longo, mas sim que é um prazo suficiente para que o empresário possa ajustar as quantidades de todos os fatores.

Quando o empresário se defronta com uma situação em que são fixos alguns fatores de produção, a situação é denominada de *curto prazo.* Neste caso, o custo total será composto de duas partes, uma fixa e outra variável. Para ilustrar este tipo de situação, suponhamos que a quantidade q seja produzida a partir de três fatores, x_1, x_2 e x_3, de acordo com a função de produção $q = q\ (x_1,\ x_2,\ x_3)$, e que a quantidade do primeiro fator seja fixa e igual a x_1^0. O custo total será dado por:

$$C = r_1 x_1^0 + r_2\ x_2 + r_3\ x_3$$

onde o custo fixo C_F corresponde à parcela $r_1\ x_1^0$, enquanto o custo variável é igual a $r_2\ x_2 + r_3\ x_3$.

O problema de escolha das quantidades de fatores, x_2 e x_3, de tal modo a minimizar o custo C para se produzir um dado nível de produção q_0 é formalmente equivalente ao problema de longo prazo. Todavia, algumas diferenças importantes nos resultados obtidos a partir deste processo de minimização devem ser salientadas. As quantidades demandadas de fatores dependem agora não-somente dos preços dos fatores r_2 e r_3 e do nível de produção q_0, mas também da quantidade do primeiro fator x_1^0. Por sua vez, o custo variável é função também destas variáveis: preços dos fatores, r_2 e r_3, nível de produção q_0 e quantidade do fator fixo x_1^0. As propriedades da função de custo variável e das equações de demanda de fatores podem ser facilmente deduzidas e por isto deixamos de apresentá-las aqui.

VI.4 — Exemplos de Função de Custo

Nesta seção apresentaremos dois exemplos de função de custo. O primeiro corresponde ao caso de uma função de custo deduzida a partir de uma função de produção Cobb-Douglas. O segundo exemplo trata da função de custo *translog* que não é obtida a partir de uma função de produção específica mas que satisfaz as propriedades a que uma função de custo deve satisfazer. A função de custo translog pode corresponder a diferentes tipos de tecnologias e inclusive contém, conforme se mostrará mais adiante, como caso particular, a função de custo Cobb-Douglas.

VI.4.1 — Função de Custo Cobb-Douglas

Um exemplo bastante interessante de função de custo é obtido quando se admite que a função de produção (1.2) é do tipo Cobb-Douglas

$$q = \gamma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \qquad (4.1)$$

onde x_1, x_2 e x_3 são as quantidades dos serviços dos fatores e os parâmetros α_1, α_2 e α_3 medem as elasticidades do produto com respeito a cada fator. Observe que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha$ é o retorno de escala da função de produção.

As condições de equilíbrio (1.5), para a empresa que minimiza o custo, são então dadas por:

$$\frac{r_1}{\alpha_1 \dfrac{q}{x_1}} = \frac{r_2}{\alpha_2 \dfrac{q}{x_2}} = \frac{r_3}{\alpha_3 \dfrac{q}{x_3}} \qquad (4.2)$$

As equações de demanda de fatores são obtidas resolvendo-se o sistema de três equações formado por (4.1) e (4.2). O resultado é:

$$\log x_1 = \frac{1}{\alpha} \log \frac{\alpha_1^{\alpha_2 + \alpha_3}}{\gamma\, \alpha_2^{\alpha_2}\, \alpha_3^{\alpha_3}} + \frac{1}{\alpha} \log q - \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha} \log r_1$$

$$+ \frac{\alpha_2}{\alpha} \log r_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha} \log r_3 \tag{4.3}$$

$$\log x_2 = \frac{1}{\alpha} \log \frac{\alpha_2^{\alpha_1 + \alpha_3}}{\gamma\, \alpha_1^{\alpha_1}\, \alpha_3^{\alpha_3}} + \frac{1}{\alpha} \log q + \frac{\alpha_1}{\alpha} \log r_1$$

$$- \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha} \log r_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha} \log r_3 \tag{4.4}$$

$$\log x_3 = \frac{1}{\alpha} \log \frac{\alpha_3^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\alpha_1^{\alpha_1}\, \alpha_2^{\alpha_2}} + \frac{1}{\alpha} \log q + \frac{\alpha_1}{\alpha} \log r_1$$

$$+ \frac{\alpha_2}{\alpha} \log r_2 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha} \log r_3 \tag{4.5}$$

É fácil verificar que estas equações de demanda de fatores satisfazem às três proposições listadas anteriormente.

Substituindo-se os valores de x_1, x_2 e x_3 dados pelas equações (4.3), (4.4) e (4.5) na equação de custo (1.1), chega-se, então, à função de custo:

$$\log C = \log \frac{\alpha}{(\gamma\, \alpha_1^{\alpha_1}\, \alpha_2^{\alpha_2}\, \alpha_3^{\alpha_3})^{1/\alpha}} + \frac{1}{\alpha} \log q + \frac{\alpha_1}{\alpha} \log r_1$$

$$+ \frac{\alpha_2}{\alpha} \log r_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha} \log r_3 \tag{4.6}$$

A função de custo (4.6) foi usada por Nerlove (1963) para estudar os retornos de escala na produção de eletricidade, com base em dados de corte transversal. Nerlove neste estudo partiu das seguintes hipóteses:

a) a quantidade de energia produzida não é controlada pela empresa produtora, pois esta é obrigada a suprir a energia demandada pelo usuário;

b) a tarifa de energia elétrica é fixada por um órgão público controlador dos serviços de energia elétrica;

c) os três fatores de produção considerados, mão-de-obra (x_1), capital (x_2) e combustível (x_3), têm seus preços dados em mercados competitivos onde as empresas não exercem influência.

As duas primeiras hipóteses implicam que o faturamento da empresa pq é uma variável não controlada pela empresa, ou seja, exógena. Segue-se, então, que o modelo de minimização de custos é apropriado para tal indústria. Ademais, acrescentando-se um termo aleatório, ε_i, à equação (4.6):

$$\log C_i = \text{constante} + \frac{1}{\alpha} \log q_i + \frac{\alpha_1}{\alpha} \log r_{1i} + \frac{\alpha_2}{\alpha} \log r_{2i}$$

$$+ \frac{\alpha_3}{\alpha} \log r_{3i} + \varepsilon_i \qquad (4.7)$$

onde o índice i indica a empresa a que os dados se referem, as hipóteses a), b) e c) fazem com que o método de mínimos quadrados ordinários seja apropriado à estimação dos parâmetros de (4.7). Observe-se que o retorno de escala α pode ser estimado como o inverso do coeficiente do logaritmo da produção. A equação (4.7) pode ser estimada também usando-se a expressão:

$$\log \frac{C_i}{r_{3i}} = \text{constante} + \frac{1}{\alpha} \log q_i + \frac{\alpha_1}{\alpha} \log \frac{r_{1i}}{r_{3i}}$$

$$+ \frac{\alpha_2}{\alpha} \log \frac{r_{2i}}{r_{3i}} + \varepsilon_i \qquad (4.8)$$

que é equivalente à equação (4.7).

No caso de o preço de um fator ser praticamente o mesmo para todas as empresas, como é bem plausível para o capital, teríamos $r_{3i} = r_3$. A função de custo passaria então a ser dada por:

$$\log C_i = \text{constante} + \frac{1}{\alpha} \log q_i + \frac{\alpha_1}{\alpha} \log r_{1i}$$

$$+ \frac{\alpha_2}{\alpha} \log r_{2i} + \varepsilon_i \qquad (4.9)$$

onde a nova constante é igual à antiga mais o termo $(\alpha_3/\alpha) \log r_3$.

Uma crítica facilmente levantada ao modelo de custos acima é quanto à forma da função de produção, pois esta admite uma elasticidade de substituição unitária entre os fatores. Um segundo ponto diz respeito ao fato de a elasticidade da escala ser independente do tamanho da empresa. Ainda outro ponto crítico do modelo é a admissão implícita de que todas as empresas são igualmente eficientes, pois possuem a mesma função de produção.

VI.4.2 — A Função de Custo Translog

A função de custo translog (*transcendental logaritmica*) constitui-se em uma aproximação local de segunda ordem para qualquer função de custo e é dada pela seguinte expressão:

$$\log C = \log \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log r_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \log r_i \log r_j$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \delta_i \log q \log r_i + \beta_1 \log q + \frac{1}{2} \beta_2 (\log q)^2 \qquad (4.10)$$

onde r_i é o custo unitário do i-ésimo fator de produção, q é o nível de produção, os logaritmos estão na base natural e os demais símbolos são parâmetros, cujas propriedades serão vistas a seguir.

A função de custo (4.10) pode ser escrita de forma mais compacta utilizando-se a seguinte notação:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \ \log r = \begin{bmatrix} \log r_1 \\ \log r_2 \\ \vdots \\ \log r_n \end{bmatrix}, \ \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix}$$

Usando-se esta notação, a função de custo translog passa a ser escrita como:

$$\log C = \log \alpha_0 + \alpha' (\log r) + \frac{1}{2} (\log r)' \Gamma (\log r)$$

$$+ \delta' (\log r) \log q + \beta_1 \log q + \frac{1}{2} \beta_2 (\log q)^2 \qquad (4.11)$$

VI.4.2.1 – Homogeneidade da Função de Custo

Como se mostrou anteriormente a função de custo é homogênea do primeiro grau nos preços dos fatores. Logo, a função translog deve satisfazer a esta condição e para isto requer que seus parâmetros obedeçam às seguintes restrições:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \quad \text{ou} \quad \alpha' \iota = 1 \qquad (4.12.a)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} = 0, \ i = 1, \ldots, n, \ \text{ou} \ \Gamma \iota = 0 \qquad (4.12.b)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 0, \quad \text{ou} \quad \delta' \iota = 0 \qquad (4.12.c)$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \quad \text{ou} \quad \Gamma = \Gamma' \qquad (4.12.d)$$

onde ι é o vetor unidade: $\iota' = [1, 1, \ldots, 1]$. Para verificar-se que as condições acima asseguram a homogeneidade do primeiro grau da função de custo, basta substituir-se, em (4.10), os preços r_i por $\lambda\, r_i$, onde λ é um fator de proporcionalldade, e chegar-se-à então à conclusão de que o custo de produção será igual a λ vezes o custo de produção original.

VI.4.2.2 — Equações de Demanda de Fatores

A equação de demanda por cada fator de produção é obtida a partir da função de custo, igualando-se a quantidade do fator com a derivada parcial do custo com relação ao preço do fator. Como da função de custo (4.10) temos que:

$$\frac{\partial \log C}{\partial \log r_i} = \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \log r_j + \delta_i \log q$$

e do fato que:

$$\frac{\partial \log C}{\partial \log r_i} = \frac{\partial C}{\partial r_i} \frac{r_i}{C} = \frac{x_i r_i}{C}$$

segue-se, então, que a equação de demanda pelo i-ésimo fator é dada por:

$$\frac{r_i x_i}{C} = \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \log r_j + \delta_i \log q, \; i = 1, \ldots, n \qquad (4.13)$$

Observe-se que no lado esquerdo da equação acima tem-se a proporção do i-ésimo fator no custo total de produção, enquanto o lado direito é uma combinação linear nos parâmetros do modelo. Assim, desde que as condições do modelo linear sejam satisfeitas, pode-se estimar os parâmetros de (4.13) através do método de mínimos quadrados ordinários.

VI.4.2.3 — Concavidade da Função de Custo

A terceira proposição da Seção VI.3 afirma que a matriz

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial r_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 C}{\partial r_1 \partial r_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 C}{\partial r_n \partial r_1} & \cdots & \frac{\partial^2 C}{\partial r_n^2} \end{bmatrix} \qquad (4.14)$$

da função de custo deve ser negativa semidefinida. Com a finalidade de computar esta matriz para o caso da função de custo translog, iremos escrever a equação (4.10) na seguinte forma:

$$C = e^{f(\log r_1, \ldots, \log r_n, \log q)} = e^f$$

onde:

$$f = \log \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log r_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \log r_i \log r_j$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \delta_i \log q \log r_i + \beta_1 \log q + \frac{1}{2} \beta_2 (\log q)^2$$

É fácil verificar-se que para $i \neq j$,

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r_i \, \partial r_j} = \frac{C}{r_i r_j} \left[s_i \, s_j + \frac{1}{2} \, \gamma_{ij} \right]$$

e para $i = j$, tem-se

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r_i^2} = \frac{C}{r_i^2} \left[\frac{1}{2} \, \gamma_{ii} + s_i \, (s_i - 1) \right]$$

onde $s_i = (r_i x_i) / C$ e levamos em conta o fato de que

$$\frac{\partial f}{\partial \log r_i} = \frac{r_i \, x_i}{C} = s_i$$

A matriz H pode, então, ser escrita do seguinte modo:

$$\frac{H}{C} = D_r^{-1} \left[ss' - D_s + \frac{1}{2} \, \Gamma \right] D_r^{-1} \tag{4.15}$$

onde $s' = [s_1, \ldots, s_n]$ e as matrizes D_r e D_s são expressas por:

$$D_r = \begin{bmatrix} r_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & r_2 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & r_n \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} s_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & s_2 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & s_n \end{bmatrix}$$

Para que a matriz H seja negativa semidefinida, segue-se, de acordo com (4.15), que a matriz

$$ss' - D_s + \frac{1}{2} \, \Gamma \tag{4.16}$$

deve ser negativa semidefinida. Conseqüentemente, esta propriedade acarreta restrições adicionais aos parâmetros da matriz Γ que devem ser levadas em conta em trabalhos empíricos com a função de custo translog.

VI.4.2.4 — Casos Particulares da Função de Custo Translog

Quando a função de produção é homotética, provamos que a função de custo pode ser separada em duas componentes multiplicativas, uma envolvendo somente os preços dos fatores e a outra contendo apenas a quantidade produzida, isto é:

$$C = c\,(r) \; g\,(q) \tag{4.17}$$

Conseqüentemente, $\log C = \log c(r) + \log g(q)$. Assim, se todos os coeficientes δ_i forem iguais a zero a função de custo translog estará associada a uma função de produção homotética.

A função de produção homogênea é um caso particular da função de produção homotética e a função $g(q)$ que aparece em (4.17) deve ter agora o seguinte formato:

$$g(q) = q^{1/\nu}$$

Portanto, no caso da função de produção homogênea o coeficiente β_2 deve ser igual a zero. Assim se $\delta_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$ e $\beta_2 = 0$ a função de custo translog estará associada a uma função de produção homogênea.

Quando $\delta_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\beta_2 = 0$ e todos os coeficientes γ_{ij} forem iguais a zero, $\alpha_i > 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$, a função de custo translog reduz-se ao caso da função de custo Cobb-Douglas. Portanto, a função de custo translog (4.10) contém a função de custo Cobb-Douglas (4.6) como um caso particular, permitindo, então, que se teste a especificação Cobb-Douglas ao invés de colocá-la como hipótese mantida, não testada, na especificação da função de custo.

VI.5 — Estudos de Demanda de Mão-de-Obra

O objetivo desta seção é apresentar dois exemplos de trabalhos empíricos que tratam da demanda de mão-de-obra no setor industrial da economia brasileira. O primeiro exemplo é baseado em estudo pioneiro desenvolvido por Bacha e associados, enquanto o segundo é de autoria de Macedo.

VI.5.1 — Bacha *et al.* (1972)

A demanda de mão-de-obra L, de acordo com a especificação de Bacha e associados, é função do custo unitário real ω de mão-de-obra, do nível de produção Q e do índice de fatores tecno-estruturais T:

$$L_{it} = f(\omega_{it}, Q_{it}, T_{it}) \tag{5.1}$$

onde o índice i refere-se à indústria e o índice t ao período de tempo da observação. Os fatores tecno-estruturais segundo Bacha *et al.* (p. 167) são fatores "ligados à intensidade e viés poupador de mão-de-obra do *spectrum* de novas tecnologias; à composição etária do equipamento instalado; às alterações na importância relativa dos subsetores mais intensivos em capital". Entretanto, devido à inexistência de dados para construir tal índice, Bacha *et al.* omitiram a variável T, depois de tentarem sem sucesso usar o tempo t como sua *proxy*, e implementaram empiricamente, para a equação (5.1), a seguinte forma funcional:

$$\log L_{it} = \beta_{0i} + \beta_{1i} \log \omega_{it} + \beta_{2i} \log Q_{it} + \xi_{it} \tag{5.2}$$

onde ξ_{it} é a perturbação aleatória. O sinal do coeficiente β_{1i} deve ser negativo, pois salário e demanda de mão-de-obra variam em sentidos opostos. Bacha e associados acreditam que a elasticidade de demanda em relação ao produto na especificação (5.1) seja igual à unidade. Como na equação anterior se omitiu a variável T_{it}, esses autores sugerem que o coeficiente β_{2i} estaria captando em parte o efeito de T_{it} sobre o nível de emprego, de tal modo que β_{2i} seria positivo, mas inferior à unidade. Cabem aqui dois comentários. Em primeiro lugar, não há nada que indique *a priori* que o coeficiente β_{2i} deve ser igual à unidade, a não ser que se admita que os retornos de escala sejam constantes. A segunda observação diz respeito ao viés causado pela omissão de variável T: do ponto de vista teórico, nada impede que a esperança matemática do estimador de β_{2i} seja negativa.

Face à evidência empírica de que em alguns setores da indústria brasileira os retornos de escala são crescentes e de que grande parte dos mercados de produtos industriais tem uma estrutura oligopolista, não faz o mínimo sentido aplicar-se a teoria da empresa em concorrência perfeita, que será vista no próximo capítulo, para a especificação da equação de demanda de mão-de-obra. De um modo geral, a especificação da equação de demanda de um fator de produção, e em particular da mão-de-obra, no setor industrial deve ser baseada na hipótese de minimização do custo de produção da empresa. Este objetivo será certamente perseguido por uma empresa que opere num mercado de estrutura oligopolista.

A teoria apresentada na segunda seção deste capítulo sugere que para uma empresa que minimize o custo, a demanda de mão-de-obra é função do seu preço, do custo dos serviços do capital e do nível de produção. Além disso, poder-se-ia acrescentar uma variável, como o tempo, para captar o efeito do progresso tecnológico sobre a demanda de mão-de-obra.

Em conseqüência do que foi dito, a equação (5.2) omite o custo dos serviços de capital como uma variável explicativa de demanda de mão-de-obra. Na hipótese de que o custo do capital se tenha mantido constante durante o período analisado ou quando essa variável for ortogonal às variáveis salário e nível de produção, sua omissão na equação de demanda de mão-de-obra não causará tendenciosidade nas estimativas dos parâmetros da referida equação. Porém, se este não for o caso, as estimativas dos parâmetros β_1 e β_2 serão viesadas.

Antes de prosseguir, cabe lembrar que se poderia argumentar que a equação de demanda de mão-de-obra (5.2) não contém qualquer erro de especificação. Com efeito, admita-se uma empresa em mercado de concorrência perfeita, cuja função de produção seja do tipo *CES*, e que tenha como objetivo maximizar o lucro. A condição de primeira ordem para que este objetivo seja atingido é que a produtividade marginal da mão-de-obra seja igual ao custo real deste fator. Esta condição quando aplicada à função *CES* resulta na seguinte equação:

$$\log L = c - \frac{1}{1+\rho} \log \omega + \frac{v+\rho}{v(1+\rho)} \log Q \tag{5.3}$$

onde c é uma constante.

Comparando-se as equações (5.2) e (5.3), verifica-se facilmente que o coeficiente β_1 seria igual à elasticidade de substituição $\sigma = 1/1 + \rho$ e que o coeficiente β_2 dependeria de σ e do parâmetro ν que mede os retornos de escala. Observe que se os retornos de escala forem constantes, $\nu = 1$ o coeficiente do logaritmo de Q será igual a um independente do valor de elasticidade de substituição.

A equação (5.3) não contém o custo dos serviços do capital como uma variável explicativa. Todavia, esta interpretação da equação (5.2) seria bastante restritiva, pois, *a priori*, se estaria admitindo que em nenhum setor industrial os retornos de escala seriam crescentes, hipótese inclusive contrária à evidência empírica dos estudos de função de produção.

No trabalho de Bacha *et al.* as variáveis Q, L e ω são definidas do seguinte modo: Q é o valor real da produção efetiva observada, ω é o salário real médio de todos os empregados, ambos a preços de 1949, e L é o total do pessoal ocupado. Os dados utilizados cobrem o período de 1949 a 1969, com exceção dos anos de 1950 a 1953, 1960 e 1961.

As estimativas dos parâmetros β_1 e β_2 para diversos setores da indústria brasileira e para a indústria de transformação como um todo são apresentados na Tabela VI.1.

Tabela VI.1

DEMANDA DE MÃO-DE-OBRA: BACHA E OUTROS (1972)

Setores	Q	W	Constante	R^2	DW
Madeira	0,331 (0,160)	—0,309 (0,197)	6,33	0,27	1,24
Mobiliário	0,723 (0,095)	—0,754 (0,150)	0,28	0,85	1,06
Couros e Peles	0,149 (0,190)	— 0,015 (0,127)	8,72	0,19	1,45
Têxtil	0,427 (0,155)	—0,532 (0,146)	4,81	0,56	0,81
Vestuário	0,528 (0,188)	—0,402 (0,244)	4,06	0,56	1,23
Produtos Alimentares	0,533 (0,130)	—0,439 (0,119)	3,69	0,59	1,40
Bebidas	0,387 (0,148)	—0,172 (0,134)	6,23	0,52	1,65
Fumo	0,124 (0,288)	—0,014 (0,373)	8,61	0,08	0,55
Editorial e Gráfica	0,545 (0,131)	—0,232 (0,179)	4,96	0,89	2,24
Diversos	0,824 (0,246)	— 0,772 (0,349)	—1,09	0,59	1,19
Minerais Não-Metálicos	0,264 (0,101)	—0,207 (0,152)	8,03	0,62	1,23
Metalurgia	0,796 (0,051)	—0,400 (0,100)	1,74	0,98	1,93
Papel e Papelão	0,660 (0,104)	—0,257 (0,159)	3,33	0,94	1,97
Borracha	0,838 (0,085)	—0,501 (0,143)	—0,15	0,93	2,88
Química	1,006 (0,099)	—0,809 (0,229)	—3,47	0,96	2,07
Mecânica	0,873 (0,044)	—0,715 (0,106)	—0,95	0,99	1,83
Material Elétrico e de Comunicação	0,809 (0,063)	—0,213 (0,176)	2,32	0,98	1,46
Material de Transportes	0,817 (0,057)	—0,285 (0,167)	1,81	0,99	2,07
Indústria de Transformação	0,557 (0,095)	— 0,285 (0,133)	5,69	0,95	1,49

FONTE: Bacha e outros (1972).
NOTA: Os valores entre parênteses são os erros-padrão das estimativas.

As estimativas dos coeficientes da variável salário têm o sinal correto em todos os setores. Todavia, apenas nos setores de mobiliário, têxtil, vestuário, metalurgia, borracha, química e mecânica as estimativas de β_1 são significativas. Para a indústria de transformação como um todo o coeficiente β_1 é negativo e significativo, evidenciando que a demanda de mão-de-obra responde ao estímulo de preço no sentido previsto pela teoria econômica.

No tocante às estimativas dos coeficientes do nível de produção, elas são inferiores à unidade, com exceção do setor químico em que β_2 é aproximadamente igual a 1. Os únicos coeficientes que não são significativos são os dos setores de fumo e de couros e peles.

VI.5.2 — Macedo (1974)

O trabalho de Macedo constitui-se, basicamente, em uma crítica aos métodos tradicionalmente usados no estudo de demanda de mão-de-obra. Sua pesquisa ilustra a importância que se deve atribuir a um exame cuidadoso dos problemas envolvidos na interpretação dos resultados de qualquer trabalho empírico.

Macedo aponta três problemas que suscitam uma boa dose de dúvida sobre o significado das estimativas dos parâmetros da equação de demanda de mão-de-obra. O primeiro diz respeito à própria identificação da equação de demanda no contexto de um modelo de mercado de mão-de-obra. O segundo é causado pela forma funcional do tipo log-linear da equação de demanda aliado à maneira pela qual a variável salário é definida. O terceiro problema prende-se à existência de correlação negativa entre emprego e salário médio, não porque a quantidade demandada reage em sentido contrário ao preço da mão-de-obra, mas em virtude da maior rotatividade de mão-de-obra para os trabalhadores nas faixas de salários mais baixos. A seguir examinaremos individualmente cada um destes problemas.

VI.5.2.1 — Identificação da Equação de Demanda

O problema de identificação é, em geral, negligenciado nos estudos econométricos e aqueles que tratam da demanda de mão-de-obra não fogem à regra. Para ilustrar a sua importância, consideremos o seguinte modelo. Admita-se que a quantidade demandada de mão-de-obra L^d seja função do salário real e do nível de produção:

$$\log L^d = \beta_0 + \beta_1 \log \omega + \beta_2 \log Q + v \qquad (5.4)$$

onde v é a perturbação aleatória. Suponha-se que a quantidade ofertada de mão-de-obra seja função do salário real de acordo com a equação:

$$\log L^s = \alpha_0 + \alpha_1 \log \omega + u \qquad (5.4)$$

onde u é a perturbação aleatória. Admita-se, também, que o mercado esteja em equilíbrio e que, portanto, a quantidade demandada seja igual à ofertada:

$$L^d = L^s = L \qquad (5.5)$$

Esta condição de equilíbrio quando substituída nas equações (5.3) e (5.4) resulta no modelo de mercado de mão-de-obra com duas equações, duas variáveis endógenas, L e ω, e duas variáveis exógenas, o nível de produção Q e a variável que corresponde ao termo constante, isto é:

$$\log L = \beta_0 + \beta_1 \log \omega + \beta_2 \log Q + v$$

$$\log L = \alpha_0 + \alpha_1 \log \omega + u \tag{5.6}$$

A condição de ordem para a identificação de uma equação estrutural é que o número de variáveis exógenas no modelo seja maior ou igual ao número de parâmetros a serem estimados. Esta condição não é obviamente satisfeita no caso da equação de demanda, pois existem duas variáveis exógenas no modelo enquanto o número de parâmetros na equação é igual a 3. Contudo, o mesmo não ocorre com a equação de oferta, pois agora o número de parâmetros é igual ao número de variáveis exógenas. Assim, em princípio, é possível identificar os parâmetros α_0 e α_1.

Conclui-se, então, que para este modelo é impossível estimar-se os parâmetros da equação de demanda, pois eles não são identificados. Vale ressaltar que nada impede que se faça, por exemplo, uma regressão do logaritmo de quantidade de mão-de-obra contra os logaritmos do salário e do nível de produção. As estimativas assim obtidas são completamente destituídas de significado no contexto do modelo (5.6), pois não tem sentido estimar-se parâmetros que não sejam identificados.

A identificação da equação de oferta no modelo (5.6) prende-se, basicamente, ao fato de que, no curto prazo, a curva de demanda se desloca devido a flutuações do nível de produção, enquanto a curva de oferta não apresenta qualquer movimento sistemático. Deste modo, os deslocamentos da curva de demanda geram um conjunto de observações dispersas em torno da curva de oferta, possibilitando, então, a estimação da elasticidade-preço da oferta.

É fácil concluir-se, então, que sem uma especificação completa do modelo no qual a equação de demanda de mão-de-obra seja parte integrante não há garantia de que as estimativas que se obtenha representem os parâmetros estruturais da referida equação.

VI.5.2.2 — Forma Funcional e Salário Médio

A equação de demanda de mão-de-obra (5.2) pode ser escrita do seguinte modo:

$$L = \beta_0' \, \omega^{\beta_1} \, Q^{\beta_2} \tag{5.7}$$

onde omitimos os índices e a perturbação aleatória. Com esta especificação, de acordo com a contribuição de Macedo, é praticamente impossível a obtenção de uma estimativa para o coeficiente β_1 que não seja negativa em virtude da sua forma funcional e da definição do salário como sendo igual ao salário médio. O argumento parte da identidade:

$$L \equiv A \, \frac{W}{Q} \, Q \, \omega^{-1} \tag{5.8}$$

onde $A = 1$ e ω é igual ao salário total W dividido pelo número de empregados L, $\omega = W/L$. Considere, agora, a equação (5.7) como uma especificação incorreta do "modelo" dado pela expressão (5.8), onde a variável que representa a participação da mão-de-obra no produto, W/Q, foi omitida da regressão log-linear. Com o objetivo de simplificar a álgebra e fixar atenção apenas no coeficiente da variável salário, suponha-se que β_2 seja igual a 1. Assim, a esperança matemática do estimador do parâmetro β_1 será igual a:

$$E\,\hat{\beta}_1 = -1 + b \tag{5.9}$$

onde b é o coeficiente do logaritmo do salário médio na regressão:

$$\log \frac{W}{Q} = b_0 + b \log \omega + \text{erro} \tag{5.10}$$

A esperança matemática de $\hat{\beta}_1$ será positiva quando o coeficiente b for maior que 1. Mas, para que isto ocorresse, seria necessário que para cada 1% de aumento de salário a participação de mão-de-obra no produto aumentasse em mais de 1%, o que levaria inclusive a mão-de-obra, com o aumento do salário, a terminar absorvendo todo o produto. Obviamente, tal fenômeno parece muito pouco provável e empiricamente irrelevante.

Quando o parâmetro b for igual a zero, a esperança matemática de $\hat{\beta}_1$ será igual a —1. Logo, mesmo que a participação da mão-de-obra no produto varie aleatoriamente, a estimativa do parâmetro β_1 tende a ser negativa.

Com o objetivo de verificar empiricamente se o coeficiente da mão-de-obra é negativo devido à forma funcional, Macedo estimou para o setor industrial brasileiro, com dados do Censo de 1970, os parâmetros da equação (5.2). A Tabela VI.2 mostra os resultados de tais estimativas. Todos os coeficientes da variável salário são negativos quando a relação funcional é do tipo log-linear. Todavia, quando ao invés desta forma usa-se uma equação linear, a conclusão é que em 12 dos 21 setores industriais analisados o coeficiente do salário passa a ter sinal positivo. Esta evidência indica a precaução que se deve tomar em interpretar o coeficiente do salário como sendo igual à elasticidade-preço da demanda de mão-de-obra.

A questão que se coloca após encontrar-se este tipo de evidência é se o mesmo fenômeno ocorreria quando as estimativas dos parâmetros da equação de demanda de mão-de-obra fossem feitas com base em dados de série temporal, como no trabalho de Bacha *et al.* A Tabela VI.3 mostra tais estimativas, obtidas por Macedo, usando os mesmos dados de trabalho de Bacha *et al.*, quando a forma funcional é do tipo linear. A conclusão a que se chega examinando-se esta tabela é que os sinais dos coeficientes da variável mão-de-obra permanecem negativos, com exceção dos setores de metalurgia e bebidas em que as estimativas não são significativas. Logo, para dados de série temporal a evidência desta amostra é que existe, *ceteris paribus*, uma correlação negativa entre salário médio e emprego, independente da forma funcional usada. A questão que se põe agora é saber se esta correlação negativa prende-se ao fato de que a demanda de mão-de-obra responde negativamente ao acréscimo do salário, de acordo com a previsão da teoria da demanda, ou se existe outro tipo de fenômeno que também pode gerar este tipo de evidência. Segundo Macedo, como veremos a seguir, existe uma boa probabilidade de que esta última hipótese se verifique.

Tabela VI.2

DEMANDA DE MÃO-DE-OBRA: MACEDO (1975) – DADOS DE *CROSS SECTION* ENTRE ESTADOS – 1969

Indústria	Log-Linear				Linear			
	Constante	w	Q	R^2	Constante	w	Q	R^2
Total	—2,088 (5,155)	—0,805 (4,657)	1,002 (25,044)	0,99	1819,0 (0,204)	5599,0 (1,317)	0,038 (42,50)	0,99
Não-Metálicos	—0,884 (1,182)	—0,924 (2,706)	0,910 (10,910)	0,34	351,6 (0,561)	343,7 (0,985)	0,051 (41,79)	0,99
Metalúrgica	—0,875 (3,106)	—0,037 (0,130)	0,836 (19,000)	0,98	850,7 (0,761)	—142,7 (0,352)	0,045 (42,40)	0,99
Mecânica	—1,522 (4,868)	—1,070 (2,248)	0,999 (13,915)	0,98	1121,0 (1,161)	—354,1 (0,935)	0,038 (29,51)	0,99
Equipamentos Elétricos	—1,502 (6,249)	—0,396 (1,457)	0,901 (24,869)	0,99	533,3 (2,047)	—133,4 (1,429)	0,039 (20,67)	0,99
Material de Transporte	—0,7125 (2,101)	—0,582 (1,918)	0,867 (13,017)	0,98	74,63 (0,172)	78,5 (0,485)	0,033 (63,11)	0,99
Madeira	—0,685 (1,821)	—0,548 (1,438)	0,879 (15,950)	0,96	1288,0 (1,972)	—577,7 (1,608)	0,075 (27,13)	0,98
Mobiliário	—0,908 (7,729)	—0,241 (1,911)	0,886 (46,510)	0,99	—966,3 (2,133)	856,1 (3,278)	0,061 (25,13)	0,99
Papel	—1,465 (6,033)	—0,759 (2,995)	0,955 (23,940)	0,99	—639,8 (1,461)	601,2 (2,721)	0,038 (28,92)	0,99
Borracha	—1,708 (3,430)	—0,965 (2,159)	0,948 (11,310)	0,92	81,47 (0,483)	44,30 (0,546)	0,026 (43,35)	0,99
Couro	—1,282 (4,675)	—0,515 (2,076)	0,928 (19,240)	0,98	45,59 (0,506)	21,840 (0,404)	0,078 (42,65)	0,99
Química	—1,343 (2,605)	—0,407 (2,232)	0,848 (13,950)	0,94	710,10 (1,664)	—225,6 (2,457)	0,022 (33,54)	0,98
Farmacêutica	—1,509 (4,907)	—0,990 (3,600)	0,903 (16,030)	0,97	4,561 (0,047)	42,4 (1,296)	0,012 (48,73)	0,99
Cosméticos	—1,116 (4,074)	—0,470 (2,493)	0,814 (20,310)	0,97	—66,24 (0,451)	113,2 (1,699)	0,011 (13,99)	0,95
Plásticos	—0,899 (3,709)	—0,992 (6,738)	0,883 (25,890)	0,98	—0,433 (0,001)	—21,15 (0,241)	0,042 (23,92)	0,98
Tecidos	—4,173 (4,817)	—1,257 (3,266)	1,220 (13,380)	0,92	1,575 (0,693)	85,29 (0,071)	0,064 (30,99)	0,99
Vestuário	—1,312 (4,703)	—0,986 (6,089)	0,975 (27,280)	0,98	796,9 (1,061)	—61,670 (0,204)	0,078 (20,56)	0,96
Alimentação	—1,676 (3,220)	—0,914 (7,167)	0,945 (19,950)	0,96	3556,0 (3,047)	—269,5 (0,795)	0,028 (15,74)	0,93
Bebidas	—1,265 (2,853)	—1,535 (6,635)	0,954 (14,430)	0,95	662,6 (1,724)	—150,9 (1,205)	0,020 (4,009)	0,57
Fumo	—1,569 (3,593)	—1,107 (4,768)	0,945 (15,860)	0,96	90,53 (0,533)	118,5 (1,383)	0,027 (27,02)	0,99
Gráfica	—0,790 (1,546)	—0,528 (1,109)	0,882 (8,853)	0,95	151,0 (0,376)	67,1 (0,464)	0,043	0,99

FONTE: Macedo (1975).
NOTA: Os valores entre parênteses são as estatísticas t.

Tabela VI.3

DEMANDA DE MÃO-DE-OBRA: MACEDO (1975) – DADOS DE SÉRIE TEMPORAL: 1949/69 (RELAÇÃO LINEAR)

Indústria	Constante	W	Q	R^2	DW
Total	12,490 (17,319)	—3,105 (3,133)	4,183 (6,998)	0,95	1,69
Não-Metálicos	1,279 (13,848)	—0,216 (1,638)	1,328 (2,781)	0,63	1,17
Metalúrgica	—0,733 (0,718)	1,210 (1,494)	1,158 (0,236)	0,48	2,48
Mecânica	0,519 (3,410)	—0,171 (1,607)	8,399 (5,199)	0,95	0,53
Equipamentos Elétricos	0,217 (2,386)	—0,049 (0,861)	5,326 (7,999)	0,96	1,39
Material de Transporte	0,366 (4,286)	—0,107 (2,254)	5,057 (12,318)	0,99	1,32
Madeira	0,769 (10,220)	—0,158 (1,690)	4,219 (2,208)	0,29	1,26
Mobiliário	0,509 (12,077)	—0,201 (4,681)	10,116 (6,729)	0,81	1,23
Papel	0,272 (6,179)	—0,087 (1,464)	5,704 (3,860)	0,87	1,66
Borracha	0,145 (6,507)	—0,052 (3,119)	4,349 (7,094)	0,88	2,71
Couro	0,189 (9,451)	—0,040 (0,272)	1,378 (0,798)	0,13	1,49
Química, Farmacêutica, Cosméticos e Plásticos	0,916 (3,998)	—0,391 (2,235)	5,035 (7,684)	0,94	2,00
Tecidos	3,981 (21,667)	—1,118 (5,142)	4,320 (3,401)	0,74	1,32
Vestuário	0,786 (7,534)	—0,219 (1,419)	6,247 (2,532)	0,54	1,04
Alimentação	2,134 (14,427)	—0,614 (3,211)	2,408 (3,658)	0,53	1,58
Bebidas	0,133 (4,776)	0,067 (0,268)	0,504 (0,377)	0,12	0,61
Fumo	0,337 (9,310)	—0,024 (0,907)	2,484 (2,409)	0,47	0,68
Gráfica	0,440 (9,907)	—0,092 (1,623)	7,967 (3,669)	0,89	1,99

FONTE: Macedo (1975).
NOTA: Os valores entre parênteses são as estatísticas t.

VI.5.2.3 – Rotatividade de Mão-de-Obra

Imagine que existem duas ocupações cujos salários sejam iguais a ω_1 e ω_2 e que o salário na segunda ocupação seja maior do que na primeira, $\omega_2 > \omega_1$. Admita-se que o número de empregados nas duas ocupações seja igual a N_1 e N_2, respectivamente. O salário médio será, então, igual à média ponderada dos salários nas duas ocupações, com pesos iguais à participação de cada ocupação no emprego total, isto é:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 N_1 + \omega_2 N_2}{N_1 + N_2} \qquad (5.11)$$

ou, alternativamente:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 N + (\omega_2 - \omega_1) N_2}{N} \tag{5.12}$$

onde $\bar{\omega}$ é o salário médio e $N = N_1 + N_2$.

Suponha-se que o número de empregados na segunda ocupação, bem como os salários em ambas ocupações não se modifiquem. Derivando-se parcialmente a expressão (5.12) com respeito a N, conclui-se que o salário médio varia em sentido contrário ao número total de empregados pois:

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial N} = -\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{N^2} < 0 \tag{5.13}$$

Logo, se a rotatividade da mão-de-obra for mais intensa nas ocupações cujos salários sejam mais baixos, o emprego estará correlacionado negativamente com o salário médio.

O exemplo acima apesar de ser bastante simples e sugestivo não explica as razões pelas quais uma empresa seria levada a despedir e contratar com mais freqüência os trabalhadores situados nas faixas salariais mais baixas. A teoria do capital humano sugere que os custos de despedir empregados com mais experiência seriam mais elevados em virtude dos investimentos realizados pela empresa no treinamento do seu pessoal no próprio trabalho, e do fato de que a empresa teria de treinar novos trabalhadores para desempenhar as mesmas funções daqueles que foram despedidos. Além disso, os custos de seleção e admissão de empregados tendem a ser maiores para os trabalhadores situados nas faixas salariais mais elevadas. Conseqüentemente, os indivíduos de menor qualificação em geral são os últimos a serem contratados na fase da expansão do ciclo e os primeiros a serem despedidos na fase de contração do ciclo.

Macedo em sua pesquisa reúne um bom número de evidências, que não serão apresentadas aqui, e que apontam na direção de a correlação negativa entre emprego e salário médio ser produto da hipótese de maior rotatividade de mão-de-obra nas escalas salariais mais baixas.

VI.6 — Exercícios

1. Para a função de produção

$$v = \gamma \left[\delta x_1^{-\rho} + (1 - \delta) x_2^{-\rho}\right]^{-1/\rho}$$

onde γ, δ e ρ são parâmetros, calcule:

a) A função de custo;

b) A equação de custo marginal;

c) As equações de demanda de fatores; e

d) A fronteira de preços de fatores.

2. Repita o exercício anterior para as seguintes funções de produção:

a) $q = \gamma \left[\delta \, x_1^{-\rho} + (1 - \delta) \left(\dfrac{x_1}{x_2} \right)^{-m\rho} x_2^{-\rho} \right]^{-v/\rho}$

b) $q \, e^{\theta q} = \gamma \, x_1^{\alpha} \, x_2^{\beta}$

onde γ, δ, ρ, m, v, θ, α e β são parâmetros.

3. Um fator de produção é denominado inferior quando $\dfrac{\partial x_i}{\partial q} < 0$. Mostre que:

a) Se a função de produção for homotética nenhum fator de produção pode ser inferior; e

b) Se $\partial Cmg / \partial r_i < 0$, o i-ésimo fator de produção é inferior.

4. Um pesquisador ajustou os dados de custo e de produção à seguinte função de custo:

$$C = a_0 + a_1 \, q + a_2 \, q^2 + a_3 \, q^3$$

a) Esta especificação é incorreta?

b) Quais as hipóteses implícitas nesta formulação?

5. A função de custo generalizada de Leontief é dada por:

$$C(q,r) = h(q) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \, r_i^{0.5} \, r_j^{0.5}$$

onde a função $h(q)$ é tal que $h(0) = 0$.

a) Quais as condições que os parâmetros α_{ij} têm de satisfazer para que esta função seja uma função de custo?

b) Derive as equações de demanda dos fatores para cada nível de produção; e

c) Mostre que se $\alpha_{ij} = 0$ para $i \neq j$, então a função custo é a correspondente à função de produção Leontief.

6. A função de produção de uma empresa é dada por:

$$q = min \left\{ \frac{x_1}{\alpha_1}, \; \frac{x_2}{\alpha_2} \right\}^{\beta}$$

onde α_1, α_2 e β são parâmetros.

a) Qual a função de custo desta empresa?

b) Qual a equação do custo marginal?

7. Seja $C(q, r_1, r_2) = (r_1 + r_2) \, q$ uma função de custo. Deduza a função de produção correspondente.

8. Dada a função

$$C\ (q,\ r) = k\ q\ r_1^{\alpha}\ r_2^{\beta}$$

a) Qual a condição que os parâmetros α e β devem satisfazer para que esta função seja uma função de custo?

b) Qual a função de produção correspondente?

9. A função de custo de uma empresa é dada por:

$$C\ (q,\ r_1,\ r_2) = k\ (r_1^{\alpha}\ r_2^{\beta}\ q\ e^{\theta q})^{\frac{1}{\alpha + \beta}}$$

onde k, α, β e θ são parâmetros.

a) Deduza a função de produção correspondente;

b) Quais as equações de demanda de fatores de produção?

10. A partir da definição de elasticidade de escala

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{x_i}{q}$$

de uma função de produção $q = q\ (x_1,\ \ldots,\ x_n)$, mostre que ela pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$\varepsilon = \frac{Cm}{Cmg} = \left[\frac{\partial \log\ C\ (q,r)}{\partial \log\ q} \bigg|_r \right]^{-1}$$

onde a derivada parcial supõe que os preços dos fatores sejam constantes.

11. A partir da definição de elasticidade de substituição entre os fatores,

$$\sigma = \frac{d\ \log\ x_2 / x_1}{d\ \log\ \tau}$$

de uma função de produção $q = q\ (x_1\ x_2)$ onde τ é a taxa marginal de substituição técnica, mostre que para uma firma que minimiza o custo de produção, σ pode ser calculada através da seguinte fórmula:

$$\sigma = \frac{C\ C_{12}}{C_1\ C_2}$$

onde: $C_{12} = \dfrac{\partial^2 C}{\partial r_1\, \partial r_2}$, $C_1 = \dfrac{\partial C}{\partial r_1}$, $C_2 = \dfrac{\partial C}{\partial r_2}$ e

$C = C\ (q,r_1,r_2)$ é o custo total de produção.

12. Uma empresa produz dois bens q_1 e q_2, conjuntamente, através da seguinte função de produção:

$$f\ (q_1, q_2, x_1, x_2) = 0$$

com a utilização de dois fatores de produção x_1 e x_2.

a) Mostre como se chega à função de custo $C\ (q_1,\ q_2,\ r_1,\ r_2)$ e demonstre que $\frac{\partial C}{\partial r_i} = x_i$.

b) Haveria alguma indicação da teoria econômica de como calcular o custo unitário de produção para cada bem?

13. Certo ou Errado. Justifique sua resposta.

a) A função $C\ (q,r) = q\ (r_1 + r_2)^2$ satisfaz todas propriedades que uma função de custo deve atender;

b) A elasticidade do custo médio em relação ao preço de um fator de produção é igual à participação deste fator no custo total de produção;

c) O custo marginal de curto prazo é sempre igual ao custo marginal de longo prazo;

d) A função de custo médio é homogênea do primeiro grau nos preços dos fatores de produção;

e) A equação de custo marginal é homogênea de grau zero nos preços dos fatores de produção;

f) A função de custo é convexa em relação ao nível de produção;

g) Quando o preço de um fator de produção aumenta, o custo marginal também aumenta;

h) O custo marginal e o custo médio estão relacionados através da seguinte identidade:

$$Cmg = Cm + q\ \frac{\partial Cm}{\partial q}$$

i) Para uma função de custo do tipo $C\ (q, r_1, r_2) = f\ (q)\ c\ (r_1\ r_2)$ a elasticidade de substituição entre fatores independe do nível de produção.

VI.7 — Bibliografia

BACHA, E. L., MATA, M. da, e MODENESI, R. L. *Encargos trabalhistas e absorção de mão-de-obra: uma interpretação do problema e seu debate*. Coleção Relatórios de Pesquisa, 12. Rio de Janeiro, IPEA/INPES, 1972.

JOHNSTON, J. *Statistical cost analysis*. New York, McGraw-Hill, 1960.

MACEDO, R. B. M. Uma crítica das estimativas de elasticidade de substituição obtidas para a indústria de transformação. *Estudos Econômicos*, 5:141-64, 1975.

———. Uma interpretação alternativa da correlação entre emprego e salário nos estudos de demanda de mão-de-obra. *Pesquisa e Planejamento Econômico,* Rio de Janeiro, *6* (1) :241-66, abr. 1976.

McFadden, D., e Fuss, M., orgs. *Production economics: a dual approach.* Amsterdam, North-Holland, 1977.

Nerlove, M. Returns to scale in electricity supply. In: Christ, C. F. *et al.,* orgs. *Studies in mathematical economics and econometrics in memory of Yehuda Grunfeld.* Palo Alto, Stanford University Press, 1963.

Samuelson, P. A. *Foundations of economic analysis.* New York, Athemeum, 1971.

Shepard, R. W. *Theory of cost and production funtions.* Princeton, Princeton University Press, 1970.

Silberberg, E. *The structure of economics: a mathematical analysis.* New York, McGraw-Hill, 1978.

Walters, A. A. Production and cost functions: an econometric survey. *Econometrica,* 31:1-66, 1963.

Terceira Parte

TEORIA DA EMPRESA E ESTRUTURA DE MERCADO

Capítulo VII

A EMPRESA EM CONCORRÊNCIA PERFEITA

Este capítulo cuida da teoria da empresa em concorrência perfeita, deriva as propriedades das equações de demanda de fatores e de oferta de produto, introduz a função lucro, que é a contrapartida da função utilidade indireta da teoria do consumidor no caso da teoria da empresa, discute os problemas de equilíbrio de longo prazo e sumaria as principais proposições do modelo de concorrência perfeita através da equação matricial fundamental da teoria da empresa. A penúltima seção deste capítulo é dedicada inteiramente ao estudo da especificação econométrica da equação de oferta de produtos agrícolas e contém, também, resultados de três estudos empíricos realizados no Brasil. A última seção trata da teoria do investimento da empresa e introduz o conceito de custo de uso do capital, que desempenha um papel importante na formulação da teoria neoclássica.

VII.1 — Maximização do Lucro

Uma empresa operando em mercados de concorrência perfeita não pode sozinha alterar deliberadamente o preço de venda de seus produtos, nem, tampouco, os preços dos fatores de produção comprados pela mesma. Em outras palavras, os preços são dados pelos mercados de produtos e fatores, sobre os quais a empresa não tem nenhum poder.

A idéia de concorrência perfeita pressupõe ainda que a empresa tem conhecimento preciso dos preços, o que significa dizer que a informação transmitida pelos mercados constitui-se em um bem livre para a empresa.

Com o objetivo de tornar mais simples a apresentação da teoria da empresa em concorrência perfeita, admitiremos inicialmente que a mesma produz apenas um produto, a partir de dois fatores de produção. É claro que esta hipótese é bastante irrealista quando confrontada com o mundo em que vivemos. Todavia, as principais conclusões da teoria permanecem inalteradas quando se generaliza para o caso de mais de um produto, produzidos com o auxílio de um número finito qualquer de fatores de produção.

A receita ou o faturamento R da empresa é igual ao preço p do produto multiplicado pela quantidade vendida q:

$$R = p.q \tag{1.1}$$

A quantidade vendida, por hipótese simplificadora, é igual à produzida, não havendo, portanto, estoques. A quantidade produzida é obtida combinando-se fatores de produção de acordo com a função de produção:

$$q = q(x_1, x_2) \tag{1.2}$$

O custo total com a aquisição das quantidades de fatores x_1 e x_2 é dado por:

$$C = r_1 x_1 + r_2 x_2 \tag{1.3}$$

onde r_1 e r_2 são os preços dos respectivos fatores de produção.

O lucro π da empresa é igual à diferença entre a receita das vendas efetuadas e o custo de produção:

$$\pi = R - C = pq - r_1 x_1 - r_2 x_2 \tag{1.4}$$

O lucro, obviamente, não deve ser negativo, pois de outra forma seria melhor para a empresa nada produzir. Observe-se, também, que estamos supondo sejam variáveis todos os fatores de produção. Em jargão técnico isto significa dizer que estamos estudando o equilíbrio de longo prazo da empresa em concorrência perfeita.

O objetivo do empresário consiste em maximizar o lucro de sua empresa. Para que este objetivo seja atingido ele tem que decidir, face aos preços de mercado, quanto produzir e que quantidades de fatores utilizar. As variáveis de decisão sobre as quais o empresário tem controle são: a quantidade a produzir q e as quantidades de fatores a utilizar, x_1 e x_2. As variáveis que o empresário não controla e que, portanto, são exógenas para a empresa são os preços p, r_1 e r_2.

O lucro da empresa deve ser maximizado com a condição de que a restrição técnica da função de produção seja satisfeita. Algebricamente, isso é facilmente obtido substituindo-se (1.2) na equação (1.4):

$$\pi = pq(x_1, x_2) - r_1 x_1 - r_2 x_2 \tag{1.5}$$

Observe-se, então, que o lucro depende somente dos preços p, r_1, r_2 e das quantidades de fatores de produção x_1 e x_2.

VII.1.1 — Condição de Primeira Ordem

A diferencial de primeira ordem do lucro π é igual a:

$$d\pi = p\left(\frac{\partial q}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2}\, dx_2\right) - r_1\, dx_1 - r_2\, dx_2$$

onde $\partial q/\partial x_1$ e $\partial q/\partial x_2$ são as produtividades marginais dos fatores de produção. Rearranjando os termos da expressão acima, temos:

$$d\pi = \left(p \frac{\partial q}{\partial x_1} - r_1\right) dx_1 + \left(p \frac{\partial q}{\partial x_2} - r_2\right) dx_2$$

A condição de primeira ordem para que o lucro seja máximo é de que os coeficientes de dx_1 e dx_2 sejam iguais a zero, isto é:

$$p \frac{\partial q}{\partial x_1} = r_1$$
$$p \frac{\partial q}{\partial x_2} = r_2 \qquad (1.6)$$

O conteúdo econômico destas equações é o de que, em equilíbrio, a produtividade marginal de cada fator deve ser igual ao seu preço relativo, em termos do preço do produto. De maneira mais simples, as equações (1.6) traduzem o fato de que o empresário, ao desejar expandir sua produção, compara a receita adicional proveniente do aumento da produção com o custo da quantidade adicional do fator usado no incremento da produção. Enquanto o acréscimo de receita for superior ao acréscimo de custo, compensa expandir a produção. Em equilíbrio, na posição de lucro máximo, o benefício adicional é justamente igual ao custo adicional. Segue-se, portanto, que a contribuição marginal p $\partial q/\partial x_i$ por unidade de fator deve ser igual a seu custo unitário r_i para que o lucro seja máximo.

O preço do fator de produção dividido pela sua produtividade marginal, de acordo com as equações (1.6), é igual ao preço do produto:

$$\frac{r_1}{\partial q/\partial x_1} = \frac{r_2}{\partial q/\partial x_2} = p \qquad (1.7)$$

Esta condição é idêntica à de primeira ordem para a minimização do custo, equação (1.5) do Capítulo VI, quando se faz o preço do produto igual ao custo marginal. Segue-se, portanto, que a empresa ao maximizar o lucro minimiza o custo total de produção. Observe-se, então, que o lucro poderia ser escrito como:

$$\pi = pq - C(q, r_1, r_2) \qquad (1.8)$$

onde substituímos o custo total C pela função de custo (3.1) do Capítulo VI. As propriedades que serão derivadas a seguir poderiam ser deduzidas a partir de (1.8). Por exemplo, a condição de segunda ordem para a maximização do lucro é a de que o custo marginal não seja decrescente, pois a derivada segunda do lucro com respeito a q deve ser negativa ou igual a zero:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q^2} = -\frac{\partial^2 C}{\partial q^2} \leq 0$$

O estudo do sinal da taxa de variação do custo marginal, através da equação (3.17) do Capítulo VI, mostraria as condições de segunda ordem para que o lucro fosse máximo.

Todavia, a seguir, preferimos derivar diretamente todas as condições para que a apresentação se torne mais completa.

VII.1.2 — Condição de Segunda Ordem

A diferencial de segunda ordem do lucro π é facilmente obtida a partir da diferencial de primeira, $d\pi$. Com efeito, observando-se que os preços p, r_1 e r_2, bem como as diferenciais dx_1 e dx_2 são constantes, temos:

$$d^2\pi = \left(p \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} dx_1 + p \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2\right) dx_1 + \left(p \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 + p \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} dx_2\right) dx_2$$

Reagrupando-se alguns termos da equação acima, obtemos:

$$d^2\pi = p \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} (dx_1)^2 + 2p \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1\, dx_2 + p \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} (dx_2)^2$$

Esta diferencial é uma forma quadrática em dx_1 e dx_2 e pode ser escrita de forma compacta, mais elegante, usando-se notação matricial. Assim,

$$d^2\pi = p\, [dx_1 \;\; dx_2] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

A condição de segunda ordem para que o lucro seja máximo é a de que a matriz

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

da forma quadrática (1.9) seja negativa semidefinida. A matriz H sendo, na posição de máximo, negativa semidefinida implica as seguintes propriedades:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 \geqslant 0$$

As duas primeiras desigualdades expressam a famosa lei dos rendimentos decrescentes. Esta lei afirma que, na região de equilíbrio, são decrescentes as produtividades marginais dos fatores de produção. É interessante observar que a lei dos rendimentos decrescentes é uma conseqüência direta da maximização do lucro pelo empresário, não havendo necessidade, portanto, de se postular tal lei de maneira completamente *ad hoc,* sem fundamento teórico.

Quanto à última desigualdade, de que o determinante da matriz H não è negativa, ela é uma propriedade matemática que deve ser observada no ponto de lucro máximo e que não se presta facilmente para uma interpretação econômica. [1]

VII.2 — Rendimentos de Escala e Concorrência Perfeita

Uma proposição bastante popular na teoria da empresa em concorrência perfeita é a de que o equilíbrio competitivo é incompatível com rendimentos crescentes de escala. A seguir, demonstramos tal proposição no caso particular em que a função de produção é homogênea.

O teorema de Euler afirma que, para uma função de produção homogênea do grau v, a soma das produtividades marginais dos fatores, multiplicadas pelas respectivas quantidades de fatores, é igual ao grau de homogeneidade da função vezes a quantidade do produto, isto é:

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2} x_2 = vq \tag{2.1}$$

Derivando-se ambos os lados da equação (2.1), com respeito a x_1, obtemos: [2]

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} x_1 + \frac{\partial q}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} x_2 = v \frac{\partial q}{\partial x_1}$$

e derivando-se (2.1) com relação a x_2, temos:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} x_1 + \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} x_2 + \frac{\partial q}{\partial x_2} = v \frac{\partial q}{\partial x_2}$$

1 Para uma interpretação, ver Silberberg (1978, p. 109).

2 Essas duas derivadas se constituem em aplicações do Teorema de Euler, pois as produtividades marginais são homogêneas do grau (v — 1) em virtude da função de produção ser homogênea do grau v.

Somando-se as duas últimas equações depois de multiplicadas por x_1 e x_2, respectivamente, e levando-se em conta o teorema de Euler, resulta:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} x_1^2 + 2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} x_1 x_2 + \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} x_2^2 = \nu (\nu - 1) q$$

O lado esquerdo dessa equação é uma forma quadrática nas variáveis x_1 e x_2. Em forma matricial, pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$[x_1 \;\; x_2] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \\ \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} = \nu (\nu - 1) q \qquad (2.2)$$

Como já vimos, para uma empresa em concorrência perfeita em situação de equilíbrio, a matriz H dessa forma quadrática é negativa semidefinida. Segue-se que para estas empresas a expressão acima é obrigatoriamente menor ou igual a zero. Todavia, quando os retornos de escala forem crescentes, a expressão (2.2) é positiva, pois $\nu > 1$. Logo, retornos crescentes de escala são incompatíveis com a maximização do lucro pela empresa operando em concorrência perfeita, em virtude de a matriz H não poder ser negativa semidefinida quando ν for maior que um.

Quando ν for igual a um, o que significa dizer que os retornos de escala são constantes, a forma quadrática (2.2) é igual a zero, o determinante da matriz H será nulo. Se o preço do produto for igual ao custo marginal, o lucro máximo será igual a zero, porém o tamanho da empresa será indeterminado. Com efeito, as produtividades marginais dos fatores de produção, sendo, neste caso, funções homogêneas do grau zero nas quantidades dos fatores, o sistema de equações formado pelas condições de primeira ordem, passa a ser escrito como:

$$p \, q_1 \left(\frac{x_1}{x_2}, 1 \right) = r_1$$

$$p \, q_2 \left(\frac{x_1}{x_2}, 1 \right) = r_2$$

onde $q_i \left(\frac{x_1}{x_2}, 1 \right)$, $i = 1,2$, indica que a produtividade marginal do i-ésimo fator é função apenas da proporção x_1/x_2. Este sistema contém duas equações e uma incógnita: a proporção entre os fatores de produção. Supondo que ele possua solução, a quantidade de cada fator e o volume de produção serão indeterminados, pois a solução do sistema fornece apenas o valor da proporção entre os fatores a ser utilizada no processo produtivo. Assim, o tamanho da empresa será, também, indeterminado.

VII.3 — A Demanda de Fatores de Produção

As quantidades demandadas x_1 e x_2 dos fatores de produção podem ser expressas como funções dos preços dos fatores, r_1 e r_2, e do preço p do produto, pois as equações (1.6) formam um sistema de duas equações e duas incógnitas.[3] Assim, podemos afirmar de maneira genérica que:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(r_1, r_2, p) \\ x_2 &= x_2(r_1, r_2, p) \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde as equações (3.1) são as de demanda pelos fatores de produção. Observe-se que a diferença entre (3.1) e (2.1) do Capítulo VI é que agora o nível de produção é uma variável endógena, enquanto o preço do produto aparece como a nova variável exógena.

Com o objetivo de estabelecer os sinais das derivadas parciais das funções de demanda com relação a seus argumentos, procedemos do seguinte modo. Diferenciando as equações (1.6), obtemos:

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} dp + p \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} dx_1 + p \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 = dr_1$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_2} dp + p \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 + p \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} dx_2 = dr_2$$

Estas equações formam um sistema de duas equações e duas incógnitas, dx_1 e dx_2. Reagrupando-se os termos das equações acima, resulta:

$$p \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} dx_1 + p \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 = dr_1 - \frac{\partial q}{\partial x_1} dp$$

$$p \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 + p \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} dx_2 = dr_2 - \frac{\partial q}{\partial x_2} dp$$

Reescrevendo-se estas equações em notação matricial, obtemos:

$$p \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dr_1 - \dfrac{\partial q}{\partial x_1} dp \\ dr_2 - \dfrac{\partial q}{\partial x_2} dp \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

[3] As condições do teorema da função implícita são satisfeitas para o sistema de equações (1.6), supondo-se que a matriz hessiana da função de produção seja negativa definida.

Observe-se que a matriz que aparece na expressão (3.2) é a H, que é negativa definida na posição de equilíbrio da empresa.

Os valores de dx_1 e dx_2, provenientes da resolução do sistema de equações (3.2), são iguais a:

$$dx_1 = \frac{p}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} dr_1 - \frac{p}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} dr_2 + \frac{p}{h} \left[\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{r_2}{p} - \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \frac{r_1}{p} \right] dp \tag{3.3}$$

$$dx_2 = - \frac{p}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} dr_1 + \frac{p}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} dr_2 + \frac{p}{h} \left[\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{r_1}{p} - \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} \frac{r_2}{p} \right] dp \tag{3.4}$$

onde $h = p^2 \, |H|$, e o determinante da matriz H é positivo

$$|H| = \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 > 0,$$

para que a condição de segunda ordem do problema de maximização do lucro seja satisfeita.

A partir das equações (3.3) e (3.4), conclui-se que:

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} &= \frac{p}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} &= - \frac{p}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p} &= \frac{p}{h} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{r_2}{p} - \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \frac{r_1}{p} \right) \end{aligned} \right. \tag{3.5}$$

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial r_1} &= - \frac{p}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r_2} &= \frac{p}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial p} &= \frac{p}{h} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{r_1}{p} - \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} \frac{r_2}{p} \right) \end{aligned} \right. \tag{3.6}$$

As derivadas parciais que aparecem em (3.5), coeficientes de dr_1, dr_2 e dp em (3.3), respectivamente, são as derivadas parciais da primeira equação de demanda do fator de produção em (3.1); da mesma maneira as derivadas parciais que aparecem em (3.6), coeficientes de dr_1, dr_2 e dp na equação (3.4), são as da segunda equação de demanda em (3.1).

As principais conclusões da teoria da concorrência perfeita com relação à demanda de fatores de produção podem ser extraídas de (3.5) e (3.6) e estão sumariadas nas proposições abaixo. As duas primeiras proposições, a seguir, são idênticas às de números I e II da Seção VI.2 do capítulo anterior.

Proposição I. A quantidade demandada de um fator de produção aumenta (diminui) quando o preço do fator diminui (aumenta).

A Proposição I baseia-se no fato de que h é positivo e os rendimentos dos fatores são decrescentes em equilíbrio. Segue-se de (3.5) e (3.6) que:

$$\frac{\partial x_i}{\partial r_i} < 0, \text{ para } i = 1, 2. \tag{3.7}$$

Proposição II. Para um mesmo acréscimo de preços dos fatores de produção, a variação na quantidade demandada de um fator, quando o preço de um segundo fator varia, é igual à variação da quantidade demandada deste fator quando o preço do primeiro fator também varia.

A Proposição II resulta do fato de que as derivadas parciais cruzadas são iguais, como se depreende comparando-se as expressões de $\partial x_1/\partial r_2$ e $\partial x_2/\partial r_1$ em (3.5) e (3.6), respectivamente. A conclusão é que:

$$\frac{\partial x_1}{\partial r_2} = \frac{\partial x_2}{\partial r_1}$$

Em geral, a Proposição II equivale a ter-se:

$$\frac{\partial x_i}{\partial r_j} = \frac{\partial x_j}{\partial r_i}, \; i \neq j \tag{3.8}$$

Proposição III. As equações de demanda de fatores de produção são homogêneas do grau zero em relação aos preços dos fatores e ao preço do produto.

Esta proposição pode ser deduzida facilmente a partir das condições de equilíbrio (1.6). Com efeito, multiplicando-se todos os preços por um mesmo coeficiente as condições de equilíbrio não se alteram. Assim, as equações de demanda de fatores são homogêneas do grau zero em relação aos preços dos fatores e ao preço do produto.

A Proposição III pode ser obtida, também, a partir das equações (3.5) e (3.6). Multiplicando-se a primeira equação de (3.5) por r_1, a segunda por r_2 e a terceira equação por p, e adicionando-se estas parcelas, obtém-se:

$$r_1 \frac{\partial x_1}{\partial r_1} + r_2 \frac{\partial x_1}{\partial r_2} + p \frac{\partial x_1}{\partial p} = 0 \tag{3.9}$$

Procedendo-se da mesma forma para as equações em (3.6), resulta:

$$r_1 \frac{\partial x_2}{\partial r_1} + r_2 \frac{\partial x_2}{\partial r_2} + p \frac{\partial x_2}{\partial p} = 0 \qquad (3.10)$$

Quando se divide ambos os membros da equação (3.9) por x_1 e os da equação (3.10) por x_2 elas expressam o fato de que a soma das elasticidades-preço, com relação aos fatores e ao produto, das equações de demanda de fatores de produção, é nula. Isto nada mais significa que afirmar serem homogêneas do grau zero as equações de demanda de fatores de produção.

VII.3.1 — Fatores Substitutos e Complementares

De acordo com Frisch (1965), dois fatores de produção são complementares quando a produtividade marginal de um fator aumenta com acréscimos do outro fator, isto é:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j} > 0, \quad i \neq j \qquad (3.11)$$

Segundo o mesmo autor, dois fatores de produção são substitutos quando a produtividade marginal de um decresce ao diminuir a quantidade do outro, ou seja:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j} < 0, \quad i \neq j \qquad (3.12)$$

A definição hicksiana de fatores complementares e substitutos é diferente da de Frisch. Segundo Hicks (1946), são complementares dois fatores de produção quando o aumento (decréscimo) do preço de um leva à diminuição (acréscimo) da quantidade demandada do segundo, isto é:

$$\frac{\partial x_i}{\partial r_j} < 0, \quad i \neq j \qquad (3.13)$$

Os fatores de produção seriam substitutos, no sentido de Hicks, quando o aumento (diminuição) do preço de um fator levasse ao aumento (diminuição) da quantidade demandada do segundo, isto é:

$$\frac{\partial x_i}{\partial r_j} > 0, \quad i \neq j \qquad (3.14)$$

No caso de apenas dois fatores de produção as definições de Hicks e Frisch são idênticas. Com efeito, de (3.9) temos que:

$$\frac{\partial x_1}{\partial r_2} = - \frac{p}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Tendo em vista que h é positivo, o sinal de $\partial x_1/\partial r_2$ é contrário ao sinal de $\partial^2 q/\partial x_1\, \partial x_2$. Segue-se, então, que a definição (3.11) é equivalente à (3.13) e a definição (3.12) à (3.14). Todavia, este resultado não pode ser generalizado quando existem mais de dois fatores de produção.

Cabe ressaltar que nada foi dito até agora acerca do sinal da derivada da quantidade do fator com respeito ao preço do produto, $\partial x_i/\partial p$. Como se pode verificar nas equações (3.5) e (3.6), repetidas aqui por conveniência,

$$\frac{\partial x_1}{\partial p} = \frac{r_2}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1\, \partial x_2} - \frac{r_1}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial p} = \frac{r_1}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1\, \partial x_2} - \frac{r_2}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2}$$

a derivada parcial $\partial x_i/\partial p$, $i = 1, 2$, é a soma algébrica de duas parcelas. A segunda parcela é positiva, pois os rendimentos dos fatores são decrescentes. Quanto à primeira parcela nada se pode afirmar, *a priori*, pois o sinal de $\partial^2 q/\partial x_1\, \partial x_2$ é ambíguo — tanto pode ser negativo como positivo.

Na hipótese de que os fatores de produção sejam complementares no sentido de Frisch, $\partial x_i/\partial p$ é positivo, pois $\partial^2 q/\partial x_1\, \partial x_2 > 0$. Neste caso, então, o aumento do preço do produto acarreta o aumento na quantidade demandada do fator.

VII.4 — A Equação de Oferta

Da mesma forma que as equações de demanda de fatores de produção, a equação de oferta do produto — resultante das condições de equilíbrio (1.6) e da função de produção (1.2) — é função dos preços dos fatores e do preço do produto,

$$q = f(r_1, r_2, p) \tag{4.1}$$

A equação de oferta obedece a certas propriedades de acordo com a teoria da empresa em concorrência perfeita. A seguir passamos a estabelecer essas propriedades.

A diferencial da função de produção (1.2) é dada por:

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2} dx_2 \tag{4.2}$$

onde os símbolos acima já são conhecidos.

Substituindo-se os valores de dx_1 e dx_2, expressos nas equações (3.3) e (3.4), na equação acima, obtemos:

$$dq = \left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{p}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} - \frac{\partial q}{\partial x_2} \frac{p}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dr_1$$

$$+ \left(\frac{\partial q}{\partial x_2} \frac{p}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} - \frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{p}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dr_2$$

$$+ \left[\frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{p}{h} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{r_2}{p} - \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \frac{r_1}{p} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial q}{\partial x_2} \frac{p}{h} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{r_1}{p} - \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} \frac{r_2}{p} \right) \right] dp \qquad (4.3)$$

Levando-se em conta as condições de equilíbrio (1.6) e rearranjando alguns termos da expressão (4.3), resulta:

$$dq = \left(\frac{r_1}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} - \frac{r_2}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dr_1$$

$$+ \left(\frac{r_2}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} - \frac{r_1}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dr_2$$

$$- \frac{1}{hp} \left(r_2^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} - 2\, r_1\, r_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} + r_1^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \right) dp \qquad (4.4)$$

Conclui-se daí que:

$$\frac{\partial q}{\partial r_1} = \frac{r_1}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} - \frac{r_2}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial q}{\partial r_2} = \frac{r_2}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} - \frac{r_1}{h} \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad (4.5)$$

$$\frac{\partial q}{\partial p} = - \frac{1}{hp} \left(r_2^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} - 2 r_1\, r_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} + r_1^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \right)$$

Com o auxílio dessas equações podemos estabelecer as principais proposições ligadas à equação de oferta.

Proposição I. A quantidade ofertada varia na mesma direção que o preço do produto. Em símbolos:

$$\frac{\partial q}{\partial p} > 0$$

A demonstração desta proposição baseia-se no fato de que a matriz H é negativa definida e, em conseqüência, a expressão

$$[r_2 \;\vdots\; -r_1] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1\, \partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1\, \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 \\[4ex] -r_1 \end{bmatrix} =$$

$$= r_2^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} - 2 r_1\, r_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1\, \partial x_2} + r_1^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2}$$

é negativa. O lado direito da forma quadrática acima corresponde à expressão entre parênteses na última equação de (4.5). Tendo em vista que $h > 0$, segue-se, então, que $\partial q / \partial p > 0$.

Proposição II. A resposta da quantidade de produto ofertada a variações do preço de um fator é igual e de sentido contrário à resposta da quantidade demandada deste fator quando o preço do produto varia.

A Proposição II é obtida facilmente, comparando-se as equações (3.5) e (4.5), ou as equações (3.6) e (4.5). Deste modo, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial r_1} &= -\frac{\partial x_1}{\partial p} \\ \frac{\partial q}{\partial r_2} &= -\frac{\partial x_2}{\partial p} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Proposição III. A equação de oferta é homogênea do grau zero em relação aos preços dos fatores e ao preço do produto.

Como no caso da homogeneidade das equações de demanda de fatores de produção, a proposição acima é resultado direto do fato de que multiplicando-se todos os preços por uma mesma constante a condição de equilíbrio entre produtividades marginais e preços permanece inalterada. Alternativamente, pode-se comprovar esta última proposição verificando-se que ao se multiplicar a primeira equação de (4.5) por r_1, a segunda por r_2 e a terceira por p, a soma algébrica das três parcelas é nula:

$$\frac{\partial q}{\partial r_1} r_1 + \frac{\partial q}{\partial r_2} r_2 + \frac{\partial q}{\partial p} p = 0 \qquad (4.7)$$

Na verdade a terceira proposição é uma aplicação imediata do teorema inverso do de Euler à equação de oferta. A homogeneidade de grau zero da equação de oferta pode ser interpretada em termos de elasticidades. Com efeito, dividindo-se ambos os lados de (4.7) por q, conclui-se que a soma das elasticidades-preço da quantidade ofertada com relação aos preços dos fatores e do produto é igual a zero.

VII.4.1 — Fatores de Produção Inferiores

Na teoria do consumidor, um bem é inferior quando o aumento da renda leva ao decréscimo na quantidade comprada do bem pelo consumidor. Na teoria da empresa, um fator de produção é considerado inferior quando o aumento do preço do produto acarreta a diminuição na quantidade usada do fator, isto é:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p} < 0 \qquad (4.8)$$

Observe-se que a definição acima é bastante semelhante à de bens inferiores da teoria do consumidor, pois, quando o preço p sobe, a quantidade ofertada q também aumenta. Portanto, se o fator é inferior, a quantidade do produto aumenta, enquanto a quantidade comprada de fator diminui.

É interessante notar que nem todos os fatores de produção podem ser inferiores. Com efeito, da função de produção $q = q(x_1, \ldots, x_n)$, temos

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p} \qquad (4.9)$$

e da Proposição I sabe-se que $\partial q / \partial p > 0$. Logo, da expressão anterior, conclui-se

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p} > 0 \qquad (4.10)$$

Como as produtividades marginais $\partial q / \partial x_i$ são sempre positivas, é claro que nem todos os fatores de produção podem ser inferiores, pois a desigualdade (4.10) tem de ser satisfeita.

Um fator de produção também pode ser definido como inferior quando o aumento (diminuição) do preço do fator acarretar o incremento (decremento) na quantidade ofertada. Essa definição alternativa prende-se ao fato de que

$$\frac{\partial q}{\partial r_i} = - \frac{\partial x_i}{\partial p} \tag{4.11}$$

em virtude da expressão (4.6).

Cabe ressaltar que um fator de produção para ser inferior tem que ser necessariamente substituto no sentido de Frisch. Com efeito, para $\partial x_1/\partial p < 0$ ou $\partial q/\partial r_1 > 0$ é necessário que $\partial^2 q/\partial x_1 \, \partial x_2 < 0$. Obviamente, essa condição não é suficiente como se pode constatar por (4.5), (3.5) e (3.6).

Vale ainda frisar que não pode haver fator de produção inferior nas seguintes situações:

a) $\dfrac{\partial^2 q}{\partial x_i \, \partial x_j} > 0$, qualquer $i \neq j$;

b) a função de produção é homogênea de qualquer grau.

O caso a) é um corolário direto do que foi dito no parágrafo anterior. Quanto ao caso b), sabemos que para uma função de produção homogênea do grau ν, tem-se:

$$q \; (\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^\nu \; q \; (x_1, x_2). \tag{4.12}$$

Fazendo-se $\lambda = 1/x_2$, a função de produção pode ser escrita como:

$$q \; (x_1, x_2) = x_2^\nu \; q \; (x_1/x_2, 1). \tag{4.13}$$

Admita-se que a relação de fatores x_1/x_2 é constante, devido a uma relação de preços de fatores também constante. É bom lembrar que para uma função de produção homotética, da qual a função de produção homogênea é um caso particular, a taxa marginal de substituição técnica depende apenas da relação de fatores. Assim,

$$q \; (x_1/x_2, 1) = \text{constante} = k$$

e, portanto, de (4.3), tem-se:

$$x_2^\nu = q/k \tag{4.14}$$

A derivada parcial de x_2 com relação à quantidade q, mantendo-se constante a relação x_1/x_2, é facilmente obtida a partir de (4.14). O resultado é:

$$\frac{\partial x_2}{\partial q} = \frac{1}{k\nu \; x_2^{\nu - 1}} > 0 \tag{4.15}$$

Conseqüentemente, para funções de produção homogêneas, as quantidades de fatores aumentam com o acréscimo do nível de produção. Segue-se, portanto, que para este tipo de função de produção não pode haver fator de produção inferior, pois, por definição, tal fator tem sua quantidade utilizada reduzida quando o preço do produto aumenta e, em conseqüência do acréscimo do preço, a produção aumenta.

VII.5 — Demanda de Fatores e Oferta de Produto: Resumo e Generalização

A teoria da empresa em concorrência perfeita, como foi visto nas duas seções precedentes, impõe certas restrições nas equações de demanda de fatores de produção e na equação de oferta de produto repetidas aqui por conveniência,

$$x_1 = x_1(r_1, r_2, p)$$

$$x_2 = x_2(r_1, r_2, p)$$

$$q = f(r_1, r_2, p)$$

As restrições da teoria dizem respeito às derivadas parciais das equações acima com relação aos preços dos fatores e ao preço do produto. Essas derivadas parciais podem ser arranjadas na seguinte matriz 3x3:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_1}{\partial p} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial p} \\ \hdashline -\frac{\partial q}{\partial r_1} & -\frac{\partial q}{\partial r_2} & -\frac{\partial q}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \qquad (5.1)$$

A matriz S é simétrica, pois de acordo com a segunda proposição da seção anterior, tem-se:

$$\frac{\partial x_1}{\partial r_2} = \frac{\partial x_2}{\partial r_1}$$

$$-\frac{\partial q}{\partial r_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p}$$

$$-\frac{\partial q}{\partial r_2} = \frac{\partial x_2}{\partial p}$$

Os elementos da diagonal principal da matriz S são negativos. Este fato segue-se da primeira proposição, pois:

$$\frac{\partial x_1}{\partial r_1} < 0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial r_2} < 0$$

$$-\frac{\partial q}{\partial p} < 0$$

De acordo com a terceira proposição, a matriz S quando pós-multiplicada pelo vetor $[r_1\ r_2\ p]'$ é igual a zero:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_1}{\partial p} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial p} \\ -\frac{\partial q}{\partial r_1} & -\frac{\partial q}{\partial r_2} & -\frac{\partial q}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} r_1 + \frac{\partial x_1}{\partial r_2} r_2 + \frac{\partial x_1}{\partial p} p \\ \frac{\partial x_2}{\partial r_1} r_1 + \frac{\partial x_2}{\partial r_2} r_2 + \frac{\partial x_2}{\partial p} p \\ -\frac{\partial q}{\partial r_1} r_1 - \frac{\partial q}{\partial r_2} r_2 - \frac{\partial q}{\partial p} p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os principais resultados da teoria da empresa em concorrência perfeita podem ser sintetizados em uma única proposição que engloba todas as demais vistas até aqui, isto é:

Proposição. A matriz S é negativa semidefinida.

Uma demonstração formal desta proposição será vista mais adiante, na Seção VII.7, pois a álgebra matricial torna a sua dedução menos tediosa.

VII.5.1 — Generalização

No caso de a empresa fabricar vários produtos $q_1, q_2, \ldots, q_n$, usando os fatores de produção $x_1, x_2, \ldots, x_s$, teríamos as seguintes equações de demanda de fatores e de oferta de produtos:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(r_1, \ldots, r_s, p_1, \ldots, p_n) \\ &\vdots \\ x_s &= x_s(r_1, \ldots, r_s, p_1, \ldots, p_n) \\ q_1 &= f_1(r_1, \ldots, r_s, p_1, \ldots, p_n) \\ &\vdots \\ q_n &= f_n(r_1, \ldots, r_s, p_1, \ldots, p_n) \end{aligned} \qquad (5.2)$$

A matriz S das derivadas parciais das equações (5.2) é uma matriz quadrada de tamanho $s + n$, ou seja:

$$S = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial r_s} & \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_s}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial x_s}{\partial r_s} & \frac{\partial x_s}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_s}{\partial p_n} \\ \hline -\frac{\partial q_1}{\partial r_1} & \cdots & -\frac{\partial q_1}{\partial r_s} & -\frac{\partial q_1}{\partial p_1} & \cdots & -\frac{\partial q_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{\partial q_n}{\partial r_1} & \cdots & -\frac{\partial q_n}{\partial r_s} & -\frac{\partial q_n}{\partial p_1} & \cdots & -\frac{\partial q_n}{\partial p_n} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Pode-se demonstrar que para a empresa em concorrência perfeita, na situação de equilíbrio, a matriz S é negativa semidefinida. É claro que a matriz de substituição para a empresa que produz um único bem é um caso particular da matriz (5.3).

No caso de a empresa produzir mais de um bem, estes podem ser classificados em complementares ou substitutos na produção. Dois bens são complementares na produção quando o aumento de preço de um acarretar o incremento da oferta do outro, isto é:

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} > 0, \quad i \neq j$$

Por outro lado, dois bens serão substitutos na produção quando o aumento do preço de um acarretar o decréscimo da quantidade ofertada do segundo bem,

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} < 0, \quad i \neq j$$

As definições acima são perfeitamente simétricas, pois, sendo a matriz S negativa semidefinida, temos que $\partial q_i/\partial p_j = \partial q_j/\partial p_i$, $i \neq j$.

VII.6 — A Função-Lucro

As equações de demanda de fatores (3.1) quando substituídas na expressão de lucro (1.4) fornece o lucro máximo π da empresa em concorrência perfeita como função do preço p do produto e dos preços r_1 e r_2 dos fatores de produção. Em símbolos:

$$\pi = p\, q\,(x_1, x_2) - r_1 x_1 - r_2 x_2 = \pi(p, r_1, r_2) \quad (6.1)$$

A função que associa ao vetor de preços p, r_1, r_2 o lucro máximo é denominada função-lucro. As propriedades desta função mostram-se bastante importantes do ponto de vista prático, pois a partir dela pode-se obter as equações de demanda de fatores e de oferta de produto.

VII.6.1 — Equação de Oferta

A derivada parcial da função-lucro com respeito ao preço p é igual a:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = q + p \left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial p} \right) - r_1 \frac{\partial x_1}{\partial p} - r_2 \frac{\partial x_2}{\partial p}$$

Alternativamente, a equação acima depois que alguns termos são reagrupados pode ser escrita do seguinte modo:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = q + \left(p \frac{\partial q}{\partial x_1} - r_1 \right) \frac{\partial x_1}{\partial p} + \left(p \frac{\partial q}{\partial x_2} - r_2 \right) \frac{\partial x_2}{\partial p}$$

Como em equilíbrio competitivo o valor da produtividade marginal de cada fator é igual ao seu preço, as expressões que aparecem entre parênteses nesta equação se igualam a zero. Logo, temos que:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = q = f\ (p, r_1, r_2) \qquad (6.2)$$

Esta expressão afirma: i) que a equação de oferta pode ser obtida derivando-se parcialmente a função-lucro com respeito ao preço do produto; e ii) que o preço do produto e o valor máximo do lucro da empresa competitiva variam no mesmo sentido.

VII.6.2 — Equações de Demanda de Fatores

A derivada parcial da função-lucro com respeito ao preço r_1 do primeiro fator é igual a:

$$\frac{\partial \pi}{\partial r_1} = p \left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} + \frac{\partial q}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \right) - x_1 - r_1 \frac{\partial x_1}{\partial r_1} - r_2 \frac{\partial x_2}{\partial r_1}$$

Reagrupando-se alguns termos desta equação, resulta:

$$\frac{\partial \pi}{\partial r_1} = - x_1 + \left(p \frac{\partial q}{\partial x_1} - r_1 \right) \frac{\partial x_1}{\partial r_1} + \left(p \frac{\partial q}{\partial x_2} - r_2 \right) \frac{\partial x_2}{\partial r_1}$$

Novamente, em virtude de o preço de cada fator, em equilíbrio competitivo, ser igual ao valor de sua produtividade marginal, a expressão anterior transforma-se em:

$$\frac{\partial \pi}{\partial r_1} = - x_1 = - x_1\ (p, r_1, r_2) \qquad (6.3)$$

De maneira análoga pode-se provar que:

$$\frac{\partial \pi}{\partial r_2} = -x_2 = -x_2(p, r_1, r_2) \tag{6.4}$$

As conclusões a que se chega com estas duas expressões são as seguintes: em primeiro lugar, a equação de demanda de cada fator de produção pode ser obtida a partir da função-lucro, derivando-se parcialmente esta função com respeito ao preço do fator em questão e multiplicando-se o resultado assim obtido por — 1. A segunda conclusão é a de que o lucro máximo da empresa que opera em concorrência perfeita e os preços dos fatores variam em sentido contrário.

VII.6.3 — Matriz Hessiana da Função-Lucro

A matriz hessiana da função-lucro é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \pi}{\partial r_1^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial r_1 \partial r_2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial r_1 \partial p} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial r_2 \partial r_1} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial r_2^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial r_2 \partial p} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial p \partial r_1} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial p \partial r_2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial p^2} \end{bmatrix}$$

Em virtude dos resultados contidos nas equações (6.2), (6.3) e (6.4) é fácil verificar-se que a matriz acima é igual à matriz S da seção precedente, multiplicada por — 1, isto é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \pi}{\partial r_1^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial r_1 \partial r_2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial r_1 \partial p} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial r_2 \partial r_1} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial r_2^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial r_2 \partial p} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial p \partial r_1} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial p \partial r_2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial p^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_1}{\partial p} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial p} \\ -\frac{\partial q}{\partial r_1} & -\frac{\partial q}{\partial r_2} & -\frac{\partial q}{\partial p} \end{bmatrix}$$

Como a matriz S é negativa semidefinida, segue-se que a matriz hessiana da função-lucro é positiva semidefinida. Logo, a função-lucro $\pi(p, r_1, r_2)$ é convexa.

Cabe ainda assinalar que a função-lucro é homogênea do grau 1 nos preços do produto e dos fatores de produção. Esta propriedade é facilmente comprovada a partir do fato de que as equações de oferta e de demanda de fatores são homogêneas do grau zero nos preços do produto e dos fatores de produção.

VII.6 4 — Propriedades da Função-Lucro

As propriedades que uma função deve satisfazer para que seja uma função-lucro podem então ser sumariadas nas seguintes proposições:

Proposição I — A função-lucro é homogênea do primeiro grau em relação aos preços dos fatores de produção e ao preço do produto, isto é:

$$\pi\ (kp,\ kr_1,\ kr_2) = k\ \pi\ (p,\ r_1,\ r_2)$$

Proposição II — O lucro varia no mesmo sentido do preço do produto e no sentido contrário dos preços dos fatores de produção. A equação de oferta é obtida derivando-se parcialmente a função de lucro em relação ao preço do produto. As equações de demanda de fatores são obtidas derivando-se parcialmente a função de lucro em relação ao preço do fator em questão e multiplicando-se o resultado por — 1. Em símbolos:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = q = f\,(p,\ r_1,\ r_2) > 0$$

$$-\frac{\partial \pi}{\partial r_1} = x_1 = x_1\,(p,\ r_1,\ r_2) > 0$$

$$-\frac{\partial \pi}{\partial r_2} = x_2 = x_2\,(p,\ r_1,\ r_2) > 0$$

Proposição III — A função-lucro é convexa nos preços dos fatores de produção e no preço do produto, isto é, a matriz hessiana da função-lucro $\pi\,(p,\ r_1,\ r_2)$ é positiva semidefinida.

VII.7 — Equilíbrio de Longo Prazo da Empresa em Concorrência Perfeita

A condição de equilíbrio de longo prazo para uma empresa em concorrência perfeita, admitindo-se: i) que não existam barreiras à entrada de empresas concorrentes no mercado; e ii) que as empresas tenham acesso à mesma tecnologia, em idênticas condições, é a de que o lucro seja nulo. De outra forma, a existência de lucros positivos atrairia novos concorrentes para o mercado, enquanto o prejuízo faria com que empresas deixassem a indústria à procura de outros setores mais lucrativos. Assim na condição de equilíbrio de longo prazo o preço, que é igual ao custo marginal, será, também, igual ao custo médio, isto é:

$$p = Cmg\ (q, r_1, r_2) = Cm\ (q,\ r_1, r_2)\,. \tag{7.1}$$

O ponto da curva de custo em que ocorre a igualdade, corresponde ao ponto de mínimo da curva de custo médio. Portanto, a longo prazo, as empresas num regime de concorrência perfeita operam a um nível de produção que corresponde ao menor custo médio. Esta condição significa que, a longo prazo, o produto é totalmente exaurido pelo pagamento aos fatores de produção porque, de acordo com a condição de equilíbrio,

$$Cm = \frac{r_1\, x_1 + r_2\, x_2}{q} = p \tag{7.2}$$

e o valor da produção é igual ao total dos pagamentos aos fatores

$$pq = r_1\, x_1 + r_2\, x_2 \tag{7.3}$$

É interessante observar que durante bom tempo acreditou-se que somente tecnologias embutidas em funções de produção com retornos constantes de escala eram consistentes com a exaustão do produto, pois, de acordo com o teorema de Euler, se $q = q\,(x_1, x_2)$ é homogênea do grau 1, tem-se:

$$q = \frac{\partial q}{\partial x_1}\, x_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2}\, x_2$$

e, do fato de, em equilíbrio, as produtividades marginais dos fatores serem iguais aos preços destes medidos em termos do produto, $\partial q / \partial x_i = r_i / p$, obter-se, também, a expressão (7.3). Note-se, porém, que a condição de lucro nulo (7.3) é válida, no equilíbrio de longo prazo, independentemente do retorno de escala da função de produção.

As duas hipóteses alinhadas no início desta seção implicam que o preço de reserva ou preço de entrada, que é aquele pelo qual uma empresa está disposta a começar a produzir um determinado bem, é o mesmo para todas as empresas, pois as curvas de custos de todos os participantes, reais ou potenciais, são idênticas. Todavia, se uma empresa tiver um preço de reserva mais baixo do que os de seus concorrentes, por dispor de processo de produção mais eficiente, pode, a longo prazo, auferir lucros positivos, que são denominados renda. Esta renda é determinada pelo preço de mercado e não vice-versa. Vale ressaltar que se essa maior eficiência for devida ao acesso à melhor tecnologia ou a uma melhor qualidade de fatores, e estes recursos puderem ser negociados no mercado, essa renda poderá, então, ser considerada custo, pois tem valor alternativo no mercado. Neste caso, a longo prazo, a empresa irá operar, também, no ponto de mínimo do custo médio, desde que se inclua nessa curva a renda auferida devido à maior eficiência produtiva.

VII.7.1 — Estática Comparativa

A condição de equilíbrio (7.1) implica que a produção de longo prazo da empresa depende, para uma dada tecnologia, dos preços dos fatores de produção. Com o objetivo de verificar a reação do nível de produção a variações nos preços r_1 e r_2 dos fatores, tomamos a diferencial de ambos os lados da equação (7.1), cujo resultado é:

$$\frac{\partial Cmg}{\partial q}\, dq + \frac{\partial Cmg}{\partial r_1}\, dr_1 + \frac{\partial Cmg}{\partial r_2}\, dr_2 =$$

$$= \frac{\partial Cm}{\partial q}\, dq + \frac{\partial Cm}{\partial r_1}\, dr_1 + \frac{\partial Cm}{\partial r_2}\, dr_2 \tag{7.4}$$

Lembrando-se que no equilíbrio de longo prazo o custo médio é mínimo e, portanto, $\partial Cm/\partial q = 0$, a diferencial de q é igual a:

$$dq = \frac{\dfrac{\partial Cm}{\partial r_1} - \dfrac{\partial Cmg}{\partial r_1}}{\dfrac{\partial Cmg}{\partial q}} dr_1 + \frac{\dfrac{\partial Cm}{\partial r_2} - \dfrac{\partial Cmg}{\partial r_2}}{\dfrac{\partial Cmg}{\partial q}} dr_2 \qquad (7.5)$$

Como a derivada parcial da função-custo com respeito ao preço do fator é igual à quantidade demandada do mesmo, $\partial C/\partial r_i = x_i$, tem-se que:

$$\frac{\partial Cmg}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial C}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial C}{\partial r_i} = \frac{\partial x_i}{\partial q}, \; i = 1{,}2 \qquad (7.6)$$

e da definição de custo médio deduz-se que:

$$\frac{\partial Cm}{\partial r_i} = \frac{1}{q}\left(x_i + \frac{\partial x_i}{\partial r_i} r_i + \frac{\partial x_j}{\partial r_i} r_j\right) = \frac{x_i}{q}, \; i, j = 1{,}2 \qquad (7.7)$$

Para obter-se o último membro da equação (7.7) levou-se em conta as proposições: as equações de demanda de fatores são homogêneas do grau zero em relação aos preços dos fatores; e os efeitos cruzados da quantidade do fator i pelo preço do fator j e vice-versa são iguais em magnitude. Substituindo-se (7.6) e (7.7) na equação (7.5), obtém-se:

$$dq = \frac{\dfrac{x_1}{q}\left(1 - \dfrac{q}{x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial q}\right)}{\dfrac{\partial Cmg}{\partial q}} dr_1 + \frac{\dfrac{x_2}{q}\left(1 - \dfrac{q}{x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial q}\right)}{\dfrac{\partial Cmg}{\partial q}} dr_2 \qquad (7.8)$$

Conclui-se, então, que:

$$\frac{\partial q}{\partial r_i} = \frac{\dfrac{x_i}{q}(1 - \varepsilon_i)}{\dfrac{\partial Cmg}{\partial q}}, \; i = 1{,}2 \qquad (7.9)$$

onde, a elasticidade ε_i mede a relação entre a taxa de variação da quantidade do fator i e a taxa de variação da quantidade q do produto. É fácil verificar a partir da expressão (7.9) que:

$$\frac{\partial q}{\partial r_i} \gtreqless 0 \qquad 1 \gtreqless \varepsilon_i \qquad (7.10)$$

Cabe notar que a elasticidade ε_i pode ser menor que zero, bastando para isto que o fator de produção i seja um fator inferior.

Com base nas expressões (7.7) e (7.10) podemos concluir que, a longo prazo, um aumento do preço de um fator de produção acarreta: i) o aumento do preço do produto; e ii) que o nível de produção pode aumentar, permanecer o mesmo, ou diminuir, dependendo de a elasticidade-produto do fator ser maior igual ou menor que 1, respectivamente.

VII.8 — A Equação Matricial Fundamental da Teoria da Empresa

A teoria da empresa em concorrência perfeita pode ser apresentada de uma maneira sucinta e elegante através da equação matricial fundamental da teoria da empresa, que é análoga à equação fundamental da teoria do consumidor. Para esta finalidade comecemos pela expressão do lucro de uma empresa que utiliza n fatores de produção para produzir um determinado produto. O lucro π é dado por:

$$\pi = pq - \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \tag{8.1}$$

onde x_i indica a quantidade do i-ésimo fator de produção e os demais símbolos têm o mesmo significado anterior. A função de produção neste caso é dada por:

$$q = q(x_1, \ldots, x_n) \tag{8.2}$$

onde admitimos que ela satisfaça às propriedades usuais que uma função de produção deve obedecer.

VII.8.1 — Condições de Primeira Ordem

As condições de primeira ordem para que o lucro seja máximo são expressas por:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = p \frac{\partial q}{\partial x_i} - r_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{8.3}$$

Alternativamente, introduzindo-se a notação

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial q}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

podemos escrever as equações (8.3) da seguinte forma:

$$p \frac{\partial q}{\partial x} = r \tag{8.5}$$

VII.8.2 — Condição de Segunda Ordem

As derivadas segundas do lucro com respeito às quantidades de fatores são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i^2} &= p \frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j} &= p \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i \neq j, \; i, j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{8.6}$$

Em notação matricial, escrevemos as equações (8.6) da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x \, \partial x'} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} = p \, H \tag{8.7}$$

onde H é a matriz hessiana da função de produção:

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{8.8}$$

A condição de segunda ordem para que o lucro π seja máximo é que a matriz H seja negativa semidefinida no ponto de lucro máximo. Esse fato exclui a possibilidade de retornos crescentes de escala para a empresa em concorrência perfeita.

VII.8.3 — Quantidade de Fatores

As quantidades de fatores a serem utilizadas na produção da quantidade q é dada pela resolução do sistema:

$$p \frac{\partial q}{\partial x} - r = 0$$

De acordo com o teorema das funções implícitas, o sistema de equações acima terá uma solução se o jacobiano $p\,H$ não for singular. Assim, no caso de retornos constantes de escala, a matriz H é singular e o sistema acima não tem solução.

VII.8.4 — Estática Comparativa

O objetivo da estática comparativa é verificar como a demanda de fatores e a oferta de produto reagem a variações dos preços de fatores e do preço do produto.

a) *Variação dos preços dos fatores: demanda de fatores* — A taxa de variação da quantidade de fatores com respeito aos preços dos fatores é obtida derivando-se as equações (8.5) em relação aos preços dos fatores. Assim temos:

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\left(p\,\frac{\partial q}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial r_i}{\partial r_i} \tag{8.9}$$

cujo resultado é:

$$p\left[\frac{\partial^2 q}{\partial x_1\,\partial x_i}\,\frac{\partial x_1}{\partial r_i} + \dots + \frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2}\,\frac{\partial x_i}{\partial r_i} + \dots + \frac{\partial^2 q}{\partial x_n\,\partial x_i}\,\frac{\partial x_n}{\partial r_i}\right] = 1 \tag{8.10}$$

Por outro lado, a derivada de (8.5) com respeito a r_j, $i \neq j$,

$$\frac{\partial}{\partial r_j}\left(p\,\frac{\partial q}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial r_i}{\partial r_j} \tag{8.11}$$

é igual a:

$$p\left[\frac{\partial^2 q}{\partial x_1\,\partial x_i}\,\frac{\partial x_1}{\partial r_j} + \dots + \frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2}\,\frac{\partial x_i}{\partial r_j} + \dots + \frac{\partial^2 q}{\partial x_n\,\partial x_i}\,\frac{\partial x_n}{\partial r_j}\right] = 0 \tag{8.12}$$

As equações (8.10) e (8.12) escritas em notação matricial tomam a seguinte forma:

$$p\,H\,\frac{\partial x}{\partial r'} = I \tag{8.13}$$

onde I é a matriz identidade e:

$$\frac{\partial x}{\partial r'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial r_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial r_1} & \frac{\partial x_n}{\partial r_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial r_n} \end{bmatrix} \tag{8.14}$$

b) *Variação do preço do produto: demanda de fatores* — Para se obter a taxa de variação das quantidades de fatores com respeito ao preço do produto derivamos (8.5) com respeito a p,

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(p\,\frac{\partial q}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\,(r_i) \tag{8.15}$$

obtendo se, então, o seguinte resultado:

$$\frac{\partial q}{\partial x_i} + p\left[\frac{\partial^2 q}{\partial x_1\,\partial x_i}\,\frac{\partial x_1}{\partial p} + \ldots + \frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2}\,\frac{\partial x_i}{\partial p} + \ldots + \frac{\partial^2 q}{\partial x_n\,\partial x_i}\,\frac{\partial x_n}{\partial p}\right] = 0,\ i = 1, \ldots, n \tag{8.16}$$

As equações acima podem ser escritas em notação matricial como se segue:

$$\frac{\partial q}{\partial x} + p\,H\,\frac{\partial x}{\partial p} = 0 \tag{8.17}$$

onde:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial p} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial p} \end{bmatrix} \tag{8.18}$$

c) *Variação do preço do produto: oferta de produto* — A derivada parcial da quantidade do produto com respeito a seu preço, obtida a partir da função de produção (8.2), é dada por:

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial p} + \ldots + \frac{\partial q}{\partial x_n}\,\frac{\partial x_n}{\partial p} \tag{8.19}$$

Alternativamente, pode-se escrever (8.19) como:

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)'\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right) \tag{8.20}$$

Substituindo-se o valor de $\partial q/\partial x$ em (8.5) na equação (8.20), resulta:

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{1}{p}\,r'\,\frac{\partial x}{\partial p} \tag{8.21}$$

d) *Variação dos preços dos fatores: oferta de produto* — A derivada parcial da quantidade q com respeito ao preço do i-ésimo fator de produção, obtida a partir da função de produção (8.2), é igual a:

$$\frac{\partial q}{\partial r_i} = \frac{\partial q}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial r_i} + \ldots + \frac{\partial q}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial r_i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{8.22}$$

que pode ser escrita na seguinte notação matricial:

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r'}\frac{\partial q}{\partial x} \tag{8.23}$$

onde:

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial r_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial q}{\partial r_n} \end{bmatrix}$$

As equações (8.13), (8.17), (8.21) e (8.23) podem ser escritas conjuntamente em forma matricial do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} pH & 0 \\ \dfrac{r'}{p} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r'} & \dfrac{\partial x}{\partial p} \\ \dfrac{\partial q'}{\partial r} & \dfrac{\partial q}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\dfrac{r}{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.24}$$

Esta é a equação matricial fundamental da teoria da empresa, cuja solução é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r'} & \dfrac{\partial x}{\partial p} \\ \dfrac{\partial q'}{\partial r} & \dfrac{\partial q}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pH & 0 \\ \dfrac{r'}{p} & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & -\dfrac{r}{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.25}$$

Observando-se que

$$\begin{bmatrix} pH & 0 \\ \dfrac{r'}{p} & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{H^{-1}}{p} & 0 \\ \dfrac{r'H^{-1}}{p^2} & -1 \end{bmatrix}$$

a equação (8.25) reduz-se a:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r'} & \dfrac{\partial x}{\partial p} \\[2ex] \dfrac{\partial q'}{\partial r} & \dfrac{\partial q}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{H^{-1}}{p} & -\dfrac{H^{-1}r}{p^2} \\[2ex] \dfrac{r'H^{-1}}{p^2} & -\dfrac{r'H^{-1}r}{p^3} \end{bmatrix} \tag{8.26}$$

Conclui-se, então que:

$$\frac{\partial x}{\partial r'} = \frac{H^{-1}}{p} \tag{8.27}$$

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -\frac{H^{-1}r}{p^2} = -\frac{\partial q}{\partial r} \tag{8.28}$$

$$\frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{r'H^{-1}r}{p^3} \tag{8.29}$$

Estas equações resumem as principais proposições da teoria da empresa em concorrência perfeita. A matriz $\partial x/\partial r'$ é negativa definida. A taxa de variação das quantidades de fatores em relação ao preço é igual e de sentido contrário à taxa de variação da quantidade do produto em relação aos preços dos fatores: $\partial x/\partial p = -\partial q/\partial r$. A última equação estabelece que a quantidade ofertada reage positivamente a aumentos no preço do produto, pois $r'\,H^{-1}r$ é um número negativo porque H é uma matriz negativa definida.

As propriedades listadas no parágrafo anterior podem ser contidas em uma única afirmação, bastando para isso que se introduza a matriz:

$$S = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r'} & \dfrac{\partial x}{\partial p} \\[2ex] -\dfrac{\partial q'}{\partial r} & -\dfrac{\partial q}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{H^{-1}}{p} & \dfrac{-H^{-1}r}{p^2} \\[2ex] -\dfrac{r'H^{-1}}{p^2} & \dfrac{r'H^{-1}r}{p^3} \end{bmatrix} \tag{8.30}$$

A matriz S difere da matriz (8.26) por ter a sua última linha igual à última linha daquela matriz mas com o sinal trocado. A proposição a que acabamos de nos referir é:

Proposição. A matriz S é negativa semidefinida.

Com o objetivo de provar esta proposição, tomemos o vetor $z' = [z_1 \; z_2]$ e avaliemos o sinal da forma quadrática $z'Sz$, isto é:

$$z'Sz = [z_1' \; z_2'] \begin{bmatrix} \dfrac{H^{-1}}{p} & \dfrac{-H^{-1}r}{p^2} \\[2ex] \dfrac{-r'H^{-1}}{p^2} & \dfrac{r'H^{-1}r}{p^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\[4ex] z_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{z_1' H^{-1} z_1}{p} - 2\,\frac{z_2\, z_1'\, H^{-1}}{p^2} + \frac{r'H^{-1}r}{p^3}\, z_2^2 \tag{8.31}$$

É fácil verificar que esta forma quadrática é igual a:

$$z'Sz = \left(z_1 - z_2 \frac{r}{p}\right)' \frac{H^{-1}}{p} \left(z_1 - z_2 \frac{r}{p}\right) \tag{8.32}$$

Como a matriz H é negativa definida, de acordo com a condição de segunda ordem para a maximização do lucro, a forma quadrática $z'Sz$ é negativa. Quando $z_1 = z_2\, r/p$ a forma quadrática é nula. Portanto, podemos afirmar que a matriz S é negativa semidefinida:

$$z'\,Sz \leq 0$$

VII.9 — A Oferta de Produtos Agrícolas

Um exemplo bastante interessante de aplicação da teoria da empresa em concorrência perfeita diz respeito à oferta de produtos agrícolas, pois as condições de concorrência perfeita, senão totalmente válidas, são bastante aproximadas para os produtores agrícolas.

Cabe ressaltar que a teoria da empresa em concorrência perfeita, apresentada nas seções anteriores, produz certas restrições que só podem ser levadas em conta quando se estuda simultaneamente a oferta de produto e a demanda de fatores. Ao se estudar uma equação de oferta ou uma equação de demanda de fator de produção, isoladamente, a única previsão da teoria é de que a oferta responde positivamente ao aumento do preço do produto enquanto a demanda responde negativamente ao aumento do preço do fator em questão.

VII.9.1 — Especificação Econométrica

Uma aproximação linear, ou linear nos logaritmos, da equação de oferta de um produto agrícola é a seguinte:

$$q_t^d = \alpha + \beta\, p_t^e + \gamma Z_t + \varepsilon_t \tag{9.1}$$

onde q_t^d indica a oferta desejada ou planejada pelo produtor, enquanto p_t^e é o preço esperado do produto pelo agricultor. A variável aleatória ε_t foi adicionada à equação e mais adiante se discutirá sua especificação. O vetor Z_t contém entre seus elementos preços de fatores e de produtos, complementares e substitutos, na produção do bem agrícola a que se refere a equação (9.1), e que influenciam a decisão do agricultor com respeito à produção planejada do produto agrícola em estudo. Isto é, γZ_t representa o somatório $\gamma_1 Z_{1t} + \gamma_2 Z_{2t} + \ldots + \gamma_k Z_{kt}$, onde as variáveis $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ devem ser especificadas no estudo de cada produto. Observe-se que, de acordo com a teoria, o coeficiente β é positivo, porém os elementos do vetor γ podem ter quaisquer sinais.

A quantidade efetivamente produzida q_t pode divergir da quantidade planejada por vários motivos, entre os quais cabe salientar os custos de ajustamento incorridos pelo produtor quando este tem de realocar recursos para atingir a produção planejada. Admitiremos que a produção efetiva e a planejada estão ligadas de acordo com o mecanismo de ajustamento parcial, isto é:

$$q_t = \frac{1-\delta}{1-\delta L} q_t^d, \quad 0 \leq \delta < 1 \tag{9.2}$$

onde L é o operador de defasagem; $L^i X_t = X_{t-i}$. Observe-se que na hipótese de $\delta = 0$, q_t é igual a q_t^d, ou seja, o ajustamento ocorre no período do modelo e por isso é denominado instantâneo.

O preço esperado pelo agricultor, em princípio, não é observado. Deste modo é necessário que alguma formulação explicite como o preço esperado relaciona-se com os observados no mercado. Para tal finalidade, um mecanismo bastante popular, depois de sua introdução por Cagan no estudo de hiperinflação, é o mecanismo de expectativa adaptada e que se expressa pela equação:

$$p_t^e = \frac{1-\lambda}{1-\lambda L} p_{t-1}, \quad 0 \leq \lambda < 1 \tag{9.3}$$

onde λ é o coeficiente de adaptação e p_{t-1} é o preço do produto no período $t-1$.

O modelo de oferta de produtos agrícolas devido a Nerlove consiste das equações (9.1), (9.2) e (9.3). Combinando-se essas três equações, resulta na forma reduzida do modelo:

$$\begin{aligned} q_t = {} & \alpha(1-\delta)(1-\lambda) + (\lambda+\delta)\, q_{t-1} - \lambda\delta q_{t-2} \\ & + \beta(1-\lambda)(1-\delta)\, p_{t-1} + \gamma(1-\delta)\, Z_t \\ & - \gamma(1-\delta)\lambda\, Z_{t-1} + u_t - \lambda u_{t-1} \end{aligned} \tag{9.4}$$

onde $u_t = (1-\delta)\,\varepsilon_t$

VII.9.1.1 — Condição de Estabilidade

Para valores estáveis do preço do produto e das variáveis incluídas no vetor Z_t, não se considerando a parte aleatória, as condições de estabilidade da equação (9.4), uma equação de diferenças finitas de segunda ordem na variável q_t, são as seguintes:

$$1 - \lambda - \delta + \lambda\delta > 0$$

$$1 + \lambda + \delta + \lambda\delta > 0$$

$$1 - \lambda\delta > 0$$

Como $0 \leqslant \lambda < 1$ e $0 \leqslant \delta < 1$, segue-se que as três desigualdades acima são automaticamente satisfeitas, assegurando, portanto, a convergência da equação (9.4).

A especificação econométrica da equação de oferta requer a especificação da sua parte estocástica. A seguir tratamos desse problema, discutindo as implicações de várias hipóteses alternativas quanto à variável estocástica u_t.

VII.9.1.2 — Especificação da Parte Estocástica

Inicialmente admitiremos que $\gamma = 0$, o que significa dizer que a quantidade ofertada depende apenas do preço esperado do produto. Assim, a equação (9.4) reduz-se a:

$$q_t = \alpha(1-\delta)(1-\lambda) + (\lambda+\delta)q_{t-1} - \lambda\delta q_{t-2} + \\ + \beta(1-\lambda)(1-\delta)p_{t-1} + u_t - \lambda u_{t-1} \qquad (9.5)$$

Observe-se que, a não ser pela parte estocástica, os parâmetros λ e δ entram na equação (9.5) simetricamente, ou seja, trocando-se λ por δ não se altera a equação desde que não se considere o termo $u_t - \lambda u_{t-1}$.

Quanto à parte estocástica, consideraremos quatro hipóteses para a variável aleatória u_t, a saber:

Hipótese I: $u_t - \lambda u_{t-1} = \varepsilon_{1t}$. A variável ε_{1t} é normal com média zero e variância σ^2; isto é, ε_{1t} é $N(0,\sigma^2)$. As variáveis ε_{1t} e ε_{1s} são independentes para $t \neq s$.

Hipótese II: u_t tem uma distribuição $N(0,\sigma^2)$. As variáveis u_t e u_s são independentes para $t \neq s$.

Hipótese III: $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_{3t}$. A variável ε_{3t} é $N(0,\sigma^2)$ e ε_{3t} e ε_{3s} são independentes para $t \neq s$.

Hipótese IV: $u_t - \lambda u_{t-1} = \theta(u_{t-1} - \lambda u_{t-2}) + \varepsilon_{4t}$. A variável ε_{4t} é $N(0,\sigma^2)$. As variáveis ε_{4t} e ε_{4s} são independentes para $t \neq s$.

A especificação da parte estocástica da equação de oferta é importante porque uma especificação incorreta pode levar a resultados contrários ao esperado. Por exemplo, se a hipótese adequada for a segunda, enquanto erroneamente estimou-se os parâmetros usando-se a primeira hipótese, pode-se demonstrar que existe a possibilidade de que o coeficiente da variável q_{t-2} tenha o sinal positivo embora o correto seja negativo.

É interessante observar que a terceira hipótese coincide com a primeira se $\rho = \lambda$. Quando $\rho = 0$, a terceira hipótese é idêntica à segunda e, se $\theta = 0$, a quarta hipótese reduz-se à primeira. Cuidemos agora da análise de cada uma dessas hipóteses.

a) *Hipótese I* — De acordo com a primeira hipótese a equação (9.5) passa a ser escrita como:

$$q_t = \alpha(1-\lambda)(1-\delta) + (\lambda+\delta)q_{t-1} - \lambda\delta q_{t-2} \\ + \beta(1-\lambda)(1-\delta)p_{t-1} + \varepsilon_{1t} \qquad (9.6)$$

Neste caso, é impossível estimar-se os parâmetros λ e δ separadamente, pois estes não podem ser identificados a partir da equação (9.6).[4]

Entretanto, é possível testar se um dos coeficientes é igual a zero. Quando o coeficiente de q_{t-2} é igual a zero significa dizer que ou o modelo não contém o mecanismo de expectativa adaptada ou que o mecanismo de ajustamento parcial não está presente. É possível, também, que ambos não façam parte do modelo e neste caso o coeficiente de q_{t-1} seria também igual a zero.

A primeira hipótese supõe que a variável aleatória u_t segue um processo auto-regressivo de primeira ordem, cujo coeficiente de auto-regressão é justamente igual ao parâmetro λ do mecanismo de expectativa adaptada. Sem dúvida, inexiste qualquer razão para que, *a priori*, admita-se tal coincidência.

b) *Hipótese II* — Quando o erro u_t segue o processo estocástico descrito na segunda hipótese, a equação (9.5) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\eta_t = \lambda\eta_{t-1} + \alpha(1-\lambda)(1-\delta) + \delta(q_{t-1} - \lambda q_{t-2}) + \beta(1-\lambda)(1-\delta)p_{t-1} \tag{9.7}$$

onde:

$$\eta_t = q_t - u_t$$

O valor de η para o período $t-1$ é igual a:

$$\eta_{t-1} = \lambda\,\eta_{t-2} + \alpha(1-\lambda)(1-\delta) + \delta(q_{t-2} - \lambda q_{t-3}) + \beta(1-\delta)(1-\lambda)p_{t-2}$$

Multiplicando-se por λ a equação acima e substituindo este resultado em (9.7), obtemos:

$$\eta_t = \lambda^2\eta_{t-2} + \alpha(1-\delta)(1-\lambda)(1+\lambda) + \delta(q_{t-1} - \lambda^2 q_{t-3}) + \beta(1-\delta)(1-\lambda)(p_{t-1} + \lambda p_{t-2})$$

Procedendo, sucessivamente, da mesma maneira pela qual esta equação foi obtida, resulta:

$$\eta_t = \eta_0\lambda^t + \alpha(1-\delta)(1-\lambda)(1+\lambda+\dots+\lambda^{t-1}) + \delta(q_{t-1} - \lambda^t q_{t-1}) + \beta(1-\delta)(1-\lambda)(p_{t-1} + \lambda p_{t-2} + \dots + \lambda^{t-1}p_0)$$

Observando que $1 + \lambda + \dots + \lambda^{t-1} = (1-\lambda^t)/(1-\lambda)$ e que $q_t = \eta_t + u_t$, a equação anterior transforma-se em:

$$q_t = \alpha(1-\delta) + [\eta_0 - \alpha(1-\delta)]\,X_{1t} + \delta X_{2t} + \beta(1-\delta)X_{3t} + u_t \tag{9.8}$$

[4] O problema de identificação existe quando um dado conjunto de observações y pode ser gerado por diferentes funções de probabilidade, isto é, $p(y/\theta) = p(y/\phi)$ onde ϕ e θ são parâmetros diferentes. Neste caso, não se pode discernir a partir da amostra qual dos dois modelos está gerando as observações y. O modelo é dito não identificado e os parâmetros não são identificados.

onde $\eta_0 = q_0 - u_0$ é um novo parâmetro que reflete condições iniciais no modelo e:

$$
\begin{aligned}
X_{1t} &= \lambda^t \\
X_{2t} &= q_{t-1} - \lambda^t q_{-1} \qquad\qquad (9.9) \\
X_{3t} &= (1-\lambda)\ [p_{t-1} + \lambda p_{t-2} + \cdots + \lambda^{t-1}\ p_0]
\end{aligned}
$$

Concluímos da equação (9.8) que os parâmetros α, β, λ, δ, e σ são identificados e utilizando-se o processo proposto por Zellner-Geisel (1970) podemos estimar estes parâmetros. Com efeito, desde que λ esteja compreendido entre zero e um, tomamos valores arbitrários de λ neste intervalo e construímos, para cada valor de λ, as variáveis X_{1t}, X_{2t} e X_{3t}, as quais dependem de λ na forma explicitada em (9.9). Com estes valores fazemos a regressão:

$$q_t = a_0 + a_1 X_{1t} + a_2 X_{2t} + a_3 X_{3t} + e_t$$

Para cada regressão temos a soma dos quadrados dos resíduos associada ao valor de λ usado. O valor de λ que fornece a menor soma dos quadrados dos resíduos é o que maximiza a função de verossimilhança e os correspondentes valores de a_0, a_1, a_2 e a_3 são as estimativas de máxima verossimilhança dos coeficientes de (9.8). É imediata, então, a obtenção das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros α, β e δ.

Os intervalos de confiança e os testes de hipótese para λ podem ser construídos usando-se a propriedade de que, para grandes amostras, menos duas vezes o logaritmo da razão de máxima verossimilhança segue uma distribuição qui-quadrada com um grau de liberdade, isto é:

$$-\ 2 \log \frac{l\,(\lambda)}{l\,(\bar{\lambda})} = \chi^2 (1)$$

onde $\bar{\lambda}$ é o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro λ.

c) *Hipótese III* — Quando u_t segue um processo auto-regressivo de primeira ordem, cujo coeficiente de auto-regressão é ρ, a equação (9.5), subtraída da mesma equação defasada de um período e multiplicada por ρ, nos dá:

$$
\begin{aligned}
q_t - \rho q_{t-1} = {} & \alpha (1-\lambda)\ (1-\delta)\ (1-\rho) + (\lambda+\delta)\ [q_{t-1} - \rho q_{t-2}] \\
& - \lambda\delta\ [q_{t-2} - \rho q_{t-3}] + \beta (1-\delta)\ (1-\lambda)\ [p_{t-1} - \rho p_{t-2}] \\
& + (u_t - \rho u_{t-1}) - \lambda (u_{t-1} - \rho u_{t-2})
\end{aligned}
$$

Tendo-se em vista que $u_t - \rho u_{t-1} = \varepsilon_{3t}$, esta equação pode ser reescrita:

$$
\begin{aligned}
q_t - \rho q_{t-1} - \varepsilon_{3t} = {} & \alpha (1-\lambda)\ (1-\delta)\ (1-\rho) + \lambda\ (q_{t-1} - \rho q_{t-2} - \varepsilon_{3t-1}) \\
& + \delta\ [q_{t-1} - \rho q_{t-2} - \lambda (q_{t-2} - \rho q_{t-3})] + \beta (1-\delta)\ (1-\lambda)\ (p_{t-1} - \rho p_{t-2})
\end{aligned}
$$

Denominando-se agora por η_t a expressão $q_t - \rho q_{t-1} - \varepsilon_{3t}$, isto é:

$$\eta_t = q_t - \rho q_{t-1} - \varepsilon_{3t}$$

e procedendo-se da mesma forma que no caso da hipótese anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} q_t - \rho q_{t-1} = {} & \alpha (1-\delta)(1-\rho) + [\eta_0 - \alpha(1-\delta)(1-\rho)]\,\lambda^t \\ & + \delta\,[q_{t-1} - \rho q_{t-2} - \lambda^t (q_{-1} - \rho q_{-2})] + \\ & + \beta(1-\delta)(1-\lambda)\;[(p_{t-1} - \rho p_{t-2}) + \lambda (p_{t-2} - \rho p_{t-3}) + \ldots \\ & + \lambda^{t-1}(p_0 - \rho p_{-1})] + \varepsilon_{3t} \end{aligned}$$

Adotando-se uma notação mais simplificada para escrever esta equação, temos:

$$\begin{aligned} q_t - \rho q_{t-1} = {} & \alpha(1-\delta)(1-\rho) + [\eta_0 - \alpha(1-\delta)(1-\rho)]\,X_{1t} \\ & + \delta X_{2t} + \beta(1-\delta)\,X_{3t} + \varepsilon_{3t} \end{aligned} \tag{9.10}$$

onde:

$$\begin{aligned} X_{1t} &= \lambda^t \\ X_{2t} &= q_{t-1} - \rho q_{t-2} - \lambda^t (q_{-1} - \rho q_{-2}) \\ X_{3t} &= (1-\lambda)\,[(p_{t-1} - \rho p_{t-2}) + \lambda\,(p_{t-2} - \rho p_{t-3}) + \ldots \\ & \qquad \lambda^{t-1}(p_0 - \rho p_{-1})] \end{aligned} \tag{9.11}$$

Obviamente, desde que $\rho \neq \lambda$, podemos concluir que os parâmetros δ e λ são identificados. Segue-se, então, que neste caso é importante testar a hipótese nula $H_0 : \rho = \lambda$ contra a alternativa $H_1 : \rho \neq \lambda$. Esse teste pode ser efetuado usando-se a distribuição qui-quadrado, como veremos a seguir.

Tendo em vista que $-\infty < \rho < \infty$, pois o processo auto-regressivo pode ser explosivo ($|\rho| > 1$) ou não ($|\rho| < 1$), e que $0 < \lambda < 1$, para cada par de valor (ρ,λ) localizado nesta região, fazemos a regressão:

$$q_t(\rho) = a_0 + a_1 X_{1t} + a_2 X_{2t} + a_3 X_{3t} + e_t$$

onde $q_t(\rho) = q_t - \rho q_{t-1}$. As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros a_0, a_1, a_2, a_3 e λ serão aqueles valores que tornam mínima a soma dos quadrados dos resíduos da regressão. É imediata, então, a obtenção das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros α, β, δ e η_0. Novamente, baseado no fato de que $-2 \log [l(\lambda,\rho) / l(\hat{\lambda}, \hat{\rho})]$, onde $\hat{\lambda}$ e $\hat{\rho}$ são os estimadores de máxima verossimilhança, é distribuída de acordo com uma distribuição qui-quadrado, podemos testar a hipótese de que $\rho = \lambda$ e construir intervalos de confiança para ρ e λ. Analogamente, poderíamos testar a hipótese de que $\rho = 0$.

d) *Hipótese IV* — A equação (9.5) defasada de um período e multiplicada por θ é igual a:

$$\theta q_{t-1} = \alpha(1-\lambda)(1-\delta)\,\theta + \theta(\lambda+\delta)\,q_{t-2} - \theta\lambda\delta q_{t-3}$$
$$+\ \theta\beta(1-\delta)(1-\lambda)\,p_{t-2} + \theta u_{t-1} - \theta\lambda u_{t-2}$$

Esta equação subtraída de (9.5) resulta em:

$$q_t - \theta q_{t-1} = \alpha(1-\lambda)(1-\delta)(1-\theta) + (\lambda+\delta)(q_{t-1} - \theta q_{t-2})$$
$$-\ \lambda\delta(q_{t-2} - \theta q_{t-3}) + \beta(1-\delta)(1-\lambda)(p_{t-1} - \theta p_{t-2}) + \varepsilon_{4t}$$

Na obtenção desse resultado levamos em conta o fato de que, na quarta hipótese, admitimos $\varepsilon_{4t} = (u_t - \lambda u_{t-1}) - \theta(u_{t-1} - \lambda u_{t-2})$. Os parâmetros λ e δ, neste caso, não são identificados. Todavia, a hipótese nula de que $\theta = 0$ poderia ser testada empregando-se para tal finalidade a distribuição qui-quadrado.

VII.9.1.3 — Inclusão de Outra Variável Além do Preço Esperado na Equação de Oferta

Quando se inclui outra variável além do preço esperado na equação de oferta, o parâmetro γ é diferente de zero e a estimação da equação (9.4), repetida aqui por conveniência,

$$q_t = \alpha(1-\delta)(1-\lambda) + (\lambda+\delta)\,q_{t-1} - \lambda\delta q_{t-2}$$
$$+\ \beta(1-\lambda)(1-\delta)\,p_{t-1} + \gamma(1-\delta)\,Z_t - \gamma(1-\delta)\,\lambda Z_{t-1}$$
$$+\ u_t - \lambda u_{t-1} \qquad (9.12)$$

não apresenta maiores problemas com as especificações das quatro hipóteses relativas à parte estocástica. Cabe ressaltar que a inclusão da variável Z_t faz com que o problema de identificação dos parâmetros desapareça, qualquer que seja a hipótese adotada para o erro aleatório do modelo. Todavia, quando se usa o tempo t como uma *proxy* para a variável Z_t, através de

$$Z_t = a + b\,t$$

a equação (9.12) transforma-se em:

$$q_t = \alpha(1-\delta)(1-\lambda) + \gamma(1-\delta)\,[a(1-\lambda) + b\,\lambda]$$
$$+\ (\lambda+\delta)\,q_{t-1} - \lambda\,\delta\,q_{t-2} + \beta(1-\lambda)(1-\delta)\,p_{t-1}$$
$$+\ \gamma(1-\delta)\,\beta(1-\lambda)\,t + u_t - \lambda u_{t-1} \qquad (9.13)$$

Quando $u_t - \lambda u_{t-1} = \varepsilon_{1t}$, que corresponde à primeira hipótese, os parâmetros λ e δ não são identificados, pois entram simetricamente em (9.13). Nas Hipóteses II e III os parâmetros λ e δ podem ser identificados.

VII.9.1.4 — Generalização do Modelo de Nerlove

O modelo de oferta de produtos agrícolas desenvolvido por Nerlove tem sido e pode ser generalizado em pelo menos duas direções. A primeira diz respeito à formulação de equações mais complexas que expressam o mecanismo de ajuste entre a quantidade planejada e a quantidade efetivamente plantada, substituindo-se, portanto, à equação (9.2) por outra especificação.

Uma segunda linha de ataque concerne à especificação da formação de expectativas. Assim é que outros mecanismos têm sido usados em substituição à expectativa adaptada. No caso de usar-se, por exemplo, expectativas racionais, o modelo deve incluir, também, uma equação de demanda pelo produto agrícola em estudo, uma equação que retrate as condições de mercado, equilíbrio ou desequilíbrio, assim como descrição dos processos estocásticos geradores das variáveis exógenas ao modelo.

VII.9.2 — Alguns Estudos Empíricos

O modelo de Nerlove de oferta de produtos agrícolas tem sido, sem dúvida alguma, bastante utilizado em trabalhos empíricos, no Brasil como em outros países, com o objetivo principal de verificar se os produtores agrícolas respondem a estímulos de preços. Aliás, era usual por volta da década de 50 afirmar-se que nos países subdesenvolvidos a oferta agrícola não reagia às variações de preços. Essa hipótese hoje em dia é desacreditada face ao acúmulo de evidências que apontam na direção contrária.

Os estudos cujos resultados serão descritos a seguir utilizaram-se basicamente de casos particulares do modelo cuja forma reduzida é expressa pela equação (9.4), e que por conveniência será repetida aqui:

$$\begin{aligned} q_t = {} & \alpha (1-\delta)(1-\lambda) + (\lambda+\delta) q_{t-1} - \lambda\delta\, q_{t-2} \\ & + \beta (1-\lambda)(1-\delta)\, p_{t-1} + \gamma (1-\delta) Z_t - \gamma (1-\delta) \lambda Z_{t-1} \\ & + u_t - \lambda u_{t-1} \end{aligned} \tag{9.14}$$

Essa equação servirá de paradigma na análise dos três estudos empíricos que examinaremos nesta subseção. Antes de começar a análise cabe fazer algumas observações de ordem geral acerca da contrapartida empírica das variáveis que entram na equação anterior.

A produção agrícola usualmente apresenta uma flutuação bastante grande devido a fatores climáticos. Por esta razão, utiliza-se, em geral, a área plantada como variável dependente, ao invés da produção agrícola. Obviamente, pode-se argumentar com uma boa dose de razão, que a equação de oferta, neste caso, é na verdade uma equação de demanda de um fator de produção.

No tocante ao preço do produto agrícola, este deve ser deflacionado por um índice de preços, pois ao produtor o que interessa é o preço real e não o preço nominal do produto que ele vende.

Quanto às variáveis a serem incluídas no vetor Z poderíamos classificá-las em três grupos: i) preços dos fatores de produção; ii) preços dos produtos considerados como alternativos ao produto em questão; e iii) variáveis introduzidas para captar o efeito sobre a produção de incertezas inerentes à produção agrícola. Eventualmente, quando não se dispõe de dados sobre algumas destas variáveis, introduz-se o tempo como uma *proxy* para as variáveis que estão influenciando de maneira sistemática o nível de produção e que são correlacionadas com o tempo.

VII.9.2.1 — Toyama e Pescarin (1970)

O trabalho de Toyama e Pescarin estuda a oferta agrícola no Estado de São Paulo, no período de 1948 a 1969, para os seguintes produtos: algodão, amendoim, arroz, banana, batata, cana-de-açúcar, cebola, feijão, laranja, mamona, mandioca, milho, soja e tomate.

A especificação econométrica usada por esses autores parte da hipótese de que as expectativas são estáticas e que o ajustamento na produção não é instantâneo. A equação (9.14), quando se faz λ igual a zero, reduz-se, então, a:

$$q_t = \alpha(1-\delta) + \delta q_{t-1} + \beta(1-\delta)p_{t-1} + \gamma(1-\delta)Z_t + u_t$$

Em algumas regressões, ao invés de usarem o preço com um período de defasagem, Toyama e Pescarin utilizam o preço no próprio período t ou o preço com dois períodos de defasagens. No tocante ao vetor Z, as seguintes variáveis foram incluídas: salário mínimo, índice de preços de adubos, preços de produtos alternativos e o tempo como variável de tendência.

A Tabela VII.1 reporta os vários resultados encontrados por Toyama e Pescarin e que serão comentados, por produto, logo adiante. Nesta tabela, as estimativas na linha com o número 1 ao lado do nome do produto em questão, que será denominada daqui por diante de regressão 1, correspondem à equação cuja variável dependente é o nível de produção. No caso do número 2, a variável dependente na equação é a área plantada e a regressão será denominada de regressão 2.

Algodão — Em ambas regressões as variáveis da equação desse produto estao expressas na escala aritmética. Na regressão 1 as variáveis independentes são: produção defasada de um período (q_{t-1}), preço do algodão defasado de um período (p_{t-1}), preço do amendoim defasado de um período (Z_{t-1}), salário mínimo defasado de um período (S_{t-1}), índice de preços de adubos (I) e a variável de tendência (t). Somente o coeficiente do preço do algodão é significativo, e os sinais correspondentes ao salário mínimo e ao índice de preços de adubos são contrários ao esperado.

Na regressão 2 as variáveis independentes são: área defasada de um período (q_{t-1}), preço do algodão defasado de dois períodos (p_{t-2}), preço do amendoim defasado de dois períodos (Z_{t-2}), salário mínimo defasado de dois períodos (S_{t-2}), índice de preços de adubos (I) e a tendência (t). As únicas variáveis significativas no caso dessa regressão são o índice de preços de adubos e a tendência. Os sinais dos coeficientes das variáveis área defasada, preço do amendoim e índice de preços de adubos têm os sinais contrários ao esperado.

Amendoim — Em ambas regressões as variáveis independentes são: produção defasada de um período ou área defasada de um período (q_{t-1}), preço do amendoim defasado de um período (p_{t-1}), preço do algodão defasado de um período (Z_{t-1}), salário mínimo defasado de um período (S_{t-1}) e a tendência (t).

Na regressão 1 os coeficientes de produção defasada e do preço do amendoim são significativos, enquanto o sinal do coeficiente do salário mínimo é contrário ao esperado.

Na regressão 2 os coeficientes da área defasada e do preço do amendoim são significativos.

Na regressão 1 as variáveis estão na escala aritmética, enquanto na regressão 2 as variáveis estão na escala logarítmica.

Arroz — As regressões da equação de oferta deste produto são lineares nos logaritmos das variáveis. Para ambas regressões, as variáveis independentes são as seguintes: produção defasada de um período ou área defasada de um período (q_{t-1}), preço do arroz defasado de um período (p_{t-1}), preço do milho defasado de um período (Z_{t-1}), salário mínimo defasado de um período (S_{t-1}) e a tendência (t).

Na regressão 1 somente o coeficiente do salário mínimo é significativo, enquanto na regressão 2 o mesmo ocorre com o coeficiente do preço do arroz. Os sinais dos coeficientes de todas as variáveis estão corretos, de acordo com o que se espera *a priori*.

Banana — Para este produto, em ambas regressões as variáveis estão expressas na escala aritmética e as variáveis independentes são as seguintes: produção defasada de um período ou área defasada de um período (q_{t-1}), preço da banana defasada de dois períodos (p_{t-2}) e a tendência (t).

Na regressão 1 os coeficientes do preço da banana e da tendência são significativos, enquanto na regressão 2 os coeficientes da área defasada e do preço da banana são significativos. Todavia, o único coeficiente com o sinal correto é o da área defasada.

Batata — Para este produto, as variaveis em ambas regressões estão na escala aritmética. Na regressão 1 as variáveis independentes são: produção defasada de um período (q_{t-1}), preço da batata no período atual (p_t), salário mínimo defasado de um período (S_{t-1}), índice de preços de adubos (I) e a tendência. Os coeficientes da produção defasada e do preço da batata são significativos. Todavia, o coeficiente do preço da batata é negativo, contrário ao esperado, o mesmo ocorrendo com o coeficiente do salário mínimo. É possível que problemas de simultaneidade estejam acarretando este resultado.

Na regressão 2 as variáveis independentes são: área defasada de um período (q_{t-1}), preço da batata defasado de um período (p_{t-1}), salário mínimo no período atual (S_t), índice de preços de adubos (I) e a tendência (t). Os coeficientes das variáveis preço da batata, salário mínimo e tendência são significativos. Todavia, os sinais encontrados para os coeficientes da área defasada, do preço da batata e do salário mínimo são contrários ao esperado.

Cana-de-Açúcar — Em ambas regressões as variáveis independentes são as seguintes: a produção defasada de um período ou a área defasada de um pe-

Tabela VII.1

OFERTA AGRÍCOLA EM SÃO PAULO: TOYAMA E PESCARIN (1970)

Produto		Constante	q_{t-1}	p_t	p_{t-1}	p_{t-2}	Z_{t-1}	Z_{t-2}	S_t
Algodão	1	— 198,475	0,2211		131,9096		—57,0774		
			(0,1982)		(45,3409)		(61,0877)		
	2	286,7622	—0,0012			53,4730*		11,7780	
			(0,0031)			(44,4024)		(96,8280)	
Amendoim	1	259,8416	0,5859		127,9124		—12,7609		
			(0,2201)		(38,3467)		(23,7003)		
	2	1,0133	0,5507		0,6501		—0,6851		
			(0,1885)		(0,2965)		(0,4029)		
Arroz	1	2,3974	0,1567		0,2115		—0,4372		
			(0,3579)		(0,2718)		(0,3374)		
	2	1,3695	0,3809		0,4246		—0,3194		
			(0,2435)		(0,1419)		(0,2343)		
Banana	1	514,3009	—0,3171			—165,0281*			
			(0,2656)			(75,5525)			
	2	50,3577	0,6494			—38,8857*			
			(0,1628)			(17,5573)			
Batata	1	244,5235	0,3223	—34,5850					
			(0,1832)	(18,4136)					
	2	72,6853	—0,2125		—5,6032				3,7132
			(0,1232)		(1,0794)				(2,0092)
Cana-de--Açúcar	1	4,3064	—0,1642			0,6115			
			(0,2100)			(0,1136)			
	2	—173,3308	0,3243			1117,9379			
			(0,3905)			(591,8366)			
Cebola	1	55,6316	—0,2007		—2,6024		—2,5883		
			(0,2478)		(1,6651)		(3,7227)		
	2	14,3624	—0,0762		—0,4399		—0,7427		
			(0,2322)		(0,2528)		(0,5634)		
Feijão	1	1,2034	0,3569		0,3449				
			(0,2670)		(0,1915)				
	2	1,4504	0,2810		0,3133				
			(0,2383)		(0,1489)				
Laranja	1	1,2433	0,2602			—0,2426			
			(0,1747)			(0,1405)			
	2	0,5567	0,5365			—0,2010			
			(0,1994)			(0,1083)			
Mamona	1	—22,6087	0,5832		8,9200		6,0713		
			(0,2307)		(4,0588)		(11,9014)		
	2	28,9678	0,6105		11,6192		5,3597		
			(0,2461)		(4,1266)		(11,8790)		
Mandioca	1	1,3603	0,4540		0,0523				
			(0,2451)		(0,1473)				
	2	—14,0060	0,5483		93,9538				
			(0,2073)		(51,7728)				
Milho	1	0,5648	0,7484		0,8340		—0,2357		
			(0,3602)		(0,4390)		(0,8030)		
	2	2,5195	0,0411		0,0286		0,1426		
			(0,2772)		(0,2037)		(0,1195)		
Soja	1	—325,3538	1,3027		615,1362		—758,8013		
			(0,1400)		(536,2772)		(577,1923)		
	2	2,5558	0,6209		—4,0403				
			(0,3366)		(2,3531)				
Tomate	1	25,4891	0,0814			—9,238			16,0238)
			(0,2493)			(24,2958)			(4,5652
	2	—4,4224	0,0853		2,9666				
			(0,2391)		(1,5480)				

FONTE: Toyama e Pescarin (1970).

SÍMBOLOS: q_t = área ou produção no ano t; q_{t-1} = área ou produção no ano $t-1$; p_{t-1} = preço do produto no ano $t-1$; Z_{t-1} = preço do produto alternativo no ano t-1: S_{t-1} = salário mínimo no ano $t-1$; I = índice de preços de adubos; T = tendência. Os números entre parênteses são os valores dos erros-padrão.

S_t	S_{t-2}	I	T	R^2	DW	F	Observação
52,8198		0,9008	9,8568	0,5773	1,9886	2,9602	1 — Produção
(108,1176)		(2,7118)	(8,6505)				2 — Área
	—54,470	8,1035	—36,8746	0,8850	1,9768	16,684	z — Preço do Amendoim
	(114,7378)	(2,5465)	(9,3395)				
50,4124			10,8405	0,9089	2,3856	27,950	1 — Produção
(42,9604)			(7,6719)				2 — Área (log-log)
—0,0722			0,2581	0,8974	1,5641	24,500	exceto constante
(0,1562)			(9,2467)				z — Preço do algodão
—0,2603			—0,0138	0,3682	1,8091	1,6318	1 — Produção (log-log)
(0,1013)			(0,1413)				2 — Área (log-log)
—0,1625			0,1988	0,7734	2,0451	9,5566	z — Preço do milho
(0,1651)			(0,1455)				
			13,0420	0,7938	1,7799	19,248	1 — Produção
			(3,5556)				2 — Área
			—0,2717	0,6589	1,1748	9,6627	
			(0,4582)				
54,3882		—0,3724	3,7315	0,7965	2,2218	11,749	1 — Produção
(33,5126)		(0,5304)	(2,2140)				2 — Área
		—0,0196	—1,1124	0,9031	1,7111	27,975	
		(0,0320)	(0,1255)				
	—0,0079	0,0445	1,1303	0,9791	1,6724	122,20	1 — Produção (log-log)
	(0,0719)	(0,1068)	(0,2337)				2 — Área
	45,2613	1,0781	17,2701	0,9719	2,2145	89,370	
	(26,9715)	(0,5434)	(12,4740)				
		—0,1280	1,1618	0,5697	2,0283	3,7077	1 — Produção
		(0,0972)	(0,3686)				— Área
		—0,0267	0,0428	0,4166	1,8442	1,9995	z — Preço do tomate
		(0,0158)	(0,0505)				
			—0,0186	0,2314	1,6214	1,6061	1 — Produção (log-log)
			(0,1057)				2 — Área (log-log)
			0,1618	0,6173	1,9473	8,6061	
			(0,1207)				
		—0,3034	1,2250	0,9844	2,3898	221,78	1 — Produção (log-log)
		(0,1747)	(0,2661)				2 — Área (log-log)
		—0,1774	0,5544	0,9854	2,0128	243,81	
		(0,1390)	(0,3013)				
2,0787			1,3109	0,8798	2,3462	9,5941	1 — Produção
(7,9062)			(0,7099)				2 — Área
0,9653			1,3833	0,7849	3,0077	10,217	z — Preço do milho
(8,3438)			(0,7184)				
			0,3929	0,8801	1,8118	39,169	1 — Produção (log-log)
			(0,2325)				2 — Área
			2,8234	0,8277	1,799	25,623	
			(1,3432)				
			0,2944	0,7178	2,5413	9,5406	1 — Produção (log-log)
			(0,1453)				2 — Área (log-log)
			0,3427	0,7510	2,0926	11,313	z — Preço do arroz
			(0,0960)				
				0,9042	2,2732	50,340	1 — Produção
			0,2836	0,6943	2,6479	12,113	2 — Área (log-log)
			(0,6879)				z — Preço do milho
				0,8407	2,2146	28,156	1 — Produção
			0,6062	0,6273	1,9776	8,9767	2 — Área
			(0,1863)				

ríodo (q_{t-1}), preço da cana-de-açúcar defasado de dois períodos (p_{t-2}), salário mínimo defasado de dois períodos (S_{t-2}), índice de preços de adubos (I) e a tendência (t).

Na regressão 1 as variáveis estão expressas na escala logarítmica e os coeficientes do preço da cana-de-açúcar e da tendência são significativos, enquanto os sinais dos coeficientes da produção defasada e do índice de preços de adubos são contrários ao esperado.

Na regressão 2 as variáveis estão expressas na escala aritmética. Os coeficientes do preço da cana-de-açúcar e do índice de preços de adubos são significativos, enquanto o sinal deste último coeficiente é contrário ao esperado.

Cebola — Em ambas regressões as variáveis estão expressas na escala aritmética e as variáveis independentes são as seguintes: produção defasada de um período ou a área defasada de um período (q_{t-1}), preço de cebola defasado de um período (p_{t-1}), preço do tomate defasado de um período (Z_{t-1}), índice de preços de adubos (I) e a tendência (t).

Na regressão 1 somente o coeficiente da variável tendência é significativo, enquanto na regressão 2 nenhum coeficiente é significativo. Na regressão 1 os sinais dos coeficientes de produção e do preço da cebola são contrários ao esperado. Na regressão 2 os sinais dos coeficientes da área e do preço da cebola são também contrários ao esperado.

Feijão — Em ambas regressões as variáveis independentes são as seguintes: produção defasada de um período ou área defasada de um período (q_{t-1}), preço do feijão defasado de um período (p_{t-1}) e a tendência (t).

Nas duas regressões somente o preço do feijão é significativo, os sinais das variáveis são os esperados, e todas as variáveis estão expressas na escala logarítmica.

Laranja — As variáveis independentes em ambas regressões são as seguintes: produção defasada de um período ou área defasada de um período (q_{t-1}), preço da laranja defasado de dois períodos (p_{t-2}), índice de preços de adubos (I) e a tendência (t).

Na regressão 1 somente o coeficiente da tendência é significativo, enquanto na regressão 2 somente o índice de preços de adubos não é significativo. Em ambas regressões o sinal do coeficiente do preço da laranja é negativo, contrário ao esperado, e todas as variáveis estão expressas na escala logarítmica.

Mamona — As variáveis independentes em ambas regressões são as seguintes: produção defasada de um período ou área defasada de um período (q_{t-1}), preço da mamona defasado de um período (p_{t-1}), preço do milho defasado de um período (Z_{t-1}), salário mínimo defasado de um período (S_{t-1}) e a tendência (t). As variáveis nestas regressões estão expressas na escala aritmética.

Em ambas regressões os coeficientes das variáveis q_{t-1}, p_{t-1} e t são significativos, enquanto os sinais do preço do milho e do salário mínimo não são os previstos.

Mandioca — Em ambas regressões as variáveis independentes são: produção defasada de um período ou área defasada de um período (q_{t-1}), preço da mandioca defasado de um período (p_{t-1}) e a tendência (t).

Na regressão 1, cujas variáveis estão expressas na escala logarítmica, somente o coeficiente da produção defasada é significativo. Na regressão 2, em que todas as variáveis estão expressas na escala aritmética, todos os coeficientes estimados são significativos.

Milho — As variáveis independentes em ambas regressões são as seguintes: produção defasada de um período ou área defasada de um período (q_{t-1}), preço do milho defasado de um período (p_{t-1}), preço do arroz defasado de um período (Z_{t-1}) e a tendência (t). Todas as variáveis em ambas regressões estão expressas na escala logarítmica.

Na regressão 1 somente o preço do arroz não é significativo, enquanto na regressão 2 isto acontece com o coeficiente da variável de tendência. Na regressão 2 o sinal do coeficiente do preço do arroz é contrário ao esperado.

Soja — Na regressão 1 as variáveis independentes são as seguintes: produção defasada de um período (q_{t-1}), preço da soja defasado de um período (p_{t-1}), preço do milho defasado de um período (Z_{t-1}) e as variáveis estão na escala aritmética.

Na regressão 2, cujas variáveis estão na escala logarítmica, as variáveis independentes são as seguintes: área defasada de um período (q_{t-1}), preço da soja defasado de um período (p_{t-1}) e a tendência (t).

Nas duas regressões somente são significativos os coeficientes da produção e da área defasada. Na regressão 1 os sinais de todos os coeficientes são os esperados, enquanto na regressão 2 o sinal do preço da soja é negativo, contrário ao que se espera *a priori*.

Tomate — Na regressão 1 as variáveis independentes são as seguintes: produção defasada de um período (q_{t-1}), preço do tomate defasado de dois períodos (Z_{t-2}) e o salário mínimo no período t (S_t). Na regressão 2 as variáveis independentes são: área defasada de um período (q_{t-1}), preço do tomate defasado de um período (Z_{t-1}) e a tendência (t).

Na regressão 1 somente o coeficiente do salário mínimo é significativo, enquanto na regressão 2 os coeficientes do preço do tomate e da variável de tendência são significativos. Na regressão 1 os sinais dos coeficientes do preço do tomate e do salário mínimo são contrários ao esperado. As variáveis nas duas regressões estão expressas na escala aritmética.

VII.9.2.1.1 — *Sumário das Conclusões*

Nas 28 regressões da Tabela VII.1 o coeficiente da variável-preço não é significativo em 14 regressões: algodão (2), arroz (1), cebola (1 e 2), laranja (1), mandioca (1), milho (2), soja (1 e 2) e tomate (1).[5]

O coeficiente da produção defasada só é significativo em cinco regressões: amendoim, batata, mamona, mandioca e soja, enquanto o coeficiente da área defasada é significativo para os seguintes produtos: amendoim, banana, mamona, mandioca e soja.

[5] Os números entre parênteses correspondem ao número da regressão na Tabela VII.1.

O coeficiente do preço do produto alternativo não é significativo em nenhum caso considerado. O coeficiente do salário mínimo só é significativo no caso dos seguintes produtos: arroz (1), batata (2) e tomate (1). O coeficiente do índice de preços de adubos somente é significativo para o algodão (2) e a cana-de-açúcar (2). O coeficiente da variável de tendência é significativo nas equações de oferta agrícola dos seguintes produtos: algodão (2), banana (1), batata (2), cana-de-açúcar (1), cebola (1), laranja (1), mamona (1 e 2), mandioca (2), milho (2) e tomate (2).

VII.9.2.2 — Pastore (1973)

O trabalho de Pastore estuda a resposta da produção agrícola aos preços, com dados do Brasil como um todo, do período que vai de 1945 a 1965, para os seguintes produtos: algodão, amendoim, arroz, cana-de-açúcar, cebola, fumo, mamona, mandioca e milho.

A primeira especificação usada por Pastore, cujas estimativas estão apresentadas na Tabela VII.2, é um caso particular da equação (9.14) quando se faz o parâmetro λ igual a zero e se utiliza o tempo t como *proxy* para a variável Z. Isto é:

$$q_t = \alpha(1-\delta) + \delta q_{t-1} + \beta(1-\delta)p_{t-1} + \gamma(1-\delta)t + u_t$$

Na Tabela VII.2 existem duas regressões para cada produto. Na regressão 1 a relação funcional é linear nas variáveis, enquanto na regressão 2 a relação é linear no logaritmo das variáveis. Em ambos os casos a variável dependente é a área cultivada e a variável de tendência está na escala aritmética.

Segundo os resultados apresentados na Tabela VII.2, no caso das equações do algodão, amendoim, arroz, mamona, mandioca e milho, todos os coeficientes, em ambas regressões, são significativos e têm os sinais corretos.

Para a cana-de-açúcar, na regressão 1, o coeficiente da área defasada de um período não é significativo e tem o seu sinal incorreto; na regressão 2 somente o coeficiente da variável de tendência é significativo sendo que os sinais dos coeficientes da área defasada e do preço da cana-de-açúcar são contrários ao esperado.

Para a cebola, somente o coeficiente da variável de tendência é significativo, todavia os sinais de todos os coeficientes estão corretos.

No caso do feijão, todos os coeficientes apresentam os sinais corretos. Na regressão 1 somente a área defasada não é significativa, enquanto na regressão 2 somente o coeficiente da variável de tendência é significativo.

Para o fumo, os coeficientes de todas as variáveis apresentam os sinais corretos, todavia na regressão 1 o coeficiente da variável de tendência é significativo.

Em resumo, as evidências empíricas da Tabela VII.2 mostram que: i) o coeficiente da variável de tendência é significativo em todas as regressões; ii) o coeficiente da variável-preço não é significativo nos casos de cana-de-açúcar (2), cebola (1 e 2), feijão (2) e fumo (1 e 2); e iii) o coeficiente da área defasada não é significativo para a cana-de-açúcar (1), cebola (1 e 2), feijão (1 e 2) e fumo (2).

Tabela VII.2

A RESPOSTA DA PRODUÇÃO AGRÍCOLA AOS PREÇOS NO BRASIL: PASTORE (1973)

Produtos		Constante	q_{t-1}	p_{t-1}	T	R^2	DW	S
Algodão	1	81,984	0,694 (5,476) [0,790]	1 105,148 (2,561) [0,517]	311,054 (3,440) [0,630]	0,903	2,332	1 710,271
	2	1,510	0,619 (4,472) [0,725]	0,194 (2,351) [0,485]	0,005 (3,572) [0,639]	0,883	2,511	0,026
Amendoim	1	—1 848,377	0,535 (5,234) [0,786]	730,525 (7,090) [0,864]	113,618 (4,835) [0,761]	0,983	1,539	239,756
	2	1,088	0,551 (3,355) [0,631]	0,511 (2,666) [0,543]	0,019 (2,138) [0,459]	0,939	1,965	0,086
Arroz	1	—4 110,702	0,739 (5,635) [0,799]	3 612,042 (3,366) [0,622]	331,837 (1,845) [0,399]	0,969	1,678	1 713,193
	2	1,616	0,596 (3,757) [0,663]	0,232 (3,751) [0,662]	0,008 (2,307) [0,478]	0,983	1,453	0,020
Cana-de-Açúcar	1	4 765,746	—0,053 (0,231) [0,054]	12 885,865 (2,479) [0,504]	495,005 (4,629) [0,737]	0,986	2,246	396,263
	2	4,045	—0,066 (0,265) [—0,063]	—0,027 (0,672) [—0,156]	0,020 (4,251) [0,708]	0,987	1,981	0,015
Cebola	1	142,686	0,109 (0,468) [0,113]	5,703 (1,150) [0,269]	12,371 (3,925) [0,690]	0,965	2,139	18,125
	2	1,697	0,265 (1,148) [0,268]	0,002 (0,043) [0,011]	0,013 (3,163) [0,609]	0,964	2,265	0,024
Feijão	1	7 121,812	0,125 (0,542) [0,139]	0,663 (2,297) [0,510]	336,266 (2,817) [0,588]	0,932	1,834	792,877
	2	3,143	0,138 (0,545) [0,139]	0,096 (1,499) [0,361]	0,011 (2,538) [0,548]	0,922	1,957	0,025
Fumo	1	410,677	0,457 (2,353) [0,485]	30,653 (1,697) [0,371]	37,402 (2,817) [0,553]	0,951	1,970	105,489
	2	2,357	0,217 (1,024) [0,235]	0,080 (1,267) [0,286]	0,012 (3,497) [0,636]	0,948	1,678	0,025
Mamona	1	36,328	0,706 (5,414) [0,796]	257,914 (2,983) [0,574]	27,253 (2,513) [0,520]	0,885	2,143	286,686
	2	1,003	0,675 (5,385) [0,794]	0,207 (3,388) [0,635]	0,004 (2,612) [0,535]	0,897	2,178	0.029
Mandioca	1	—476,625	0,889 (12,912) [0,953]	4 814,408 (3,027) [0,592]	75,473 (2,505) [0,519]	0,994	1,963	244,806
	2	0,920	0,776 (8,228) [0,894]	0,076 (2,198) [0,470]	0,004 (2,795) [0,561]	0,994	1,911	0,009
Milho	1	—166,129	0,741 (6,395) [0,833]	7 587,744 (2,452) [0,500]	724,261 (2,858) [0.559]	0,986	1,799	1 895,903
	2	1,892	0,586 (3,952) [0,682]	0,113 (2,207) [0,461]	0,007 (3,064) [0,585]	0,988	1,717	0,013

FONTE: Pastore (1973).

SIMBOLOS: q_t = área cultivada no ano t; q_{t-1} = área cultivada no ano t-1; q_{t-2} = área cultivada no ano t-2; p_{t-1} = preço pago aos produtores no ano t-1; T = tendência.

OBS.: Os números entre parênteses são os valores t de Student e os entre colchetes são os coeficientes de correlação entre a variável explicativa e q_t. As equações 1 representam a especificação linear das variáveis e as equações 2 representam a especificação linear nos logarítimos das variáveis (em ambos os casos a variável T está especificada na escala aritmética).

Os resultados apresentados na Tabela VII.3 pressupõem a existência dos mecanismos de ajustamento parcial e de expectativa adaptada no modelo e que a variável de tendência t seja uma *proxy* para a variável Z. Assim, a equação (9.14) é idêntica à equação (9.13), repetida aqui por conveniência:

$$q_t = c + (\lambda + \delta)\, q_{t-1} - \lambda\delta q_{t-2} + \beta(1-\lambda)(1-\delta)\, p_{t-1} + \gamma(1-\delta)\,\beta\,(1-\lambda)\, t + u_t - \lambda\, u_{t-1} \qquad (9.15)$$

onde a constante c é igual a $\alpha(1-\delta)(1-\lambda) + \gamma(1-\delta)[a(1-\lambda) + b\lambda]$.

Tabela VII.3

A RESPOSTA DA PRODUÇÃO AGRÍCOLA AOS PREÇOS NO BRASIL: PASTORE (1973) (AJUSTAMENTO PARCIAL E EXPECTATIVA ADAPTADA)

Produtos	Constante	q_{t-1}	q_{t-2}	p_{t-1}	T	R^2	DW
Algodão	—1 899,180	0,562	0,211	1 126,806	288,806	0,909	2,126
		(3,174)	(1,062)	(2,617)	(3,121)		
		[0,610]	[0,249]	[0,536]	[0,604]		
Amendoim	—1 859,290	0,687	—0,222	720,840	124,966	0,986	1,725
		(5,164)	(1,674)	(7,344)	(5,352)		
		[0,791]	[—0,386]	[0,878]	[0,801]		
Arroz	—1 416,215	1,051	—0,476	3 072,938	491,384	0,971	1,818
		(3,519)	(1,160)	(2,649)	(2,183)		
		[0,649]	[—0,271]	[0,541]	[0,468]		
Cana-de-Açúcar	3 336,274	—0,045	0,356	8 314,793	334,393	0,988	2,363
		[0,196)	(1,184)	(1,293)	(1,944)		
		[—0,048]	[0,276]	[0,299]	[0,426]		
Cebola	97,965	0,073	0,392	0,795	7,896	0,969	1,919
		(0,325)	(1,442)	(0,135)	(1,813)		
		[0,081]	[0,339]	[0,034]	[0,413]		
Feijão	9 981,547	0,100	—0,275	0,567	473,429	0,937	1,969
		(0,432)	(1,073)	(1,886)	(2,713)		
		[0,115]	[—0,276]	[0,450]	[0,587]		
Fumo	432,202	0,480	—0,042	30,330	38,542	0,952	2,015
		(1,988)	(0,165)	(1,624)	(2,518)		
		[0,434]	[0,040]	[0,367]	[0,521]		
Mamona	—77,100	0,669	0,053	261,287	27,167	0,885	2,110
		(2,561)	(0,164)	(2,777)	(2,430)		
		[0,539]	[0,041]	[0,570]	[0,519]		
Mandioca	—172,269	1,066	—0,212	4 504,447	84,174	0,994	2,310
		(6,333)	(1,147)	(2,817)	(2,733)		
		[0,845]	[—0,276]	[0,576]	[0,564]		
Milho	—599,013	0,658	0,105	7 286,530	699,529	0,986	1,679
		(2,953)	(0,436)	(2,248)	(2,635)		
		[0,582]	[0,105]	[0,479]	[0,539]		

FONTE: Pastore (1973).

SÍMBOLOS: Mesmo significado da Tabela VII.2.

OBS.: Os números entre parênteses são os valores t de Student e os entre colchetes são os coeficientes de correlação entre a variável explicativa e q_t.

Admitindo-se que a perturbação aleatória da equação acima siga a Hipótese I, enunciada no início desta seção, ou seja, que $u_t - \lambda u_{t-1} = \varepsilon_{1t}$ é uma variável aleatória normal com média zero, variância constante e serialmente independente, os coeficientes de ajustamento e de expectativa não podem ser identificados.

Todas as variáveis que entram nas regressões cujos resultados estão apresentados na Tabela VII.3 estão na escala aritmética. A seguir, passamos a analisar, por produto, os resultados dessa tabela.

Algodão — Apenas a área defasada de dois períodos não é significativa e o coeficiente desta variável tem o sinal contrário ao esperado.

Amendoim — Novamente a área defasada de dois períodos não é significativa, porém o seu sinal é correto. Os demais coeficientes são significativos.

Arroz — Também, neste caso, a área com dois períodos de defasagens não é significativa. Todavia, o sinal do coeficiente desta variável está correto. Os demais coeficientes são significativos.

Cana-de-Açúcar — Somente o coeficiente da variável de tendência é significativo. Os sinais dos coeficientes estão corretos, com exceção do coeficiente da área defasada de um período que é negativo.

Cebola — Os sinais de todos os coeficientes são corretos. Todavia, somente o coeficiente da variável de tendência é significativo.

Feijão — Os coeficientes das variáveis de tendência e do preço de feijão são significativos. O sinal do coeficiente da área defasada de dois períodos é positivo, contrário ao que se espera *a priori*.

Fumo — Novamente, o sinal do coeficiente da área defasada de dois períodos é positivo, contrário ao esperado. Somente os coeficientes da área defasada de um período e da tendência são significativos.

Mamona — Os sinais de todos os coeficientes estão corretos e somente o coeficiente da área defasada de dois períodos não é significativo.

Mandioca — Todos os coeficientes são significativos, com exceção do coeficiente da área defasada de dois períodos que, além disso, tem o sinal incorreto.

Milho — Todos os coeficientes são significativos, com exceção do coeficiente da área defasada de dois períodos.

Em resumo, os resultados da Tabela VII.3 mostram que: i) o coeficiente da variável-preço não é significativo para a cana-de-açúcar, a cebola e o fumo; ii) o coeficiente da área defasada de um período não é significativo para a cana-de-açúcar, a cebola e o feijão; iii) o coeficiente da variável de tendência é significativo para todos os produtos; e iv) o coeficiente da área defasada de dois períodos não é significativo em nenhum caso e, além disso, em cinco produtos entre os 10 analisados, o sinal do coeficiente desta variável é contrário ao que se espera. Uma provável causa para este último resultado é uma especificação incorreta de perturbação estocástica como mencionamos anteriormente.
Na Tabela VII.4 são apresentados os resultados das estimativas dos parâmetros da equação (9.15) quando se faz $\lambda = \delta = 0$. Isto é:

$$q_t = c + \beta\, p_{t-1} + \gamma\beta t + u_t$$

Na hipótese de que o modelo acima seja incorreto por excluir alguma variável relevante, é possível que os valores da estatística de Durbin-Watson acusem a presença de autocorrelação dos resíduos. Na verdade, na maioria das regressões,

TABELA VII.4

A RESPOSTA DA PRODUÇÃO AGRÍCOLA AOS PREÇOS NO BRASIL: PASTORE (1973) (AJUSTAMENTO INSTANTÂNEO E EXPECTATIVAS ESTÁTICAS)

Produtos	Constante	p_{t-1}	T	R^2	DW	S^2
Algodão	15 361,848	1 154,534 (1,684) [0,360]	687,942 (7,381) [0,861]	0,741	0,685	2 717,959
Amendoim	—2 630,167	976,603 (6,782) [0,848]	227,273 (16,114) [0,967]	0,956	1,380	376,545
Arroz	5 303,611	2 685,127 (1,565) [0,338]	1 289,434 (13,503) [0,952]	0,914	0,623	2 772,246
Cana-de-Açúcar	4 552,593	12 103,600 (3,152) [0,586]	470,546 (35,190) [0,992]	0,986	2,322	386,263
Cebola	159,909	6,188 (1,305) [0,294]	13,808 (20,264) [0,979]	0,965	1,875	17,727
Feijão	8 270,545	0,628 (2,134) [0,483]	399,912 (7,964) [0,893]	0,923	1,658	799,601
Fumo	794,181	45,347 (2,405) [0,483]	67,448 (16,696) [0,968]	0,937	1,035	117,410
Mamona	997,805	357,314 (2,553) [0,516]	70,885 (6,080) [0,820]	0,686	0,779	318,307
Mandioca	5 407,930	5 700,498 (1,123) [0,256]	446,634 (15,481) [0,964]	0,935	0,392	782,083
Milho	11 825,928	11 825,928 (2,222) [0,454]	2 288,793 (19,636) [0,976]	0,954	0,447	3 388,145

FONTE: Pastore (1973).

SÍMBOLOS Mesmo significado da Tabela VII.2.

OBS.: Os números entre parênteses são os valores t de Student e os entre colchetes são os coeficientes de correlação entre a variável explicativa e q_t.

cujas estimativas são apresentadas na Tabela VII.4, a estatística de Durbin-Watson indica que os resíduos estão autocorrelacionados. Assim, é plausível que nessa última especificação alguma variável relevante esteja sendo omitida.

Quanto às estimativas dos coeficientes das variáveis nas regressões, o coeficiente da variável de tendência é significativo em todas as regressões cujos resultados estão contidos na Tabela VII.4. No tocante à variável-preço, seu coeficiente não é significativo para os seguintes produtos: algodão, arroz, cebola e mandioca. Todavia, os sinais dos coeficientes dessas variáveis são positivos conforme o que se espera *a priori*.

VII.9.2.3 — Holanda Barbosa e Waizbort (1979)

A especificação econométrica adotada por Barbosa e Waizbort pressupõe que a oferta agrícola é função apenas do preço do produto. É claro que esse tipo de especificação ao deixar de considerar outras variáveis que influenciam a oferta pode gerar erros de especificação que invalidam os resultados obtidos.

Embora consciente desse problema, os referidos autores optaram por estudar equações de oferta que dependem apenas do preço, pois o interesse maior consistia em verificar até que ponto os dados permitiam distinguir os parâmetros de expectativa e de ajustamento. Assim, a equação a ser estimada é dada pela equação (9.14) quando se faz $\gamma = 0$, isto é:

$$
\begin{aligned}
q_t &= \alpha(1-\delta)(1-\lambda) + (\lambda+\delta) q_{t-1} - \lambda\delta q_{t-2} \\
&\quad + \beta(1-\lambda)(1-\delta) p_{t-1} + u_t - \lambda u_{t-1}
\end{aligned}
$$

Admitindo-se que o processo estocástico de u_t é expresso pela Hipótese III da última subseção, ou seja, que $u_t = \rho\, u_{t-1} + \varepsilon_{3t}$, os parâmetros da equação anterior podem ser estimados através da regressão:

$$
\begin{aligned}
q_t - \rho\, q_{t-1} &= \alpha(1-\delta)(1-\rho) + [\eta_0 - \alpha(1-\delta)(1-\rho)]\, X_{1t} \\
&\quad + \delta\, X_{2t} + \beta(1-\delta)\, X_{3t} + \varepsilon_{3t} \qquad (9.16)
\end{aligned}
$$

onde os valores de X_{1t}, X_{2t} e X_{3t} são obtidos através das fórmulas apresentadas em (9.11), ou seja:

$$
\begin{aligned}
X_{1t} &= \lambda^t \\
X_{2t} &= q_{t-1} - \rho\, q_{t-2} - \lambda^t (q_{-1} - \rho\, q_{-2}) \\
X_{3t} &= (1-\lambda)\,[(p_{t-1} - \rho\, p_{t-2}) + \cdots + \lambda^{t-1}(p_0 - \rho\, p_{-1})]
\end{aligned}
$$

A Tabela VII.5 contém estimativas dos parâmetros da equação (9.16) para os seguintes produtos: arroz, feijão, mandioca, milho, soja e trigo. Os dados utilizados cobrem o período 1947/75, exceto para a soja, cujo período é 1952/75, e a fonte dos mesmos é a FIBGE. A variável dependente é a área plantada e a variável-preço é medida pelo preço médio de cultura, deflacionado pelo índice de preços agrícola da Fundação Getulio Vargas.

Os valores de (λ, ρ) que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos para o arroz são: $\lambda = 0{,}8$ e $\rho = 0{,}2$.[6] A Tabela VII.5 mostra as estimativas dos coeficientes da regressão para este par de valores. O coeficiente de X_{2t}, estimativa do parâmetro δ, tem sinal contrário ao esperado, porém o seu erro-padrão é elevado.[7] A hipótese nula de que $\delta = 0$ não é rejeitada. O coeficiente de X_{3t}, estimativa do parâmetro $\beta(1-\delta)$, é bastante significativo e tem o sinal que, *a priori*, se espera, evidenciando a resposta de área plantada do arroz ao estímulo de preço.

No caso do feijão, os valores de (λ, ρ) que tornam mínima a soma dos quadrados dos resíduos são: $\lambda = 0{,}9$ e $\rho = -0{,}4$. A estimativa do coeficiente de ajustamento parcial, de acordo com a Tabela VII.5, é $\hat{\delta} = 0{,}5401$ com erro-

[6] No processo de pesquisa da menor soma dos quadrados dos resíduos, os valores de ρ foram tomados no intervalo $-0{,}8$; $0{,}8$, com acréscimo de $0{,}2$; os valores de λ foram pesquisados no intervalo $0{,}1$; $0{,}99$, com acréscimos de $0{,}1$.

[7] Os erros-padrão que aparecem na Tabela VII.5 são condicionados aos valores de λ e ρ reportados.

Tabela VII.5

A OFERTA DE PRODUTOS AGRÍCOLAS NO BRASIL: BARBOSA E WAIZBORT (1979)

Produto	Constante	X_{1t}	X_{2t}	X_{3t}	R^2	F	DW (h)	(λ,ρ)
Arroz	157 989,7	1 731 360,3	—0,0266	5,0903	0,97	229,8	2,07	(0,8;0,2)
	(—)	(364 950,7)	(0,1709)	(0,8836)			(—0,40)	
Feijão	872 963,5	1 476 722,6	0,5401	2,5608	0,99	541,0	2,02	(0,9;—0,4)
	(—)	(385 178,8)	(0,8942)				(—0,08)	
Mandioca	2 455 844,2	—1 364 547,0	0,9838	—4,3602	0,99	1 094,8	1,88	(0,99;—0,2)
	(—)	(885 330,6)	(0,0933)	(1,3220)			(0,36)	
Milho	1 084 743,5	3 985 554,8	0,6446	3,5342	0,99	696,6	2,06	(0,9;—0,2)
	(—)	(810 478,2)	(0,1388)	(1,7008)			(—0,24)	
Soja	107 717,4	—1 113 661,6	0,6379	1,2759	0,87	38,0	1,70	(0,9;—0,2)
	(—)	(2 696 786,9)	(0,1820)	(0,5505)			(1,35)	
Trigo	—227 517,0	702 505,2	—0,0418	10,4527	0,72	18,5	1,79	(0,8;0,6)
	(—)	(271 452,6)	(0,2132)	(2,2962)			(—)	

OBSERVAÇÕES: 1) os números entre parênteses referem-se ao desvio-padrão da estimativa; 2) quando nos valores de h aparece um traço significa que o valor encontrado para essa estatística foi um número complexo; 3) a área e o preço estão defasados de um período; e 4) a equação de oferta é linear nas variáveis.

padrão igual a 0,1435, que é significativamente diferente de zero ao nível de 1%. O coeficiente de X_{3t} é significativo ao nível de 5%, mostrando que a oferta de feijão reaje a variações de preços.

Para a mandioca, a soma dos quadrados dos resíduos é mínima quando $\lambda = 0,99$ e $\rho = -0,2$. Para este par de valores a Tabela VII.5 mostra que a estimativa de δ é igual a 0,9838, com desvio-padrão igual a 0,0933. Todavia, o coeficiente de X_{3t} tem sinal contrário ao esperado e a hipótese de que ele é diferente de zero não é rejeitada.

No que toca ao milho, os valores $\lambda = 0,9$ e $\rho = -0,2$ minimizam a soma dos quadrados dos resíduos. A estimativa do coeficiente de ajustamento parcial, segundo a Tabela VII.5, é $\hat{\delta} = 0,6446$ com erro-padrão igual a 0,1388. Logo, a hipótese nula de que $\delta = 0$ é rejeitada. O coeficiente de X_{3t} é significativamente diferente de zero ao nível de 5%, evidenciando que a área plantada do milho responde a variações de preços.

Quanto à soja, pensou-se inicialmente que os valores de (λ, ρ) seriam: $\lambda = 0,1$ e $\rho = 0,8$. Todavia, quando se fez pesquisas adicionais com o valor de ρ não se encontra um mínimo para a soma dos quadrados dos resíduos e, conseqüentemente, para a função verossimilhança. A Tabela VII.5 reporta as estimativas obtidas quando $\lambda = 0,1$ e $\rho = 0,8$. Neste caso, as estimativas dos coeficientes de X_{2t} e X_{3t} são significativas.

No caso do trigo, os valores de $\lambda = 0,8$ e $\rho = 0,6$ minimizam a soma dos quadrados dos resíduos. A estimativa do coeficiente de X_{2t} tem sinal contrário ao esperado, porém bastante próximo de zero e com elevado desvio-padrão. Já a estimativa do coeficiente de X_{3t} tem o sinal esperado e é significativo.

Como se mencionou anteriormente, quando $\lambda = \rho$ os parâmetros de expectativa e de ajustamento não são identificados. Portanto, o teste da hipótese nula H_0: $\rho = \lambda$, contra a hipótese alternativa H_1: $\rho \neq \lambda$ reveste-se de especial importância. A Tabela VII.6 contém os valores de qui-quadrado (χ^2) para

Tabela VII.6

VALORES DE χ^2 (1)

Produtos	Hipótese Nula	
	$\rho = \lambda$	$\rho = 0$
Arroz	5,3504	0,4173
Feijão	5,2128	1,4872
Mandioca	4,0038	—
Milho	7,1204	1,5684
Soja	—	—
Trigo	3,2744	1,0389

NOTA: O valor de χ^2 (1) para o nível de 5% é 3,841.

este teste, bem como para o teste de que H_0: $\rho = 0$, contra a alternativa H_1: $\rho \neq 0$, que corresponde à primeira hipótese da parte estocástica da equação de oferta. No caso do arroz, feijão, mandioca e milho a hipótese nula de que $\rho = \lambda$ é rejeitada ao nível de 5%. Quanto ao trigo, a hipótese $\rho = \lambda$ não é rejeitada ao nível de 5% mas passa a ser ao nível de 10%. No que toca à soja não foi possível efetuar o teste em virtude de não se ter encontrado um valor mínimo para a função de verossimilhança.

Quanto à hipótese nula de que $\rho = 0$, ela não é rejeitada para todos os produtos em que foi possível efetuar o teste: arroz, feijão, milho e trigo. Donde se conclui que para estes produtos a segunda hipótese, relativa ao termo estocástico da equação de oferta, é adequada.

VII.9.2.3.1 — Sumário da Evidência Empírica

A principal conclusão a que chegaram Barbosa e Waizbort é que, em geral, para alguns produtos agrícolas no Brasil, a evidência empírica não corrobora a hipótese de que os parâmetros de expectativa adaptada e de ajustamento parcial não são identificados no modelo de oferta de produtos agrícolas de Nerlove. A evidência empírica indica também que a Hipótese II da última subseção constitui-se em uma hipótese adequada para ser utilizada na especificação econométrica das equações desses produtos. Certamente, o emprego puro e simples de mínimos quadrados ordinários, que corresponde à Hipótese I, não é recomendável. Vale ainda salientar que o modelo adotado na parte empírica é bastante simples e, possivelmente, variáveis relevantes podem ter sido deixadas de fora do modelo. Este fato pode estar associado aos valores elevados obtidos para as estimativas do parâmetro de expectativa adaptada λ. É bastante difícil acreditar-se, *a priori*, que os agricultores atribuam tanta importância ao passado remoto.

VII.10 — A Teoria do Investimento

VII.10.1 — Keynes: A Eficiência Marginal do Capital

A Teoria Geral de Keynes introduziu uma nova terminologia na teoria do investimento: a eficiência marginal do capital. Com a finalidade de introduzir esse conceito, imagine-se um projeto que requer um investimento no período $t = 0$ igual a C_0 e que apresente os retornos líquidos $B_1, B_2, \ldots, B_N$ nos períodos $t = 1, 2, \ldots, N$, respectivamente. O fluxo de caixa do projeto é então dado por:

$$C_0, B_1, B_2, \ldots, B_N \qquad (10.1)$$

Cabe aqui lembrar algumas observações que Keynes julgava importante quanto aos elementos desse fluxo de caixa. O custo do projeto C_0 é formado pelo preço de oferta dos bens de capital empregados no projeto e não pelo preço atual de mercado desses bens. O preço de oferta de um bem de capital, segundo Keynes, é o preço que induziria os fabricantes a produzirem novamente uma unidade adicional desse bem. O preço de oferta é portanto igual ao custo de reposição do bem. Quanto aos retornos do projeto Keynes acentua o fato de que eles são valores esperados e não os retornos verificados, pois no presente não se conhece o futuro.

A eficiência marginal do capital é definida pela taxa que torna o valor atual do projeto igual a zero, isto é:

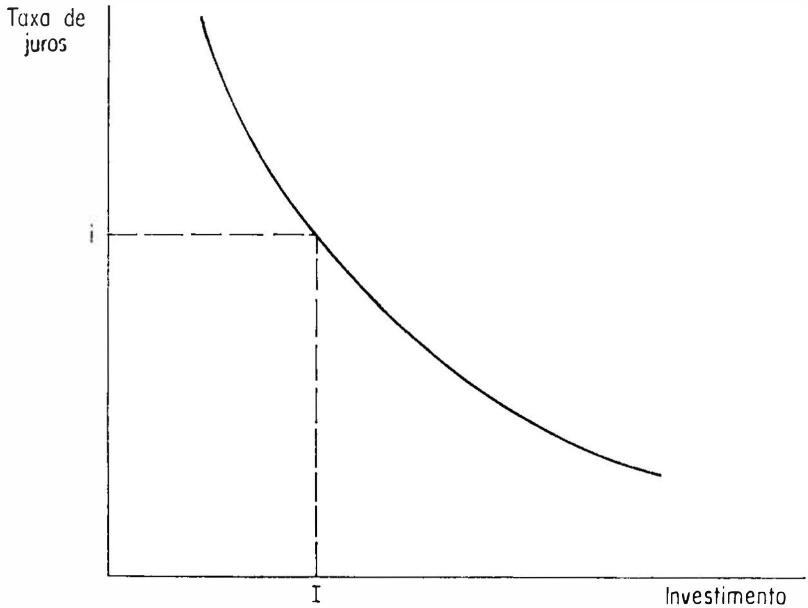
$$C_0 = \sum_{t=1}^{N} \frac{B_t}{(1+e)^t} \qquad (10.2)$$

onde e, a eficiência marginal do capital, é também conhecida como a taxa interna de retorno do projeto. É bom lembrar que a taxa interna de retorno apresenta alguns problemas bem conhecidos da literatura que trata de avaliação de projetos. Assim: i) a solução da equação (10.2) pode não ter significado econômico — para isto ocorrer basta que o valor de e seja menor do que menos um; ii) a solução da equação (10.2) pode não ter raízes reais, e, portanto, a interpretação de e ficaria sem sentido; iii) o projeto pode ser tal que a raiz da equação (10.2) exista e seja única, porém o valor atual do projeto para qualquer taxa diferente de e é negativo; e iv) a comparação de projetos através da taxa interna de retorno pode levar a decisões incorretas do ponto de vista econômico. Estas críticas à eficiência marginal do capital são bastante importantes e devem ser levadas em conta numa apreciação crítica da teoria keynesiana do investimento.

Definida a eficiência marginal de um projeto, Keynes define, então, a eficiência marginal do capital em geral como sendo a maior das eficiências marginais entre vários projetos.

A curva que relaciona a eficiência marginal do capital — ver figura a seguir — e o investimento é decrescente por dois motivos. Em primeiro lugar, o estoque de capital aumenta com o investimento e a uma maior quantidade de capital corresponde uma produtividade marginal do capital menor. A segunda razão para que a curva seja decrescente é que o preço de oferta dos bens de capital aumenta, dado que a curva de custo marginal para a produção do bem é crescente. Keynes assinala que no curto prazo o segundo motivo é mais importante, enquanto que no longo o primeiro é uma força mais poderosa na determinação do equilíbrio de mercado.

INVESTIMENTO E TAXA DE JUROS



Em um dado período de tempo, o investimento será levado até o ponto em que a eficiência marginal do capital é igual à taxa de juros de mercado. Assim, na figura em questão, à taxa de juros i corresponde um investimento igual a I. Em geral, temos a seguinte equação para o investimento:

$$I = I(i), \frac{\partial I}{\partial i} < 0 \tag{10.3}$$

Segundo Keynes, esta função é bastante instável devido a sua dependência com relação às expectativas formadas no presente e que dizem respeito ao futuro. Mudanças nessas expectativas, via mudanças nos B_t em (10.1), acarretam deslocamentos na escala de investimento, pois a eficiência marginal do capital seria bastante elástica com respeito a essas expectativas. As flutuações violentas da eficiência marginal do capital, ainda de acordo com Keynes, seria a explicação mais importante para o ciclo econômico.

É interessante observar que durante um longo período de tempo tentou-se medir, para os Estados Unidos, a sensibilidade do investimento à taxa de juros, com resultados negativos. Alguns estudos baseavam-se em inquéritos econômicos, nos quais eram formuladas perguntas a empresários sobre fatores que afetariam o volume de investimentos de suas empresas. As respostas no que diz respeito à taxa de juros eram negativas, daí concluindo-se que a taxa de juros era irrelevante na determinação do investimento. Cabe salientar que este tipo de evidência não deve merecer muito respeito do ponto de vista estatístico, pois o que realmente interessa é o comportamento efetivo nem sempre revelado por respostas a perguntas de questionários.

Sem dúvida alguma, o modelo que tem sido mais adequado para a explicação do volume de investimento é o do princípio de aceleração, pré-keynesiano na sua formulação original mas desenvolvido em sua forma mais moderna na década de 50. O princípio da aceleração conjugado à teoria neoclássica do investimento, que se apresentará a seguir, mostra que a taxa de juros exerce um efeito indireto sobre o investimento via custo de utilização do capital, sendo esse efeito de mesmo sentido que o previsto pela teoria keynesiana.

VII.10.2 — O Princípio da Aceleração

O princípio da aceleração baseia-se em duas equações: uma de comportamento e outra de definição. A equação de comportamento afirma que o estoque de capital K_t da empresa, ao final do período t, é proporcional ao volume de produção Q_t:

$$K_t = \alpha Q_t \tag{10.4}$$

Esta equação pode ser racionalizada como sendo obtida em uma função de produção com proporções fixas dos fatores. Quanto à equação de definição, o investimento líquido I_t^l é igual à diferença entre os estoques de capital no final e o existente no início do período:

$$I_t^l = K_t - K_{t-1} \tag{10.5}$$

Segue-se, portanto, das equações (10.4) e (10.5) que o investimento líquido é proporcional ao acréscimo de produção ΔQ_t no período, ou seja:

$$I_t^l = \alpha \Delta Q_t \tag{10.6}$$

Admitindo-se que o investimento de reposição R_t é proporcional ao estoque de capital inicial K_{t-1}.

$$R_t = \delta K_{t-1}, \tag{10.7}$$

o investimento bruto I_t será dado por:

$$I_t = \alpha \Delta Q_t + \delta K_{t-1} \tag{10.8}$$

A equação (10.6) corresponde à formulação do princípio de aceleração em sua forma original devido a Clark (1917). Cabe aqui tecer alguns comentários críticos quanto a esse modelo de investimento:

a) o princípio da aceleração não leva em conta o fato de existir, ou não, excesso de capacidade de produção na economia. Dificilmente uma empresa operando com larga margem de capacidade ociosa iria fazer investimento de acordo com a fórmula (10.6);

b) a equação (10.4) não faz distinção entre mudança transitória e mudança permanente no nível de produção. É de se esperar que a empresa não ajuste seu estoque de capital a mudanças transitórias no nível de produção;

c) o mecanismo de aceleração é perfeitamente simétrico. Vale dizer, o investimento ajusta-se do mesmo modo, tanto para variações positivas como negativas no nível de produção. É de se esperar alguma assimetria no comportamento da empresa quanto às variações do investimento, pois não seria fácil para a mesma se desfazer, sem custos excessivos, de parte de seu estoque de capital em curto período de tempo;

d) a equação (10.4) presume que a relação capital/produto permaneça constante e, além disso, admite que a relação média é igual à relação marginal capital/produto;

e) a única variável que entra na determinação do estoque de capital é o nível de produção e, portanto, variáveis-preço são irrelevantes na decisão de investir. Pela fórmula (10.4), uma vez determinado o nível de estoque de capital, o investimento se faz segundo (10.6), qualquer que seja o preço que tenha de se pagar pelos bens de capital. Outras variáveis, como taxa de juros, lucro, expectativas, liquidez, imperfeições do mercado de capitais, são deixadas fora do modelo; e

f) a formulação (10.6) assume ainda que o ajustamento do estoque de capital é completo no período do modelo. Em outras palavras, o estoque de capital dado por (10.4) é o desejado, que por sua vez é igual ao estoque efetivo de capital da empresa no final do período t. A empresa chega ao final do período com o estoque de capital que deseja, inexistindo problemas de ajustamento.

Face às críticas acima, o princípio da aceleração foi reformulado de modo a torná-lo mais adequado, mais flexível e, conseqüentemente, menos passível de críticas.

VII.10.2.1 — O Acelerador Flexível

O modelo do acelerador flexível leva em consideração a última crítica do acelerador rígido ao admitir que o estoque de capital desejado K_t^d, de equilíbrio de longo prazo, e não o estoque atual como em (10.4), é proporcional ao volume de produção, isto é:

$$K_t^d = \alpha Q_t \tag{10.9}$$

Além disso, o modelo de aceleração flexível introduz uma nova equação que liga o estoque desejado ao atual. O investimento líquido no período é igual a apenas uma fração da diferença entre o estoque de capital desejado e o existente no início do período t,

$$K_t - K_{t-1} = \phi (K_t^d - K_{t-1}), \; 0 < \phi \leqslant 1 \qquad (10.10)$$

ou:

$$K_t = \phi \, K_t^d + (1 - \phi) \, K_{t-1}$$

No caso de o coeficiente de ajustamento ϕ ser igual à unidade, o modelo do acelerador flexível reduz-se ao modelo do acelerador rígido, pois $K_t = K_t^d$.

A equação do investimento líquido é facilmente obtida combinando-se as equações (10.5), (10.10) e (10.9). O resultado é:

$$I_t^l = \alpha\phi Q_t - \phi K_{t-1} \qquad (10.11)$$

A equação acima não é tão transparente quanto ao significado de aceleração flexível. Para se ter uma melhor compreensão do fato de se denominar de acelerador flexível ao modelo da equação (10.11), observe-se que o estoque K_t pode ser escrito a partir da equação (10.10) do seguinte modo:

$$K_t = \frac{\phi}{1 - (1 - \phi) L} \, K_t^d$$

onde L é o operador de defasagem: $L^i X_t = X_{t-i}$. O investimento líquido é igual a $(1 - L) K_t$. Logo, multiplicando-se por $(1 - L)$ ambos os membros da equação anterior, temos que:

$$I_t^l = \frac{\phi}{1 - (1 - \phi) L} \, (1 - L) K_t^d$$

Da equação (10.9) segue-se que $(1 - L) K_t^d = \alpha \Delta Q_t$. Substituindo-se este resultado na última equação, obtemos:

$$I_t^l = \frac{\alpha\phi \;\; \Delta Q_t}{1 - (1 - \phi) L} = \alpha\phi\Delta Q_t + \alpha\phi (1 - \phi) \Delta \, Q_{t-1}$$
$$+ \alpha\phi (1 - \phi)^2 \, \Delta Q_{t-2} + \ldots \qquad (10.12)$$

Obviamente, quando $\phi = 1$ a equação (10.12) é equivalente à (10.6). Em geral, quando $\phi \neq 1$, o investimento líquido será igual a uma média dos valores presente e passado, com pesos decrescentes de acordo com uma progressão geométrica das variações do nível de produção. Daí a explicação para o nome acelerador flexível.

Admitindo-se, como no caso anterior, que a reposição R_t é igual a uma parcela do estoque de capital existente no início do período, $R_t = \delta K_{t-1}$, o investimento bruto no período t será dado por:

$$I_t = \alpha\phi Q_t + (\delta - \phi) K_{t-1}$$

Cabe ressaltar que nada se pode afirmar, *a priori,* acerca do sinal do coeficiente de K_{t-1}: o coeficiente $(\delta - \phi)$ tanto pode ser negativo como positivo.

No modelo de aceleração flexível, da mesma forma que ocorre com o princípio da aceleração simples, o estoque de capital desejado é função apenas do volume de produção. De modo geral, essa crítica pode ser levada em conta especificando-se uma equação em que a quantidade demandada de estoque de capital seja função de outras variáveis que influenciam as decisões do empresário de ampliar a sua capacidade produtiva. Assim, poderíamos ter o estoque de capital desejado, K_t^d, expresso por:

$$K_t^d = f(Q_t, X_t)$$

onde X_t representa um vetor contendo outras variáveis que afetam o nível de estoque. A seguir, veremos uma especificação dessa equação segundo a teoria neoclássica.

VII.10 3 — Teoria Neoclássica

A teoria neoclássica do investimento, segundo a contribuição de Jorgenson (1963), parte da idéia de que a quantidade de estoque de capital desejado por uma empresa baseia-se em um processo de decisão cujo objetivo é a maximização do patrimônio líquido da referida empresa.

Com a finalidade de introduzir os elementos dessa teoria, comecemos por denominar de π o fluxo de caixa da empresa, que consiste na diferença entre a receita das vendas e as despesas nas contas correntes e de capital da empresa, isto é:

$$\pi = pQ - sL - qI \tag{10.13}$$

onde p é o preço do produto, Q a quantidade vendida, s o preço unitário do insumo variável, que por conveniência de exposição chamaremos de mão-de-obra, L a quantidade de homens-hora empregados na produção, q o preço unitário do bem de capital e I a quantidade de bens de capital comprada no período.

O total de imposto de renda, T pago pela empresa é igual ao produto da alíquota u do imposto vezes o lucro tributável. Este, por sua vez, é igual ao faturamento menos as despesas com mão-de-obra, menos os abatimentos permitidos pela legislação do imposto de renda, ou seja:

$$T = u\,[pQ - sL - A] \tag{10.14}$$

onde A é o total dos abatimentos a que a empresa tem direito de acordo com a referida legislação.

Admita-se que a lei do imposto de renda das pessoas jurídicas permita as seguintes deduções do lucro para fins de obtenção do lucro tributável; i) *depreciação* — a proporção da depreciação que pode ser deduzida do lucro é igual a v; ii) *juros pagos* — do total dos juros pagos, uma proporção ω pode ser abatida do lucro; e iii) *perdas de capital* — uma proporção x das perdas de capital ocorridas no período pode ser abatida do lucro bruto da empresa.

Segue-se, portanto, que o abatimento total permitido pela legislação do imposto de renda é igual a:

$$A = v\delta qK + \omega rqK - x\dot{q}K \tag{10.15}$$

onde δ é a taxa de depreciação do capital, r é a taxa de juros de mercado e $\dot{q} = dq/dt$ é a variação de preço do bem de capital. O sinal negativo da última parcela em (10.15) indica a perda de capital verificada no período. O símbolo K indica o estoque de capital da empresa.

O patrimônio líquido P da empresa é igual ao valor atual do fluxo de caixa líquido, ou seja:

$$P = \int_0^{\infty} e^{-rt} (\pi - T)\, dt \tag{10.16}$$

O objetivo da empresa consiste em maximizar o patrimônio líquido P com a condição de que as seguintes restrições sejam satisfeitas:

$$Q = F(K,L) \tag{10.17}$$

e:

$$I = \dot{K} + \delta K \tag{10.18}$$

A restrição (10.17) é a função de produção que retrata as condições técnicas enfrentadas pela empresa; a equação (10.18) afirma que o investimento bruto efetuado pela empresa é igual ao acréscimo de estoque ($\dot{K} = dK/dt$) mais a reposição dos bens de capital depreciados no período.

Matematicamente, o problema da empresa diz respeito ao cálculo das variações, que pode ser resolvido com o auxílio da função de Lagrange l:

$$l = \int_0^{\infty} f(t)\, dt$$

onde:

$$f(t) = e^{-rt} [\pi - T] + \lambda_0 [Q - F(K,L)] + \lambda_1 [\dot{K} - I + \delta K]$$

e λ_0 e λ_1 são multiplicadores de Lagrange. As condições necessárias de Euler para um máximo de l são dadas por:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial Q} = 0 \;, \quad \frac{\partial f}{\partial L} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial I} = 0 \;, \quad \frac{\partial f}{\partial K} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{K}} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial \lambda_0} = 0 \;, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = 0 \end{aligned} \tag{10.19}$$

A derivada parcial de f com respeito a Q, é igual a:

$$\frac{\partial f}{\partial Q} = e^{-rt}\left(\frac{\partial \pi}{\partial Q} - \frac{\partial T}{\partial Q}\right) + \lambda_0 \tag{10.20}$$

De (10.13) e (10.14) segue-se que:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = p \ , \ \frac{\partial T}{\partial Q} = up \tag{10.21}$$

Combinando-se então as equações (10.20), (10.21) e a primeira equação de (10.19), resulta:

$$\lambda_0 = - e^{-rt}\, p\,(1 - u) \qquad (10.22$$

A derivada parcial de f com respeito a L, é igual a:

$$\frac{\partial f}{\partial L} = e^{-rt}\left[\frac{\partial \pi}{\partial L} - \frac{\partial T}{\partial L}\right] - \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial L} \tag{10.23}$$

e, de (10.13) e (10.14), temos que:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = - s \quad , \frac{\partial L}{\partial T} = - us \tag{10.24}$$

As equações (10.23) e (10.24), aliadas à condição de que $\partial f / \partial L = 0$ para que l seja máximo, resulta em:

$$\lambda_0 \frac{\partial F}{\partial L} = - e^{-rt}\, s\,(1 - u)$$

Substituindo-se o valor de λ_0 dado em (10.22) na equação acima e efetuando-se algumas simplificações, obtemos:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{s}{p} \tag{10.25}$$

Esta equação nada mais é do que a famosa proposição de que, em equilíbrio, a produtividade marginal da mão-de-obra é igual ao salário real.

A derivada parcial de f com respeito a I é igual a:

$$\frac{\partial f}{\partial I} = e^{-rt}\left(\frac{\partial \pi}{\partial I} - \frac{\partial T}{\partial I}\right) - \lambda_1 \tag{10.26}$$

Este resultado é facilmente verificado derivando-se ambos os lados de $f(t)$ com relação a I. Os termos que aparecem entre parênteses em (10.26) podem ser computados a partir de (10.13) e (10.14), respectivamente. Os resultados são:

$$\frac{\partial \pi}{\partial I} = - q \ , \ \frac{\partial T}{\partial I} = 0 \tag{10.27}$$

A segunda igualdade acima decorre do fato de que o imposto de renda não depende do investimento. Das equações (10.26) e (10.27) e da condição de equilíbrio $\partial f / \partial I = 0$, obtemos:

$$\lambda_1 = - q \, e^{-rt} \tag{10.28}$$

A seguir, precisaremos da derivada do multiplicador λ_1 com respeito ao tempo t, facilmente obtida de (10.28):

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = r \, q \, e^{-rt} - \dot{q} \, e^{-rt} \tag{10.29}$$

É fácil verificar-se, usando-se a expressão de $f(t)$ que:

$$\frac{\partial f}{\partial K} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{K}} = e^{-rt} \left(\frac{\partial \pi}{\partial} - \frac{\partial T}{\partial K} \right) - \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial K} + \lambda_1 \, \delta - \frac{d\lambda_1}{dt} \tag{10.30}$$

Das equações (10.13) e (10.14), temos que:

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial K} = - u \frac{\partial A}{\partial K} \tag{10.31}$$

e da equação (10.15), resulta:

$$\frac{\partial A}{\partial K} = v \, \delta q + \omega r q - x \, \dot{q} \tag{10.32}$$

Igualando-se a zero a expressão (10.30) e levando-se em conta os resultados contidos em (10.20), (10.31) e (10.32), obtemos:

$$e^{-rt} \, u \, [v \delta q + \omega r q - x \dot{q}] + e^{-rt} \, p \, (1 - u) \frac{\partial F}{\partial K} - e^{-rt} \, \delta q - e^{-rt} \, r q + e^{-rt} \, q = 0$$

Simplificando-se esta equação, chega-se ao seguinte resultado:

$$p \, (1 - u) \frac{\partial F}{\partial K} = q \left[r \, (1 - u\omega) + \delta \, (1 - uv) - \frac{\dot{q}}{q} \, (1 - ux) \right]$$

Alternativamente:

$$p \, \frac{\partial F}{\partial K} = c \tag{10.33}$$

onde c é o custo de uso do capital e expresso por:

$$c = q \left[r \left(\frac{1 - u\omega}{1 - u} \right) + \delta \left(\frac{1 - uv}{1 - u} \right) - \frac{\dot{q}}{q} \left(\frac{1 - ux}{1 - u} \right) \right] \tag{10.34}$$

A equação (10.33) expressa o fato de que o valor da produtividade marginal do capital, na posição de equilíbrio da empresa, é igual ao custo de uso do capital. Essa condição seria idêntica àquela que se obteria se o objetivo da empresa fosse maximizar o lucro definido por:

$$pQ - sL - cK$$

onde o custo do capital é igual ao preço c vezes a quantidade de capital K. Cabe lembrar que o preço c é um preço de conta e não corresponde a nenhum preço de mercado. É claro que se existir um mercado de aluguel de bens de capital, o equilíbrio competitivo de concorrência perfeita fará com que o aluguel do equipamento seja igual ao custo de uso.

A expressão (10.34) do custo de uso mostra claramente que o preço relevante na decisão de expandir o estoque de capital de empresa não é a taxa de juros r nem o preço unitário q do bem de capital. O preço relevante na decisão inclui, além da taxa de juros e do preço do bem de capital, a taxa de depreciação, a taxa (esperada) de perdas de capital e a estrutura tributária do imposto de renda. Assim, o custo do capital pode mudar mesmo que taxa de juros e preço do capital permaneçam inalterados. Basta que um dos parâmetros da hipótese do imposto de renda — u, v e ω — sejam modificados.

Quando $\omega = v = x = 1$, ou seja a legislação permitir o abatimento integral dos juros, da depreciação e das perdas de capital, o custo do usuário, em termos do preço unitário do bem de capital, é dado por:

$$\frac{c}{q} = r + \delta - \frac{\dot{q}}{q} = \left(r - \frac{\dot{q}}{q}\right) + \delta$$

Neste caso, então, o custo do capital é igual à soma dos seguintes itens: i) da taxa de juros, à qual a empresa pode aplicar seus fundos; ii) da taxa de depreciação δ do estoque de capital K da empresa; e iii) da taxa de perdas de capital $(-\dot{q}/q)$ ocorridas no período.

Observe-se que o custo do capital pode ser interpretado como sendo igual à soma da taxa de depreciação mais a taxa de juros real $r - \dot{q}/q$, pois r é a taxa de juros nominal e $\dot{q}/q$ é a taxa de inflação.

Vale ressaltar que no caso de ganhos de capital $(\dot{q}/q > 0)$ o custo do usuário pode inclusive ser negativo. Para isto ocorrer basta que a soma das taxas de juros e de depreciação seja inferior à taxa de valorização do capital, ou seja:

$$\frac{c}{q} < 0 \quad \text{quando } r + \delta < \frac{\dot{q}}{q}$$

Exemplificando, suponha que o bem de capital seja um imóvel e que este se valorizou no período. O custo de utilização desse imóvel poderá ser negativo caso a taxa de valorização seja maior que a soma das taxas de juros e de depreciação.

Nas aplicações empíricas da teoria neoclássica do investimento Jorgenson tem admitido, como hipótese de trabalho, que a função de produção (10.17) é do tipo Cobb-Douglas, isto é:

$$Q = \gamma K^{\alpha} L^{\beta} \tag{10.35}$$

A equação de equilíbrio (10.33) implica então que o estoque de capital desejado é proporcional ao nível de produção e inversamente proporcional ao custo de uso do capital. Em símbolos:

$$K^d = \alpha \frac{qQ}{c} \tag{10.36}$$

A formulação implícita nesta equação pressupõe um processo decisório em dois estágios. Em primeiro lugar, dados o nível de estoque de capital existente, o preço do produto e o preço do insumo variável, a empresa fixaria a quantidade do fator variável e o nível de produção. Em segundo lugar, dado o nível de produção e o custo de uso do capital, a empresa decidiria então o nível de estoque de capital desejado. Dessa maneira, o volume de produção seria uma variável exógena no segundo estágio do processo decisório.

Sem dúvida alguma, o mecanismo de decisão concebido para justificar equações do tipo (10.36) é bastante engenhoso. Todavia, cabe ressaltar que o nível de produção é uma variável endógena para a empresa, sobre a qual ela tem controle e, de maneira geral, a equação de demanda de estoque de capital é função do preço do produto, do preço do insumo variável e do custo de uso do capital, isto é:

$$K^d = f(p, s, c) \tag{10.37}$$

Esta equação de demanda é homogênea do grau zero em relação aos preços p, s e c. No caso particular da função Cobb-Douglas, ela reduz-se a:

$$\log K^d = \text{constante} + \frac{1}{1-\alpha-\beta}\log p - \frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}\log c$$
$$- \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\log s \tag{10.38}$$

Observe-se que a soma dos coeficientes de $\log p$, $\log c$ e $\log s$ é igual a zero, face à homogeneidade de grau zero da função de demanda de capital. É bom lembrar também que o equilíbrio da empresa requer que $\alpha + \beta < 1$, ou seja, que os retornos de escala sejam decrescentes.

Mesmo que se aceite o processo de decisão em dois estágios, a utilização da equação de demanda (10.36) tem recebido críticas, baseadas no fato de serem ali unitárias as elasticidades-preço e quantidade. Com efeito, as elasticidades-preço E_p e quantidade E_q são iguais a:

$$E_p = \frac{\partial K^d}{\partial (p/c)} \frac{p/c}{K^d} = \alpha Q \frac{p/c}{K^d} = 1$$

$$E_q = \frac{\partial K^d}{\partial Q} \frac{Q}{K^d} = \frac{\alpha q}{c} \frac{Q}{K^d} = 1$$

Eisner e Nadiri (1968) sugerem que ao invés da função Cobb-Douglas use-se a forma mais geral da função CES para derivar-se a demanda de estoque de capital. Assim se a função CES for expressa por:

$$Q = \gamma \left[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) L^{-\rho}\right]^{-\nu/\rho}$$

a condição de equilíbrio (10.33) implica que a equação de demanda de capital é igual a:

$$K^d = \gamma \left(\frac{p}{c}\right)^{\sigma} Q^{\sigma(1 + \rho/\nu)}$$

ou, em logaritmos:

$$\log K^d = \log \gamma + \sigma \log \frac{p}{c} + \sigma \left(1 + \frac{\rho}{\nu}\right) \log Q \qquad (10.39)$$

Segue-se, portanto, que a elasticidade-preço é igual a σ,

$$E_p = \frac{\partial \log K^d}{\partial \log p/c} = \sigma$$

e a elasticidade-quantidade é igual a $\sigma(1 + \rho/\nu)$, ou seja:

$$E_q = \frac{\partial \log K^d}{\partial \log Q} = \sigma \left(1 + \frac{\rho}{\nu}\right) = \sigma + \frac{1 - \sigma}{\nu}$$

A expressão depois do último sinal de igualdade na equação acima é obtida lembrando-se que $\sigma = 1/(1 + \rho)$. No caso de retornos constantes de escala, a elasticidade-quantidade é unitária, qualquer que seja a elasticidade de substituição σ, como se pode constatar através da expressão de E_q.

A equação de demanda de capital (10.39) torna possível o teste da hipótese mantida de Jorgenson quanto aos valores das elasticidades. Uma formulação mais geral do que esta equação seria a especificação de demanda de capital através da equação:

$$\log K^d = \text{constante} + E_p \log (p/c) + E_q \log Q$$

onde as elasticidades são constantes, mas não necessariamente iguais aos valores obtidos com a função de produção CES.

VII.10.3.1 — Estrutura Temporal do Processo de Investimento

Em seu trabalho pioneiro sobre a teoria do investimento Jorgenson (1965) apresenta, também, uma teoria da estrutura temporal do processo de investimento. De modo geral, se pode dizer que este processo consiste das seguintes etapas: 1) planejamento do projeto; 2) obtenção de financiamento; 3) preparação de plantas; 4) construção ou fabricação; 5) modificação durante o período de gestação; e 6) instalação.

As etapas acima implicam que o processo de investimento ocorre segundo uma certa distribuição no tempo. A seguir, apresentamos o modelo de Jorgenson que conduz a uma estrutura de defasagens distribuídas para a função-investimento.

Admita que μ_τ seja a proporção de projetos de investimento começados no período t e concluídos no período $t + \tau$. Assim, μ_0 é a proporção dos projetos iniciados e concluídos no período t, μ_1 a proporção dos projetos iniciados em t e concluídos em $t + 1$, e assim por diante. Obviamente, admitindo-se que todos os projetos iniciados são concluídos, tem-se:

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \mu_\tau = 1$$

Seguindo a mesma nomenclatura usada por Jorgenson (1965), denominamos por IE_t o total dos projetos de investimento, para expansão de capacidade produtiva, realizado no período t, e por IN_t o total de investimentos iniciados durante o período t.[8]

Segue-se, então, que:

$$IE_t = \mu_0 IN_t + \mu_1 IN_{t-1} + \mu_2 IN_{t-2} + \dots$$

Alternativamente, usando-se o operador de defasagens L, $L^i X_t = X_{t-i}$, esta equação pode ser escrita como:

$$IE_t = \mu(L)\, IN_t \qquad (10.40)$$

onde $\mu(L)$ é o seguinte polinômio:

$$\mu(L) = \mu_0 + \mu_1 L + \mu_2 L^2 + \dots$$

O total de investimentos em carteira, isto é, iniciados no passado e ainda não concluídos, no início do período t é dado por:

$$(1 - \mu_0) IN_{t-1} + (1 - \mu_0 - \mu_1) IN_{t-2} + \dots \qquad (10.41)$$

A hipótese de Jorgenson é que o volume de investimentos a iniciar-se no período t seja tal que a sua soma com os investimentos ainda não concluídos, cujo total é dado pela equação (10.41), se iguala à diferença entre o estoque de capital desejado no período t e o capital existente no final do período $t - 1$, ou seja:

$$IN_t + (1 - \mu_0)\, IN_{t-1} + (1 - \mu_0 - \mu_1) IN_{t-2} + \dots = K_t^d - K_{t-1} \qquad (10.42)$$

8 De acordo com a notação usada nas seções anteriores, temos que $IE_t = I_t^L$.

O primeiro membro da equação acima pode ser escrito do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
IN_t + (1 - \mu_0)\, IN_{t-1} + (1 - \mu_0 - \mu_1)\, IN_{t-2} + \ldots = {} \\
IN_t + IN_{t-1} + IN_{t-2} + \ldots \\
- \mu_0\, IN_{t-1} - \mu_0\, IN_{t-2} - \ldots \\
- \mu_1\, IN_{t-2} - \ldots \\
= IN_t\, [1 + L + L^2 + \ldots] \\
- \mu_0\, IN_{t-1}\, [1 + L + L^2 + \ldots] \\
- \mu_1\, IN_{t-2}\, [1 + L + L^2 + \ldots]
\end{aligned}$$

O último sinal de igualdade nesta expressão é baseado em (10.42) e, colocando-se o termo entre colchetes em evidência, tem-se:

$$[1 + L + L^2 + \ldots]\, [1 - \mu_0 L - \mu_1 L^2 - \ldots]\, IN_t =$$

$$= \frac{1}{1 - L}\, [1 - L\, \mu(L)]\, IN_t = K_t^d - K_{t-1}$$

ou:

$$IN_t = \frac{(1 - L)}{1 - L\mu(L)}\, (K_t^d - K_{t-1}) \tag{10.43}$$

O investimento realizado no período $t - 1$ é dado por:

$$IE_{t-1} = K_{t-1} - K_{t-2} = (1 - L)\, K_{t-1}$$

Por sua vez, da equação (10.40) tem-se que:

$$IE_{t-1} = L\, IE_t = L\, \mu\, (L)\, IN_t$$

Segue-se, então, que podemos escrever a equação (10.43) do seguinte modo:

$$(1 - L)\, (K_t^d - K_{t-1}) = IN_t - L\, IE_t$$

Como $(1 - L)\, K_{t-1} = L\, IE_t$ esta equação simplifica-se e obtém-se o seguinte resultado:

$$K_t^d - K_{t-1}^d = IN_t \tag{10.44}$$

Esta expressão afirma que o volume de investimentos a iniciar-se no período t é igual à diferença entre os estoques de capital desejados em t e $t - 1$. Substituindo-se (10.44) em (10.40), chega-se finalmente à função de investimento:

$$IE_t = \mu(L)\, [K_t^d - K_{t-1}^d] \tag{10.45}$$

Conclui-se, então, que o investimento para expandir a capacidade produtiva, no período t, é uma função em defasagens distribuídas das diferenças entre os estoques de capital desejados no final do período t e no início do mesmo período.

De acordo com (10.45), a estrutura de defasagem depende da especificação do polinômio $\mu(L)$. Por exemplo, admita que $\mu(L)$ seja expresso por:

$$\mu(L) = \frac{1-\delta}{1-\delta L}$$

Neste caso,

$$\frac{(1-L)\,\mu(L)}{1-L\,\mu(L)} = \frac{(1-L)\,\dfrac{1-\delta}{1-\delta L}}{1-\dfrac{L(1-\delta)}{1-\delta L}} = \frac{(1-L)(1-\delta)}{(1-L)} = 1-\delta$$

Da expressão (10.43), obtém-se

$$IE_t = (1-\delta)\,(K_t^d - K_{t-1}) \tag{10.46}$$

pois de (10.40) e (10.43), tem-se:

$$IE_t = \frac{(1-L)\,\mu(L)}{1-L\,\mu(L)}\,(K_t^d - K_{t-1})$$

Como $K_t - K_{t-1} = IE_t$, a expressão (10.46) é equivalente a:

$$K_t = (1-\delta)\,K_t^d + \delta\,K_{t-1}$$

O modelo acima corresponde ao mecanismo de ajustamento parcial usado no modelo de aceleração flexível. Portanto, a especificação obtida por Jorgenson para a estrutura de defasagem distribuída da função-investimento comporta hipóteses usadas previamente na teoria do investimento.

VII.11 — Exercícios

1. Uma empresa competitiva nos mercados de produto e de fatores tem como objetivo maximizar o lucro e a sua função de produção, é do tipo Cobb-Douglas:

$$q = x_1^{\alpha}\,x_2^{\beta}$$

a) Qual a restrição que os parâmetros α e β têm de satisfazer? Justifique a sua resposta;

b) Deduza as equações de oferta e demanda de fatores;

c) Que acontece com a resposta do item anterior se $\alpha + \beta = 1$?

d) Qual a função-lucro dessa empresa?

e) Admitindo-se que a quantidade do segundo fator é fixa e igual a $\bar{x}_2$, qual a função de lucro restrita?

2. Admita que a função de produção da empresa do problema anterior ao invés de Cobb-Douglas é do tipo CES, isto é:

$$q = [\delta\, x_1^{-\rho} + (1 - \delta)\, x_2^{-\rho}]^{-\nu/\rho}$$

a) Qual a restrição que o parâmetro ν deve satisfazer?

b) Deduza as equações de oferta e de demanda de fatores;

c) Que acontece com a resposta do item anterior se $\nu = 1$?

d) Qual a função de lucro dessa empresa?

3. A função-lucro normalizada é definida dividindo-se o lucro pelo preço do produto, isto é:

$$\pi^* = \frac{\pi}{p} = \pi\left(\frac{p}{p}, \frac{r_1}{p}, \frac{r_2}{p}\right) = \pi^*\,(r_1', r_2')$$

onde $r_1' = r_1/p$ e $r_2' = r_2/p$.

a) Prove que a equação de oferta é obtida através da seguinte expressão:

$$q = \pi^* - \left(\frac{\partial \pi^*}{\partial r_1'}\, r_1' + \frac{\partial \pi^*}{\partial r_2'}\, r_2'\right)$$

b) Como se obtém as equações de demanda de fatores a partir de π^*?

4. Prove que se a função de produção $q = q\,(x_1, x_2)$ for homogênea do grau ν, então a função-lucro normalizada é homogênea do grau $\nu/(\nu - 1)$.

5. A função-lucro normalizada de uma empresa é dada por:

$$\frac{\pi}{p} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{r_i}{p}\right)^{-\beta_i}$$

a) Quais as restrições que os parâmetros α_i e β_i devem satisfazer?

b) Deduza as equações de oferta do produto e de demanda de fatores dessa empresa.

6. A função-lucro normalizada de uma empresa é dada por:

$$\frac{\pi}{p} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \frac{p}{r_i} \frac{p}{r_j}$$

a) Quais as restrições que os parâmetros β_{ij} devem satisfazer?

b) Deduza as equações de oferta do produto e de demanda de fatores dessa empresa.

7. A função-lucro normalizada de uma empresa é dada por:

$$\log \frac{\pi}{p} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log \frac{r_i}{p} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \log \frac{r_i}{p} \log \frac{r_j}{p}$$

a) Quais as restrições que os parâmetros α e β devem satisfazer?

b) Deduza as equações de oferta de produto e de demanda de fatores dessa empresa.

8. Numa indústria competitiva existem n empresas, cada uma com a seguinte função de custo:

$$C_i = k\, q_i^2 \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

a) Qual a curva de oferta da empresa?

b) Qual a curva de oferta da indústria?

c) Discuta o equilíbrio de longo prazo da indústria quando inexistem barreiras para a entrada de novas empresas; e

d) Responda as três questões acima supondo agora que a curva de custo de cada empresa é dada por:

$$C_i = k_1\, q_i + k_2\, q_i^2 \quad , \quad i = 1, \ldots, n.$$

9. Uma empresa, sujeita à regulamentação do Estado, não controla o preço do seu produto e a taxa de retorno sobre o seu capital é fixada pela autoridade reguladora, de sorte a satisfazer à restrição:

$$p\, q = \omega\, L + s\, K$$

onde a taxa de retorno do capital s (supondo-se que o preço de uma unidade de capital é igual a 1 e que a depreciação é igual a zero) é maior do que a taxa r que a empresa paga em mercado competitivo pelo capital que utiliza.

O objetivo da empresa consiste em maximizar o lucro, com a condição de que a restrição tecnológica $q = q\,(K,L)$ e a restrição imposta pela regulamentação do Estado sejam atendidas.

a) Quais as condições de equilíbrio de primeira e de segunda ordens?

b) A produtividade marginal do trabalho deve ser decrescente na posição de equilíbrio?

c) Prove que se a restrição da autoridade reguladora for efetiva, esta empresa adotará uma proporção de fatores que é diferente daquele que minimiza o custo de produção; e

d) Deduza as propriedades da função de lucro, $\pi = \pi(p, \omega, r, s)$, dessa empresa e prove que:

$$\frac{\partial \pi}{\partial r} = -K(p,\omega,r,s)$$

$$\frac{\dfrac{\partial \pi}{\partial \omega} \quad \dfrac{\partial \pi}{\partial r}}{\dfrac{\partial \pi}{\partial r} + \dfrac{\partial \pi}{\partial s}} = -L(p,\omega,r,s)$$

$$\frac{\dfrac{\partial \pi}{\partial p} \quad \dfrac{\partial \pi}{\partial r}}{\dfrac{\partial \pi}{\partial r} + \dfrac{\partial \pi}{\partial s}} = q(p,\omega,r,s)$$

onde $K(\ )$ e $L(\ )$ indicam as equações de demanda de capital e de mão-de-obra, respectivamente, e $q(\ )$ a equação de oferta da empresa.

10. A quantidade ofertada de um produto agrícola depende do preço do período precedente de acordo com a seguinte equação de oferta:

$$q_t = \alpha_0 + \alpha_1 p_{t-1}$$

A equação de procura de mercado é dada por:

$$q_t = \beta_0 - \beta_1 p_t$$

a) Quais as condições que os parâmetros dessas equações devem satisfazer para que o mercado seja estável?

b) Responda à questão anterior admitindo que a quantidade ofertada depende dos preços nos dois últimos períodos. Isto é:

$$q_t = \alpha_0 + \alpha_1 p_{t-1} + \alpha_2 p_{t-2}$$

VII.12 — Bibliografia

ASKARI, H., e CUMMINGS, J. T. *Agricultural supply response: a survey of the econometric evidence.* New York, Praeger, 1976.

BARBOSA, F. de H. *Expectativa adaptada e ajustamento parcial: identificação e discriminação entre os dois processos. Revista Brasileira de Economia,* Rio de Janeiro, Fundação Getulio Vargas, 32:399-417, 1978.

BARBOSA, F. de H., e WAIZBORT, E. Expectativa *versus* ajustamento no modelo de Nerlove de produtos agrícolas: alguns resultados para o Brasil. *Revista de Economia Rural,* 17:163-81, 1979.

BEAR, D. V. T. Inferior inputs and the theory of the firm. *Journal of Political Economy*, pp. 287-9, 1965.

BEHRMAN, J. *Sypply responde in underdeveloped agriculture.* Amsterdam, North-Holland, 1968.

CLARK, J. M. Business acceleration and the law of demand: a technical factor in economic cycles. *Journal of Political Economy,* 25:217-35, 1917.

CHENERY, H. Overcapacity and the acceleration principle. *Econometrica,* 20:1-28, 1952.

DIEWERT, W. E. Application of duality theory. In: INTRILIGATOR, M. D., e KENDRICK, D. A., orgs. *Frontiers of quantitative economics.* Amsterdam, North-Holland 1974.

EISNER, R., e NADIRI, M. I. Investment behavior and neoclassical theory. *Review of Economics and Statistics,* pp. 369-82, 1968.

FRISCH, R. *Theory of production.* Chicago. Rand Mcnally, 1965.

GRILICHES, Z. Distributed lags: a survey. *Econometrica,* 35:16-49, 1967.

HADLEY, G. *Linear algebra.* World Student Series. Massachusetts, Addison-Wesley, 1961.

HICKS, J. R. *Value and capital.* Oxford, Clarendon Press, 1946.

———. *The theory of wages.* 2.ª ed.; London, MacMillan, 1968.

JORGENSON, D. W. Econometric studies of investment behavior a survey. *Journal of Economic Literature,* 9:1.111-47, 1971.

———. Anticipation and investment behavior. In: DUESENBERRY, J. S., FROM, G., KLEIN, L. R., e KUH, E., orgs. *The Brookings Quarterly Model of the States.* Amsterdam, North-Holland, 1965.

———. Capital theory and investment behavior. *American Economic Review Papers and Proceedings,* 53:247-59, 1963.

KLEIN, L. R. Issues in econometric studies of investment behavior. *Journal of Economic Literature,* 12:43-9, 1974.

MALINVAUD, E. *Lectures on microeconomic theory.* Amsterdam, North-Holland, 1972.

MACFADEEN, D., e FUSS, M., orgs. *Production economics: a dual approach.* Amsterdam, North-Holland, 1977.

MOSAK, J. L. Interrelations of production, price and derived demand. *Journal of Political Economy,* 46:761-87, 1938.

MUTH, J. F. Rational expectation and the theory of price movements. *Econometrica,* 29:315-35, 1961.

NERLOVE, M. *The dynamics of supply: estimation of farmes' response to price.* Baltimore, John Hopkins Press, 1958.

NERLOVE, M., e ADDISON, W. Statistical estimation of long run elasticities of supply and demand. *Journal of Farm Economics,* 40, 1958.

PASTORE, A. C. *A resposta da produção agrícola aos preços no Brasil.* São Paulo, APEC, 1973.

SAMUELSON, P. A. *Foundations of economics analysis.* New York, Atheneun, 1971.

SILBERBERG, E. *The structure of economics a mathematical analysis.* New York, McGraw-Hill, 1978.

THEIL, H. *Economics and information theory.* Amsterdam, North-Holland, 1967.

TOYAMA, N. K., e PESCARIN, R. M. C. Projeções da oferta agrícola no Estado de São Paulo. *Boletim Técnico do Instituto de Economia Agrícola.* São Paulo, Secretaria de Agricultura de São Paulo, 1970.

ZELLNER, A. Analysis of distributed lag models with applications to consumption function estimation. *Econometrica,* 38:865-88, 1970.

Capítulo VIII

EQUILÍBRIO COMPETITIVO

Na teoria econômica, o estudo do equilíbrio, seja do consumidor, do produtor, de um mercado isoladamente ou de vários mercados, apresenta três tipos de problemas, entre outros, a merecerem maior atenção. O primeiro diz respeito à existência de equilíbrio; à unicidade ou não desse equilíbrio refere-se o segundo, enquanto o terceiro está ligado à estabilidade do mesmo, isto é, ao estudo da existência ou não de forças econômicas que atuem sobre situações de desequilíbrio, fazendo com que o sistema volte ou não ao equilíbrio. Certamente esses problemas, seja do ponto de vista teórico seja do ponto de vista empírico, são bastante importantes e devem merecer análise cuidadosa, o que, todavia, não faremos tanto no estudo do equilíbrio parcial como no modelo de equilíbrio geral de dois produtos e dois fatores apresentados a seguir, em consonância com a linha traçada desde o início deste livro, cuja ênfase é dada no estabelecimento das proposições da estática comparativa, devido à importância que esses teoremas têm nas aplicações empíricas. Assim, a primeira e a terceira seção deste capítulo tratam dos exercícios de estática comparativa associados aos modelos de equilíbrio parcial e de equilíbrio geral de dois produtos e dois fatores.

A segunda seção é dedicada ao estudo econométrico da especificação de equações de oferta de exportação e de demanda de importação.

Na quarta seção apresentamos fórmulas aproximadas para o cálculo do índice de produto real e do deflator implícito. As noções básicas para o entendimento deste material estão contidas na última parte da seção, que trata do modelo de dois produtos e dois fatores.

A última seção cuida do modelo de insumo-produto que é um modelo de equilíbrio geral onde se procura estudar as inter-relações existentes entre os diversos setores da economia.

VIII.1 — Equilíbrio Parcial

No estudo de um mercado em equilíbrio parcial o interesse está centrado no equilíbrio de um mercado visto isoladamente. É claro que sendo o sistema econômico interdependente os acontecimentos no mercado de um produto repercutem sobre os demais mercados. A hipótese subjacente ao equilíbrio parcial é que essas variações, de um ponto de vista prático, podem ser negligenciadas. Caso contrário, não faz o mínimo sentido se perder tempo com o estudo de um mercado isoladamente.

Apresentaremos a seguir os teoremas da estática comparativa para o mercado de um bem de consumo. Todavia, o mesmo tipo de análise se aplica igualmente para o estudo do mercado, do tipo competitivo, de qualquer bem, seja insumo, mão-de-obra, ou capital.

VIII.1.1 — Equação de Demanda

Admita-se que a quantidade demandada q^d de um bem seja função do seu preço p, do preço p_c de um bem complementar, do preço p_s do bem que lhe é substituto e da renda real y dos consumidores, isto é:

$$q^d = f\ (p,\ p_c,\ p_s,\ y) \tag{1.1}$$

Em vista das proposições da teoria do consumidor e da classificação de bens complementares e substitutos de Hicks, admitiremos que a quantidade demandada q^d reage:

a) negativamente a acréscimos no preço do produto:

$$\frac{\partial f}{\partial p} < 0$$

b) negativamente ao aumento do preço do bem complementar:

$$\frac{\partial f}{\partial p_c} < 0$$

c) positivamente ao aumento do preço do bem substituto:

$$\frac{\partial f}{\partial p_s} > 0$$

e

d) positivamente ao aumento da renda real, se o bem de consumo for normal, e negativamente no caso de o bem ser inferior:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \gtrless 0$$

VIII.1.2 — Equação de Oferta

A quantidade ofertada q^s do bem é função do seu preço p e dos preços dos fatores de produção utilizados na sua produção, isto é, do preço ω da mão-de-obra e do preço r dos serviços do capital.[1] Assim, podemos escrever:

$$q^s = g\ (p,\ \omega,\ r) \tag{1.2}$$

1 Não estamos levando em conta na equação de oferta os preços de outros bens que lhes podem ser substitutos ou complementares na produção.

De acordo com a teoria da empresa em concorrência perfeita, esta responde com acréscimos de produção a estímulos de aumento de preços,

$$\frac{\partial g}{\partial p} > 0$$

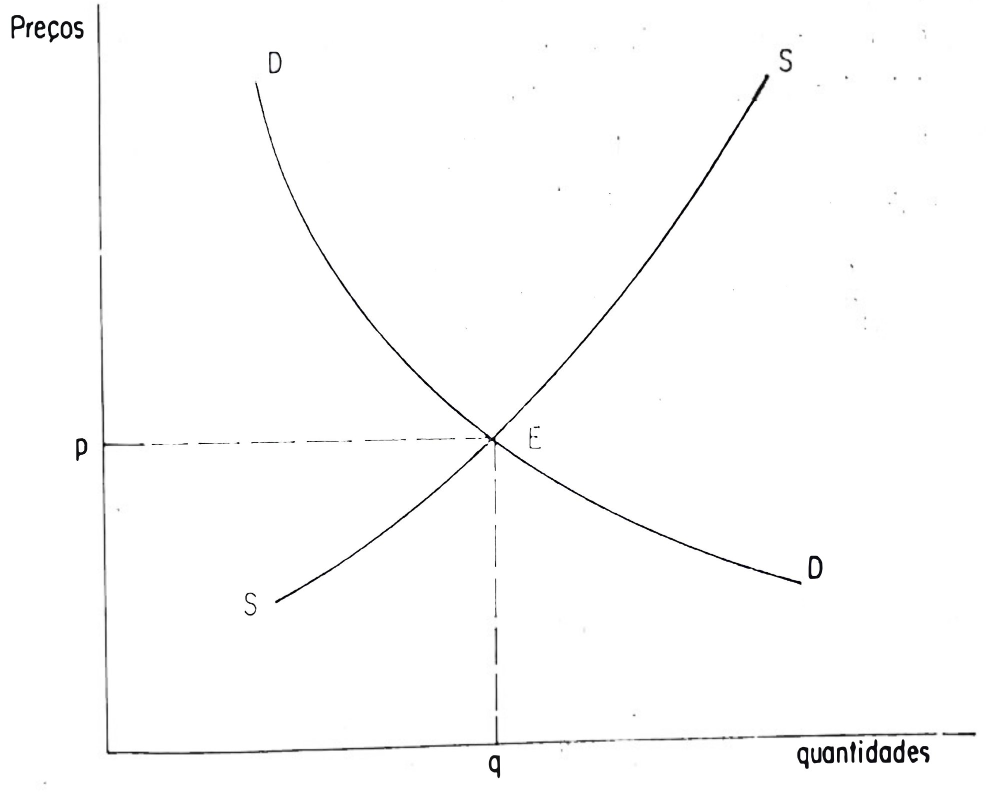
De modo geral, acréscimos nos preços dos fatores de produção desincentivam a produção, isto é:

$$\frac{\partial g}{\partial \omega} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial r} < 0$$

VIII.1.3 — Equilíbrio de Mercado

O mercado do bem em questão estará em equilíbrio quando a quantidade ofertada pelos produtores for igual à demandada pelos consumidores. A posição de equilíbrio corresponde ao ponto de interseção E na Figura VIII.1, onde a curva DD é a representação gráfica da equação (1.1) para valores fixos de p_c, p_s e y, e a curva SS representa a equação de oferta (1.2) quando ω e r são supostos constantes. Algebricamente, a condição de equilíbrio de mercado é:

Figura VIII.1
EQUILÍBRIO DE MERCADO



$$q^d = q^s = q \tag{1.3}$$

onde q é a quantidade do bem transacionada no mercado.

Substituindo-se essas condições nas equações (1.1) e (1.2), obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$q = f\,(p,\ p_c,\ p_s,\ y) \tag{1.4a}$$

$$q = g\,(p,\ \omega,\ r) \tag{1.4b}$$

As variáveis endógenas nesse modelo são o preço p de mercado e a quantidade q transacionada. As variáveis exógenas no modelo são: p_c, p_s, y, ω e r. Graficamente, marcando-se no eixo vertical os preços e no eixo horizontal as quantidades do bem, a Figura VIII.1 mostra as curvas de demanda e de oferta, traçadas supondo-se que as variáveis exógenas assumam determinados valores. A posição de equilíbrio de mercado — ponto E dessa figura — é a solução do sistema de equações formado por (1.4a) e (1.4b).

VIII.1.4 — Estática Comparativa

No estudo da estática comparativa estamos interessados em saber como as variáveis endógenas do modelo reagem quando as variáveis exógenas sofrem variações. Os instrumentos utilizados na persecução deste objetivo são as derivadas parciais das variáveis endógenas em relação às variáveis exógenas.

Igualando-se as equações (1.4a) e (1.4b) e diferenciando-se o resultado daí obtido, chega-se à seguinte expressão:

$$\frac{\partial f}{\partial p}\,dp + \frac{\partial f}{\partial p_c}\,dp_c + \frac{\partial f}{\partial p_s}\,dp_s + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial p}\,dp + \frac{\partial g}{\partial \omega}\,d\omega + \frac{\partial g}{\partial r}\,dr \tag{1.5}$$

O valor de dp que soluciona essa equação será, então, dado por:

$$dp = \frac{1}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial p} - \dfrac{\partial g}{\partial p}\right)}\left[-\frac{\partial f}{\partial p_c}\,dp_c - \frac{\partial f}{\partial p_s}\,dp_s - \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right.$$

$$\left. + \frac{\partial g}{\partial \omega}\,d\omega + \frac{\partial g}{\partial r}\,dr\right] \tag{1.6}$$

O sinal do denominador da equação anterior,

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p},$$

é negativo em virtude das hipóteses feitas sobre as equações de procura e de oferta.

É fácil concluir-se da expressão (1.6) os seguintes fatos:

a) o aumento do preço p_c do bem complementar acarreta decréscimo no preço p,

$$\frac{\partial p}{\partial p_c} = - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_c}}{\dfrac{\partial f}{\partial p} - \dfrac{\partial g}{\partial p}} < 0;$$

b) o aumento do preço p_s do bem substituto acarreta aumento do preço p,

$$\frac{\partial p}{\partial p_s} = - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_s}}{\dfrac{\partial f}{\partial p} - \dfrac{\partial g}{\partial p}} > 0;$$

c) nada se pode afirmar, *a priori,* sobre o efeito de variações da renda real dos consumidores no preço p do bem porque:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial p} - \dfrac{\partial g}{\partial p}} \gtreqless 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \gtreqless 0;$$

d) o aumento do salário ω implica o aumento do preço p do produto, pois:

$$\frac{\partial p}{\partial \omega} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial \omega}}{\dfrac{\partial f}{\partial p} - \dfrac{\partial g}{\partial p}} > 0;$$

e) o aumento do valor locativo r do capital acarreta aumento do preço p do produto em virtude de:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial r}}{\dfrac{\partial f}{\partial p} - \dfrac{\partial g}{\partial p}} > 0$$

No que toca ao efeito das variáveis exógenas sobre a quantidade q de equilíbrio de mercado, podemos obter as derivadas parciais desta em relação àquelas do modo a seguir. Substituindo-se o valor de dp, dado em (1.6), na diferencial de (1.4a), ou na diferencial de (1.4b), temos:

$$dq = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}} \left[- \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial p_c} dp_c - \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial p_s} dp_s - \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial r} dr \right] \tag{1.7}$$

A partir dessa equação concluímos que:

a) o aumento do preço p_c do bem complementar faz com que a quantidade de equilíbrio diminua:

$$\frac{\partial q}{\partial p_c} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial p_c}}{\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}} < 0;$$

b) o aumento do preço p_s do bem substituto acarreta o aumento da quantidade q em virtude de

$$\frac{\partial q}{\partial p_s} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial p_s} \frac{\partial g}{\partial p}}{\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}} > 0;$$

c) nada se pode afirmar, *a priori*, sobre o efeito da variação da renda real y dos consumidores na quantidade q, pois:

$$\frac{\partial q}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial p}}{\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}} \gtreqless 0 \longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \gtreqless 0;$$

d) acréscimos no salário ω fazem diminuir q,

$$\frac{\partial q}{\partial \omega} = \frac{\frac{\partial g}{\partial \omega} \frac{\partial f}{\partial p}}{\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}} < 0;$$

e) acréscimo no valor locativo r do capital acarreta diminuição da quantidade q:

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial r} \quad \dfrac{\partial f}{\partial p}}{\dfrac{\partial f}{\partial p} - \dfrac{\partial g}{\partial p}} < 0.$$

VIII.2 — Equações de Oferta de Exportação e de Demanda de Importação

O objetivo desta seção consiste em discutir alguns problemas relacionados com a especificação da função-oferta de exportação. O modelo apresentado a seguir admite que a demanda internacional pelo produto exportado é infinitamente elástica, o que significa dizer que o país exportador é marginal no mercado internacional, não podendo, conseqüentemente, alterar o preço de venda do produto. É claro que esta hipótese não é adequada para alguns produtos primários exportados pelo Brasil. Para tais produtos torna-se necessário adicionar ao modelo uma equação de demanda (internacional) cuja elasticidade-preço seja finita.

A formulação apresentada nesta seção, cabe ressaltar, é bastante geral para abranger não-somente o estudo da função-oferta de exportação como também a especificação da função-demanda de importação.

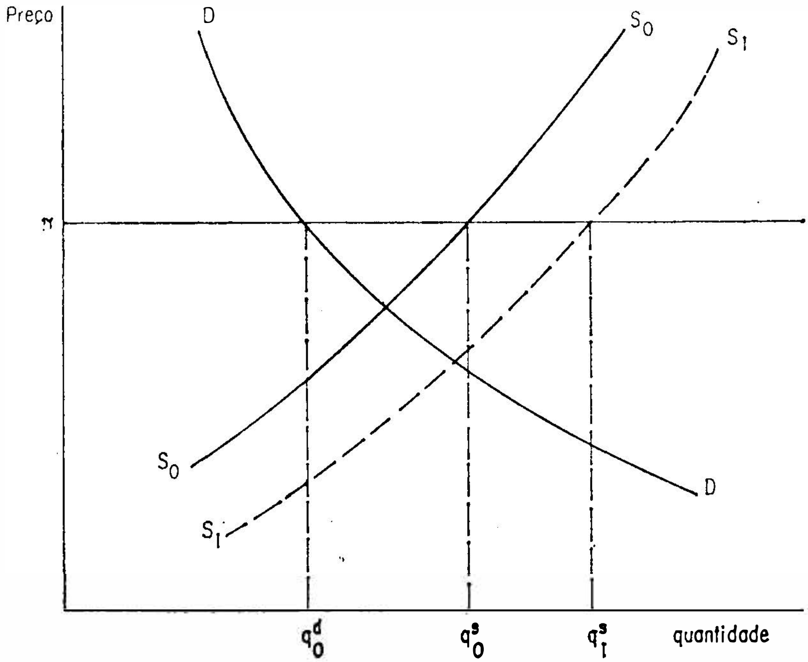
VIII.2.1 — Especificação da Função-Oferta de Exportação

Considere-se um produto agrícola que tem parte de sua produção exportada. Admita-se que o preço deste produto é formado no mercado internacional, no qual nosso país é um exportador marginal. Em outras palavras, suponha-se que a demanda internacional pelos produtos agrícolas brasileiros é infinitamente elástica. A Figura VIII.2 mostra a demanda interna *DD,* a curva de oferta *SS* e o preço internacional, em moeda nacional, π.[2] Ao preço π, a quantidade produzida é igual a q_o^s e o consumo interno é q_o^d . A diferença q_o^s — q_o^d é exportada.

A quantidade exportada de um produto agrícola pode aumentar, basicamente, devido a três razões: deslocamento para a esquerda da curva de demanda *DD,* mudança para a direita da curva de oferta *SS* e aumento do preço (relativo) do produto agrícola em moeda nacional. Com efeito, imagine-se, por exemplo, que o custo (marginal) de produção do referido produto baixou deslocando, em conseqüência, a curva de oferta de S_0 S_0 para S_1 S_1 (v. Figura VIII.2). Este

[2] O preço π inclui também taxas e impostos por acaso existentes.

Figura VIII. 2
DESLOCAMENTO DA CURVA DE OFERTA



deslocamento da curva de oferta acarretará o aumento de exportações de $q_1^s - q_0^s$. Imagine-se, agora, a situação descrita na Figura VIII.3. A curva de demanda, por algum motivo, se desloca do D_0 D_0 para D_1 D_1. Neste caso, haverá um acréscimo das exportações de $q_1^d - q_0^d$, igual à redução do consumo doméstico.

A Figura VIII.4 mostra o efeito de um aumento do preço sobre a quantidade exportada. O preço aumenta, por alguma razão, de π_0 para π_1. Em conseqüência, o consumo doméstico decresce e a produção aumenta, resultando num acréscimo da exportação igual a $(q_1^s - q_0^s) + (q_0^d - q_1^d)$.

Sumariando o que foi dito acima, existem basicamente três razões para o aumento da quantidade exportada: [3]

a) deslocamentos para a direita da curva de oferta;

b) deslocamentos para a esquerda da curva de demanda doméstica; e

c) aumento do preço de exportação, em moeda nacional.

[3] Não estamos considerando os possíveis efeitos de restrições quantitativas sobre as exportações.

Figura VIII . 3

DESLOCAMENTO DA CURVA DE DEMANDA INTERNA

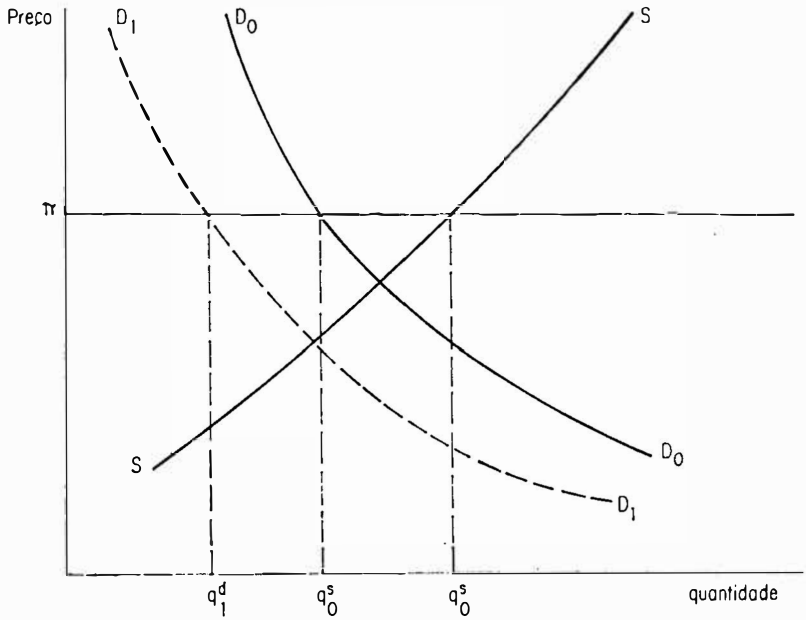
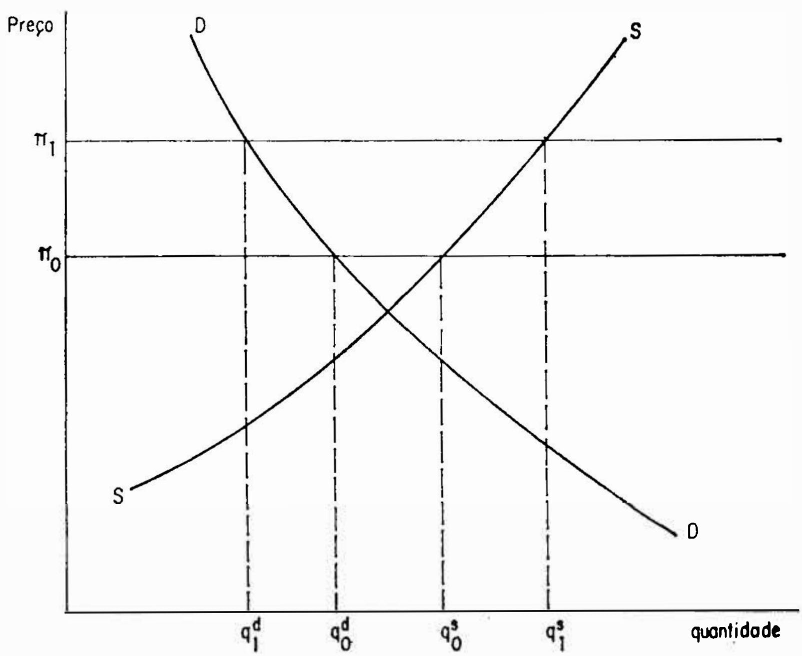


Figura VIII . 4

AUMENTO DO PREÇO DE EXPORTAÇÃO



O argumento geométrico que acabamos de descrever pode ser colocado formalmente em termos de um modelo econométrico. Com essa finalidade, admita-se que a demanda doméstica é dada pela equação:

$$q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + \alpha_2 y_t + \alpha_3 W_t + \varepsilon_{1t}, \ \alpha_1 < 0, \ \alpha_2 \lesseqgtr 0 \qquad (2.1)$$

onde q_t^d é a quantidade demandada, p_t o preço (relativo) pago e y_t a renda real do consumidor. O vetor W_t representa um conjunto de variáveis que afetam a quantidade demandada e ε_{1t} é o erro estocástico, sobre o qual admitem-se as propriedades tradicionais, isto é, média zero, variância finita e independência serial.

A quantidade ofertada q_t^s é especificada de acordo com a seguinte equação:

$$q_t^s = \beta_0 + \beta_1 p_t^e + \beta_2 Z_t + \varepsilon_{2t}, \ \beta_1 \geqslant 0 \qquad (2.2)$$

onde p_t^e é o preço esperado pelo produtor, Z_t é um vetor contendo outras variáveis tais como preços de fatores de produção e preços de outros produtos que afetam a quantidade ofertada. O erro ε_{2t} tem as mesmas propriedades do erro ε_{1t}, isto é, serialmente independente com média zero e variância finita.

Quanto ao processo de ajustamento entre a quantidade ofertada desejada q_t^s e a produção efetiva q_t, admitimos um processo do tipo ajustamento parcial:

$$q_t - q_{t-1} = \delta (q_t^s - q_{t-1}), \quad 0 < \delta \leqslant 1 \qquad (2.3)$$

Quando o parâmetro de ajustamento δ é igual a 1, o processo de ajustamento é instantâneo, isto é: $q_t^s = q_t$.

Admitindo que a demanda internacional pelos produtos brasileiros é infinitamente elástica, o preço doméstico do produto agrícola é igual ao preço internacional, em moeda nacional, isto é:

$$p_t = \pi_t \qquad (2.4)$$

onde π_t é o preço internacional depois de convertido em moeda nacional, aí incluindo-se as taxas e impostos que incidem sobre produtos exportados.

A quantidade exportada x_t é igual à diferença entre a quantidade produzida q_t e a quantidade consumida q_t^d no mercado doméstico: [4]

$$x_t = q_t - q_t^d \qquad (2.5)$$

[4] Na hipótese de que exista, no período, variação do nível de estoques, a quantidade exportada seria dada por:

$$x_t = q_t - q_t^d - \Delta h_t$$

onde $\Delta h_t = h_t - h_{t-1}$ e h_t é o nível de estoques no final do período t. Neste caso, teríamos que introduzir no modelo equações adicionais para explicar a variação de estoques. Por exemplo, $\Delta h_t = \bar{\delta}(h_t^d - h_{t-1})$ onde $0 < \bar{\delta} \leqslant 1$ e h_t^d, o nível desejado de estoques, seria função de algumas variáveis a serem devidamente explicitadas.

As equações (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5) formam um modelo estrutural com cinco variáveis endógenas: a quantidade consumida no mercado doméstico q^d, a produção desejada q_t^s, a produção efetiva q_t, o preço doméstico p_t e a quantidade exportada x_t. A função-oferta de exportação é uma equação em forma reduzida, obtida a partir das equações (2.1) — (2.5), que expressa a quantidade exportada em função das variáveis exógenas do modelo, ou seja:

$$x_t = (\beta_0\delta - \alpha_0) + \beta_1\delta p_t^* - \alpha_1\pi_t + \beta_2 Z_t$$
$$+ (1 - \delta) q_{t-1} - \alpha_2 y_t - \alpha_3 W_t + \varepsilon_t \qquad (2.6)$$

onde $\varepsilon_t = \delta\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}$. Na equação (2.6) resta especificar o mecanismo de formação de expectativa do preço esperado p_t^e. Obviamente, para que a equação (2.6) seja implementada para um determinado produto agrícola tem-se de especificar quais as variáveis a serem incluídas nos vetores Z_t e W_t.

VIII.2.2 — Erro de Especificação na Função-Oferta de Exportação: Conseqüências

Com o objetivo de simplificar a equação (2.6) admita-se que: i) o coeficiente de ajustamento δ seja igual à unidade; ii) o preço esperado igual ao observado; iii) as variáveis em W_t praticamente não variem no período da amostra; iv) uma determinada variável Z_t influencie positivamente a quantidade ofertada; e v) uma boa *proxy* para Z_t seja a quantidade produzida q_t. Estas hipóteses de trabalho levam a função-oferta de exportação (2.6) a ser expressa por:

$$x_t = \gamma_0 + \gamma_1 \pi_t + \gamma_2 q_t + \gamma_3 y_t + \varepsilon_t \qquad (2.7)$$

onde:

$$\gamma_0 = (\beta_0 - \alpha_0) - \alpha_3 W_t$$
$$\gamma_1 = \beta_1 - \alpha_1 > 0$$
$$\gamma_2 > 0$$
$$\gamma_3 = -\alpha_2 \gtreqless 0$$

Observe-se que o parâmetro γ_3 será positivo se, do ponto de vista dos consumidores do país exportador, o produto agrícola em estudo for considerado um bem inferior.

Ao invés de estimar a equação (2.7) que é o modelo 'correto', considere-se, agora, o caso de o pesquisador estimar, usando mínimos quadrados ordinários, a seguinte equação:

$$x_t = \gamma_0 + \gamma_1 \pi_t + \gamma_2 q_t + \varepsilon_t^* \qquad (2.8)$$

onde $\varepsilon_t^* = \varepsilon_t + \gamma_3 y_t$

Dois tipos de problemas surgem quando (2.8) é estimada por mínimos quadrados ordinários. Em primeiro lugar, a variável renda y_t foi deixada fora do modelo, acarretando, em conseqüência, um erro de especificação. Em segundo lugar, o método de mínimos quadrados ordinários produz estimativas tendenciosas, pois a quantidade produzida q_t é correlacionada com ε^*. Esta correlação prende-se ao fato de que q_t é correlacionada com ε_t, uma parcela de ε^*. É claro que esses dois tipos de problema afetam as propriedades dos estimadores, que deixam de ser não-tendenciosos. Com a finalidade de examinar a tendenciosidade assintótica dos estimadores empregados, introduzimos a seguinte notação. A equação (2.7), em notação matricial, passa a ser escrita na seguinte forma:

$$x = R\gamma + \varepsilon \tag{2.9}$$

onde x é um vetor T x 1, R é uma matriz T x 4, γ um vetor 4 x 1 e ε um vetor T x 1. A equação (2.8), por sua vez, torna-se:

$$x = R_1\gamma^* + \varepsilon^* \tag{2.10}$$

onde γ^* é um vetor 3 x 1, ε^* um vetor T x 1 e a matriz R_1 é uma submatriz da matriz R, isto é:

$$R = [R_1 \mid y] \tag{2.11}$$

onde y, a quarta coluna da matriz R, é um vetor T x 1, cujos elementos são as rendas no período coberto pela amostra considerada.

O estimador de mínimos quadrados ordinários de γ^* é:

$$\hat{\gamma}^* = (R_1' R_1)^{-1} R_1'x \tag{2.12}$$

Substituindo o valor de x dado em (2.9) na expressão acima, temos:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}^* &= (R_1' \; R_1)^{-1} \; R_1' \, [R\gamma + \varepsilon] = \\ &= (R_1' \, R_1)^{-1} \; R_1' \, [R_1 \, \bar{\gamma} + y \, \gamma_3 + \varepsilon] \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde $\gamma' = [\gamma_0 \; \gamma_1 \; \gamma_2 \mid \gamma_3] = [\bar{\gamma} \mid \gamma_3]$, ou seja, o vetor $\bar{\gamma}$ exclui do vetor γ a componente γ_3.

Para examinar se o estimador $\hat{\gamma}^*$ é consistente, toma-se o limite em probabilidade, que denominamos abreviadamente por *limp*, de ambos os lados de (2.13), isto é:

$$\text{limp } \hat{\gamma}^* = \bar{\gamma} + \text{limp} \left(\frac{R_1' \, R_1}{T}^{-1} \right) \frac{R_1'y}{T} \gamma_3 + \text{limp} \left(\frac{R_1' \, R_1}{T}^{-1} \right) \frac{R_1'\varepsilon}{T} \tag{2.14}$$

Observe-se que o segundo termo do lado direito de (2.14) é um vetor formado pelos coeficientes da seguinte regressão:

$$y = R_1 . a + \text{erro} \tag{2.15}$$

ou alternativamente,

$$y_t = a_0 + a_1 \pi_t + a_2 q_t + \text{erro} \tag{2.16}$$

Quanto ao último termo do lado direito da equação (2.14), temos que, por hipótese, o erro ε_t tem valor esperado zero e o preço π_t não é correlacionado com o erro ε_t. Por outro lado, a quantidade q_t é correlacionada com ε_t, pois

$$E\ q_t \varepsilon_t = E\ q_t \varepsilon_{2t} = \sigma_2^2 \tag{2.17}$$

onde σ_2^2 é a variância do erro ε_{2t} da equação (2.2) e E indica a esperança matemática.[5] Em conseqüência,

$$\operatorname{limp} \left(\frac{R_1' \ R_1}{T} \right)^{-1} \frac{R_1' \varepsilon}{T} = \phi \tag{2.18}$$

onde o vetor ϕ é dado por:

$$\phi = \begin{bmatrix} \overset{*}{\omega}_{13} & \sigma_2^2 \\ \overset{*}{\omega}_{23} & \sigma_2^2 \\ \overset{*}{\omega}_{33} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

e $\overset{*}{\omega}_{ij}$ é o elemento da linha i e da coluna j da matriz $\operatorname{limp} \left(\frac{R_1' \ R_1^{-1}}{T} \right) =$ $= \Omega^*$.

Note-se que $\overset{*}{\omega}_{33}$ é positivo, pois a matriz Ω^* é positiva definida, por hipótese. A partir de (2.14) – (2.19), concluímos:

$$\operatorname{limp} \hat{\gamma}_1^* = \gamma_1 + a_1 \ \gamma_3 + \overset{*}{\omega}_{23} \ \sigma_2^2 \tag{2.20}$$

$$\operatorname{limp} \hat{\gamma}_2^* = \gamma_2 + a_2 \ \gamma_3 + \omega_{33} \ \sigma_2^2 \tag{2.21}$$

Na hipótese em que: i) o produto agrícola em consideração seja um bem normal $\gamma_3 < 0$; ii) o coeficiente a_1 seja positivo; e iii) $\overset{*}{\omega}_{23} < 0$, o estimador $\hat{\gamma}_1^*$, para grandes amostras, subestimará o verdadeiro valor γ_1. Ainda mais, é possível que limp $\hat{\gamma}_1^*$ seja negativo; bastando para tanto que:

$$\gamma_1 + a_1 \gamma + \overset{*}{\omega}_{23} \ \sigma_2^2 < 0.$$

[5] Combinando as equações (2.2) e (2.3), obtemos:

$$q_t = (1 - \delta)\, q_{t-1} + \delta\beta_0 + \delta\beta_1\, p_t^e + \delta\beta_2\, Z_t + \delta\varepsilon_{2t}$$

Observando-se que no caso $\delta = 1$, segue-se da expressão acima que $Eq_t \ \varepsilon_{2t} = \sigma_2^2$.

No caso do limite de probabilidade do estimador $\hat{\gamma}^2_*$, nada se pode afirmar, *a priori*. Pois enquanto o termo $a_2\gamma_3$ é negativo, se $a_2 > 0$ e o bem é normal, o termo $\omega^*_{33}\ \sigma^2_2$ é positivo. Se

$$a_2\gamma_3 + \omega^*_{33}\ \sigma^2_2 > 0$$

o estimador $\hat{\gamma}^*_2$ superestimará o verdadeiro valor γ_2; da mesma forma se

$$a_2\gamma_3 + \omega^*_{33}\ \sigma^2_2 < 0$$

o estimador $\hat{\gamma}^*_2$ subestimará o verdadeiro valor de γ_2.

VIII.2.3 — Estudo de Oferta de Exportação de Produtos Primários: Von Doellinger, Faria, Ramos e Cavalcanti (1973)

Em um trabalho publicado em 1973, Von Doellinger e outros autores estudaram a exportação brasileira de alguns produtos primários utilizando-se da especificação (2.8), a qual repetimos aqui por conveniência,

$$x_t = \gamma_0 + \gamma_1\, p_t + \gamma_2 q_t + \varepsilon^*_t \tag{2.22}$$

A Tabela VIII.1 reproduz os resultados obtidos por Von Doellinger *et alii* e mostra que grande parte, mais precisamente em 11 dos 18 produtos estudados, os coeficientes de preço estimados são negativos, contrariamente às expectativas dos autores da pesquisa. Além disso, em apenas um produto, entre os 18, a elasticidade-preço é significativa, embora com o sinal negativo. As elasticidades da quantidade exportada com relação à produzida são significativas com exceção de um produto. Estas elasticidades são positivas, salvo o caso da banana, e em geral os valores dos coeficientes são superiores à unidade.

A análise da seção anterior mostra claramente que a equação de oferta de exportação (2.22) envolve erro de especificação, o qual, aliado ao método de estimação empregado, mínimos quadrados ordinários, implica a existência de viés nos parâmetros estimados. Provavelmente no que toca à elasticidade-preço, o sentido do viés é que a estimativa deste parâmetro tenha o sinal contrário ao indicado pela teoria econômica, e que, no caso da elasticidade-quantidade produzida, a estimativa do parâmetro superestima o valor do coeficiente. Os resultados obtidos por Von Doellinger *et alii*, descritos no parágrafo anterior, confirmam as previsões acima. É, portanto, bastante duvidosa qualquer conclusão baseada em resultados obtidos a partir da especificação da oferta de exportação de acordo com a equação (2.22).

A equação de oferta (2.7), aqui repetida

$$x_t = \gamma_0 + \gamma_1\, \pi_t + \gamma_2\, q_t + \gamma_3 y_t + \varepsilon_t \tag{2.23}$$

que seria a especificação "correta" da equação oferta de exportação, pode ser estimada por mínimos quadrados ordinários. Entretanto, devido ao fato de que

Tabela VIII.1

EXPORTAÇÃO DE PRODUTOS PRIMÁRIOS: VON DOELLINGER E OUTROS (1973)

Produto	Constante	Preço	Quantidade Produzida	R^2	DW
Gomas Não-Elásticas	0,47	—0,06 (—0,386)	0,97 (5.928)	0,73	1,496
Castanha de Caju	— 10,00	—0,41 (— 0,532)	1,94 (6,690)	0,87	2,540
Castanha do Pará	5,39	— 0,03 (—0,356)	0,46 (3,408)	0,47	1,934
Cacau	—3,10	—0,20 (—0,942)	1,26 (2,570)	0,31	1,011
Sisal	2,90	0,19 (0,871)	0,70 (5,227)	0,66	0,930
Pimenta-do-Reino	— 11,64	0.90 (2,164)	1,91 (8,470)	0,86	2,540
Banana	1 31	— 0,13 (—1,670)	— 0,27 (2,609)	0,42	1,533
Crustáceos	—11,42	0,80 (1,813)	1,44 (3,075)	0,89	0,645
Milho	—129,09	—4,94 (—1,528)	8,84 (2,762)	0,54	1 841
Amendoim	— 5,907	2,29 (1,311)	0,79 (1,055)	0,32	1,515
Soja	0,29	—0,043 (— 0,055)	0,86 (6,462)	0,76	2,537
Arroz	— 57,10	2,53 (1,373)	4.13 (2,533)	0,38	2,916
Peixes	— 95,40	— 0,93 (— 0,496)	8,13 (3,477)	0,64	1,525
Lã	— 78,90	1,53 (1,578)	8,01 (2,623)	0,39	0,776
Algodão	—26,08	—1,30 (—3,040)	2,92 (8,770)	0,87	2 041
Juta	—49,00	—1,18 (— 0,479)	5,48 (2,382)	0,36	1,050
Carne Bovina	— 34 10	—0,12 (— 0,120)	3,57 (3,471)	0,57	0,975
Fumo em Folha	— 4,34	0,53 (1,995)	1,10 (7,087)	0,77	2,045

FONTE: Doellinger et alii (1971).
OBS.: Os valores entre parênteses são as estatísticas t de Student.

a quantidade produzida q_t é correlacionada com o erro ε_t, os estimadores de mínimos quadrados ordinários são tendenciosos. Com efeito, o estimador de mínimos quadrados ordinários $\hat{\gamma}$ é dado por:

$$\hat{\gamma} = (R'R)^{-1} R'x \tag{2.24}$$

O limite em probabilidade de $\hat{\gamma}$ é:

$$\text{limp } \hat{\gamma} = \gamma + \text{limp} \left(\frac{R'R}{T} \right)^{-1} \text{limp } \frac{R'\varepsilon}{T} \tag{2.25}$$

Admitindo-se que a matriz $(R'R/T)^{-1}$ tenda, no limite, para uma matriz positiva definida Ω e que:

$$\text{limp } \frac{R'\varepsilon}{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

a equação (2.25) pode ser expressa por:

$$\text{limp} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_0 \\ \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \\ \hat{\gamma}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{13} & \sigma_2^2 \\ \omega_{23} & \sigma_2^2 \\ \omega_{33} & \sigma_2^2 \\ \omega_{43} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

onde ω_{ij} é o elemento da linha i e da coluna j da matriz Ω. Observando-se que ω_{33} é positivo, pois a matriz Ω é positiva definida por hipótese, o estimador $\hat{\gamma}_2$ superestimará o verdadeiro valor de γ_2. Quanto aos estimadores $\hat{\gamma}_1$ e $\hat{\gamma}_3$ nada se pode dizer *a priori,* pois os sinais de ω_{23} e ω_{43} tanto podem ser negativos como positivos. Uma indicação destes sinais pode ser obtida, para uma dada amostra, examinando-se os sinais das covariâncias entre $\hat{\gamma}_2$ e $\hat{\gamma}_1$ e entre $\hat{\gamma}_2$ e $\hat{\gamma}_3$, pois, para grandes amostras, temos:

$$\begin{aligned} \text{cov } (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) &\propto \omega_{23} \\ \text{cov } (\hat{\gamma}_3, \hat{\gamma}_2) &\propto \omega_{43} \end{aligned} \tag{2.28}$$

onde o símbolo $\propto$ indica proporcionalidade; e, neste caso, o coeficiente de proporcionalidade é positivo.

A equação (2.23) foi estimada pelo método de mínimos quadrados ordinários para os mesmos 18 produtos estudados por Von Doellinger *et alii,* utilizando-se, também, da mesma amostra. Para essa amostra, em todos os 18 produtos, a covariância entre $\hat{\gamma}_3$ e $\hat{\gamma}_2$ é negativa. Isso significa dizer que a estimativa da elasticidade em relação à renda subestima o verdadeiro valor do parâmetro. No que toca à covariância entre $\hat{\gamma}_1$ e $\hat{\gamma}_2$, em 10 dos 18 produtos a covariância é negativa. Nesses casos, a estimativa da elasticidade-preço subestima o verdadeiro valor do coeficiente, havendo a possibilidade de que a estimativa da elasticidade-preço de oferta seja negativa, ao contrário do indicado pela teoria econômica. É importante ter em mente que as observações contidas nesse parágrafo não são totalmente corretas, apenas indicativas, pois estamos fazendo inferências de uma amostra bastante pequena para parâmetros de grandes amostras, como é o caso dos coeficientes ω_{ij}. Em outras palavras, é possível que em uma amostra particular a covariância entre $\hat{\gamma}_1$ e $\hat{\gamma}_2$ tenha um sinal contrário ao de ω_{12}. Todavia, nos parece bastante provável que o método de mínimos quadrados ordinários aplicado à equação (2.23) irá subestimar a elasticidade-renda. A elasticidade-quantidade produzida será superestimada. Quanto à elasticidade-preço, esta tanto pode estar superestimada quanto subestimada.

A Tabela VIII.2 apresenta os resultados da estimação por mínimos quadrados ordinários dos parâmetros da equação (2.23). Quanto ao sinal dos coeficientes, 16 entre os 18 produtos têm o sinal positivo para elasticidade-preço, como indicado pela teoria econômica. Entretanto, apenas quatro destes coeficientes são significativos. No que toca à elasticidade-quantidade, 14 entre os 18 produtos têm sinais positivos. Sete entre os 18 produtos têm a elasticidade-quantidade significativa. Quanto à elasticidade-renda, apenas seis elasticidades são negativas,

Tabela VIII.2

EXPORTAÇÃO DE PRODUTOS PRIMÁRIOS: INCLUSÃO DA RENDA NA FUNÇÃO-OFERTA DE EXPORTAÇÃO

Produto	Constante	Preço	Quantidade Produzida	Renda	R^2	DW
Gomas Não-Elásticas	—1,2338	0,1071	1,1223	—0,2179	0,78	1,566
	(—0,7004)	(0,5803)	(5,5319)	(—0,8690)		
Castanha de Caju	6,0960	—1,0674	0,0345	5,8216	0,96	2,324
	(1,3078)	(—2,1501)	(0,0755)	(4,5278)		
Castanha do Pará	3,2392	0,1099	0,6408	—0,3504	0,60	1,939
	(2,0415)	(0,5192)	(4,0838)	(—2,1222)		
Cacau	—13,6335	—0,0520	2,1241	—0,5418	0,39	2,418
	(—1,4454)	(—0,3363)	(2,6759)	(—1,7263)		
Sisal	7,0049	0,1591	0,3546	0,2141	0,83	1,449
	(3,2545)	(1,6806)	(1,8043)	(0,6423)		
Pimenta-do-Reino*	—5,2018	0,6101	1,2293	0,8943	0,96	2,845
	(—1,5733)	(6,1770)	(2,6748)	(0,7416)		
Banana	29,0861	0,0036	—1,6306	1,2236	0,73	1,499
	(4,8121)	(0,0530)	(—3,1863)	(2,4836)		
Crustáceos*	4,3734	0,2086	0,0102	3,0194	0,95	0,961
	(0,8253)	(2,4983)	(0,0185)	(3,2663)		
Milho*	—296,1250	2,2345	19,3825	—10,0817	0,38	1,862
	(—1,4362)	(0,7549)	(1,4659)	(—0,8949)		
Amendoim	—13,3575	3,2320	1,2402	—0,4530	0,44	1,801
	(—0,5455)	(1,7561)	(0,5845)	(—0,1081)		
Soja	—9,8200	0,2967	1,7464	—2,5457	0,77	2,679
	(—1,1524)	(0,3475)	(2,3693)	(—1,2073)		
Arroz	11,8724	2,6709	—0,5115	4,5657	0,38	2,676
	(0,1555)	(1,3822)	(—0,1001)	(0,9601)		
Peixes*	2,3343	1,6329	—0,2435	4,3897	0,92	1,027
	(0,0649)	(3,6087)	(—0,0798)	(0,9595)		
Lã*	—125,0510	1,4803	12,5049	0,7138	0,65	1,776
	(—3,9997)	(2,9961)	(4,1589)	(0,8002)		
Algodão**	19,0885	0,4727	—0,7261	2,9972	0,74	1,296
	(3,4830)	(0,6814)	(—1,5803)	(4,2442)		
Juta	—23,5677	1,4974	2,2373	5,1318	0,63	1,451
	(—1,0970)	(0,6562)	(1,0022)	(2,5768)		
Carne Bovina	—2,5462	0,0016	0,8447	1,7436	0,40	0,901
	(—0,0934)	(0,0013)	(0,3864)	(0,6471)		
Fumo em Folha	4,3758	0,0070	0,4891	0,3973	0,70	1,307
	(0,8129)	(0,0874)	(1,0646)	(1,0833)		

OBS.: Os valores entre parênteses são as estatísticas t de Student. Um asterisco indica que a variável preço é defasada de um período. Dois asteriscos indicam que preço e quantidade produzida são defasados de um período.

o que significa dizer que 12 produtos seriam considerados bens inferiores. Quanto à significância, apenas cinco elasticidades-renda seriam significativas, porém estas elasticidades são todas positivas. O elevado número de elasticidades-renda negativas parece indicar-nos que algum erro de especificação está presente no modelo.

A equação (2.23) foi obtida a partir da equação (2.6) através de um conjunto de hipóteses simplificadoras. Os resultados obtidos acima parecem indicar claramente que tanto o método de estimação é inadequado quanto a especificação do modelo é incompleta. Possivelmente, variáveis de demanda e de oferta foram ignoradas na formulação (2.23), acarretando tendenciosidade nos estimadores. Por outro lado, como visto, a variável quantidade produzida como *proxy* para deslocamentos na curva de oferta causa problema. Possivelmente, a escolha de outra *proxy* seria certamente um caminho mais indicado para testar quais os fatores mais importantes para explicar as variações nas exportações. Isto é, se os movimentos ao longo da curva ou se os deslocamentos da curva de oferta foram mais importantes na variação das exportações observada. É claro que não se devem esquecer variáveis de demanda, pois que, mantendo-se a curva de oferta estável, deslocamentos da curva de demanda doméstica provocam variações na quantidade exportada, como se pode depreender da equação (2.6).

Acreditamos que um dos principais problemas no estudo da oferta de exportação de produtos primários reside na especificação correta das funções de oferta. Certamente, a tarefa não é fácil devido às características dos mercados de cada produto. Para exemplificar, admitamos que o processo de ajustamento entre a quantidade ofertada desejada q_t^s e a produção efetiva seja instantânea, isto é, δ é igual à unidade na equação (2.3). Admitamos ainda que a quantidade de exportação desejada não é igual à quantidade exportada efetivamente, isto é:

$$x_t - x_{t-1} = \Theta(x_t^s - x_{t-1}),\ 0 < \Theta \leqslant 1 \tag{2.29}$$

e que a quantidade exportada desejada seja dada pela equação (2.7).

$$x_t^s = \gamma_0 + \gamma_1 \pi_t + \gamma_2 q_t + \gamma_3 y_t + \varepsilon_t \tag{2.30}$$

Combinando-se as equações (2.29) e (2.30), obtemos:

$$x_t = \gamma_0\Theta + \gamma_1\Theta\pi_t + \gamma_2\Theta\, q_t + \gamma_3\Theta\, y_t + (1-\Theta)\, x_{t-1} + \Theta\varepsilon_t \tag{2.31}$$

A Tabela VIII.3 contém resultados obtidos aplicando-se mínimos quadrados ordinários na estimação dos parâmetros da equação (2.31). No caso do amendoim, de peixes e de algodão, as elasticidades-preço de curto prazo são significativas tanto do ponto de vista estatístico como do econômico. No caso da carne bovina, a introdução da exportação defasada faz com que a elasticidade-renda mude de sinal, passando a carne a ser um bem normal. Embora a elasticidade-renda não seja significativa, o valor do coeficiente é superior à unidade. O mesmo fenômeno ocorre com relação a peixes, notando-se neste caso que a elasticidade-preço é significativa.

Observe-se, ainda, que entre os cinco produtos da Tabela VIII.3, que incluem a exportação do período anterior como variável independente, quatro dos coeficientes das quantidades produzidas não são significativos. No caso do algodão, o coeficiente da quantidade produzida é significativo, porém o sinal do coeficiente é negativo. A Tabela VIII.3 contém ainda as estimativas dos parâmetros das funções-oferta de exportação do sisal e do arroz onde, ao invés de utilizar-se a quantidade produzida no período a que se referem as exportações, utilizou-se a quantidade produzida no período anterior como variável independente. É bom lembrar que este procedimento não implica inconsistência nos estimadores de mínimos quadrados ordinários. Obviamente, a hipótese subjacente é de que a quantidade defasada captaria os deslocamentos da curva de oferta, ao invés de retratar o mecanismo de ajustamento parcial. No caso do sisal, a elasticidade-preço da oferta de exportação é positiva e significativa. Todavia, o mesmo não ocorre com as elasticidades-quantidade produzida e renda. No que toca à oferta de exportação do arroz, os sinais dos coeficientes são aqueles indicados pela teoria econômica. Entretanto, apenas a elasticidade-quantidade produzida defasada é significativa, indicando que deslocamentos da curva de oferta têm sido importantes na explicação da quantidade exportada.

A equação de oferta de exportação (2.7) supõe que a quantidade produzida q_t seja uma boa *proxy* para variáveis que desloquem a curva de oferta de produção. Como observamos anteriormente, o uso desta *proxy* acarreta sérios problemas econométricos. Com o objetivo de contornar estes problemas, poder-se-ía admitir que a variável tempo t seja uma *proxy* para deslocamentos da curva de oferta de produção. Neste caso, a equação de oferta de exportação (2.7) seria substituída pela seguinte equação:

$$x_t = \gamma_0 + \gamma_1 \pi_t + \gamma_2 t + \gamma_3 y_t + \varepsilon_t \tag{2.32}$$

A Tabela VIII.3 reporta os resultados da aplicação da equação (2.32) para a pimenta-do-reino, milho, lã e juta. No caso da pimenta-do-reino, somente a elasticidade-preço é significativa. Para o milho, apenas o coeficiente da variável tempo é significativo. Para a juta, as elasticidades-preço e renda bem como o coeficiente da variável tempo são significativos. No que toca à lã, apenas a elasticidade-renda e o parâmetro da variável tempo são significativos.

Um ponto adicional a observar-se, tanto na Tabela VIII.1 quanto na VIII.2, diz respeito aos valores da estatística Durbin-Watson. Como é bem sabido, como regra de bolso, um valor Durbin-Watson próximo a dois indica não existência de correlação serial de resíduos. Quando este valor se distancia de dois há uma forte indicação da existência de autocorrelação dos resíduos. Quando esse é o caso, deve-se aplicar um procedimento para a eliminação da autocorrelação dos resíduos. Se a autocorrelação persistir, duas hipóteses, pelo menos, são possíveis: ou o processo de correlação dos resíduos não é auto-regressivo ou existe algum erro de especificação. Para alguns dos produtos em que o valor do Durbin-Watson era bastante diferente de dois, aplicamos o método de Cochrane-Orcutt para eliminação da autocorrelação dos resíduos, o que, entretanto, não ocorreu, com exceção da pimenta-do-reino. Existe, portanto, uma boa dose de evidência de que as especificações (2.8) e (2.7) não são especificações adequadas para se estudar a oferta de exportação. Todavia, contrariamente às conclusões de Von Doellinger *et alii*, os resultados das Tabelas VIII.2

Tabela VIII.3

OFERTA DE EXPORTAÇÃO: ESPECIFICAÇÕES ALTERNATIVAS

Produto	Constante	Preço	Quantidade Produzida	Renda	Exportação no Período Anterior	Tempo	R^2	DW (ρ)
Sisal	6,9975	0,1972	0,3553	0,1517	—	—	0,81	1,6490
	(2,1957)	(2,0382)	(1,2190)	(0,2851)				
Pimenta-do-Reino[1]	—8,8797	0,8310	1,5821	0,5995	—	—	0,92	2,0366
	(—2,8926)	(4,3148)	(3,9597)	(0,5772)				(—0,5022)
Pimenta-do-Reino[2]	1,3819	1,0239	—	—1,0362	—	0,3453	0,87	2,1510
	(0,8325)	(2,1475)		(—0,2528)		(1,4506)		
Milho	6,0900	2,1565	—	—37,3005	—	2,5084	0,51	2,4229
	(1,8218)	(0,6637)		(—1,8943)		(2,2214)		
Amendoim	—28,1605	4,1113	2,2131	—3,0765	0,2531	—	0,54	1,9749
	(—1,1156)	(2,2307)	(1,0456)	(—0,7884)	(1,5127)			
Arroz	—121,4600	1,5075	8,5358	—3,3612	—	—	0,53	2,9704
	(—1,9992)	(0,8713)	(2,0705)	(—0,8569)				
Peixes	—2,3438	0,8610	0,3600	—1,1298	0,5812	—	0,99	0,7880
	(—0,1448)	(3,3661)	(0,2617)	(—0,4837)	(4,9726)			
Lã	6,0937	0,3311	—	—26,4951	—	1,6612	0,69	1,5198
	(3,8140)	(0,7703)		(—4,7701)		(5,0531)		
Algodão	9,4712	1,4292	—0,7118	2,0817	0,6057	—	0,87	2,7467
	(1,8166)	(2,3364)	(—2,0487)	(3,3957)	(3,0397)			
Juta	—3,0420	2,7856		—12,1334		1,0476	0,81	2,5623
	(—0,8868)	(1,9308)		(—2,0587)		(3,1863)		
Carne Bovina	—26,2325	0,8357	2,3879	—2,1501	0,5654	—	0,62	1,3977
	(—1,0223)	(0,8065)	(1,1476)	(—0,7491)	(2,4228)			
Fumo em Folha	7,1168	0,0963	—0,2742	0,5210	0,5897	—	0,76	1,8966
	(1,4368)	(1,0913)	(—0,5462)	(1,4917)	(2,0971)			

OBSERVAÇÕES: Os valores entre parênteses são as estatísticas t de Student. O símbolo ρ é o coeficiente de autocorrelação.

e VIII.3 indicam que movimentos ao longo da curva de oferta, que correspondem a variações de preços, têm sido um fator importante na explicação das variações da quantidade exportada. Essa conclusão é reforçada quando se tem em vista que as elasticidades da quantidade exportada com relação à quantidade produzida superestimam os verdadeiros valores destas elasticidades.

Os resultados da Tabela VIII.2 relativos à soja correspondem ao período 1953/70, porém não incluem observações dos anos 1960 e 1964, pois a quantidade exportada de soja em fava nesses dois anos foi nula. Na hipótese de que a exportação de soja em 1960 e em 1964 foi nula porque o preço no mercado doméstico estava superior ao do mercado internacional, as observações destes dois anos deveriam ser incluídas na estimação da função-oferta de exportação. Em outras palavras, à quantidade exportada zero corresponde um preço igual ao preço da soja no mercado interno. A Tabela VIII.4 mostra que a introdução destas duas observações muda completamente os parâmetros da função-oferta de exportação. Todas as elasticidades passam a ser significativas e extremamente elevadas. A quantidade exportada no período anterior não é significativa como evidenciam os resultados da segunda linha da Tabela VIII.4. Quando, ao invés da quantidade produzida no período, inclui-se a quantidade defasada de um período como variável independente (terceira linha da Tabela VIII.4) as estimativas dos parâmetros não sofrem grande alteração. As regressões foram efetuadas, também, para o período 1953/75, permanecendo, basicamente, os mesmos resultados. As elasticidades-preço para o período 1953/75 são, em geral, inferiores às do período 1953/70. Observe-se que a variável preço defasada de um período não é significativa para ambos os períodos. A Tabela VIII.4 sugere que, de modo geral, as elasticidades-preço, renda e quantidade produzida são significativas na função-oferta de exportação de soja.

Cumpre mencionar o fato de que a especificação da equação de demanda interna (2.1) partiu da hipótese de que o bem exportado é um bem de consumo no país exportador. Nem sempre este é o caso, e, certamente, não o é para alguns dos 18 produtos analisados nesta seção. Para produtos que sirvam de insumos na produção de outros, a especificação de equação de demanda doméstica deve basear-se na teoria de demanda de fatores de produção e não na teoria do consumidor.

A função-oferta de exportação, como indicado em (2.6), deve incluir preços de produtos substitutos e complementares no consumo doméstico, preço dos fatores de produção utilizados na produção doméstica do bem em estudo, preços de produtos substitutos e complementares na produção. A não inclusão destas variáveis introduz tendenciosidade nos coeficientes, e o uso de variáveis *proxy* pode introduzir complicações adicionais que podem inclusive levar a conclusões errôneas. Obviamente, se essas variáveis forem irrelevantes sua omissão não causa maiores problemas.

Na hipótese de que a demanda internacional pelo produto primário não seja infinitamente elástica, o modelo deve conter, além da equação de oferta de exportação, uma equação de demanda do resto do mundo pelo produto em questão e uma equação de equilíbrio do mercado. Dessa maneira, preço e quantidade exportada passam a ser variáveis endógenas no modelo.

Tabela VIII.4

OFERTA DE EXPORTAÇÃO DE SOJA

Constante	Preço	Preço do Período Anterior	Quantidade Produzida	Quantidade Produzida no Período Anterior	Renda	Quantidade Exportada no Período Anterior	R^2	DW	Período
—107,0660 (—2,5944)	9,4463 (1,9938)	—	9,4534 (2,5935)	—	—23,7874 (—2,3831)	—	0,43	1,7236	53/70
—126,1000 (—2,7399)	13,3475 (2,1920)	—	10,5886 (2,6275)	—	—27,9815 (—2,4273)	0,2668 (1,0087)	0,49	2,0180	53/70
—122,2370 (—2,4730)	12,8325 (2,4628)	—	—	10,5608 (2,4634)	—25,4506 (—2,2356)	—	0,43	1,9167	53/70
—122,3340 (—2,3098)	12,8058 (1,9901)	—	—	10,5745 (2,2042)	—25,4926 (—2,0296)	—0,0023 (—0,0077)	0,43	1,9145	53/70
—119,4340 (—2,3435)	12,5485 (2,3365)	—2,9879 (—0,5822)	—	10,6517 (2,4200)	—25,5248 (—2,1834)	—	0,44	2,0189	53/70
—11,9461 (—2,3935)	0,5513 (1,0623)	—	1,9037 (4,1716)	—	—2,8860 (—2,0755)	—	0,93	2,5585	53/75, exc. 60 e 64
—68,5536 (—2,3235)	4,5449 (1,3963)	—	6.5694 (2,3901)	—	—17,5966 (—2,1170)	—	0,48	2,0031	53/75
—61,4179 (—1,8467)	6,1182 (1,7885)	—	—	5,8093 (1,9033)	—14,6671 (—1,6204)	—	0,44	2,1011	53/75
—82,9685 (2,4331)	4,7033 (1,4102)	—2,9897 (—0,8917)	8,1976 (2,5226)	—	—22,2099 (—2,2349)	—	0,51	2,1339	53/75
—66.8728 (—1,9513)	6,2889 (1,8167)	—2,8524 (—0,8029)	—	6,5749 (2,0375)	—16,1852 (—1,7337)	—	0,46	2,2624	53/75

OBSERVAÇÕES: Os valores entre parênteses são as estatísticas *t* de Student.

VIII.2.4 — Estudo de Demanda de Importação de Produtos Primários: Mendonça de Barros (1974)

Um dos capítulos do trabalho de Mendonça de Barros (1974) é dedicado ao estudo da demanda de importação de produtos primários de países europeus, do Japão e do Canadá, como indicado na Tabela VIII.5.

O modelo econométrico usado por Mendonça de Barros consta de cinco equações. A primeira é uma equação de demanda em que o vetor W_t da equação (2.1) inclui o preço S_t de um bem substituto e o tempo t para captar mudanças de gostos e preferências, isto é:

$$q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + \alpha_2 y_t + \alpha_3 S_t + \alpha_4 t + \varepsilon_{1t} \tag{2.33}$$

onde os demais símbolos têm o mesmo significado anterior.

A segunda equação do modelo é uma equação de oferta em que o preço esperado é igual ao preço de mercado ($p_t^e = p_t$) e em que o vetor Z_t da equação (2.2) inclui apenas o tempo t para captar o efeito das variáveis excluídas de equação que estão correlacionadas com o tempo. Assim, a equação (2.2) passa a ser escrita como:

$$q_t^s = \beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 t + \varepsilon_{2t} \tag{2.34}$$

A terceira equação define a importação m_t como sendo igual à diferença entre a demanda interna e a produção doméstica:

$$m_t = q_t^d - q_t^s \tag{2.35}$$

Observe-se que essa especificação não considera variações de estoques porventura existentes.

As duas últimas equações admitem que os preços domésticos são proporcionais aos internacionais,

$$p_t = \gamma_1 \pi_t \tag{2.36}$$

$$s_t = \gamma_2 S_t \tag{2.37}$$

onde π_t e S_t são os preços internacionais do bem em estudo e do bem que lhe é substituto, respectivamente.

Combinando-se as equações (2.33), (2.34), (2.35), (2.36) e (2.37), obtém-se a forma reduzida do modelo:

$$\begin{aligned} m_t = {} & (\alpha_0 - \beta_0) + (\alpha_1 - \beta_1)\, \gamma_1 \pi_t + \alpha_2 y_t \\ & + \alpha_3 \gamma_2 S_t + (\alpha_4 - \beta_2)\, t + u_t \end{aligned} \tag{2.38}$$

onde $u_t = \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{2t}$. Vale ressaltar que o sinal esperado *a priori* do coeficiente de π_t é negativo; o sinal do coeficiente de y_t deve ser positivo, pois acredita-se que os bens a serem estudados não são inferiores; o sinal do coeficiente de S_t

deve ser negativo, enquanto nada se pode afirmar *a priori* sobre o coeficiente do tempo t.

Admitindo-se que nos mercados dos bens em estudo os países importadores são marginais, os preços internacionais são variáveis exógenas ao modelo e, conseqüentemente, a aplicação de mínimos quadrados ordinários conduz a estimativas não-tendenciosas dos parâmetros.

Um dos problemas encontrados por Mendonça de Barros no que toca aos dados necessários para estimar-se os coeficientes da equação (2.38) é que os tamanhos das amostras eram pequenos, deixando poucos graus de liberdade para a estimação do modelo. Face a esse problema, Mendonça de Barros resolveu combinar dados de séries temporais com outros de corte-transversal, introduzindo variáveis *dummy* para captar o efeito de cada país. Assim, ao invés de estimar a equação (2.38), Mendonça de Barros estimou os coeficientes da seguinte equação:

$$m_{it} = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 - \beta_1)\,\gamma_1\,\pi_{it} + \alpha_2\, y_{it}$$

$$+ \alpha_3\,\gamma_2\,S_{it} + (\alpha_4 - \beta_2)\,t + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i D_i + v_{it}, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$t = 1, \ldots, T \qquad (2.39)$$

onde D_i representa a variável *dummy* para o i-ésimo país, n indica o número de países e T o número de períodos.

A Tabela VIII.5 contém resultados da estimação de equação (2.39) para os seguintes produtos: arroz, algodão, soja em grão, milho, torta de amendoim, fava de amendoim e óleo de amendoim. As equações estão na forma *log-log*, isto é, duplo-logarítmica, e as variáveis quantidade e renda são em valores *per capita*. A seguir, comentamos, por produto, os resultados obtidos por Mendonça de Barros.

Arroz — A primeira equação da Tabela VIII.5 refere-se à demanda de importação de arroz pelo MCE. A única variável explicativa é o preço com uma elasticidade aproximadamente igual a — 0,48. No caso da demanda de arroz pelos países da *EFTA*, tanto a elasticidade-preço como a elasticidade-renda são significativas, com valores pequenos, sendo a elasticidade-renda bastante pequena e igual 0,10. Em ambas as equações os valores de R^2 são elevados e as estatísticas de Durbin-Watson não são de magnitude a nos preocupar.

Algodão — A primeira equação da demanda de importação de algodão pelo MCE tem uma elasticidade-renda negativa, significante do ponto de vista estatístico e não desprezível do ponto de vista econômico. Face a esse resultado pouco crível, a segunda equação estimada para a demanda de algodão para o MCE exclui a renda, mas inclui a variável de tendência. Tanto a elasticidade-preço como o coeficiente da variável tempo apresentam agora maiores valores absolutos e ambos continuam a ser significantes do ponto de vista estatístico. A elasticidade-preço é bastante elástica com um valor igual a — 1,9. Quando se inclui o preço de um bem substituto, o fio têxtil sintético, como variável explicativa e não se inclui o tempo e a renda, a elasticidade-preço passa a ter um valor menor e igual a — 1,2. A elasticidade-cruzada, em relação ao preço do fio têxtil sintético, é significativa e igual a — 0,4.

Tabela VIII.5
IMPORTAÇÃO DE PRODUTOS PRIMÁRIOS: MENDONÇA DE BARROS (1974)

Produto	Região	Preço (π_t)	Renda *Per Capita* (y_t)	Preço do Bem Substituto (S_t)	Tempo (t)	R^2) ($g.l$)	DW (ρ)	Observações
Arroz	MCE	—0,4783 (—1,9518)				0,835 (40)	1,468	MCE: B, F, A e H.
Arroz	EFTA	—0,4470 (—5,4591)	+0,1008 (+2,8292)			0,968 (48)	2,135	EFTA: Au, Fi, S, Sa, I
Algodão	MCE	—1,5833 (—4,5265)	—0,7361 (—4,2653)		—0,1222 (—2,3976)	0,823 (19)	3,35	MCE: B, F, A,It e H.
Algodão	MCE	—1,9063 (—3,7043)			—0,2325 (—3,7554)	0,823 (18)	2,36	
Algodão	MCE	—1,2129 (—2,2655)		—2,2015 (—2,2015)		0,765 (18)	1,96	Produto Substituto: fio têxtil sintético.
Soja em Grão	MCE	—3,2802 (—3,6837)			0,3833 (6,2699)	0,920 (39)	1,52	MCE: B, F, It e H.
Soja em Grão	MCE	—2,0949 (—2,2436)	2,3373 (6,2664)			0,924 (33)	1,59	
Soja em Grão	EFTA		4,5087 (7,3154)			0,875 (36)	1,21	EFTA: D, Fi, N, E e I.
Soja em Grão	Japão	—1,099 (—3,178)	0,4868 (—3,1784)			0,924 (8)	1,00	
Milho	MCE	—1,7020 (—1,9898)			0,3651 (2,1024)	0,799 (39)	1,12 (0,44)	MCE: A, B, It e H.
Milho	MCE	—0,7232 (—1,7420)	3,5408 (7,6752)			0,918 (38)	0,90 (0,55)	
Milho	MCE	—2,2435 (—9,5338)	1,8555 (11,0877)			0,799 (38)	1,80	Correção de Autocorrelação da Equação Anterior.
Milho	EFTA	—0,7557 (—2,3620)	0,7364 (1,8192)			0,679 (64)	0,77 (0,615)	EFTA: Au, D, Fi, N, I, Sa e E.
Milho	EFTA	—0,7511 (—3,1032)	1,2374 (6,4812)			0,558 (65)	2,00	Correção de Autocorrelação da Equação Anterior.
Milho	Japão	—1,8050 (—4,8917)	1,6527 (7,3669)			0,992 (8)	2,10	
Torta de Amendoim	MCE	—1,9568 (—3,2739)		—1,5243 (3,2739)		0,508 (30)	1,35	Produto Substituto: Soja
Torta de Amendoim	EFTA	—2,3390 (—3,6195)				0,858 (41)	0,899 (0,55)	
Torta de Amendoim	EFTA	—0,9792 (—1,8731)				0,646 (39)	1,80	Correção de Autocorrelação da Equação Anterior.
Fava de Amendoim	MCE	—1,8462 (—4,3505)	—0,1518 (—0,4283)			0,904 (39)	2,03	
Fava de Amendoim	MCE	—1,7279 (—5,4194)				0,906 (40)	2,04	
Fava de Amendoim	EFTA	—2,0722 (—1,9908)				0,758 (23)	1,13	
Fava de Amendoim	Canadá		—1,4642 (—3,4132)			0,625 (7)	2,99	
Óleo de Amendoim	MCE		1,6461 (3,9566)			0,746 (32)	1,82	
Óleo de Amendoim	Inglaterra		—4,6907 (4,0020)			0,696 (7)	0,73	

FONTE: Mendonça de Barros (1974).

OBS.: Os valores entre parênteses são as estatísticas t: $g.l.$ representa o número de graus de liberdade; DW = estatística de Durbin—Watson; l = coeficiente de autocorrelação. Abreviações usadas para países: Bélgica — B; França — F; Alemanha — A; Holanda — H; Áustria — Au; Finlândia — Fi; Suécia — S; Suíça — Sa; Inglaterra — I; Itália — It; Dinamarca — D; Noruega — N; Espanha — E.

Soja — As estimativas das elasticidades-preço das demandas de importação da soja em grão, para os países do MCE e Japão são maiores que 1, o Japão tendo o valor mais baixo e próximo da unidade. A elasticidade-renda é baixa para o Japão, igual a 0,48, e bastante elevada para os países do MCE e da EFTA. Para os países deste último grupo a variável preço não foi incluída como variável explicativa da demanda de importação.

Milho — A demanda de importação de milho por parte dos países do MCE é bastante sensível a preços e renda. As elasticidades-renda estimadas são bastante superiores à unidade, o mesmo ocorrendo com a elasticidade-preço quando se corrige a correlação serial existente. Todavia, a mudança substancial que ocorre nas estimativas dos coeficientes quando se elimina a correlação serial pode indicar erro da especificação e não um processo estocástico auto-regressivo como causa de correlação serial. É interessante observar que, no que toca à demanda de importação de milho pelos países do EFTA, a eliminação de auto-correlação não altera praticamente a elasticidade-preço, que permanece em torno de — 0,75, enquanto a elasticidade-renda aumenta de 0,7 para 1,2. No caso da demanda de importação de milho pelo Japão, tanto a elasticidade-preço como a elasticidade-renda são bastante elásticas e significativas do ponto de vista estatístico.

Amendoim — De maneira geral as elasticidades-preço na demanda de importação de amendoim, seja torta ou fava, são elásticas mas as equações não incluem a renda e quando incluem o coeficiente de renda têm o sinal contrário ao esperado. O preço da soja, no caso dos países do MCE, é uma variável importante para explicar a demanda de torta de amendoim. Na demanda de óleo de amendoim a única variável explicativa é a renda. Para a Inglaterra, o sinal do coeficiente desta variável é negativo, contrário ao esperado.

Algumas Observações — Acredita-se, em geral, que a demanda de produtos primários seja bastante inelástica em relação ao preço e que a elasticidade-renda seja positiva mas bastante pequena. A maioria dos resultados obtidos por Mendonça de Barros certamente não suportam este tipo de hipótese, pois no caso de vários produtos a elasticidade-preço e a elasticidade-renda são maiores do que a unidade em valor absoluto. Todavia, essas evidências devem ser tomadas com certa cautela, pois a inexistência de uma amostra de maior tamanho, para cada país, levou Mendonça de Barros a supor que os parâmetros da equação de demanda de importações, com exceção dos coeficientes das variáveis *dummy*, fossem os mesmos para um conjunto de países.

VIII.2.5 — Estudo do Mercado Brasileiro de Milho: Thompson e Schuh (1978)

Um estudo bastante interessante do mercado brasileiro de milho está contido no trabalho de Thompson e Schuh (1978), que usam um modelo econométrico composto de quatro equações para descrever o mercado de milho no período de 1947 a 1970.

Uma equação de oferta se constitui na primeira do modelo e nela o preço esperado é igual ao do período anterior, $p_t^e = p_{t-1}$, e o vetor Z da equação (2.2) inclui quatro variáveis explicativas: a quantidade q_{t-1}^s ofertada no período precedente; o preço S_{t-1} do bem substituto no período $t - 1$; a precipitação pluviométrica, c_t, média anual nos três principais estados produtores de milho (Minas Gerais, São Paulo e Rio Grande do Sul), em milímetros por ano, com defasagem de seis meses; e o tempo t para captar efeito das variáveis porventura excluídas da equação. Assim, a equação de oferta (2.2) passa a ser dada por:

$$q_t^s = \beta_0 + \beta_1 q_{t-1}^s + \beta_2 p_{t-1} + \beta_3 S_{t-1} + \beta_4 c_t + \beta_5 t + \varepsilon_{1t} \tag{2.40}$$

O milho é, em geral, usado para consumo animal, consumo humano e sementes, ou seja, o milho é um insumo e também um bem de consumo. Ao invés de especificar cada equação de demanda separadamente, Thompson e Schuh, por razões práticas, preferem especificar uma única equação de demanda de milho, que além do preço e da renda inclui no vetor W da equação (2.1) as seguintes variáveis: preço r_t do bem substituto e o tempo t para captar tendência devido a mudanças de gostos e preferências. A equação de demanda é, então, especificada como:

$$q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + \alpha_2 y_t + \alpha_3 r_t + \alpha_4 t + \varepsilon_{2t} \tag{2.41}$$

Na hipótese de que não houvesse intervenção por parte do Governo no mercado de milho e com as hipóteses adicionais de comércio livre e de que o Brasil é relativamente pouco importante no mercado internacional desse produto, o preço do milho seria uma variável exógena do modelo. Entretanto, argumentam Thompson e Schuh, o governo brasileiro, em geral, não tem considerado aceitável do ponto de vista social o preço internacional para ser praticado internamente, e tem intervido no mercado, seja através de taxas de câmbio sobrevalorizadas seja através de cotas de exportação. Assim, existe um diferencial entre o preço internacional avaliado em termos domésticos, igual ao produto do preço internacional π_t pela taxa de câmbio E_t, e o preço p_t do milho para os produtores e consumidores brasileiros. A diferença entre o preço internacional em cruzeiros, $\pi_t E_t$, e o preço doméstico p_t, Thompson e Schuh denominam nível de intervenção do Governo. Este nível de intervenção, segundo os mesmos autores, seria função das seguintes variáveis: da taxa de inflação I_t, como medida pelo índice de custo de vida; de posição global B_t no balanço de pagamentos; do preço médio, π_t, do milho no mercado mundial, e de variáveis *dummy* que captariam o efeito de diversas políticas comerciais no período em estudo. Assim, a equação de intervenção é especificada da seguinte forma:

$$\pi_t E_t - p_t = \gamma_0 + \gamma_1 I_t + \gamma_2 B_t + \gamma_3 \pi_t + \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \delta_3 D_3 + \varepsilon_{3t} \tag{2.42}$$

onde as variáveis *dummy* D_1, D_2 e D_3 assumem os seguintes valores:

$D_1 = 1$ para os anos 1953/59; 0 para todos os outros anos;

$D_2 = 1$ para os anos 1960/63; 0 para todos os outros anos;

$D_3 = 1$ para os anos 1964/70; 0 para todos os outros anos.

A última equação do modelo define as exportações como sendo igual à diferença entre a produção e o consumo interno:

$$x_t = q_t^s - q_t^d \tag{2.43}$$

As variáveis endógenas do modelo são a produção q_t^s, o consumo interno q_t^d, o preço interno do milho p_t e o nível de exportação x_t. Embora se trate de um modelo de equações simultâneas, ele pode ser estimado pelo método de mínimos quadrados ordinários em virtude da sua estrutura recursiva. Com efeito, o preço interno p_t é determinado através da equação de intervenção que só contém variáveis exógenas ao modelo. Determinado o preço p_t, a equação de demanda determina a quantidade consumida internamente, q_t^d, pois as demais variáveis nessa equação são exógenas. As variáveis da equação de oferta (2.40) são todas predeterminadas, daí se concluir serem consistentes os estimadores de mínimos quadrados ordinários para os parâmetros desta equação.

Os resultados obtidos por Thompson e Schuh para as estimativas dos parâmetros do modelo são os seguintes: [6]

$$\begin{aligned}
q_t^s = {} & 4{,}6729 + \underset{(0{,}1546)}{0{,}2838}\, q_{t-1}^s + \underset{(0{,}1012)}{0{,}2730}\, p_{t-1} \\
& - \underset{(0{,}0690)}{0{,}1555}\, s_{t-1} + \underset{(0{,}0704)}{0{,}1278}\, c_t + \underset{(0{,}0064)}{0{,}0364t}, \quad R^2 = 0{,}981 \\
& \qquad DW = 2{,}426 \\
& \qquad F = 185{,}6
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
q_t^d = {} & -8{,}5385\, p_t + \underset{(0{,}0894)}{0{,}1609}\, r_t + \underset{(0{,}0618)}{0{,}0372t}, \quad R^2 = 0{,}980 \\
& \qquad DW = 2{,}755 \\
& \qquad F = 335{,}0
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
(\pi_t E_t - p_t) = {} & -1{,}5080 + \underset{(0{,}2183)}{0{,}5837}\, I_t + \underset{(0{,}0164)}{0{,}0053}\, B_t \\
& + \underset{(0{,}4880)}{1{,}1047}\, \pi_t - \underset{(13{,}0002)}{17{,}3159}\, D_1 + \underset{(18{,}3682)}{14{,}6829}\, D_2 \\
& + \underset{(16{,}5194)}{25{,}3340}\, D_3, \quad R^2 = 0{,}747 \\
& \qquad DW = 1{,}569 \\
& \qquad F = 8{,}345
\end{aligned} \tag{2.46}$$

As duas primeiras equações estão na forma log-log, enquanto a última está na forma linear.

[6] Os valores entre parênteses são os erros-padrão das estimativas.

Na equação de oferta os coeficientes são, em geral, significativos. O preço do bem substituto, nessa equação, é uma média ponderada do preço real do arroz, feijão, mandioca e soja, ponderados pela área plantada. O R^2 é bastante elevado e igual a 0,98, enquanto a estatística de Durbin-Watson não evidencia correlação serial positiva dos resíduos. Como em outros estudos de oferta de produtos agrícolas, a produção de milho responde positivamente ao estímulo de preço.

Na equação de demanda a elasticidade-preço é igual a — 0,2 e significativa do ponto de vista estatístico. O coeficiente da renda disponível não se mostrou significativo na presença da variável tempo e por isto foi retirada da regressão. A variável t está captando não-somente os efeitos de mudanças porventura existentes nos gostos e preferências como também o efeito da renda devido à sua alta correlação com esta variável. O preço do trigo r_t tem um coeficiente positivo e significativo do ponto de vista estatístico, evidenciando complementaridade entre o milho e o trigo.

Na equação de intervenção os coeficientes da taxa de inflação, do balanço de pagamentos e do preço mundial do trigo têm os sinais corretos no sentido de que são iguais aos sinais que se esperava *a priori,* e todas as três estimativas são estatisticamente significantes. As variáveis *dummy* nesta equação apresentam elevados erros-padrões, indicando que sua presença não parece ser justificada do ponto de vista estatístico.

VIII.3 — Equilíbrio Geral: O Modelo de Dois Produtos e Dois Fatores

O modelo de equilíbrio geral de dois produtos e dois fatores supõe a economia dividida em dois setores produtivos, em que são utilizados dois fatores de produção. Estes fatores são, em geral, o capital e o trabalho.

Quanto aos setores em que se costuma dividir a economia, isto depende do tipo de problema que se deseja estudar. Por exemplo, na teoria do comércio internacional supõe-se que dois bens são produzidos, um de exportação e outro de importação; na teoria do crescimento econômico divide-se a economia nos setores produtivos, de bens de capital e de bens de consumo.

No tocante à estrutura de demanda no modelo de dois produtos e dois fatores admitiremos, por simplicidade, que os preços são dados. Isso significa dizer que os preços dos produtos são variáveis exógenas ao modelo. Sem dúvida alguma esta hipótese é bastante restritiva. Todavia, para o propósito desta seção seria uma complicação adicional colocar-se os preços como variáveis endógenas ao modelo.

No que concerne à tecnologia usada pelos dois setores em que a economia for dividida, apresentaremos o modelo de dois produtos e dois fatores para três diferentes situações, a saber: i) produção em proporções fixas; ii) produção com retornos constantes de escala; e iii) o caso geral em que nenhuma hipótese restritiva é feita sobre as funções de produção.

VIII.3.1 — Produção em Proporções Fixas

Quando a produção em ambos os setores é feita através de processos tecnológicos que usam os fatores de produção em proporções fixas, as funções de produção são dadas por:

$$Q_i = \min \left\{ \frac{L_i}{\alpha_i}, \frac{K_i}{\beta_i} \right\}, \; i = 1,2 \tag{3.1}$$

onde Q_i é a quantidade produzida do bem i, α_i é o coeficiente técnico da mão-de-obra, L_1 é a quantidade de mão-de-obra utilizada pelo Setor I, β_i é o coeficiente técnico do capital, K_1 é a quantidade de capital utilizado no Setor I.

A relação capital/mão-de-obra do Setor I é $K_1/L_1 = \beta_1/\alpha_1$ e a relação capital/mão-de-obra do Setor II é $K_2/L_2 = \beta_2/\alpha_2$. Admitiremos que o Setor II seja mais intensivo no uso do capital: $K_2/L_2 > K_1/L_1$, isto é:

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} > \frac{\beta_1}{\alpha_1} \tag{3.2}$$

A dotação de mão-de-obra é igual a L, enquanto a de capital é igual a K. A quantidade de mão-de-obra utilizada pelos dois setores não deve exceder à disponível. Assim:

$$L_1 + L_2 \leqslant L \tag{3.3}$$

Da mesma forma, a utilização de capital pelos dois setores não pode exceder à dotação existente, isto é:

$$K_1 + K_2 \leqslant K \tag{3.4}$$

Substituindo-se os valores de L_i e K_i dados em (3.1) nas expressões (3.3) e (3.4), obtêm-se as seguintes restrições:

$$\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 \leqslant L \tag{3.5a}$$

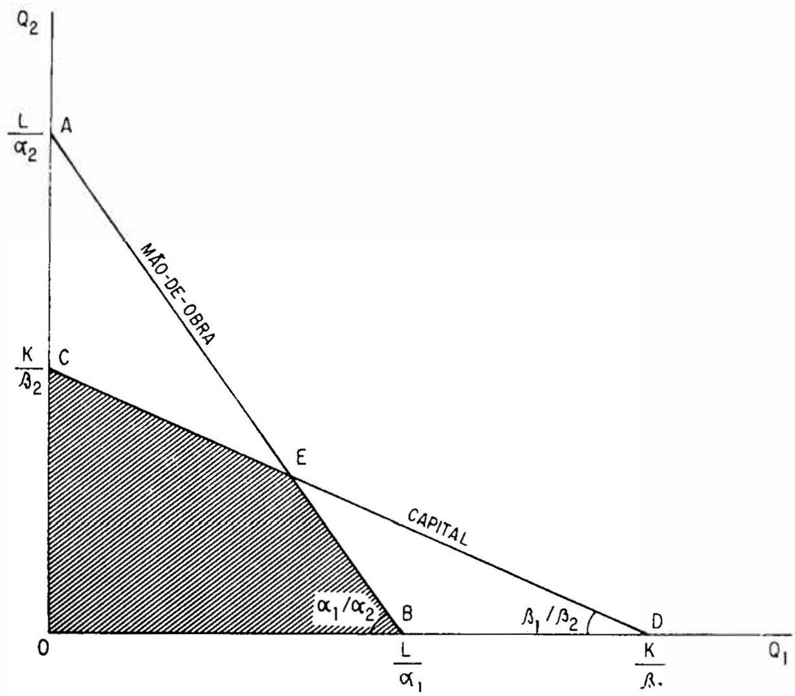
$$\beta_1 Q_1 + \beta_2 Q_2 \leqslant K \tag{3.5b}$$

Graficamente, marcando-se no eixo vertical a quantidade produzida pelo Setor II e no eixo horizontal a produzida pelo Setor I, as retas AB e CD da Figura VIII.5 indicam os níveis de produção para os quais existe plena utilização de um dos fatores. Observe-se que no trecho CE existe excesso de mão-de-obra e no trecho EB há sobra de capital. No ponto E ambos os fatores de produção estão plenamente empregados. A área $OCEBO$ indica as possibilidades de produção face à dotação de fatores existente na economia.

Admita-se que o preço do primeiro produto seja igual a p_1, o preço do segundo a p_2 e que a relação de preços p_1/p_2 seja tal que satisfaça à desigualdade:

$$\beta_1/\beta_2 < p_1/p_2 < \alpha_1/\alpha_2 \tag{3.6}$$

Figura VIII. 5
CURVA DE POSSIBILIDADES DE PRODUÇÃO



Essa hipótese não é tão inócua, pois elimina a possibilidade de existência de equilíbrio de fronteira ou de equilíbrio indeterminado. Entretanto, ela assegura que ambos os produtos serão produzidos, o que nos interessa do ponto de vista do estudo da estática comparativa.

O valor total da produção é igual a:

$$p_1 Q_1 + p_2 Q_2 \tag{3.7}$$

Suponha-se que por um processo descentralizado, através do livre funcionamento dos mercados, ou por um processo centralizado, através do planejamento central, o valor da produção (3.7) seja maximizado, condicionado pelas restrições (3.5a) e (3.5b). Do ponto de vista analítico, o problema consiste, portanto, em maximizar

$$p_1 Q_1 + p_2 Q_2$$

com as condições:

$$\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 \leqslant L$$
$$\beta_1 Q_1 + \beta_2 Q_2 \leqslant K$$
$$Q_1 \geqslant 0, \; Q_2 \geqslant 0$$

Este é um problema bastante simples de programação linear e desde que o preço relativo p_1/p_2 satisfaça à desigualdade (3.6) a sua solução será dada pelo ponto E da Figura VIII.5. Neste ponto os dois fatores de produção são plenamente utilizados. Assim, os valores de Q_1 e Q_2 que maximizam o valor da produção são as soluções do seguinte sistema de equações:

$$\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 = L$$
$$\beta_1 Q_1 + \beta_2 Q_2 = K$$

Os valores de Q_1 e Q_2 são:

$$Q_1 = \frac{\beta_2 L - \alpha_2 K}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \tag{3.8a}$$

$$Q_2 = \frac{\alpha_1 K - \beta_1 L}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \tag{3.8b}$$

Observe-se que o denominador de ambas as expressões é positivo em virtude da hipótese de que o Setor II é mais intensivo no uso de capital.

Estática Comparativa

Imagine que a dotação de fatores varie e que se deseje saber como a produção em cada setor se irá modificar. As derivadas parciais de (3.8) com respeito a L e K prestam-se para responder justamente a este tipo de pergunta. Estas derivadas são dadas por:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial L} = \frac{\beta_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} > 0 \tag{3.9a}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial K} = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} < 0 \tag{3.9b}$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial L} = \frac{-\beta_1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} < 0 \tag{3.9c}$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial K} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} > 0 \tag{3.9d}$$

Os sinais destas expressões decorrem do fato de que, por hipótese, $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 > 0$. O aumento da dotação mão-de-obra acarreta: i) o aumento da produção no setor que utiliza intensivamente a mão-de-obra, de acordo com a equação (3.9a); e ii) a diminuição da produção no setor cuja relação mão-de-obra/capital é menor, como se pode constatar pelo exame do sinal de (3.9c). Ademais, o acréscimo na produção do Setor I é proporcionalmente maior que o incremento relativo de mão-de-obra. Com efeito, multiplicando-se (2.9a) por L/Q_1 resulta em:

$$\frac{L}{Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial L} = \frac{\beta_2 L}{\beta_2 L_1 - \alpha_2 K_1} > 1$$

O aumento da dotação de capital acarreta o da produção no setor que utiliza o capital intensivamente, segundo (3.9d), e gera diminuição na produção do Setor I que é mais intensivo no uso da mão-de-obra. Da mesma forma que no caso do aumento da mão-de-obra, o acréscimo de produção do segundo bem é proporcionalmente maior que o aumento relativo do estoque de capital em virtude de:

$$\frac{K}{Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial K} = \frac{\alpha_1 K}{\alpha_1 K_1 - \beta_1 L_1} > 1$$

As proposições contidas nos dois últimos parágrafos foram desenvolvidas por Rybczynski e estão sumariadas no seguinte teorema:

Teorema de Rybczynski: O aumento da dotação de um fator de produção, mantido constante o preço relativo dos produtos, acarreta aumento de produção no setor que utiliza este fator intensamente e diminuição de produção no setor que o utiliza menos intensamente. O aumento de produção é proporcionalmente maior que o aumento na dotação do fator.

VIII.3.1.1 — Determinação dos Preços dos Fatores

Em equilíbrio competitivo, o preço de cada produto deve ser igual ao seu custo unitário de produção. Como o custo unitário de produção é igual a $\alpha_i \omega + \beta_i r$, onde ω é o salário e r é o preço de uma unidade dos serviços do capital, segue-se que:

$$\alpha_1 \omega + \beta_1 r = p_1 \tag{3.10a}$$

$$\alpha_2 \omega + \beta_2 r = p_2 \tag{3.10b}$$

Portanto, uma vez conhecidos os coeficientes técnicos de produção e os preços dos produtos, a solução do sistema de equação acima fornece os preços dos fatores, isto é:

$$\omega = \frac{\beta_2 p_1 - \beta_1 p_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \tag{3.11a}$$

$$r = \frac{\alpha_1 p_2 - \alpha_2 p_1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \tag{3.11b}$$

É importante observar que o preço dos fatores, segundo (3.11a) e (3.11b), independe da dotação dos fatores de produção, pois os valores K e L não entram nas equações anteriores. Conseqüentemente:

$$\frac{\partial \omega}{\partial L} = \frac{\partial \omega}{\partial K} = \frac{\partial r}{\partial K} = \frac{\partial r}{\partial L} = 0 \tag{3.12}$$

Uma questão importante a se perguntar é como reagem os preços dos fatores de produção quando os preços dos produtos variam. A partir de (3.11a) e (3.11b), é fácil obter-se as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial \omega}{\partial p_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} > 0 \tag{3.13a}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial p_2} = \frac{-\beta_1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} < 0 \tag{3.13b}$$

$$\frac{\partial r}{\partial p_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} > 0 \tag{3.13c}$$

$$\frac{\partial r}{\partial p_1} = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} < 0 \tag{3.13d}$$

O aumento do preço p_1 do primeiro produto acarreta: i) o aumento do salário, segundo (3.13a), pois o Setor I é intensivo no uso da mão-de-obra; e ii) a diminuição da remuneração r do capital, de acordo com (3.13d), em virtude de o Setor II ser mais intensivo no uso do capital. O aumento relativo da remuneração da mão-de-obra é proporcionalmente maior que o incremento relativo do preço p_1, pois:

$$\frac{p_1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial p_1} > 1$$

O aumento do preço do produto do Setor II, p_2, acarreta: i) diminuição do salário, segundo (3.13b); e ii) aumento da remuneração r do capital, de acordo com (3.13c), em virtude de o Setor II usar o capital mais intensivamente. Ademais, o acréscimo percentual de r é maior do que o aumento percentual de p_2 em virtude de

$$\frac{p_2}{r} \frac{\partial r}{\partial p_2} > 1$$

As proposições nos dois últimos parágrafos foram estabelecidas num trabalho clássico de Stolper-Samuelson, e podem ser sintetizadas no seguinte teorema:

Teorema de Stolper-Samuelson: O aumento do preço de um produto acarreta aumento da remuneração do fator utilizado mais intensivamente na sua produção, enquanto diminui a remuneração do fator utilizado menos intensamente na produção do bem que sofreu aumento de preço. O aumento proporcional da remuneração do fator é superior ao correspondente aumento do preço do produto.

VIII.3.1.2 – Problemas Primal e Dual

O problema primal tratado até aqui foi o seguinte:
maximizar

$$p_1 Q_1 + p_2 Q_2$$

com as seguintes restrições:

$$\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 \leqslant L$$

$$\beta_1 Q_1 + \beta_2 Q_2 \leqslant K$$

$$Q_1 \geqslant 0, \quad Q_2 \geqslant 0$$

O problema dual associado a esse problema primal é o seguinte:
minimizar

$$\omega L + r K$$

com as seguintes restrições:

$$\alpha_1 \omega + \beta_1 r \geqslant p_1$$

$$\alpha_2 \omega + \beta_2 r \geqslant p_2$$

$$\omega \geqslant 0, \quad r \geqslant 0$$

Cabe fazer algumas observações sobre este problema dual. A sua função-objetivo é o custo total de produção $\omega L + r k$. As restrições do dual estabelecem o fato de que os custos unitários de produção devem ser maiores ou no máximo iguais ao respectivo preço do produto. As remunerações dos fatores devem ser não-negativas. No que toca a estas últimas restrições, só nos interessamos até aqui por soluções positivas. O caso em que há especialização completa na produção de um bem e/ou um fator de produção é um bem livre (= remuneração igual a zero) não envolve maiores dificuldades, e não tem muito interesse do ponto de vista da estática comparativa. Vale ainda ressaltar que o valor mínimo do problema dual é igual ao valor máximo do primal, isto é:

$$p_1 Q_1 + p_2 Q_2 = \omega L + rK$$

Esta igualdade implica que o valor da produção é igual ao total da remuneração paga aos fatores de produção.

VIII.3.2 — Produção com Retornos Constantes de Escala

Admita-se que as funções de produção dos dois setores apresentem retornos constantes de escala e que sejam expressas por:

$$Q_1 = f\ (L_1, K_1) \tag{3.14}$$

e

$$Q_2 = g\ (L_2, K_2) \tag{3.15}$$

Em virtude da hipótese de retornos constantes de escala, estas funções de produção podem ser escritas como:

$$1 = f\left(\frac{L_1}{Q_1}, \frac{K_1}{Q_1}\right) = f\,(\alpha_1, \beta_1) \tag{3.16}$$

onde $\alpha_1 = L_1/Q_1$ e $\beta_1 = K_1/Q_1$, e:

$$1 = g\left(\frac{L_2}{Q_2}, \frac{K_2}{Q_2}\right) = g\ (\alpha_2, \beta_2) \tag{3.17}$$

onde $\alpha_2 = L_2/Q_2$ e $\beta_2 = K_2/Q_2$.

Admitiremos, como no caso da subseção precedente, que o Setor I é intensivo no uso de mão-de-obra, portanto:

$$\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1 > 0 \tag{3.18}$$

Suponhamos que as dotações dos fatores continuem sendo dadas por (3.3) e (3.4), que os preços p_1 e p_2 dos produtos sejam exógenos e que o nosso objetivo seja maximizar o valor da produção. Analiticamente, o problema consiste em maximizar:

$$p_1\,Q_1 + p_2\,Q_2$$

com as seguintes condições:

$$\begin{gathered}
\alpha_1\,Q_1 + \alpha_2\,Q_2 \leqslant L \\
\beta_1\,Q_1 + \beta_2\,Q_2 \leqslant K \\
f\ (\alpha_1, \beta_1) = 1 \\
g\ (\alpha_2, \beta_2) = 1 \\
Q_1 \geqslant 0, \quad Q_2 \geqslant 0
\end{gathered}$$

A diferença básica entre o modelo acima e o correspondente ao caso das funções de produção em proporções fixas é que, agora, os coeficientes técnicos α_i, β_i, $i = 1, 2$, são determinados endogenamente no modelo.

Consideraremos daqui por diante somente o caso em que a economia produz ambos os produtos e em que os fatores de produção estão plenamente utilizados. Para um purista isso pode parecer heresia. Todavia, como o nosso interesse maior é em estudar os teoremas de estática comparativa, os casos de equilíbrio de fronteira tornam-se por demais triviais para que sejam merecedores de atenção.

A expressão de Lagrange correspondente ao problema de máximo condicionado descrito acima é dada por:

$$l = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 + \omega [L - \alpha_1 Q_1 - \alpha_2 Q_2] + r [K - \beta_1 Q_1 - \beta_2 Q_2] + \lambda_1 [f(\alpha_1, \beta_1) - 1] + \lambda_2 [g(\alpha_2, \beta_2) - 1] \tag{3.19}$$

onde ω, r, λ_1 e λ_2 são multiplicadores de Lagrange. Os dois primeiros serão interpretados como sendo os preços unitários de cada fator de produção. Os multiplicadores λ_1 e λ_2 podem ser interpretados como os custos marginais de produção de cada bem.

As condições de primeira ordem para que l seja máximo são as seguintes: [7]

$$\frac{\partial l}{\partial Q_1} = p_1 - \omega\alpha_1 - r\beta_1 = 0 \tag{3.20a}$$

$$\frac{\partial l}{\partial Q_2} = p_2 - \omega\alpha_2 - r\beta_2 = 0 \tag{3.20b}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha_1} = -\omega Q_1 + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = 0 \tag{3.20c}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_1} = -rQ_1 + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \beta_1} = 0 \tag{3.20d}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha_2} = -\omega Q_2 + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial \alpha_2} = 0 \tag{3.20e}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_2} = -rQ_2 + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial \beta_2} = 0 \tag{3.20f}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_1} = f(\alpha_1, \beta_1) - 1 = 0 \tag{3.20g}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_2} = g(\alpha_2, \beta_2) - 1 = 0 \tag{3.20h}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \omega} = L - \alpha_1 Q_1 - \alpha_2 Q_2 = 0 \tag{3.20i}$$

$$\frac{\partial l}{\partial r} = K - \beta_1 Q_1 - \beta_2 Q_2 = 0 \tag{3.20j}$$

7 As condições de segunda ordem serão estudadas para o caso mais geral, a ser apresentado na Subseção VIII.3.3.

As quatro últimas condições (3.20g) — (3.20j), reproduzem as restrições tecnológicas e de dotação de fatores. As condições (3.20a) e (3.20b) afirmam que, em equilíbrio, os preços dos produtos devem ser iguais aos respectivos custos unitários de produção. As equações (3.20c) — (3.20f) implicam que a produtividade marginal de cada fator seja proporcional ao seu respectivo preço.

Quando se combinam as equações (3.20c) e (3.20d), eliminando-se o multiplicador de Lagrange λ_1, obtém-se a condição de que, em equilíbrio, a taxa marginal de substituição técnica entre os fatores é igual à relação de preços dos fatores, isto é:

$$\frac{\partial f / \partial \alpha_1}{\partial f / \partial \beta_1} = \frac{\omega}{r} \tag{3.21}$$

Esta equação juntamente com a restrição técnica $f(\alpha_1, \beta_1) = 1$ determina os coeficientes técnicos α_1 e β_1 como função dos preços dos fatores, ou seja:

$$\alpha_1 = \alpha_1 (\omega, r) \tag{3.22a}$$

$$\beta_1 = \beta_1 (\omega, r) \tag{3.22b}$$

Essas equações são homogêneas do grau zero nos preços ω e r em virtude de os coeficientes técnicos de produção dependerem apenas do preço relativo ω/r. Observe-se também que da restrição (3.20g) conclui-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial \beta_1} d\beta_1 = 0$$

Substituindo-se (3.20c) e (3.20d) na expressão anterior, resulta em:

$$\omega d\alpha_1 + r d\beta_1 = 0 \tag{3.23}$$

De maneira análoga se poderia mostrar que:

$$\omega d\alpha_2 + r d\beta_2 = 0 \tag{3.24}$$

As equações (3.23) e (3.24) serão necessárias adiante em conexão com exercícios de estática comparativa.

VIII.3.2.1 — Estática Comparativa

As diferenciais das equações (3.20a) e (3.20b), que estabelecem a igualdade entre preço e custo unitário de produção, são dadas por:

$$\alpha_1 d\omega + \omega d\alpha_1 + r d\beta_1 + \beta_1 dr = dp_1$$

$$\alpha_2 d\omega + \omega d\alpha_2 + r d\beta_2 + \beta_2 dr = dp_2$$

Em virtude das condições (3.23) e (3.24), o sistema de equações acima passa a ser escrito como:

$$\alpha_1 d\omega + \beta_1 dr = dp_1 \tag{3.25a}$$

$$\alpha_2 d\omega + \beta_2 dr = dp_2 \tag{3.25b}$$

Os valores de $d\omega$ e dr que resolvem esse sistema são dados por:

$$d\omega = \frac{\beta_2 dp_1 - \beta_1 dp_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \tag{3.26a}$$

$$dr = \frac{\alpha_1 dp_2 - \alpha_2 dp_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \tag{3.26b}$$

É fácil concluir-se a partir destas equações que:

$$\frac{\partial\omega}{\partial p_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} > 0 \tag{3.27a}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial p_2} = \frac{-\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} < 0 \tag{3.27b}$$

$$\frac{\partial r}{\partial p_1} = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} < 0 \tag{3.27c}$$

$$\frac{\partial r}{\partial p_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} > 0 \tag{3.27d}$$

Os sinais de desigualdade são obtidos quando se leva em conta a hipótese de que $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 > 0$.

Conclui-se, também, das equações (3.26a) e (3.26b), que:

$$\frac{\partial\omega}{\partial L} = \frac{\partial\omega}{\partial K} = \frac{\partial r}{\partial L} = \frac{\partial r}{\partial K} = 0 \tag{3.28}$$

Baseados em (3.28), podemos estabelecer a seguinte proposição:

Teorema: A remuneração dos fatores de produção independe da sua dotação.

Esse teorema é bastante importante, pois afirma que a dotação dos fatores não tem qualquer relação com a determinação dos preços unitários de cada um. Estes dependem apenas dos preços dos produtos.

As equações (3.27a) - (3.27d) são idênticas às (3.13a) - (3.13d) e dão margem ao Teorema de Stolper-Samuelson aludido anteriormente.

Admita-se que os preços dos produtos permaneçam estáveis. Em conseqüência, os coeficientes técnicos de produção também não variam, pois os preços dos produtos determinam os preços dos fatores, e estes, por sua vez, determinam os coeficientes técnicos de produção. As diferenciais das equações (3.20i) e (3.20j) serão, então, dadas por:

$$\alpha_1 dQ_1 + \alpha_2 dQ_2 = dL \tag{3.29a}$$

$$\beta_1 dQ_1 + \beta_2 dQ_2 = dK \tag{3.29b}$$

Os valores de dQ_1 e dQ_2 que solucionam este sistema de equações são iguais a:

$$dQ_1 = \frac{\beta_2 dL - \alpha_2 dK}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \tag{3.30a}$$

$$dQ_2 = \frac{\alpha_1 dK - \beta_1 dL}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \tag{3.30b}$$

É fácil concluir-se a partir de (3.30a) e (3.30b) que:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial L} = \frac{\beta_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} > 0 \tag{3.31a}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial K} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} < 0 \tag{3.31b}$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial K} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} > 0 \tag{3.31c}$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial L} = -\frac{\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} < 0 \tag{3.31d}$$

São idênticas as equações (3.31a) - (3.31d) e (3.9a) - (3.9d) e formam a base sobre a qual se assenta o teorema de Rybczynski enunciado na última subseção.

Comparando-se às equações (3.27) e (3.31), chega-se às seguintes condições de simetria:

$$\frac{\partial \omega}{\partial p_1} = \frac{\partial Q_1}{\partial L} \tag{3.32a}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial p_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial L} \tag{3.32b}$$

$$\frac{\partial r}{\partial p_1} = \frac{\partial Q_1}{\partial K} \tag{3.32c}$$

$$\frac{\partial r}{\partial p_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial K} \tag{3.32d}$$

As igualdades acima mostram claramente a dualidade existente entre os teoremas de Stolper-Samuelson e de Rybczynski.

VIII.3.2.2 — Teorema das Vantagens Comparativas

Dividindo-se ambos os lados da equação (3.26a) por ω e da equação (3.26b) por r e, então, subtraindo-se um resultado do outro, chega-se à seguinte expressão:

$$\frac{d\omega}{\omega} - \frac{dr}{r} = \frac{p_1 p_2}{\omega r\,(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)}\left(\frac{dp_1}{p_1} - \frac{dp_2}{p_2}\right) \qquad (3.33)$$

Esta equação mostra que, dado $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 > 0$, existe uma relação biunívoca entre a relação de preços dos fatores ω/r e o preço relativo do produto $p = p_1/p_2$, como indicado na Figura VIII.6. Esta relação é bastante importante na teoria do comércio internacional. Com efeito, imagine-se dois países que possuam a mesma tecnologia, isto é, que tenham idênticas funções de produção, e que estas apresentem retornos constantes de escala. Imagine-se, também, que estes dois países não mantenham nenhum tipo de relação econômica. Admita-se que os preços dos produtos no estado autárquico sejam iguais a p_A para o país A e p_B para o país B, como indicado na Figura VIII.6. Admita-se, também, que não exista nenhum custo de transporte para as mercadorias que possam ir de um país para o outro, tampouco mobilidade dos fatores de produção, seja de capital humano ou de capital físico.

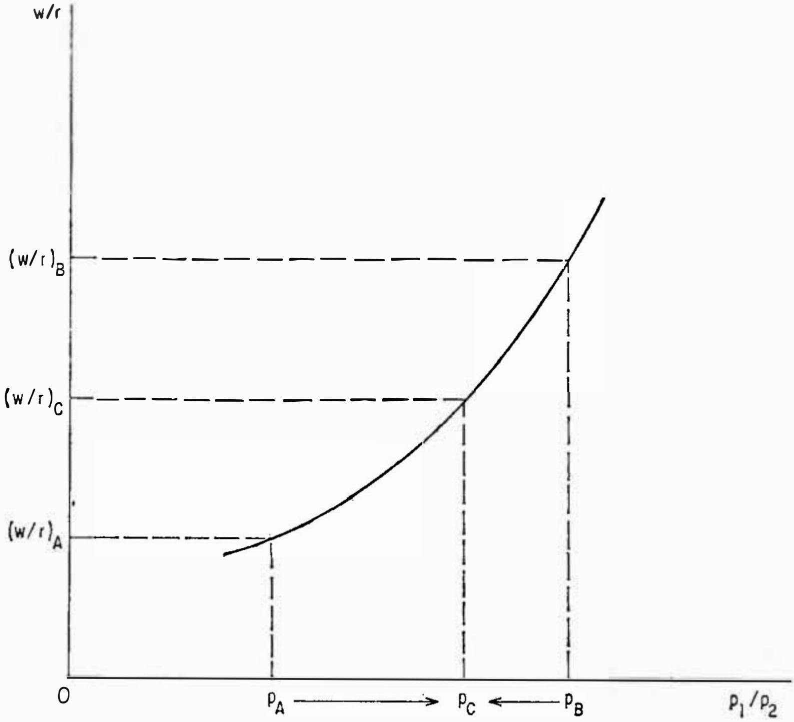
Suponha-se, agora, que os países abram mutuamente suas fronteiras para as mercadorias do outro país. O comércio internacional fará com que o preço relativo dos produtos se equalize, e este preço será, digamos, igual a p_c, como indicado na Figura VIII.6. Neste caso, o país A exportará o primeiro produto que é intensivo no uso de mão-de-obra, pois a mão-de-obra é relativamente mais barata no país A que no país B: $(\omega/r)_A < (\omega/r)_B$. O país B exportará o segundo produto que é relativamente mais barato neste país. É importante observar que a vantagem comparativa se estabelece em função do preço relativo dos fatores e não de sua dotação física. O que foi dito até agora pode ser sintetizado na seguinte proposição:

Teorema de Heckscher-Ohlin: Cada país exportará o produto que usa mais intensivamente o fator de produção mais abundante, no sentido de que o preço relativo deste fator, no estado autárquico, seja mais baixo do que no outro país, desde que as seguintes condições sejam satisfeitas: a) os custos de transporte sejam nulos; b) não exista mobilidade de fatores de produção; c) as funções de produção em ambos os países sejam idênticas e tenham retornos constantes de escala; d) existe concorrência perfeita nos mercados de produto e de fatores; e) não exista reversão dos fatores, isto é, um setor é sempre mais intensivo no uso de determinado fator; f) não exista especialização completa na produção de um bem; g) todos os fatores estejam plenamente utilizados; e h) não exista qualquer barreira ao comércio internacional.

O comércio internacional fará com que não-somente o preço relativo p_c dos produtos seja o mesmo em ambos os países como também acarretará na equali-

Figura VIII.6

EQUALIZAÇÃO DOS PREÇOS ATRAVÉS DO COMÉRCIO INTERNACIONAL



zação do preço relativo dos fatores. Essa proposição dá margem ao seguinte teorema:

Teorema da Equalização dos Preços dos Fatores: Desde que as condições do teorema de Heckscher-Ohlin sejam satisfeitas, o comércio internacional fará com que o preço relativo dos fatores seja o mesmo em ambos os países.

VIII.3.3 — Caso Geral de Dois Produtos e Dois Fatores

Admita-se que os dois bens são produzidos a partir das seguintes funções de produção:

$$Q_i = Q_i\ (K_i, L_i)\ ,\ i = 1,2 \tag{3.34}$$

onde K_i é a quantidade de capital e L_i é a quantidade de mão-de-obra utilizada na produção de Q_i.

A dotação de fatores é dada por K e L, idêntica às restrições (3.3) e (3.4), repetidas aqui por conveniência,

$$K_1 + K_2 = K \tag{3.35}$$

$$L_1 + L_2 = L \tag{3.36}$$

Os preços dos dois produtos continuam sendo dados por p_1 e p_2, e, portanto, o valor da produção é igual a:

$$p_1Q_1 + p_2Q_2 \tag{3.37}$$

Suponha-se que este valor de produção seja maximizado sujeito às restrições (3.34), (3.35) e (3.36). A função de Lagrange para este máximo condicionado é dada por:

$$\begin{aligned} l = p_1Q_1 (K_1\ L_1) + p_2Q_2 (K_2, L_2) + \omega (L - L_1 - L_2) \\ + r (K - K_1 - K_2) \end{aligned} \tag{3.38}$$

onde ω e r são os multiplicadores de Lagrange, que serão interpretados como preços unitários dos fatores.

VIII.3.3.1 — Condições de Primeira Ordem

As condições de primeira ordem para que (3.38) seja um máximo são fornecidas por:

$$\frac{\partial l}{\partial K_1} = p_1 \frac{\partial Q_1}{\partial K_1} - r = 0 \tag{3.39a}$$

$$\frac{\partial l}{\partial L_1} = p_1 \frac{\partial Q_1}{\partial L_1} - \omega = 0 \tag{3.39b}$$

$$\frac{\partial l}{\partial K_2} = p_2 \frac{\partial Q_2}{\partial K_2} - r = 0 \tag{3.39c}$$

$$\frac{\partial l}{\partial L_2} = p_2 \frac{\partial Q_2}{\partial L_2} - \omega = 0 \tag{3.39d}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \omega} = L - L_1 - L_2 = 0 \tag{3.39e}$$

$$\frac{\partial l}{\partial r} = K - K_1 - K_2 = 0 \tag{3.39f}$$

As duas últimas condições reproduzem as restrições de dotação dos fatores, enquanto as quatro primeiras afirmam que, em equilíbrio, o valor da produtividade marginal de cada fator é igual ao custo unitário do mesmo.

As equações (3.39a) - (3.39f) permitem escrever, desde que as condições do teorema da função implícita sejam satisfeitas, cada variável endógena

— Q_1, Q_2, L_1, L_2, K_1, K_2, ω e r — como função das variáveis exógenas: p_1, p_2, L e K. Para o caso dos níveis de produção, Q_1 e Q_2, nos quais estamos diretamente interessados, temos:

$$Q_1 = f\,(p_1, p_2, L, K) \tag{3.40a}$$

$$Q_2 = g\,(p_1, p_2, L, K) \tag{3.40b}$$

Uma das proposições que desejamos provar nesta seção é que a matriz

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_2} \\ \\ \dfrac{\partial Q_2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial p_2} \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

é positiva semidefinida. Essa propriedade implica que a quantidade produzida aumenta com o preço do produto,

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} > 0, \quad i = 1, 2$$

e que a condição de simetria:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}, \; i \neq j = 1{,}2$$

seja satisfeita. Ademais, as seguintes igualdades são obedecidas:

$$p_1 \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} = 0$$

$$p_1 \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} = 0$$

o que significa que as equações (3.40a) e (3.40b) são homogêneas do grau zero nos preços dos produtos.

VIII.3.3.2 – Condição de Segunda Ordem

Com o objetivo de provar os resultados que acabamos de citar, iremos precisar da condição de segunda ordem para a maximização de l. Esta condição nos diz que a matriz

$$\begin{bmatrix} p_1 H_1 & 0 \\ 0 & p_2 H_2 \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

deve ser negativa semidefinida para todo vetor $[X_1, X_2, -X_1, -X_2] = [X' \; \vdots \; -X']$, em que $X' = [X_1, X_2]$. As matrizes H_1 e H_2 que aparecem em (3.42) são as matrizes hessianas das funções de produção descritas em (3.34), isto é:

$$H_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 Q_1}{\partial K_1^2} & \dfrac{\partial^2 Q_1}{\partial K_1 \partial L_1} \\ \dfrac{\partial^2 Q_1}{\partial L_1 \partial K_1} & \dfrac{\partial^2 Q_1}{\partial L_1^2} \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 Q_2}{\partial K_2^2} & \dfrac{\partial^2 Q_2}{\partial K_2 \partial L_2} \\ \dfrac{\partial^2 Q_2}{\partial L_2 \partial K_2} & \dfrac{\partial^2 Q_2}{\partial L_2^2} \end{bmatrix}$$

O fato de a matriz (3.42) ser negativa semidefinida para vetores do tipo $[X' \mid -X']$ implica que:

$$[X' \mid -X'] \begin{bmatrix} p_1 H_1 & 0 \\ 0 & p_2 H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \hline -X \end{bmatrix} = X' (p_1 H_1 + p_2 H_2) X \leqslant 0$$

Logo, a matriz H, definida por:

$$H = p_1 H_1 + p_2 H_2 \tag{3.43}$$

é negativa semidefinida.

VIII.3.3.3 – Estática Comparativa

O valor da produtividade marginal de cada fator, de acordo com as equações (3.39a) - (3.39d), é o mesmo em ambos os setores, isto é:

$$p_1 \frac{\partial Q_1}{\partial K_1} = p_2 \frac{\partial Q_2}{\partial K_2} \tag{3.44a}$$

$$p_1 \frac{\partial Q_1}{\partial L_1} = p_2 \frac{\partial Q_2}{\partial L_2} \tag{3.44b}$$

Por outro lado, das equações de dotação de fatores (3.35) e (3.36), temos que:

$$\begin{bmatrix} dK \\ dL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dK_1 \\ dL_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dK_2 \\ dL_2 \end{bmatrix}$$

Alternativamente, em notação mais compacta:

$$dF = dF_1 + dF_2 \tag{3.45}$$

onde: $dF' = [dK, dL]$ e $dF_i' = [dK_i, dL_i]$, $i = 1,2$.

Tomando-se as diferenciais de (3.44a) e (3.44b), chega-se ao seguinte resultado:

$$H dF_1 = b_2\, dp_2 - b_1\, dp_1 + p_2\, H_2\, dF \tag{3.46}$$

onde:

$$b_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial K_1} \\ \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial L_1} \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q_2}{\partial K_2} \\ \\ \dfrac{\partial Q_2}{\partial L_2} \end{bmatrix}$$

Multiplicando-se ambos os lados de (3.46) pela matriz inversa de H, obtemos: [8]

$$dF_1 = H^{-1}\, b_2\, dp_2 - H^{-1}\, b_1\, dp_1 + p_2\, H^{-1}\, H_2\, dF \tag{3.47}$$

Substituindo-se o valor de dF_1 em (3.45), resulta:

$$\begin{aligned} dF_2 = dF - dF_1 = &- H^{-1}\, b_2\, dp_2 + H^{-1}\, b_1\, dp_1 \\ &+ [I - p_2\, H^{-1}\, H_2]\, dF \end{aligned} \tag{3.48}$$

Como $H^{-1}\,(p_1\, H_1 + p_2\, H_2) = I$, segue-se que $I - p_2 H^{-1} H_2 = p_1\, H^{-1}\, H_1$. Logo, a equação anterior pode ser escrita do seguinte modo:

$$dF_2 = - H^{-1}\, b_2\, dp_2 + H^{-1}\, b_1\, dp_1 + p_1\, H^{-1}\, H_1\, dF \tag{3.49}$$

Lembrando-se que as diferenciais das funções de produção (3.34) são dadas por:

$$dQ_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial K_1} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dK_1 \\ \\ dL_1 \end{bmatrix} = b_1'\, dF_1$$

e:

$$dQ_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q_2}{\partial K_2} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dK_2 \\ \\ dL_2 \end{bmatrix} = b_2'\, dF_2,$$

os valores de dQ_1 e dQ_2 podem ser escritos, depois que (3.47) e (3.49) são substituídos nas duas equações anteriores, como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dQ_1 \\ \\ dQ_2 \end{bmatrix} = &\left[\begin{array}{c|c} - b_1'\, H^{-1}\, b_1 & b_1'\, H^{-1}\, b_2 \\ \hline b_2'\, H^{-1}\, b_1 & - b_2'\, H^{-1}\, b_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} dp_1 \\ \\ dp_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} p_2\, b_1'\, H^{-1}\, H_2 \\ \\ p_1\, b_2'\, H^{-1}\, H_2 \end{bmatrix} dF \end{aligned} \tag{3.50}$$

8 Admitiremos daqui por diante que H é negativa definida.

Observa-se que a matriz que premultiplica o vetor $[dp_1 \ dp_2]$, corresponde à (3.41) e é positiva semidefinida, pois:

$$[Z_1 \ Z_2] \left[\begin{array}{c|c} -b_1' H^{-1} b_1 & b_1' H^{-1} b_2 \\ \hline b_2' H^{-1} b_1 & -b_2' H^{-1} b_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \end{array} \right] =$$

$$= -[Z_1 b_1 - Z_2 b_2]' H^{-1} [Z_1 b_1 - Z_2 b_2] \geqslant 0$$

O sinal da desigualdade prende-se ao fato de que a matriz H^{-1} é negativa definida. Quando $Z_1 b_1 = Z_2 b_2$, o que ocorre no caso de $Z_1 = p_1$ e $Z_2 = p_2$, a forma quadrática acima é igual a zero. Logo, a matriz (3.41) é positiva semidefinida.

VIII.3.3.4 – Propriedades da Curva de Transformação

Multiplicando-se a primeira equação de (3.50) por $p_2 b_2' H^{-1} b_2$ e a segunda equação do mesmo sistema por $p_1 b_1' H^{-1} b_1$ e então adicionando-se estes dois resultados, chega-se, depois de algumas manipulações algébricas, à seguinte expressão:

$$dQ_2 = -\frac{p_2 b_2' H^{-1} b_2}{p_1 b_1' H^{-1} b_1} dQ_1$$

$$+ \frac{(p_2^2 b_2' H^{-1} b_2 b_1' H^{-1} H_2 + p_1^2 b_1' H^{-1} b_1 b_2' H^{-1} H_1)}{p_1 b_1' H^{-1} b_2} dF \qquad (3.51)$$

É fácil concluir-se da expressão acima que:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = -\frac{p_2 b_2' H^{-1} b_2}{p_1 b_1' H^{-1} b_1} < 0 \qquad (3.52)$$

pois a matriz H^{-1} é negativa definida. A expressão acima afirma que na posição de equilíbrio a taxa marginal de transformação é negativa.

Multiplicando-se ambos os lados de (3.52) por $-(p_2/p_1)$, obtém-se:

$$-\frac{p_2}{p_1} \frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = -\frac{(p_2 b_2)' H^{-1} (b_2 p_2)}{(p_1 b_1)' H^{-1} (b_1 p_1)}$$

Como em equilíbrio $p_2 b_2 = p_1 b_1$, segue-se que a taxa marginal de transformação é igual ao preço relativo $p = p_1/p_2$ dos produtos. Isto é:

$$-\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = \frac{p_1}{p_2} = p \qquad (3.53)$$

A partir da primeira equação do sistema (3.50) é fácil obter-se o seguinte resultado:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dp_1}{p_1} - \frac{dp_2}{p_2} = - \frac{1}{p_1 \, b_1' \, H^{-1} \, b_1} dQ_1 + \frac{p_2 \, b_1' \, H^{-1} \, H_2}{p_1 \, b_1' \, H^{-1} \, b_1} dF \qquad (3.54)$$

Logo, dessa expressão segue-se que:

$$\frac{\partial p}{\partial Q_1} = - \frac{1}{p_2 \, b_1' \, H^{-1} \, b_1}$$

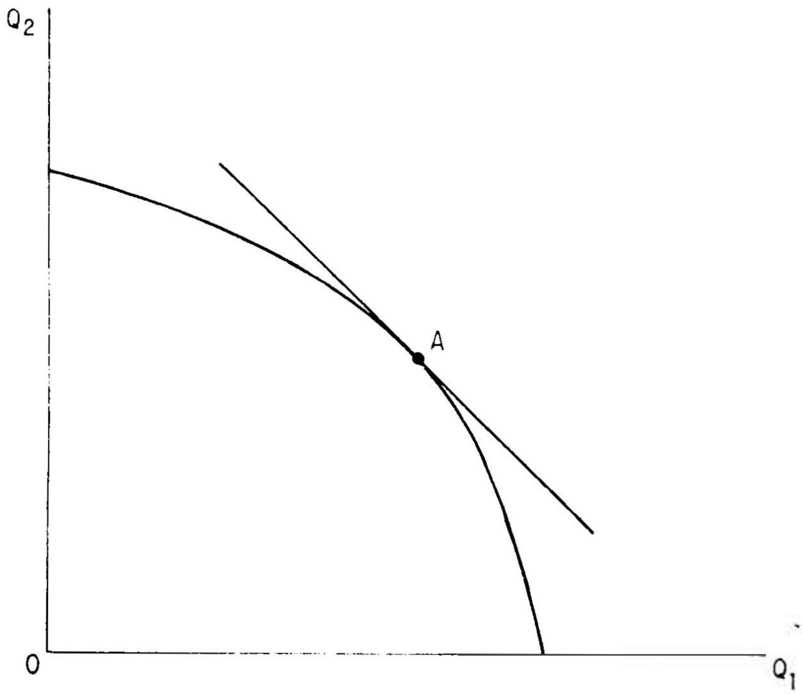
Conseqüentemente:

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial Q_1^2} = - \frac{\partial p}{\partial Q_1} = \frac{1}{p_2 \, b_1' \, H^{-1} \, b_1} < 0 \qquad (3.55)$$

Essa desigualdade implica que, no ponto de equilíbrio, a curva de transformação é côncava. A Figura VIII.7 apresenta uma curva de transformação para

Figura VIII 7

CURVA DE TRANSFORMAÇÃO



uma dada dotação de fatores. No eixo vertical marca-se a quantidade do segundo bem, Q_2, enquanto no eixo horizontal mede-se a quantidade do primeiro bem, Q_1. A tangente no ponto A é igual à taxa marginal de transformação que, em equilíbrio, é igual à relação de preços p_1/p_2.

VIII.4 — Índice de Produto Real e Deflator Implícito

Uma tendência recente na literatura econômica no que diz respeito à base teórica sobre a qual deve-se assentar a construção de índices de produto real, e por conseguinte de deflatores implícitos do produto, é de que estes índices devem ser calcados na teoria da produção. Essa linha de desenvolvimento segue, sem dúvida alguma com uma boa defasagem, o enfoque adotado há bastante tempo na teoria dos índices de custo de vida que passou do domínio da estatística para a teoria econômica, mais especificamente, a teoria do consumidor.

Um problema que surge no cálculo desses índices teóricos é que não existem os dados necessários para sua computação. Do ponto de vista prático, torna-se imperativo o uso de fórmulas aproximadas que sejam passíveis de utilização de modo rotineiro. Na Seção I.4 do Capítulo I apresentamos novas fórmulas para o cálculo dos índices de custo de vida que requerem, além dos dados de preços e quantidades habitualmente coletados pelas instituições que elaboram tais índices, estimativas de certas elasticidades que podem ser obtidas através de estudos econométricos.

Nessa seção utilizamos o mesmo enfoque adotado na formulação dos novos índices de custo de vida para a obtenção de fórmulas aproximadas para os índices do produto real e deflator implícito do produto. Cabe salientar que as fórmulas aqui sugeridas são válidas também para o cálculo de índices de produção, ou de preços, de qualquer setor da economia. Portanto, a aplicabilidade destes índices é bastante ampla, não se restringindo apenas ao índice de produto real da economia ou ao deflator implícito do produto.

VIII.4.1 — Índice de Produto Real: Fórmulas Aproximadas

O valor máximo da produção $Y = p_1 Q_1 + p_2 Q_2$ pode ser escrito como função dos preços dos produtos e da dotação de fatores existentes na economia, condicionado ao estado atual de desenvolvimento tecnológico. Com efeito, substituindo-se (3.40a) e (3.40b) na expressão (3.37), obtém-se:

$$Y = Y\,(p, F) \tag{4.1}$$

onde p indica o vetor de preços $[p_1, p_2]$ e F representa a dotação de fatores $[F_1, F_2]$.

Cabe ainda mencionar as seguintes propriedades da função $Y(p, F)$.

a) é homogênea do primeiro grau nos preços dos produtos;

b) a derivada parcial de Y com respeito ao preço p_i é igual à quantidade ofertada Q_i:

$$\frac{\partial Y}{\partial p_i} = Q_i \tag{4.2}$$

c) sua matriz hessiana

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 Y}{\partial p_1^2} & \dfrac{\partial^2 Y}{\partial p_1 \partial p_2} \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial p_2 \partial p_1} & \dfrac{\partial^2 Y}{\partial p_2^2} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

é positiva semidefinida, o que significa dizer que $Y(p, F)$ é uma função convexa.

A primeira propriedade resulta do fato de que as equações de oferta (3.40a) e (3.40b) são homogêneas do grau zero nos preços. A propriedade *b* pode ser facilmente verificada levando-se em conta a homogeneidade de grau zero das equações de oferta e o fato de a matriz (3.41) ser simétrica. A propriedade *c* é obtida a partir do fato de que a matriz (4.3) é igual à (3.41), que é positiva semidefinida.

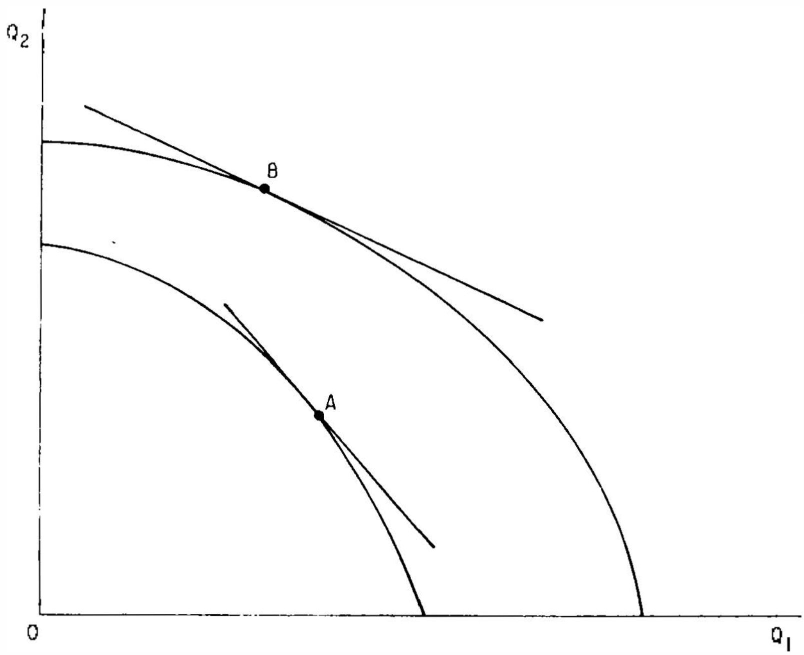
VIII.4.1.1 — Índice de Produto Real Verdadeiro

Imagine duas situações, *A* e *B*, como descritas na Figura VIII.8. Admita-se também que se deseja medir a variação de produção ocorrida entre as duas situações. O índice verdadeiro de produção será definido pela relação entre o valor máximo da produção, obtido quando a curva de transformação passa por *B*, e o valor correspondente àquela curva de transformação que passa por *A*, sendo ambos os valores avaliados para um mesmo vetor de preços p, isto é:

$$V_q(p) = \frac{Y(p, F_B)}{Y(p, F_A)} \tag{4 4}$$

Um problema que surge no cálculo deste índice é quanto ao vetor de preços a ser escolhido como base de comparação. A seguir apresentaremos dois índices diferentes, um com base nos preços na situação *A*, que será identificada com o período $t - 1$, e o segundo índice que utiliza como base de referência a situação *B*, identificada aqui com o período t.

Figura VIII. 8
VARIAÇÃO DO PRODUTO REAL



VIII.4.1.2 — O Índice de Laspeyres Modificado

Quando o vetor de preços de referência corresponde ao período $t - 1$, $p = p_{t-1}$, o índice (4.4) passa a ser escrito como:

$$V_Q(p_{t-1}) = \frac{Y(p_{t-1}, F_t)}{Y(p_{t-1}, F_{t-1})} = \frac{\sum_i Q^*_{i,t}\, p_{i,t-1}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} \tag{4.5}$$

onde $Q_{i,t-1}$ indica a quantidade produzida do bem i no período $t - 1$, $p_{i,j}$ é o preço do bem i no período j e $Q^*_{i,t}$ representa a quantidade do bem i que seria produzida no período t, se os preços neste período fossem iguais aos do período anterior, $p_{i,t-1}$.

Em virtude de as quantidades $Q^*_{i,t}$ não serem observadas, o cálculo do índice (4.5) torna-se impossível na prática. Todavia, um valor aproximado desse índice pode ser desenvolvido usando-se o mesmo procedimento que adotamos na Seção I.4 do Capítulo I. Com efeito, uma expansão de Taylor nos permite escrever:

$$Q^*_{i,t} = Q_{i,t} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (S^t_{i,j} + S^{t-1}_{i,j})\, \Delta\, p_{j,t-1} \tag{4.6}$$

onde $\Delta p_{j,t-1} = p_{j,t-1} - p_{j,t}$ e:

$$S_{i,j}^{t} = \left.\frac{\partial Q_{i,t}}{\partial p_{j,t}}\right|_{F=ct}, \quad S_{i,j}^{t-1} = \left.\frac{\partial Q_{i,t-1}}{\partial p_{j,t-1}}\right|_{F=ct}$$

A notação acima indica que as derivadas parciais são calculadas mantendo-se constante a dotação de fatores e a tecnologia.

O fato de a matriz (3.41) ser positiva semidefinida implica as seguintes propriedades:

$$\sum_{j=1}^{n} S_{i,j}^{t} p_{j,t} = 0 \tag{4.7a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} S_{i,j}^{t-1} p_{j,t-1} = 0 \tag{4.7b}$$

$$\sum_{i} \sum_{j} S_{i,j}^{t} p_{i,t-1} p_{j,t-1} \geq 0 \tag{4.7c}$$

$$\sum_{i} \sum_{j} S_{i,j}^{t-1} p_{i,t} p_{j,t} \geq 0 \tag{4.7d}$$

As formas quadráticas (4.7c) e (4.7d) são nulas quando os preços em $t - 1$ são proporcionais aos observados no período t, ou seja, quando não existe mudança de preços relativos entre os dois períodos.

Substituindo-se (4.6) em (4.5) e levando-se em conta as restrições (4.7a) e (4.7b) chega-se ao seguinte resultado:

$$V_q(p_{t-1}) = \frac{\sum_i Q_{i,t} p_{i,t-1} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j S_{i,j}^{t} p_{i,t-1} p_{j,t-1}}{\sum_i Q_{i,t-1} p_{i,t-1}} \tag{4.8}$$

Alternativamente, a expressão anterior pode ser escrita como:

$$V_q(p_{t-1}) = \frac{\sum_i Q_{i,t} p_{i,t-1}}{\sum_i Q_{i,t-1} p_{i,t-1}} + \frac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j S_{i,j}^{t} p_{i,t-1} p_{j,t-1}}{\sum_i Q_{i,t-1} p_{i,t-1}} \tag{4.9}$$

O primeiro termo do lado direito dessa expressão é o índice de Laspeyres, enquanto o segundo termo indica a correção a ser feita no índice de Laspeyres para obter-se um valor aproximado do índice verdadeiro de produção, cujo vetor preço de referência é aquele correspondente ao período $t - 1$. Em virtude de (4.7c), segue-se que:

$$V_q(p_{t-1}) > \frac{\sum_i Q_{i,t} p_{i,t-1}}{\sum_i Q_{i,t-1} p_{i,t-1}} = L_q$$

Esta desigualdade afirma que o índice de Laspeyres subestima o índice de produção verdadeiro, uma propriedade bastante conhecida na literatura econômica.

A fórmula (4.9) pode ser calculada a partir das elasticidades η_{ij}, definidas por:

$$\eta_{ij} = S^t_{i,j} \frac{p_{i,t}}{Q_{i,t}}$$

Com efeito, substituindo-se o valor de $S^t_{i,j}$ dado por esta expressão na equação (4.9), obtém-se:

$$V_q(p_{t-1}) = \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t-1}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} + \frac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \eta_{ij}\, Q_{it}\, p_{i,t-1} \frac{p_{j,t-1}}{p_{i,t}}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} \tag{4.10}$$

VIII.4.1.3 — O Índice de Paasche Modificado

O índice de Paasche modificado é obtido quando se utiliza o vetor preço do período t como referência na comparação entre a produção dos dois períodos. Assim, o índice (4.4) passa a ser expresso como:

$$V_q(p_t) = \frac{Y(p_t, F_t)}{Y(p_t, F_{t-1})} = \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum Q^*_{i,t-1}\, p_{i,t}} \tag{4.11}$$

Esse índice não pode ser calculado na prática, pois os valores de $Q^*_{i,t-1}$ não são observados, isto é, os níveis de produção que se teria no período $t-1$, se os preços nesse período fossem iguais aos vigentes no período seguinte, não são conhecidos. Um valor aproximado pode ser obtido a partir da seguinte expansão de Taylor:

$$Q^*_{i,t-1} = Q_{i,t-1} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (S^t_{i,j} + S^{t-1}_{i,j})\, \Delta p_{j,t} \tag{4.12}$$

onde $\Delta p_{j,t} = p_{j,t} - p_{j,t-1}$.

Substituindo-se (4.12) em (4.11) e levando-se em conta as restrições (4.7a) e (4.7b), obtém-se o seguinte resultado:

$$V_q(p_t) = \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j S^{t-1}_{i,j}\, p_{i,t}\, p_{j,t}} \tag{4.13}$$

Alternativamente podemos escrever esta equação como:

$$V_q(p_t) = \frac{\dfrac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t}}}{1 + \dfrac{\frac{1}{2}\sum_i \sum_j S_{i,j}^{t-1}\, p_{i,t}\, p_{j,t}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t}}} \tag{4.14}$$

O numerador da expressão acima é o índice de Paasche e o denominador indica a correção a ser feita neste índice para que se obtenha um valor aproximado para o índice verdadeiro de produção que utiliza como preços de referência os do período t. Em virtude de a forma quadrática (4.7d) ser positiva, segue-se, então, que o índice de Paasche superestima o crescimento da produção, isto é:

$$P_q = \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t}} \geqslant V_q(p_t)$$

O sinal de igualdade na expressão acima ocorre quando entre os períodos $t - 1$ e t não se verificam mudanças nos preços relativos.

VIII.4 2 — Deflator Implícito: Fórmulas Aproximadas

O valor da produção no período $t - 1$, multiplicado pelo índice de quantidade vezes o de preços, é igual ao valor da produção no período t, isto é:

$$V_q\, V_p \sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1} = \sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t} \tag{4.15}$$

onde V_q e V_p indicam índices de quantidade e preço, respectivamente. Segue-se, então, que associado a cada índice de quantidade da seção anterior existe um índice de preço denominado de deflator implícito em virtude do processo pelo qual é gerado.

VIII.4.2.1 — Deflator Implícito — Paasche Modificado

Quando substitui-se a expressão (4.8) em (4.15), obtém-se o deflator implícito do tipo Paasche modificado, isto é:

$$V_p(Q_t) = \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t-1} + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j S_{i,j}^{t}\, p_{i,t-1}\, p_{j,t-1}} \tag{4.16}$$

Alternativamente, o índice acima pode ser escrito do seguinte modo:

$$V_p(Q_t) = \frac{\dfrac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t-1}}}{1 + \dfrac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j S^t_{i,j}\, p_{i,t-1}\, p_{j,t-1}}{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t-1}}} \qquad (4.17)$$

O numerador dessa expressão é o índice de Paasche, enquanto o denominador é o fator de correção para obter-se o deflator verdadeiro. Em virtude de a forma quadrática

$$\sum_i \sum_j S^t_{i,j}\, p_{i,t-1}\, p_{j,t-1}$$

ser positiva semidefinida, o índice Paasche superestima o índice verdadeiro. Assim:

$$V_p(Q_t) < \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t-1}} = P_p \qquad (4.18)$$

É interessante observar que o índice de produto real é calculado segundo o critério Laspeyres, enquanto o deflator implícito do produto é do tipo Paasche. Conseqüentemente, o índice do produto real subestima o crescimento da economia, enquanto o deflator implícito do produto superestima a taxa de inflação.

O deflator implícito (4.16) pode ser obtido diretamente a partir da definição do índice de preço. Esse é definido pela relação entre o valor máximo da produção quando o vetor de preços é p_t e o valor máximo de produção quando o vetor de preços é p_{t-1}, ambos os valores sendo avaliados para a mesma curva de transformação F. Isto é:

$$V_p(F) = \frac{Y(p_t, F)}{Y(p_{t-1}, F)} \qquad (4.19)$$

Quando a curva de transformação de referência é a curva do período t, o índice (4.19) passa a ser dado por:

$$V_p(Q_t) = \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum Q^*_{i,t}\, p_{i,t-1}} \qquad (4.20)$$

Usando-se a aproximação fornecida por (4.6) e procedendo-se como anteriormente, obtém-se o índice (4.16).

VIII.4.2.2 — Deflator Implícito — Laspeyres Modificado

Quando substitui-se (4.13) na equação (4.15), obtém-se o deflator implícito do tipo Laspeyres modificado. Sua expressão analítica é:

$$V_p\,(Q_{t-1}) = \frac{\sum\limits_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t} + \frac{1}{2} \sum\limits_i \sum\limits_j S_{i,j}^{t-1}\, p_{i,t}\, p_{j,t}}{\sum\limits_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} \tag{4.21}$$

Alternativamente, tem-se:

$$V_p\,(Q_{t-1}) = \frac{\sum\limits_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t}}{\sum\limits_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} + \frac{\frac{1}{2} \sum\limits_i \sum\limits_j S_{i,j}^{t-1}\, p_{i,t}\, p_{j,t}}{\sum\limits_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} \tag{4.22}$$

O primeiro termo do lado direito desta expressão é o índice Laspeyres, enquanto o segundo envolve uma forma quadrática que é positiva semidefinida. Logo, o índice Laspeyres subestima o índice de preços verdadeiro, ou seja:

$$V_p\,(Q_{t-1}) > \frac{\sum\limits_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t}}{\sum\limits_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} = L_p \tag{4.23}$$

O deflator implícito do tipo Laspeyres modificado pode ser obtido também a partir da definição do índice de preços. Com efeito, quando a curva de transformação de referência é a que prevalece no período $t-1$, o índice (4.19) passa a ser dado por:

$$V_p\,(Q_{t-1}) = \frac{\sum\limits_i Q^*_{i,t-1}\, p_{i,t}}{\sum\limits_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} \tag{4.24}$$

Utilizando-se da expansão de Taylor (4.9) e levando-se em conta as restrições (4.4a) e (4.4b), chega-se facilmente ao índice (4.21).

VIII.4.3 — Índice Geométrico de Preço e Índice de Quantidade Implícito

As fórmulas dos índices propostos nas duas últimas subseções requerem, além de dados de preços e quantidades, o conhecimento de certos parâmetros que podem ser de difícil obtenção no atual estágio de desenvolvimento da econometria aplicada. Assim, propomos a seguir um método alternativo que é factível para uso imediato. Tal método consiste em inverter a ordem do procedimento normalmente usado, isto é, ao invés de calcular-se o índice de preço de modo implícito, propomos a sua obtenção diretamente através de um índice geométrico a ser explicitado mais adiante e calcular-se, então, o índice de quantidade de maneira implícita.

Com o objetivo de mostrar que o índice geométrico de preço é uma aproximação de uma média geométrica de índices verdadeiros, comecemos por expandir em série de Taylor os logaritmos de $Y(p_t, F_t)$ e de $Y(p_t, F_{t-1})$, isto é:

$$\log Y(p_t, F_t) = \log Y(p_{t-1}, F_t)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_i \left[\left. \frac{\partial \log Y(p, F_t)}{\partial \log p_i} \right|_t + \left. \frac{\partial \log Y(p, F_t)}{\partial \log p_i} \right|_{t-1} \right] \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{4.25a}$$

e:

$$\log Y(p_t, F_{t-1}) = \log Y(p_{t-1}, F_{t-1})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_i \left[\left. \frac{\partial \log Y(p_i, F_{t-1})}{\partial \log p_i} \right|_t + \left. \frac{\partial \log Y(p, F_{t-1})}{\partial \log p_i} \right|_{t-1} \right] \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{4.25b}$$

Da expressão (3.2) é fácil concluir que:

$$\left. \frac{\partial \log Y(p, F_t)}{\partial \log p_i} \right|_t = \frac{p_{i,t} Q_{i,t}}{Y_t} = \omega_{i,t}$$

$$\left. \frac{\partial \log Y(p, F_t)}{\partial \log p_i} \right|_{t-1} = \frac{p_{i,t-1} Q^*_{i,t-1}}{Y^*_{t-1}} = \omega^*_{i,t-1}$$

$$\left. \frac{\partial \log Y(p, F_{t-1})}{\partial \log p_i} \right|_t = \frac{p_{i,t} Q^*_{i,t}}{Y^*_t} = \omega^*_{i,t}$$

$$\left. \frac{\partial \log Y(p, F_{t-1})}{\partial \log p_i} \right|_{t-1} = \frac{p_{i,t-1} Q_{i,t-1}}{Y_{t-1}} = \omega_{i,t-1}$$

Cabe ressaltar que as variáveis contendo asteriscos não são observáveis, pois representam quantidades que seriam produzidas em condições hipotéticas de preços. Substituindo-se os valores acima nas equações (4.25a) e (4.25b), obtém-se

$$\log \frac{Y(p_t, F_t)}{Y(p_{t-1}, F_t)} = \frac{1}{2} \sum_i (\omega_{i,t-1} + \omega^*_{i,t-1}) \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{4.26a}$$

e:

$$\log \frac{Y(p_t, F_{t-1})}{Y(p_{t-1}, F_{t-1})} = \frac{1}{2} \sum_i (\omega^*_{i,t} + \omega_{i,t-1}) \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{4.26b}$$

Tomando-se a média aritmética destas duas expressões, resulta:

$$\log \left[\frac{Y(p_t, F_t)}{Y(p_{t-1}, F_t)} \cdot \frac{Y(p_t, F_{t-1})}{Y(p_{t-1}, F_{t-1})} \right]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_i (\omega_{i,t} + \omega^*_{i,t-1} + \omega^*_{i,t} + \omega_{i,t-1}) \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{4.27}$$

De maneira análoga ao que foi feito no Capítulo I quando da apresentação do índice geométrico, pode-se provar que a seguinte igualdade se verifica:

$$\omega^*_{i,t-1} + \omega^*_{i,t} = \omega_{i,t} + \omega_{i,t-1} + 0_2 \tag{4.28}$$

onde 0_2 indica termos de segunda ordem nas variações (logarítmicas) dos preços. Segue-se, então, que substituindo-se (4.28) em (4.27), obtém-se:

$$\log G = \sum_i \left(\frac{\omega_{i,t} + \omega_{i,t-1}}{2} \right) \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{4.29}$$

onde:

$$G = \left[\frac{Y(p_t, F_t)}{Y(p_{t-1}, F_t)} \cdot \frac{Y(p_t, F_{t-1})}{Y(p_{t-1}, F_{t-1})} \right]^{1/2} \tag{4.30}$$

Denominando-se por:

$$\bar{\omega}_i = \frac{\omega_{i,t} + \omega_{i,t-1}}{2} \tag{4.31}$$

o índice G pode ser escrito como:

$$G = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \right)^{\bar{\omega}_i} \tag{4.32}$$

O índice de quantidade que corresponde a este índice de preço é facilmente obtido com auxílio da expressão (4.15). O resultado é o seguinte:

$$V_q = \frac{\sum Q_{i,t}\, p_{i,t}}{(\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \right)^{\bar{\omega}_i}}$$

VIII.5 — Modelo de Insumo-Produto

O modelo de insumo-produto é um modelo de equilíbrio geral, cujo principal objetivo é o estudo das inter-relações entre os diversos setores produtivos da economia. Na versão do modelo estático aberto de Leontief admite-se que n bens sejam produzidos com o objetivo de atender ao consumo intermediário dos diversos setores e à demanda final. Assim, denominando-se por x_i a produção do i-ésimo setor, por a_{ij} a quantidade do bem i necessário para se produzir uma unidade do bem j, por d_i a demanda final do bem i, tem-se que:

$$x_i = a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n + d_i, \; i = 1, \ldots, n \tag{5.1}$$

Isto é, a produção total x_i do i-ésimo produto deve atender ao consumo intermediário total $\sum_j a_{ij}\, x_j$ e ao consumo final d_i.

As hipóteses sobre as quais o modelo estático aberto de Leontief se assenta são as seguintes:

a) cada produto é obtido a partir de uma combinação de fatores em proporções fixas;

b) os retornos de escala são constantes;

c) existe apenas um fator de produção primário, não produzido no sistema; e

d) um único processo é utilizado na produção de cada bem. Essa última hipótese pode ser relaxada como mostraremos mais adiante.

A descrição da tecnologia da economia pode ser feita através da matriz A de coeficientes técnicos dos insumos produzidos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

e pelo vetor de coeficientes técnicos do fator de produção primário:

$$l' = [l_1, l_2, \ldots, l_n] \tag{5.3}$$

onde l_i é a quantidade do fator primário identificado, daqui por diante, como mão-de-obra necessária para se produzir uma unidade do bem i. É importante observar que a matriz A é não-negativa, pois os coeficientes técnicos não são negativos: $a_{ij} \geqslant 0$.

Representando-se por $d' = [d_1, d_2, \ldots, d_n]$ o vetor de demanda final, o sistema de equações (5.1) pode ser escrito em notação matricial da seguinte forma:

$$x = A\, x + d \tag{5.4}$$

onde $x' = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ é o vetor de produção. Alternativamente, a equação anterior pode ser escrita como:

$$(I - A)\, x = d \tag{5.5}$$

onde I é a matriz identidade.

VIII.5.1 — Condições de Hawkins-Simon

Uma pergunta relevante do ponto de vista econômico quanto ao sistema de equações (5.5) é se existe ou não um vetor de produção x não-negativo que satisfaça esse sistema para um dado vetor de demanda final. É claro que elementos negativos no vetor de produção x não teriam o menor sentido econômico. Do ponto de vista formal temos dois problemas. O primeiro diz respeito a se a matriz de Leontief $I - A$ possui ou não inversa. Isto é, se podemos escrever a solução do sistema de equações (5.5) como:

$$x = (I - A)^{-1}\, d \tag{5.6}$$

O segundo problema está relacionado com as condições que a matriz inversa de $(I - A)$ tem de satisfazer para que seja não-negativa. Para estudar esses problemas, consideremos o caso (simples) em que a economia possui apenas dois setores de produção, o que simplifica bastante a álgebra sem prejuízo das conclusões.

Quando existem apenas dois setores de produção, a matriz de coeficientes técnicos A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

e a matriz de Leontief é igual a:

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & - a_{12} \\ - a_{21} & 1 - a_{22} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

É fácil verificar-se que a matriz inversa da apresentada acima é dada por:

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{21}\, a_{12}} \begin{bmatrix} 1 - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & 1 - a_{11} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Como os coeficientes técnicos a_{ij} não são negativos, segue-se que os elementos da matriz $(I - A)^{-1}$ também não serão negativos desde que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$1 - a_{11} > 0 \tag{5.10}$$
$$(1 - a_{11})\ (1 - a_{22}) - a_{21}\ a_{22} > 0$$

Observe-se que estas duas desigualdades aliadas ao fato de que $a_{ij} \geqslant 0$ implica que $a_{22} < 1$. São conhecidas como as condições de Hawkins-Simon as contidas em (5.10) e podem ser colocadas em termos dos determinantes menores principais de (5.8), isto é:

$$|1 - a_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

No caso mais geral de n bens se pode demonstrar que os determinantes menores principais da matriz de Leontief

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1 - a_{nn} \end{bmatrix}$$

devem ser positivos, isto é:

$$|1 - a_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \dots,$$

$$\begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1 - a_{nn} \end{vmatrix} > 0 \tag{5.11}$$

VIII.5.2 — Requerimentos de Insumos: Direto e Indireto

A equação (5.6) pode ser reescrita como:

$$x = Bd \tag{5.12}$$

onde a matriz B é a inversa da matriz de Leontief, isto é:

$$B = (I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix} \qquad (5.13)$$

A interpretação dos elementos b_{ij} da matriz B é bastante simples. Com efeito, b_{ij} indica a quantidade total do i-ésimo insumo necessária para se produzir uma unidade de demanda final do bem j, como se pode depreender de (5.12). Como a_{ij} representa a quantidade direta do i-ésimo insumo utilizada na produção de uma unidade do bem j, segue-se que $b_{ij} - a_{ij}$ é igual à quantidade indireta do i-ésimo insumo necessária para a produção de uma unidade de demanda final do bem j.

VIII.5.3 — Expansão em Série da Matriz Inversa de Leontief

Quando se pós-multiplica a matriz

$$I + A + A^2 + \ldots + A^N$$

pela matriz de Leontief $I - A$, obtém-se:

$$(I + A + \ldots + A^N)(I - A) = I - A^{N+1}$$

Pode-se demonstrar que se as condições de Hawkins-Simon forem satisfeitas, o seguinte resultado se verifica:

$$\lim_{N \to \infty} A^{N+1} = 0$$

Conseqüentemente:

$$B = (I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \ldots \qquad (5.14)$$

Cabe observar que, segundo essa equação, os elementos da diagonal da matriz B são maiores que a unidade, $b_{ii} > 1$. Além disso, as quantidades indiretas de insumo utilizadas na produção não são negativas, pois:

$$B - A = I + A + A^2 + \ldots \qquad (5.15)$$

Em virtude da expansão em série da matriz B, o vetor de produção x em (5.12) pode ser escrito do seguinte modo:

$$x = d + Ad + A^2 d + A^3 d + \ldots \qquad 5.16)$$

Esta equação tem uma interpretação bastante sugestiva. Com efeito, a produção total x pode ser decomposta nas seguintes parcelas:

i) demanda final d;

ii) produção de insumos Ad para atender à demanda final d; e

iii) produção de insumos $A\ (Ad)$ necessária para a produção de insumos Ad, e assim por diante.

VIII.5.4 — Curva de Possibilidades de Produção

O total L de mão-de-obra requerida para que se possa produzir um vetor de demanda final d é obtido multiplicando-se os coeficientes técnicos de mão-de-obra pelos respectivos níveis de produção:

$$L = l_1\, x_1 + l_2\, x_2 + \ldots + l_n\, x_n \tag{5.17}$$

Alternativamente, em notação vetorial:

$$L = l'x \tag{5.18}$$

Admita que o total de mão-de-obra disponível na economia seja igual a $\bar{L}$. Segue-se, então, que as possibilidades de produção na economia estão limitadas pela desigualdade:

$$l'x \leqslant \bar{L} \tag{5.19}$$

A Figura VIII.9 mostra a curva de possibilidade de produção para uma economia onde existem apenas dois produtos. No eixo vertical desta figura marca-se a produção de x_2, enquanto no horizontal se assinala a quantidade de x_1. A área hachurada indica as possibilidades de produção para essa economia.

VIII.5.5 — Curva de Possibilidades de Consumo

Substituindo-se o vetor de produção x expresso em (5.6) na equação (5.18), obtém-se a demanda total de mão-de-obra em função do vetor de demanda final, isto é:

$$L = l'\ (I - A)^{-1}\ d = l'\ Bd$$

Os elementos do vetor $l'B$,

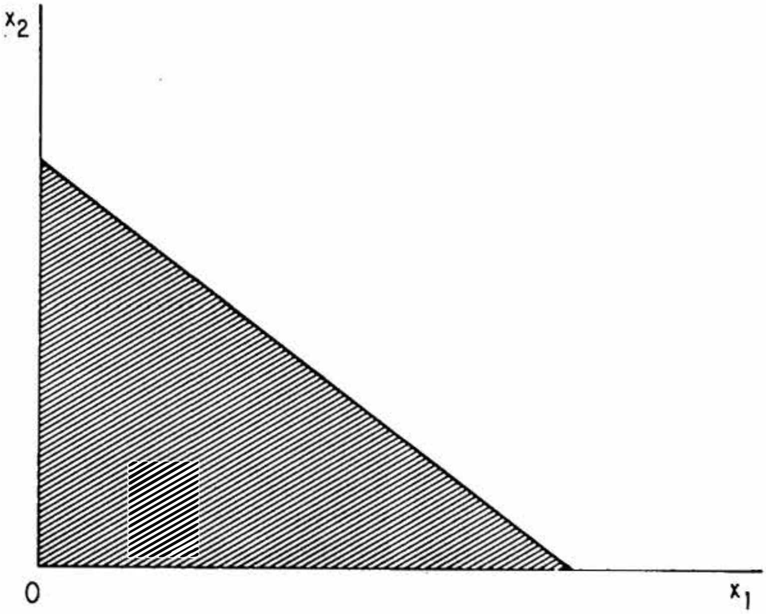
$$l'\ B = [m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n] = m' \tag{5.20}$$

indicam as quantidades de mão-de-obra, por setor, necessárias para se produzir uma unidade de demanda final, pois:

$$m_j = l_1\ b_{1j} + l_2\ b_{2j} + \ldots + l_n\ b_{nj}$$

Figura VIII . 9

CURVA DE POSSIBILIDADES DE PRODUÇÃO



Como $b_{jj} > 0$, segue-se que $m_j > l_j$, ou seja, a quantidade total de mão-de-obra usada por setor da economia é superior à quantidade de mão-de-obra direta usada no setor.

As possibilidades de consumo na economia estão limitadas pela restrição de mão-de-obra, pois:

$$l'Bd = m'd \leq \overline{L} \qquad (5.21)$$

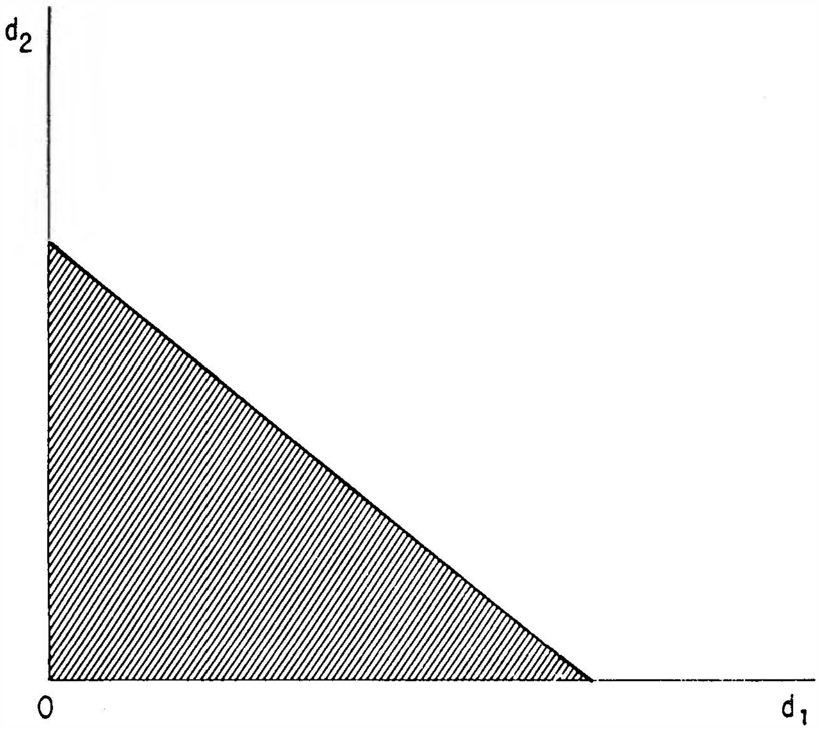
A Figura VIII.10 mostra as opções de consumo existentes na economia para o caso de dois produtos. No eixo vertical se representa a quantidade d_2, enquanto no horizontal se indica a quantidade d_1 do primeiro bem.

VIII.5.6 — Teorema da Substituição

O modelo estático aberto de Leontief pressupõe a existência de um único fator de produção primário, que não haja produção conjunta e que a produção apresente retornos constantes de escala. Todavia, a hipótese de que existe ape-

Figura VIII . 10

CURVA DE POSSIBILIDADES DE CONSUMO



nas um processo de produção em cada setor da economia não é essencial ao modelo. Com efeito, o teorema da substituição prova que a existência de um único processo de produção em cada setor resulta de uma escolha econômica e não de uma restrição tecnológica.

Com o objetivo de demonstrar esse teorema, admita-se, para simplificar: i) uma economia que produza dois bens apenas; e ii) que o número de processos produtivos disponíveis, com a tecnologia existente, em ambos setores, seja igual e que este número seja igual a *r*. Os coeficientes técnicos de produção dos diversos processos são dados por:

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{11}^{1} & \dots & a_{11}^{r} & a_{12}^{1} & \dots & a_{12}^{r} \\
a_{21}^{1} & \dots & a_{21}^{r} & a_{22}^{1} & \dots & a_{22}^{r} \\
l_{1}^{1} & \dots & l_{1}^{r} & l_{2}^{1} & \dots & l_{2}^{r}
\end{array}
$$

onde a^k_{ij} indica a quantidade do i-ésimo insumo necessária para se produzir uma unidade do bem j com o processo k, l^k_i é a quantidade de mão-de-obra por unidade do i-ésimo produto no processo k.

Imagine-se que o objetivo da economia seja o de minimizar a utilização do fator de produção escasso, no caso a mão-de-obra, de tal modo que a demanda final d seja atendida. Formalmente este problema consiste em minimizar a função-objetivo:

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{r} l^j_i \; x^j_i = l^1_1 \; x^1_1 + \ldots + l^r_1 \; x^r_1 + l^1_2 \; x^1_2 + \ldots + l^r_2 \; x^r_2 \tag{5.22}$$

onde x^j_i é a quantidade produzida do bem i através do processo j, de tal modo que as seguintes restrições sejam satisfeitas:

$$\sum_{j=1}^{r} [(1 - a^j_{11}) \quad x^j_1 - a^j_{12} \quad x^j_2] \geq d_1 \tag{5.23a}$$

$$\sum_{j=1}^{r} [- a^j_{21} \qquad x^j_1 + (1 - a^j_{22}) \; x^j_2] \geq d_2 \tag{5.23b}$$

$$x^j_i \geq 0 \tag{5.23c}$$

As restrições (5.23a) e (5.23b) indicam que a produção em cada setor deve ser maior ou igual à demanda final correspondente. A restrição (5.23c) é a condição de não-negatividade na produção proveniente de cada processo.

O problema acima é de programação linear e, portanto, podemos lançar mão de alguns resultados bastante conhecidos na teoria de programação linear. Lembrando-se que um vetor de produção que satisfaça às restrições (5.23) é chamado de solução factível, que uma solução básica do modelo de programação linear contém um número de variáveis no máximo igual ao número de restrições lineares e que uma solução básica factível ótima minimiza a função-objetivo (5.22), é fácil de se concluir que a solução do problema acima de programação linear conterá dois processos apenas — um para a produção de cada bem. Assim, embora exista a possibilidade de substituição técnica entre processos alternativos em cada setor de produção da economia, do ponto de vista econômico apenas um processo, em cada setor, se mostrará eficiente no sentido de utilizar menos o fator de produção escasso.

Um outro resultado importante da teoria de programação linear diz respeito à variação dos valores d_1 e d_2, nas restrições (5.23a) e (5.23b), com relação à solução ótima do problema. Quando as demandas d_1 e d_2 variam e os coeficientes técnicos associados à solução básica ótima ainda geram uma solução factível, esta solução será ótima, pois minimiza a função-objetivo. Logo, é fácil de concluir-se que variações no vetor de demanda final não afetam a escolha dos processos técnicos de produção a serem utilizados na produção de cada bem. Em síntese, o modelo estático aberto de Leontief admite a possibilidade técnica de substituição, mas o teorema da substituição conclui que por razões econômicas tal não ocorre, pois o conjunto de processos de produção que minimiza o uso do fator primário, para um dado vetor de demanda final, é ótimo qualquer que seja o vetor de demanda final.

VIII.5.7 — Sistema de Preços no Modelo de Insumo-Produto

Admita-se que o salário unitário seja igual a ω e que a taxa de lucro seja igual a π. Suponha-se também que a taxa de lucro é a mesma para todos os setores de atividade econômica. O preço unitário de cada produto em equilíbrio competitivo será igual à soma dos seguintes itens: i) custo de mão-de-obra por unidade do produto; ii) custo da matéria-prima utilizada por unidade do produto; e iii) lucro unitário. Em símbolos:

$$p_i = (a_{1i} p_1 + a_{2i} p_2 + \dots + a_{ni} p_n)(1 + \pi) + l_i \omega, \; i = 1, \dots, n \tag{5.24}$$

onde p_i é o preço unitário do i-ésimo bem, e a taxa de lucro incide sobre o capital circulante, que é igual ao total gasto com a aquisição de matéria-prima, pois, por hipótese, a mão-de-obra recebe seus salários ao final do período de produção. Alternativamente, em notação matricial, o sistema de equações (5.24) pode ser escrito do seguinte modo:

$$p'A\,(1 + \pi) + l'\omega = p' \tag{5.25}$$

onde $p' = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ é o vetor de preços, o qual pode ser obtido como solução do seguinte sistema de equações:

$$[I - (1 + \pi)\,A]'\,p = l\omega \tag{5.26}$$

Este sistema contém n equações e $n + 2$ incógnitas: $p_1, p_2, \dots, p_n$, π e ω. Assim, mesmo que se escolha um dos bens como numerário ainda resta uma variável a ser determinada fora do sistema. Uma hipótese bastante popular, pois conduz à teoria do valor trabalho, é quando se admite que a taxa de lucro é igual a zero. O vetor de preços que resulta quando se faz em (5.26) $\pi = 0$ é igual a:

$$p' = l'\,[I - A]^{-1}\,\omega = l'B\omega = m'\omega \tag{5.27}$$

Cabe lembrar que m é um vetor, enquanto ω o salário unitário é um escalar. Se adotarmos a mão-de-obra como numerário, a equação (5.27) nos diz que o vetor de preços é igual ao vetor m, cujos elementos indicam a quantidade total, direta e indireta, de mão-de-obra utilizada por cada setor na produção de uma unidade de demanda final dirigida a este setor. Conseqüentemente, a hipótese de que a taxa de lucro π é nula leva-nos a concluir que o valor de cada bem é igual ao conteúdo de trabalho, direto e indireto, usado na sua produção.

VIII.6 — Exercícios

1. Considere uma economia que produz dois bens a partir de um único fator de produção, com as seguintes funções de produção:

$$Q_1 = \gamma_1 L_1^a$$

$$Q_2 = \gamma_2 L_2^b$$

Admita que a dotação do fator é fixa e igual a L.

a) Deduza a curva de transformação dessa economia; e

b) Examine como os parâmetros a e b afetam a concavidade da curva de transformação.

2. Considere uma economia com dois setores e dois fatores de produção. As funções de produção,

$$Q_1 = f(K_1, L_1)$$

e

$$Q_2 = g(K_2, L_2)$$

possuem derivadas contínuas até pelo menos a 2.ª ordem. A dotação de fatores é fixa de acordo com:

$$L_1 + L_2 \leqslant L$$

$$K_1 + K_2 \leqslant K$$

Mostre que a curva de transformação é obtida fixando-se a produção de um bem, em determinado volume, e maximizando-se o nível de produção do outro bem, com a condição de que a restrição de fatores seja atendida.

3. Numa economia com dois setores, um deles utiliza os fatores em proporções fixas de acordo com a função de produção:

$$Q_1 = \min \left\{ \frac{L_1}{\alpha_1}, \frac{K_1}{\beta_1} \right\}$$

No outro setor a tecnologia é dada por uma função Cobb-Douglas, isto é:

$$Q_2 = K_2^a L_2^{1-a}$$

A dotação de capital é igual a K e a de mão-de-obra é igual a L.

a) Qual a curva de transformação da economia?

b) Haverá sobra de algum fator de produção ao longo da curva de transformação?

4. Considere uma economia com dois setores e com idênticas funções de produção:

$$Q_1 = K_1^a \, L_1^{1-a}$$

$$Q_2 = K_2^a \, L_2^{1-a}$$

A dotação de capital é igual a K e a de mão-de-obra igual a L.

a) Mostre que a curva de transformação é uma linha reta; e

b) Quando as funções de produção em ambos setores forem idênticas e homogêneas do grau 1, mas não forem do tipo Cobb-Douglas, a curva de transformação é uma linha reta?

5. Numa economia com dois setores existem dois processos para produzir cada um dos bens de acordo com:

$$Q_1^I = \min \left\{ \frac{L_{11}}{\alpha_{11}}, \frac{K_{11}}{\beta_{11}} \right\}$$

$$Q_1^{II} = \min \left\{ \frac{L_{12}}{\alpha_{12}}, \frac{K_{12}}{\beta_{12}} \right\}$$

$$Q_2^I = \min \left\{ \frac{L_{21}}{\alpha_{21}}, \frac{K_{21}}{\beta_{21}} \right\}$$

$$Q_2^{II} = \min \left\{ \frac{L_{22}}{\alpha_{22}}, \frac{K_{22}}{\beta_{22}} \right\}$$

onde os algarismos romanos I e II indicam os diferentes processos de produção. A dotação de fatores é fixa, isto é, dispõe-se de uma quantidade L de mão-de-obra e K de capital para produzir-se os dois bens.

Deduza a curva de transformação dessa economia.

6. Em uma economia competitiva com dois setores as funções de produção são do tipo Cobb-Douglas, ou seja:

$$Q_1 = K_1^a \quad L_1^{1-a} \qquad , \; 0 < a < 1$$

$$Q_2 = K_2^b \quad L_2^{1-b} \qquad , \; 1 > b > a$$

A dotação de mão-de-obra é igual a L e a de capital igual a K.

a) Pode-se afirmar neste caso que um setor é sempre mais intensivo no uso de um fator de produção?

b) Mostre que a elasticidade do preço relativo dos bens (p_1/p_2) em relação ao preço relativo dos fatores (ω/r) é igual a $b - a$.

7. Admita que as funções de produção da economia do problema anterior ao invés de Cobb-Douglas são do tipo CES. Isto é:

$$Q_1 = [\delta_1 K_1^{-\rho_1} + (1 - \delta_1) L_1^{-\rho_1}]^{-1/\rho_1}$$

$$Q_2 = [\delta_2 K_2^{-\rho_2} + (1 - \delta_2) L_2^{-\rho_2}]^{-1/\rho_2}$$

a) Pode-se admitir agora que um setor é sempre mais intensivo no uso de um fator de produção?

b) Se houver reversão na intensidade de uso dos fatores de produção é possível que ocorra mais de uma reversão?

c) No caso de duas economias que possuam essas funções de produção, que tenham dotações fixas dos fatores e que não haja mobilidade dos mesmos, pode-se garantir que a equalização dos preços dos bens através do comércio internacional acarrete a equalização dos preços dos fatores de produção?

8. A dualidade entre custo e função de produção permite que se escreva o custo de produção para uma função de produção homogênea do grau 1 do seguinte modo:

$$C_1 = Q_1\ c_1\ (\omega,r)$$

onde C_1 é o custo de produção, Q_1 é o nível de produção e $c_1(\omega,r)$ é uma função côncava homogênea do grau 1 nos preços dos fatores ω e r.

a) A partir desta relação de dualidade, discuta a equalização dos preços dos fatores de produção através do comércio internacional no modelo de dois setores e dois fatores de produção; e

b) Como este enfoque pode ser usado para discutir o problema mais geral de equalização dos preços dos fatores quando existem n bens e m fatores de produção?

VIII.7 — Bibliografia

BARBOSA, F. de H. Índice de produto real e deflator implícito: fórmulas aproximadas para os índices teóricos. *Revista Brasileira de Economia,* 34:59-76, 1980.

DOELLINGER, C. von, CASTRO FARIA, H., CARVALHO PEREIRA, J. E., e HORTA, M. H. T. T. *Exportações dinâmicas brasileiras.* Coleção Relatórios de Pesquisa, 2. Rio de Janeiro, IPEA/INPES, 1971.

DORFMAN, R., SAMUELSON, P. A., e SOLOW, R. M. *Linear programming and economic analysis.* New York, McGraw-Hill, 1958.

HENDERSON, J., e QUANDT, R. E. *Microeconomic theory: a mathematical approach.* 2.ª ed., Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, 1971.

JOHNSON, H. G. *Two-sector model of general equilibrium.* Chicago, Aldine, 1971.

JONES, R. W. The structure of simple general equilibrium models. *Journal of Political Economy,* 73:557-72, 1965.

———. Factor proportions and the Heckscher-Ohlin theorem. *Review of Economic Studies,* 24:1-10, 1957.

KEMP, M. C. *The pure theory of international trade and investment.* Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc., 1969.

LEAMER, E. E., e STERN, R. M. *Quantitative international economics.* Chicago, Aldine, 1970.

LEONTIEF, W. W. *The structure of American economy, 1919-1939.* 2.ª ed.; New York, Oxford University Press, 1951.

———. Factor proportions and the structure and empirical trade: further theoretical and empirical analysis. *Review of Economics and Statistics,* 38:386-407, 1956.

———. Domestic production and foreign trade: the American capital position reexamined. *Proceedings of The American Philosophical Society,* 97:332-49, 1953.

MENDONÇA DE BARROS, J. R. *Desenvolvimento da agricultura e exportações de produtos primários não tradicionais.* São Paulo, IPE, 1974.

PASINETTI, L. L. *Lectures on the theory of production.* New York, Columbia University Press, 1977.

RYBCZYNSKI, T. M. Factor endowments and relative commodity prices. *Economica,* 22:336-41, 1955.

SAMUELSON, P. A. International trade and the equalization of factor prices. *Economic Journal,* 58:163-84, 1948.

———. Summary on factor price equalization. *International Economic Review,* 8:286-95, 1967.

SILBERBERG, E. *The structure of economics: a mathematical analysis.* New York, MacGraw Hill, 1978.

TAKAYAMA, A. *International trade an approach to the theory.* New York, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1972.

THOMPSON, R. L., e SCHUH, G. E. Política comercial e exportação: o caso do milho no Brasil. *Pesquisa e Planejamento Econômico,* Rio de Janeiro, *8* (3) :663-94, dez. 1978.

Capítulo IX

A EMPRESA EM CONCORRÊNCIA IMPERFEITA

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns modelos da empresa em concorrência imperfeita. Certamente este tipo de estrutura de mercado predomina em vários segmentos das economias capitalistas modernas, principalmente em grande parte do setor industrial. Todavia, o desenvolvimento teórico de modelos da empresa oligopolista é insatisfatório sob vários aspectos e, como não poderia deixar de ser, este capítulo reflete o estágio do conhecimento atual.

O capítulo se inicia com o modelo da empresa monopolista e procura enfatizar as proposições potencialmente refutáveis a que ele conduz.

A segunda seção trata da empresa em concorrência monopolista, que é uma situação intermediária entre a concorrência perfeita e o monopólio e que muitos acreditam ser relevante para uma melhor compreensão da estrutura de mercados de parte do setor terciário da economia.

A terceira seção do capítulo é dedicada ao estudo de alguns modelos de oligopólio: o modelo clássico de Cournot, a solução de coalizão, a teoria de maximização da receita e a teoria do preço-limite de entrada. Cabe assinalar que o modelo clássico de Cournot possibilita relacionar a estrutura econômica do mercado com o índice de concentração de Hirschman-Herfindahl, um índice largamente utilizado em estudos de organização industrial. Nesta seção está presente também a preocupação de investigar as bases teóricas sobre as quais se pode explicar um comportamento que alguns economistas acreditam suficientemente documentado através da evidência empírica, de que as empresas oligopolistas adotam uma regra de bolso para fixar seus preços, acrescentando uma margem de lucro ao custo variável unitário de produção.

IX.1 — A Empresa Monopolista

A empresa monopolista, por definição, é a única a produzir e vender um determinado produto no mercado. Conseqüentemente, a demanda de seu produto é a demanda total do mercado, que podemos expressar através da seguinte equação:

$$q = f\ (p,\ y) \tag{1.1}$$

onde q é a quantidade total demandada, p é o preço relativo do produto e y é a renda real dos consumidores. Alternativamente, a equação (1.1) pode ser escrita na forma inversa, colocando-se o preço p como função da quantidade q e da renda real y, isto é:

$$p = p\,(q, y) \qquad (1.2)$$

Esta é a equação da receita média da empresa, pois dividindo-se a receita R pela quantidade q obtém-se o preço de venda p. A receita média diminui com o aumento da quantidade vendida, $\partial p/\partial q < 0$ e, no caso de bens considerados normais, aumenta quando o nível de renda real cresce, $\partial p/\partial y > 0$. No caso de bens inferiores, o preço diminui com o aumento da renda real: $\partial p/\partial y < 0$.

O lucro π da empresa é igual à diferença entre o faturamento $R = pq$ e o custo total $C = r_1 x_1 + r_2 x_2$ com a aquisição dos fatores de produção:

$$\pi = pq - r_1 x_1 - r_2 x_2 \qquad (1.3)$$

Os fatores de produção x_1 e x_2 são combinados através da função de produção:

$$q = q\,(x_1, x_2) \qquad (1.4)$$

que, por hipótese, possui derivadas contínuas de primeira e de segunda ordens.

IX.1.1 — Maximização do Lucro

Admitamos que a empresa monopolista compra seus fatores de produção em mercados competitivos, o que significa dizer que os preços r_1 e r_2 dos fatores independem das quantidades x_1 e x_2 adquiridas. Suponhamos também que o objetivo da empresa monopolista consiste em maximizar o lucro π. Com essa finalidade, a empresa selecionará as quantidades de fatores x_1 e x_2 que satisfaçam à restrição técnica (1.4) e que atendam à demanda de mercado (1.2). As variáveis endógenas no modelo são as quantidades x_1 e x_2 dos fatores, a quantidade q do produto, bem como o preço de venda p. As variáveis exógenas, não controladas pela empresa, são os preços r_1 e r_2 dos fatores e a renda real y dos consumidores.

As condições de primeira ordem para a maximização do lucro — levando-se em conta a restrição de mercado dada pela equação de demanda e a restrição técnica da função de produção — são expressas através das seguintes equações:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = p \frac{\partial q}{\partial x_1} + q \frac{\partial p}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x_1} - r_1 = 0$$

e:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = p \frac{\partial q}{\partial x_2} + q \frac{\partial p}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x_2} - r_2 = 0$$

que podem ser reescritas do seguinte modo:

$$\left(p + q \frac{\partial p}{\partial q}\right) \frac{\partial q}{\partial x_1} = r_1 \qquad (1.5)$$

e:

$$\left(p + q \frac{\partial p}{\partial q}\right) \frac{\partial q}{\partial x_2} = r_2 \qquad (1.6)$$

O coeficiente

$$p + q \frac{\partial p}{\partial q} = Rmg$$

que multiplica as produtividades marginais dos fatores de produção, $\partial q/\partial x_1$ e $\partial q/\partial x_2$, nas equações (1.5) e (1.6), é a receita marginal da empresa, igual ao acréscimo da receita por unidade adicional vendida:

$$Rmg = \frac{\partial R}{\partial q} = \frac{\partial (pq)}{\partial q} = p + q \frac{\partial p}{\partial q}$$

Assim, as condições de equilíbrio (1.5) e (1.6) afirmam que na posição de lucro máximo o benefício marginal de cada fator de produção é igual a seu custo unitário.

A condição de segunda ordem para a maximização do lucro π é de que a matriz, cujos elementos são iguais a

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial Rmg}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial q}{\partial x_j} + Rmg \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2 \qquad (1.7)$$

seja negativa semidefinida.

IX.1.2 — Minimização do Custo de Produção

Quando se divide a equação (1.5) pela equação (1.6), obtém-se:

$$\frac{r_1}{\partial q/\partial x_1} = \frac{r_2}{\partial q/\partial x_2}$$

que é a condição de primeira ordem para a minimização do custo de produção para uma empresa que compra os fatores de produção em mercados competitivos, como vimos no Capítulo VI. Logo, a empresa monopolista ao maximizar seu lucro minimiza o custo de produção. Podemos, então, escrever a função de custo da empresa monopolista como

$$C = C(q, r_1, r_2)$$

cujas propriedades são idênticas às da função de custo estudada no Capítulo VI.

IX.1.3 — Maximização do Lucro e Elasticidade-Preço de Demanda

O lucro da empresa é, portanto, igual ao valor do faturamento menos o custo mínimo de produção, isto é:

$$\pi = p\, q - C\,(q,\, r_1,\, r_2)$$

O nível de produção que maximiza o lucro π é obtido através da condição de primeira ordem:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = p + q\,\frac{\partial p}{\partial q} - \frac{\partial C}{\partial q} = 0$$

ou:

$$Rmg = p + q\,\frac{\partial p}{\partial q} = \frac{\partial C}{\partial q} = Cmg \tag{1.8}$$

Esta igualdade expressa o fato de que a receita marginal é igual ao custo marginal quando o lucro é máximo.

A receita marginal da empresa pode ser escrita em função de elasticidade-preço da demanda η, de acordo com

$$Rmg = p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \tag{1.9}$$

onde η é definida por

$$\eta = \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q}$$

A elasticidade-preço da demanda é sempre negativa em virtude de a quantidade demandada variar em sentido contrário ao preço do produto, quando a renda real do consumidor é mantida constante. A receita marginal será negativa quando a elasticidade-preço η for, em valor absoluto, inferior à unidade. Segue-se, então, que se a empresa monopolista estiver maximizando o seu lucro, estará necessariamente operando no trecho elástico de equação de demanda. Com efeito, como em equilíbrio a receita marginal é igual ao custo marginal, que é positivo, aquela forçosamente terá de ser positiva.

Uma conclusão importante a que chegamos é a de que a evidência empírica de que o trecho relevante da equação de demanda do produto do monopolista tem uma elasticidade-preço, em valor absoluto, menor do que a unidade, nos levaria a rejeitar a hipótese de que a empresa monopolista teria como objetivo a maximização do lucro.

IX.1.4 — Margem de Lucro e Fixação de Preços

Quando se combina a fórmula da receita marginal (1.9) com a condição de equilíbrio (1.8), o preço de venda do produto é igual ao custo marginal, vezes um coeficiente que depende da elasticidade-preço da demanda, isto é:

$$p = (1 + k)\ Cmg \qquad (1.10)$$

onde o parâmetro k é igual a:

$$k = \frac{1}{|\eta| - 1}$$

Assim, quando o custo marginal for constante, a fixação do preço através de uma regra de bolso, segundo a qual o preço de venda é obtido adicionando-se ao custo variável unitário (que, no caso, é igual ao custo marginal) uma margem de lucro, é compatível com a condição de equalização da receita marginal ao custo marginal.

Exemplificando, se a elasticidade-preço η for igual -2 a margem k será igual a 100%. Obviamente, a margem de lucro k depende das condições de mercado através da elasticidade-preço. Contudo, se a elasticidade-preço for insensível às variações da renda, a margem k não dependerá de flutuações do nível de renda.

IX.1.5 — Retornos de Escala e Equilíbrio da Empresa Monopolista

A condição de segunda ordem para a maximização do lucro π é que a taxa de variação da receita marginal seja inferior ou igual à taxa de variação do custo marginal. Em símbolos:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q^2} = \frac{\partial Rmg}{\partial q} - \frac{\partial Cmg}{\partial q} = 2\,\frac{\partial p}{\partial q} + q\,\frac{\partial^2 p}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial q^2} \leqslant 0 \qquad (1.11)$$

Como a receita marginal é sempre decrescente, esta desigualdade afirma que em equilíbrio o custo marginal deve ser crescente ou, então, se o custo marginal for decrescente este deve decrescer menos rapidamente que a receita marginal.

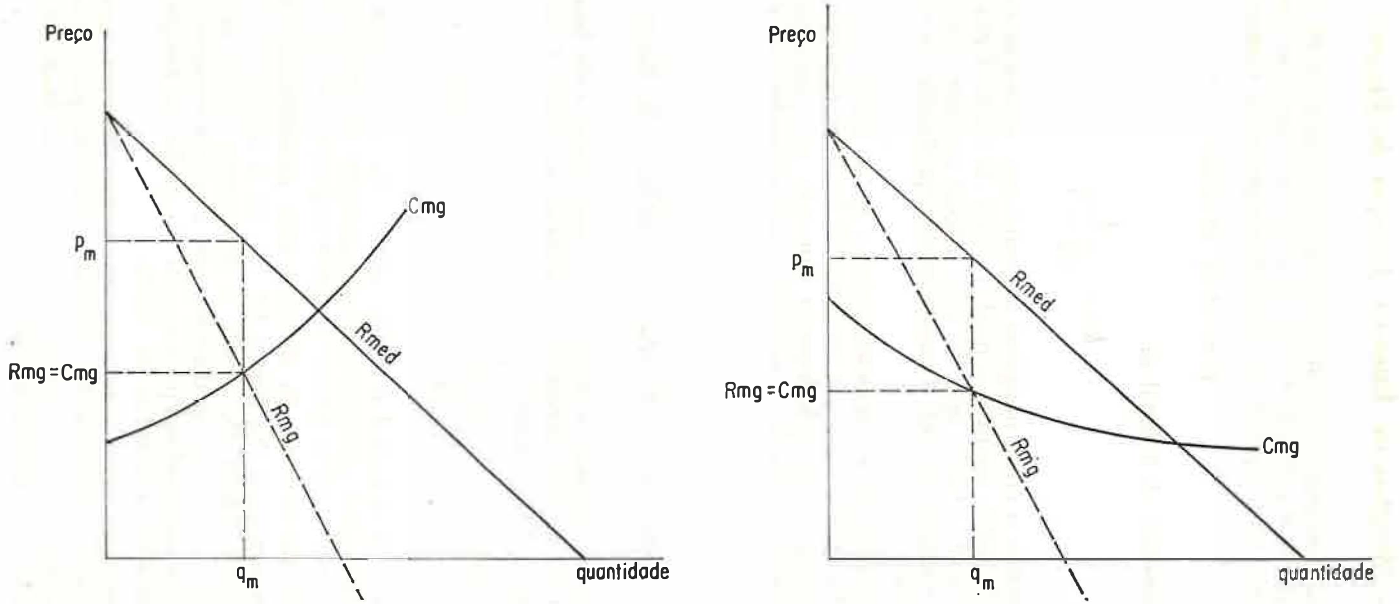
As Figuras IX.1a e IX.1b ilustram duas possibilidades de equilíbrio para a empresa monopolista. Na Figura IX.1a o custo marginal é crescente, enquanto no exemplo da Figura IX.1b ele é decrescente. Neste último caso, o custo marginal decresce menos rapidamente que a receita marginal. Observe-se, então, que a empresa monopolista pode operar no trecho da função de produção que apresenta retornos crescentes de escala.

Uma observação interessante quanto a uma empresa operando com rendimentos crescentes de escala diz respeito ao fato de que se esta empresa cobrar pelo seu produto o custo marginal, necessariamente incorrerá em prejuízo. Com efeito, o lucro da empresa é igual a:

$$\pi = p\,q - Cm\,q = (p - Cm)\,q$$

Figura IX.1

EQUILÍBRIO DA EMPRESA MONOPOLISTA



Se o preço for igual ao custo marginal, $p = Cmg$, tem-se que o lucro é dado por:

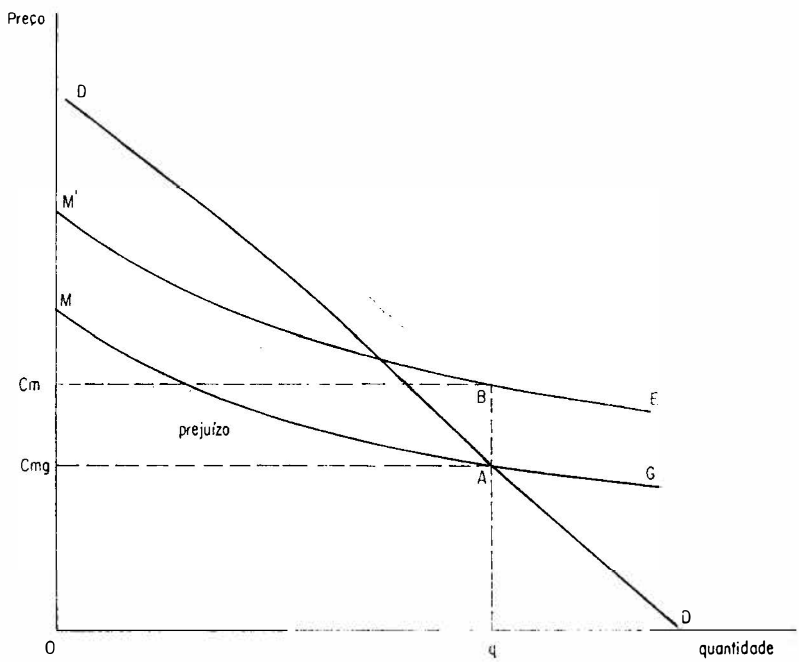
$$\pi = (Cmg - Cm)\,q$$

Da equação (3.23) do Capítulo VI sabemos que $Cm = \nu\, Cmg$, onde ν mede o retorno de escala, e no caso $\nu > 1$, pois os retornos de escala são crescentes. Logo, da equação anterior resulta:

$$\pi = Cmg\,(1 - \nu)\,q < 0$$

Esta expressão mostra claramente que o lucro é negativo, ou seja, a empresa teria prejuízo caso cobrasse pelo seu produto o custo marginal de produzi-lo. Este é o exemplo clássico de uma empresa que produz um determinado serviço de utilidade pública, com rendimentos crescentes de escala, e cuja tarifa não pode ser fixada pelo custo marginal, a menos que um subsídio seja dado para que a empresa possa operar cobrindo todos os seus custos. A Figura IX.2 ilustra esse tipo de situação. A curva de demanda de mercado é a curva *DD*. A interseção desta curva com a de custo marginal *MG* é o ponto *A*, e nele o preço seria igual ao custo marginal. A diferença entre o custo médio dado

Figura IX 2
EMPRESA MONOPOLISTA, RENDIMENTOS CRESCENTES DE ESCALA E PREÇO COMPETITIVO



pela curva $M'E$, e o preço, para o nível de produção q, seria igual ao segmento AB, que mediria o prejuízo por unidade produzida. O subsídio, para cobrir o custo total da empresa em produzir a quantidade q, teria que ser igual, então, o valor de AB multiplicado por q.

IX.1.6 — Estática Comparativa

A equação da receita média (1.2), a função de produção (1.4) e as condições de equilíbrio (1.5) e (1.6), que equalizam o valor da produtividade marginal de cada fator ao respectivo preço, permitem, em princípio, que se expresse cada variável endógena do modelo da empresa monopolista, p, q, x_1, e x_2, como função das variáveis exógenas y, r_1 e r_2. Em símbolos:

$$p = F(y, r_1, r_2) \tag{1.12}$$

$$q = G(y, r_1, r_2) \tag{1.13}$$

$$x_1 = H(y, r_1, r_2) \tag{1.14}$$

$$x_2 = I(y, r_1, r_2) \tag{1.15}$$

O exercício de estática comparativa do modelo da empresa monopolista, que consiste em determinar os sinais das derivadas parciais das funções acima em relação às variáveis exógenas, poderia ser desenvolvido a partir das condições de equilíbrio (1.5) e (1.6), da equação (inversa) de demanda (1.2) e da restrição técnica (1.4), usando-se para tanto as condições de segunda ordem (1.7). Todavia, este caminho envolve um exercício algébrico um pouco tedioso e para evitá-lo usaremos um método alternativo baseado na condição de que, em equilíbrio, a receita marginal é igual ao custo marginal de produção.

Comecemos, então, por diferenciar ambos os lados da igualdade (1.8), isto é:

$$d\left(p + q\,\frac{\partial p}{\partial q}\right) = d\left(\frac{\partial C}{\partial q}\right)$$

igual a:

$$dp + \frac{\partial p}{\partial q}\,dq + q\,d\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right) = d\left(\frac{\partial C}{\partial q}\right) \tag{1.16}$$

A diferencial do preço é facilmente obtida com o auxílio de equação de receita média (1.2), pois:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial q}\,dq + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy \tag{1.17}$$

Em virtude de $\partial p/\partial q$ ser, em geral, função de q e y, termos que:

$$d\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right) = \frac{\partial^2 p}{\partial q^2}\,dq + \frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial q}\,dy \tag{1.18}$$

O custo marginal depende da quantidade produzida e dos preços dos fatores de produção. Conseqüentemente, a diferencial do custo marginal é dada por:

$$d\left(\frac{\partial C}{\partial q}\right) = \frac{\partial^2 C}{\partial q^2}\,dq + \frac{\partial^2 C}{\partial r_1\,\partial q}\,dr_1 + \frac{\partial^2 C}{\partial r_2\,\partial q}\,dr_2 \tag{1.19}$$

Substituindo-se os resultados contidos em (1.17), (1.18) e (1.19) na equação (1.16), obtém-se a diferencial de q em função das diferenciais de y, r_1 e r_2:

$$dq = \frac{\partial G}{\partial y}\,dy + \frac{\partial G}{\partial r_1}\,dr_1 + \frac{\partial G}{\partial r_2}\,dr_2 \tag{1.20}$$

onde:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial q}}{2\dfrac{\partial p}{\partial q} + q\dfrac{\partial^2 p}{\partial q^2} - \dfrac{\partial^2 C}{\partial q^2}} \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial G}{\partial r_1} = \frac{\dfrac{\partial^2 C}{\partial q\,\partial r_1}}{2\dfrac{\partial p}{\partial q} + q\dfrac{\partial^2 p}{\partial q^2} - \dfrac{\partial^2 C}{\partial q^2}} \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial G}{\partial r_2} = \frac{\dfrac{\partial^2 C}{\partial q\,\partial r_2}}{2\dfrac{\partial p}{\partial q} + q\dfrac{\partial^2 p}{\partial q^2} - \dfrac{\partial^2 C}{\partial q^2}} \tag{1.23}$$

Os sinais destas derivadas parciais dependem dos sinais das expressões que figuram nos respectivos numeradores, pois o sinal do denominador, que é o mesmo em todas as equações, é negativo em virtude de a condição de segunda ordem (1.11) requerer que a receita marginal decresça mais rapidamente que o custo marginal na posição de lucro máximo.

O sinal de $\partial G/\partial y$ é, *a priori*, indeterminado, pois nada se pode afirmar sobre os sinais de

$$\frac{\partial p}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial q}$$

É claro que para os bens considerados normais, cujas elasticidades-renda são positivas, espera-se que a quantidade produzida e a renda real estejam positivamente correlacionadas. Todavia, cabe ressaltar o fato de que o sinal de $\partial G/\partial y$ não depende apenas do de $\partial p/\partial y$.

A resposta da produção da empresa monopolista às variações dos preços dos fatores de produção, ou seja, os sinais das derivadas parciais $\partial G/\partial r_i$ são também, *a priori*, indeterminados. Esta propriedade prende-se ao fato de que o sinal de

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q\,\partial r_i},\; i = 1,\, 2,$$

tanto pode ser negativo como positivo. No caso mais usual espera-se que o custo marginal aumente com o preço do fator. Nesta hipótese, teríamos a quantidade produzida variando em sentido contrário aos preços dos fatores de produção:

$$\frac{\partial G}{\partial r_i} < 0, \quad i = 1,\ 2.$$

Uma conclusão bastante interessante, sem dúvida alguma, do modelo da empresa monopolista é que nenhuma afirmação pode ser feita, *a priori,* no que diz respeito à resposta da quantidade produzida às modificações nas variáveis exógenas do modelo. Assim, qualquer tipo de comportamento por parte do monopolista é consistente com a hipótese de maximização do lucro da empresa. Esta conclusão significa dizer que, do ponto de vista empírico, o modelo da empresa monopolista é praticamente vazio de conteúdo. Quando algumas hipóteses adicionais são introduzidas no modelo, no tocante à tecnologia usada pela empresa ou com relação ao formato da equação de demanda de mercado, as derivadas parciais da função G passam a ter um sinal definido e o modelo, então, é capaz de fornecer algumas previsões de como o monopolista ajusta sua produção quando se defronta com mudanças nas condições dos mercados de fatores de seu produto.

Com a finalidade de conhecer o sinal da resposta do preço de venda do monopolista a mudanças nas variáveis exógenas do modelo, comecemos pelo diferencial da equação de receita média

$$dp = \frac{\partial p}{\partial q}\, dq + \frac{\partial p}{\partial y}\, dy \tag{1.24}$$

Combinando-se (1.24) e (1.20), resulta:

$$dp = \frac{\partial F}{\partial y}\, dy + \frac{\partial F}{\partial r_1}\, dr_1 + \frac{\partial F}{\partial r_2}\, dr_2 \tag{1.25}$$

onde as derivadas parciais incluídas nesta diferencial são dadas por:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial q}\,\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial F}{\partial r_1} = \frac{\partial p}{\partial q}\,\frac{\partial G}{\partial r_1} \tag{1.27}$$

$$\frac{\partial F}{\partial r_2} = \frac{\partial p}{\partial q}\,\frac{\partial G}{\partial r_2} \tag{1.28}$$

Os sinais destas derivadas parciais são, também, *a priori,* indeterminados. Os sinais de $\partial F/\partial r_i$, $i = 1,\ 2$, são contrários aos de $\partial G/\partial r_i$, $i = 1,\ 2$, respectivamente. Em relação à derivada parcial $\partial F/\partial y$ não se pode afirmar que seu sinal seja contrário ao de $\partial G/\partial y$ em virtude do segundo termo que aparece na expressão (1.26). Assim, é possível que uma recessão provoque uma retração da produção se $\partial G/\partial y > 0$ e ao mesmo tempo acarrete um aumento no preço de venda do produto se $\partial F/\partial y < 0$.

A conclusão a que se chegou linhas atrás, no tocante à incapacidade do modelo de prever a resposta da quantidade produzida às modificações nas variáveis exógenas do modelo, aplica-se igualmente no caso de resposta do preço de venda às variações no mesmo conjunto de variáveis exógenas. Com efeito, os sinais das derivadas parciais da função F com relação a seus argumentos são, *a priori*, ambíguos do ponto de vista teórico. Todavia, quando as diferenciais de F e G são comparadas, as inter-relações entre os seus coeficientes se mostram claramente, pois:

$$\frac{\partial F}{\partial r_i} \frac{\partial G}{\partial r_i} > 0, \; i = 1, \; 2.$$

Os sinais das derivadas parciais das quantidades demandadas de fatores em relação ao nível de renda e aos preços dos fatores são obtidos facilmente, combinando-se as diferenciais das equações de demanda $x_i = x_i \; (q, \; r_1, \; r_2)$ do Capítulo VI com a diferencial de q expressa em (1.20). As conclusões são idênticas à que chegamos com relação aos sinais das derivadas parciais das funções F e G, pois os das derivadas parciais das funções H e I com relação aos seus argumentos são, *a priori*, ambíguos do ponto de vista teórico.

IX.1.7 — Discriminação de Preços

Suponha que uma empresa monopolista venda seu produto em dois mercados distintos, cujas equações (inversas) de demanda sejam dadas por:

$$p_1 = p_1 (q_1, \; y) \tag{1.29}$$

e:

$$p_2 = p_2 (q_2, \; y) \, . \tag{1.30}$$

O lucro da empresa é igual à soma das receitas com as vendas nos dois mercados, menos o custo total de produção:

$$\pi = p_1 \, q_1 + p_2 \, q_2 - C \, (q, \; r_1, \; r_2) \, .$$

onde a quantidade produzida q é igual à soma das quantidades vendidas em cada mercado: $q = q_1 + q_2$.

A decisão do monopolista de quanto produzir e de que quantidades alocar para cada mercado é baseada no objetivo de maximização do lucro. A condição de primeira ordem para que o lucro seja máximo é que a receita marginal em cada mercado seja igual ao custo marginal de produção:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = p_1 + q_1 \frac{\partial p_1}{\partial q_1} - \frac{\partial C}{\partial q} = 0$$

e:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = p_2 + q_2 \frac{\partial p_2}{\partial q_2} - \frac{\partial C}{\partial q} = 0$$

Combinando-se estas duas equações e escrevendo-se as receitas marginais em função das elasticidades-preço η_1 e η_2, temos que:

$$p_1\left(1 + \frac{1}{\eta_1}\right) = p_2\left(1 + \frac{1}{\eta_2}\right) = Cmg$$

A principal conclusão que se retira da primeira parte desta igualdade é a de que o monopolista cobrará um preço mais elevado naquele mercado em que a elasticidade-preço de demanda for mais inelástica, pois:

$$p_1 > p_2 \Longleftrightarrow |\eta_2| > |\eta_1|$$

Obviamente, a discriminação de preço por parte do monopolista pressupõe a existência de algum tipo de mecanismo, que impeça alguém de comprar o produto no mercado onde o preço seja mais baixo para revendê-lo com lucro naquele cujo preço seja mais elevado.

IX.1.8 — Equilíbrio de Longo Prazo

A empresa monopolista, em virtude de não ter nenhum concorrente no mercado, obtém no curto e no longo prazo um lucro positivo, apresentando, conseqüentemente, uma taxa de retorno sobre o capital acima daquela considerada normal pelo setor competitivo. Por quais razões outras empresas não são atraídas para a produção de um bem que conduz a lucros tão atrativos, é a pergunta que surge naturalmente. Em princípio, poderíamos citar, de maneira geral, dois tipos de barreiras à entrada de outras empresas que competiriam com a empresa monopolista: barreiras legais e barreiras puramente econômicas. As barreiras de ordem legal devem-se a patentes, propriedade de recursos específicos ou concessões de exploração pelo governo. As barreiras de caráter econômico prendem-se à conjugação do tamanho do mercado com as condições do custo de produção.

No primeiro tipo de barreira não há muito o que discutir sobre a entrada de concorrentes no mercado, pois o impedimento para que isto ocorra deve-se exclusivamente à legislação. No segundo caso, as razões de ordem econômica que impedem a entrada de outros concorrentes no mercado podem modificar-se ao longo do tempo. Por exemplo, a expansão do mercado ou inovações tecnológicas podem fazer com que concorrentes reais, ou mesmo potenciais, apareçam no mercado fazendo com que a própria estrutura deste se altere.

Vale lembrar ainda que, numa economia aberta, a concorrência de produtos estrangeiros pode forçar uma empresa monopolista a ter um comportamento semelhante ao de uma em concorrência perfeita, vendendo seu produto ao custo marginal de produção.

IX.2 — A Empresa em Concorrência Monopolista

A concorrência monopolista é uma estrutura de mercado que se situa entre a concorrência perfeita e o monopólio. À semelhança da empresa monopolista, a demanda do produto de cada empresa em concorrência monopolista não é infinitamente elástica em relação ao preço, como acontece no caso da empresa em concorrência perfeita. Por outro lado, da mesma forma que na concorrência perfeita, e ao contrário do monopólio, a empresa em concorrência monopolista não é a única no mercado, enfrentando, conseqüentemente, a concorrência de outras.

Uma diferença importante que cabe assinalar entre empresas em concorrência perfeita e em concorrência monopolista diz respeito à diferenciação, real ou virtual, feita pelos consumidores do produto de uma em relação aos das demais empresas do setor. Vale lembrar, que no caso do mercado em concorrência perfeita, o produto é homogêneo, o que equivale dizer que a substituição do produto de uma empresa por outra é completa.

A empresa em concorrência monopolista ao produzir um bem que se diferencia dos produtos das demais empresas se defronta com uma equação de demanda pelo seu produto que é função não-somente do seu preço de venda, como também dos preços dos demais produtos e da renda real dos consumidores, isto é:

$$q_i = q_i\,(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n, y)\,,\ i = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

onde p_i é o preço cobrado pela i-ésima empresa e p_j, $j \neq i$, $j = 1, \ldots, n$, é o preço do produto da j-ésima empresa. Como anteriormente, y é a renda real dos consumidores. Na equação de demanda (2.1), a derivada parcial de q_i em relação ao preço p_i é negativa, enquanto as derivadas parciais de q_i em relação aos preços p_j,

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} > 0,$$

são positivas em virtude da hipótese de que os n bens são substitutos entre si.

Uma forma alternativa de se escrever as equações de demanda (2.1) consiste em colocar o preço p_i como variável dependente, função das quantidades produzidas pelas diversas empresas e da renda real y, isto é:

$$p_i = p_i(q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n, y) \tag{2.2}$$

Esta equação é também a de receita média da i-ésima empresa, pois seu faturamento R_i é igual ao produto do preço p_i pela quantidade vendida q_i, e a receita média é obtida dividindo-se o faturamento pela quantidade: $Rmed = R_i/q_i = p_i$.

IX.2.1 — Maximização do Lucro

O lucro da i-ésima empresa é igual à diferença entre o faturamento e o custo de produção:

$$\pi_i = p_i(q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n, y) \cdot q_i - r_1 x_{1i} - r_2 x_{2i} \qquad (2.3)$$

onde x_{1i} e x_{2i} indicam as quantidades de fatores de produção empregados por esta empresa e r_1 e r_2 são os respectivos preços destes fatores.

O objetivo da empresa em concorrência monopolista consiste em maximizar o seu lucro, supondo que as quantidades produzidas pelas demais sejam fixas. Assim, as condições de primeira e de segunda ordens para a maximização do lucro π_i, na expressão (2.3), são idênticas às obtidas na seção anterior para a empresa monopolista.

A empresa em concorrência monopolista, ao maximizar o lucro, minimiza o custo de produção; de maneira que o lucro π_i pode ser escrito, também, como a diferença entre o faturamento R_i e o custo mínimo de produção C_i:

$$\pi_i = p_i(q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n, y) \cdot q_i - C_i(q_i, r_1, r_2) \qquad (2.4)$$

Na posição de lucro máximo, a receita marginal é igual ao custo marginal, e aquela deve declinar mais rapidamente que este. As condições de equalização da receita marginal ao custo marginal,

$$p_i + q_i \frac{\partial p_i}{\partial q_i} = \frac{\partial C_i}{\partial q_i}, \; i = 1, \ldots, n \qquad (2.5)$$

fornecem n equações, e cada uma destas equações pode, em princípio, ser colocada em uma forma explícita na qual a quantidade a ser produzida pela empresa em questão é função dos níveis de produção das demais, de renda real e dos preços dos fatores de produção. Em símbolos:

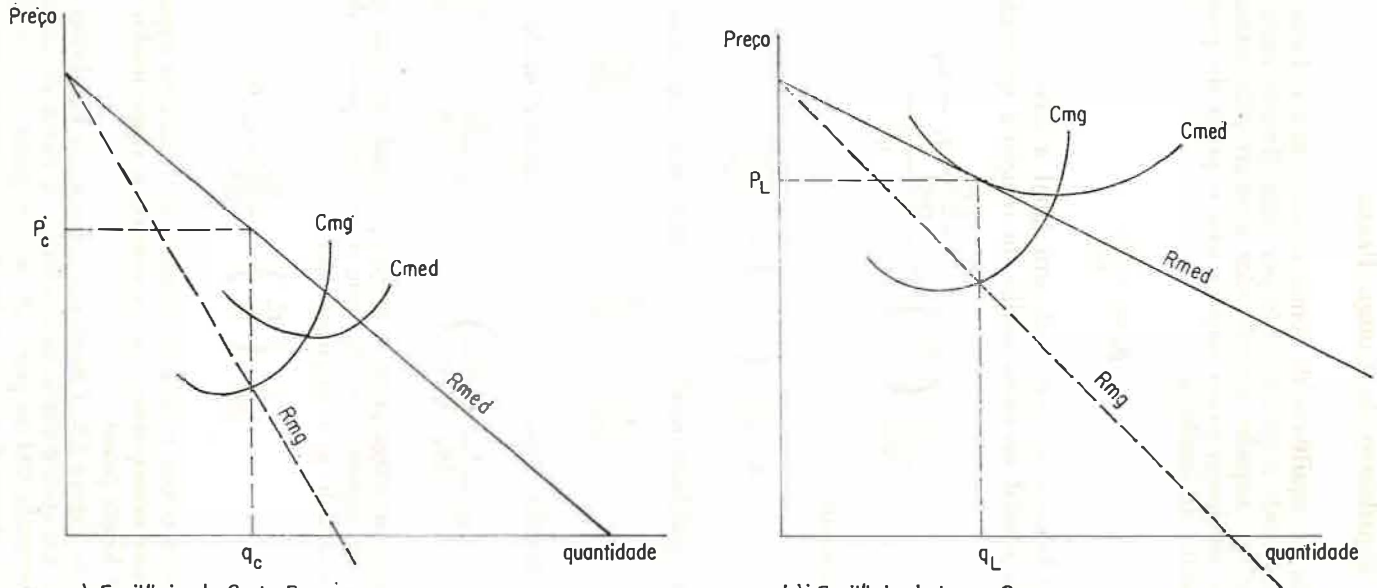
$$q_i = Q_i(q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n, y, r_1, r_2), \; i = 1, \ldots, n \qquad (2.6)$$

Para que as n empresas estejam em equilíbrio é necessário que os níveis de produção $q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n$ sejam tais que maximizem os lucros de suas respectivas empresas. Quando este for o caso, haverá equilíbrio para cada empresa, pois cada uma estará maximizando o seu lucro.

A parte *a* da Figura IX.3 mostra o equilíbrio de uma empresa em concorrência monopolista. Observe-se que nesta posição a empresa estará auferindo um lucro positivo, que é incompatível com o equilíbrio de longo prazo, pois outras empresas serão atraídas para este mercado, em virtude de a taxa de retorno estar acima daquela considerada normal pelo mercado.

Figura IX.3

EQUILÍBRIO DA EMPRESA EM CONCORRÊNCIA MONOPOLISTA



a) Equilíbrio de Curto Prazo.

b) Equilíbrio de Longo Prazo.

IX.2.2 — Equilíbrio de Longo Prazo

A condição de equilíbrio de longo prazo é que o lucro seja igual a zero, isto é, o longo prazo é caracterizado por uma situação onde inexistem retornos ao capital acima daqueles considerados normais pelo mercado. Esta condição de equilíbrio de longo prazo implica que o preço do produto seja igual ao seu custo médio de produção:

$$p_i = \frac{C_i}{q_i} \tag{2.7}$$

pois assim o lucro $\pi = p_i q_i - C_i$ será igual a zero.

A derivada parcial do custo médio em relação à quantidade q_i é igual a

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{C_i}{q_i}\right) = \frac{\dfrac{\partial C_i}{\partial q_i} q_i - C_i}{q_i^2}$$

ou, alternativamente:

$$q_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{C_i}{q_i}\right) = \frac{\partial C_i}{\partial q_i} - \frac{C_i}{q_i} \tag{2.8}$$

Como, em equilíbrio, receita e custo marginais são iguais,

$$\frac{\partial C_i}{\partial q_i} = \frac{\partial R_i}{\partial q_i} = p_i + q_i \frac{\partial p_i}{\partial q_i}$$

a expressão anterior passa a ser escrita do seguinte modo:

$$q_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{C_i}{q_i}\right) = p_i + q_i \frac{\partial p_i}{\partial q_i} - \frac{C_i}{q_i} \tag{2.9}$$

No equilíbrio de longo prazo o preço p_i é igual ao custo médio C_i/q_i. Segue-se, portanto, da expressão (2.9), que a derivada parcial do custo médio em relação à quantidade q_i é negativa, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{C_i}{q_i}\right) = \frac{\partial p_i}{\partial q_i} < 0 \tag{2.10}$$

Esta expressão traduz o famoso teorema de excesso de capacidade da empresa em concorrência monopolista em virtude de o custo médio ser decrescente no equilíbrio de longo prazo.

A parte *b* da Figura IX.3 mostra a situação de equilíbrio de longo prazo de uma empresa em concorrência monopolista. A curva de custo médio Cme_i toca a curva de demanda *DD* no ponto *A*, onde o preço é igual ao custo médio, que corresponde ao ponto *B* da curva de receita marginal em que esta é igual ao custo marginal. Admitindo-se que *C* seria o ponto correspondente de operação da empresa a plena capacidade, com a produção q_{ic}, o nível de produção efetivo sendo igual a q_{im}, haveria, portanto, um excesso de capacidade igual à diferença entre q_{ic} e q_{im}. Observe-se que na medida em que a curva de demanda se aproxima de uma reta paralela ao eixo horizontal, situação esta que corresponde ao caso da empresa em concorrência perfeita, o excesso de capacidade se aproxima de zero.

IX.3 — A Empresa Oligopolista

A estrutura oligopolista de mercado é caracterizada pela existência de um pequeno número de empresas comercializando o mesmo produto e competindo entre si. Cada empresa é suficientemente grande no mercado para influenciar as condições deste no tocante a preços e volume de vendas, e cada empresa é perfeitamente consciente de que suas decisões afetam as das empresas concorrentes. Desta maneira, a interdependência das várias empresas que formam uma estrutura oligopolista é um ingrediente fundamental na formulação de modelos que procurem explicar o comportamento da empresa oligopolista.

A formulação de hipóteses de como ocorre esta interdependência, do ponto de vista teórico, constitui-se em um problema que tem encontrado inúmeras soluções. Todavia, estas soluções estão longe de fornecerem uma explicação satisfatória para os fenômenos observados em segmentos importantes das economias capitalistas modernas, embora, como será visto adiante, cada modelo aborde aspectos importantes, contribuindo, portanto, para melhor compreensão do funcionamento de um mercado oligopolista.

Nesta seção apresentaremos quatro modelos de comportamento da empresa oligopolista: o modelo clássico de Cournot, o de maximização do lucro conjunto da indústria, a teoria da maximização da receita e a teoria do preço-limite de entrada.

IX.3.1 — Concentração e Estrutura de Mercado

O grau de concentração de empresas em um mercado é geralmente associado à estrutura econômica do mesmo. O modelo de Cournot que será apresentado logo adiante, embora seja bastante irrealista no que se refere às hipóteses de interdependência das empresas oligopolistas, permite que se desenvolva, de um ponto de vista teórico, uma relação entre a concentração do mercado, medida pelo índice de Hirschman-Herfindahl, e o grau de monopólio que caracteriza a estrutura do mesmo. De maneira geral, espera-se que o grau de concentração esteja associado com a forma de organização econômica do mercado. Todavia, cabe lembrar que um grande número de empresas não é condição suficiente para que o mercado seja do tipo competitivo, nem tampouco a existência de uma única empresa implica que ela se comporte como monopolista.

Vale salientar que, do ponto de vista teórico, raramente existe uma indicação clara de qual a medida de concentração que deva ser usada para se descrever a distribuição de tamanhos das empresas que participam do mercado de um determinado produto, medida esta que seja também parte integrante do modelo que pretende explicar a formação de preços, tamanho de cada empresa e outras variáveis pertinentes que caracterizem a estrutura econômica do mercado. Por isso, várias medidas de concentração — como a razão de concentração, o coeficiente de Gini, o índice de Hirschman-Herfindahl e a entropia — são usadas em trabalhos empíricos que procuram estudar a estrutura do mercado de um determinado produto.

A Razão de Concentração

Imagine-se que a participação de cada empresa no mercado de um determinado produto seja dada pela Tabela IX.1. Nesta tabela, E_i representa a i-ésima empresa e s_i é sua participação no mercado, fatia que pode ser medida de diferentes formas. Com a finalidade de tornar mais fácil a apresentação da razão e das outras medidas de concentração, admitiremos que o valor s_i corresponde à percentagem das vendas da i-ésima empresa em relação ao total das de todas as empresas.

Tabela IX.1

DISTRIBUIÇÃO DAS EMPRESAS NO MERCADO

Empresas	Participação
E_1	s_1
E_2	s_2
$\vdots$	$\vdots$
E_i	s_i
$\vdots$	$\vdots$
E_n	s_n

As empresas na Tabela IX.1 estão ordenadas de acordo com o tamanho, de tal modo que $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$. Assim, a enésima empresa é a maior enquanto a primeira é a empresa que tem a menor fatia do mercado.

A proporção do mercado que cabe às l menores empresas é obtida somando-se as respectivas fatias, ou seja:

$$Q_l = \sum_{i=1}^{l} s_i$$

A razão de concentração C_r é definida como a proporção do mercado dominada pelas r maiores empresas, isto é:

$$C_r = 1 - \sum_{i=1}^{n-r} s_i = \sum_{i=n-r+1}^{n} s_i$$

Em trabalhos de organização industrial considera-se, em geral, r igual a 3, 4 ou 5, mas encontra-se, às vezes, em alguns estudos valores para r iguais a 8 ou mesmo 9. De qualquer modo, a escolha do número r de empresas é arbitrária.

Quando se fixa o valor da razão de concentração ao invés do número de empresas, obtém-se outra medida de concentração. Assim, η é o número de empresas que detém 100α % do total do mercado:

$$C_\eta = \sum_{i=n-\eta+1}^{n}$$

Por exemplo, para um valor de α igual a 0,80, η representaria o número de empresas responsável por 80% do mercado. Observe-se que neste caso, também, a escolha do parâmetro α é arbitrária.

Uma das principais críticas ao uso da razão da concentração como medida de concentração do mercado é que aquela pode permanecer inalterada quando ocorre uma fusão de empresas. Sem dúvida, imagine-se o caso em que duas empresas que não estão entre as r maiores se fundam formando uma nova empresa que, entretanto, é menor do que a menor das incluídas entre as r maiores do mercado. A razão de concentração continua com o mesmo valor apesar de a concentração de empresas no mercado ter aumentado.

A Curva de Lorenz e o Coeficiente de Gini

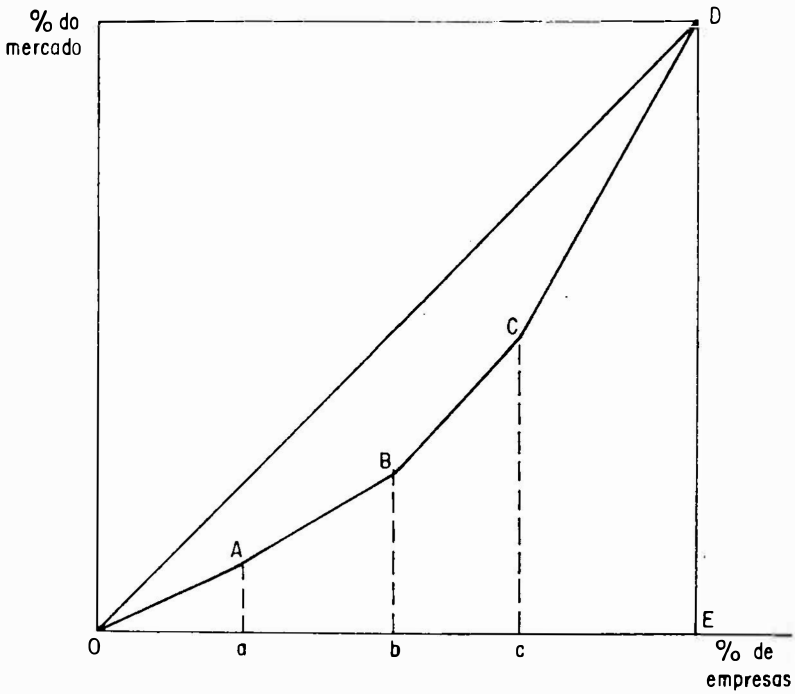
A curva de Lorenz é obtida quando se mede ao longo do eixo vertical os valores de Ql, a fatia das l menores empresas no mercado e, no eixo horizontal, a fração que as l menores empresas representa no total das empresas existentes no mercado, isto é: l/n. A Figura IX.4 mostra a curva de Lorenz, *OABCD*, para uma distribuição da Tabela IX.1, que contém apenas quatro empresas no mercado. O ponto *B*, por exemplo, indica que as duas menores empresas têm uma fatia do mercado igual à ordenada *Bb*.

Quando a participação de uma empresa for igual a 1 e as das demais forem iguais a zero, $s_i = 1$ e $s_j = 0$, para $j \neq i$, a curva de Lorenz será dada por *OED*. Por outro lado, quando todas as empresas tiverem o mesmo tamanho, $s_i = s = 1/n$, a curva de Lorenz será igual à diagonal *OD*. A razão entre as áreas *OABCDO* e *OEDO* mede, portanto, o grau de concentração da distribuição. Esta razão é o coeficiente de Gini:

$$G = \frac{L}{1/2} = 2\,L = 1 - 2A$$

onde L representa a área *OABCDO*, a área *OEDO* é igual a 1/2, a área *OABCDEO* é igual a A e, obviamente, $L + A = 1/2$.

Figura IX . 4
CURVA DE LORENZ



Quando G for igual a 1, a concentração será total, enquanto se G for igual a zero a igualdade será completa. Segue-se, então, que o coeficiente de Gini é um número compreendido entre zero e 1:

$$0 \leq G \leq 1$$

O Índice de Hirschman-Herfindahl

O índice de Hirschman-Herfindahl é definido por:

$$H = \sum_{i=1}^{n} s_i^2$$

O valor máximo deste índice é igual a 1 quando $s_i = 1$ para algum i e s_j é igual a zero para todo $j \neq i$. O valor mínimo de H é igual a $1/n$ quando todos os valores de s_i forem iguais entre si. Com efeito, a solução do problema de minimização condicionada de $H = \Sigma\, s_i^2$ com a condição de que $\Sigma\, s_i = 1$ é obtida com o auxílio da expressão de Lagrange:

$$L = \sum_i s_i^2 - \lambda \left(\sum_i s_i - 1 \right)$$

Igualando-se a zero a derivada parcial de L com respeito a s_i,

$$\partial L \ / \ \partial \ s_i = 2 \ s_i - \lambda = 0$$

chega-se ao valor de s_i igual a $\lambda/2$, que é constante e independe do índice i. Logo, $s_i = 1/n$ e o valor mínimo de H é igual a: [1]

$$H_{min} = \sum_{i=1}^{n} (1/n^2) = 1/n$$

O índice de Hirschman-Herfindahl está, portanto, compreendido entre 1 e $1/n$, isto é:

$$1/n < H < 1$$

Conclui-se daí que H é um índice de concentração, pois quanto maior seu valor maior será a concentração da distribuição de tamanhos de empresas no mercado. Observe-se, também, que na hipótese de crescer o número de empresas no mercado, $n \rightarrow \infty$, o valor mínimo do índice de Hirschman-Herfindahl tende para zero.

Quando ocorrer uma fusão de empresas, o índice de Hirschman-Herfindahl aumentará, indicando uma maior concentração no mercado. Com efeito, imagine-se, por exemplo, que as empresas E_1 e E_2 se uniram formando uma nova empresa. O antigo índice H_0 era dado por:

$$H_0 = s_1^2 + s_2^2 + \sum_{i=3}^{n} s_i^2$$

O novo índice, depois da fusão, admitindo-se que $s_1 + s_2$ é a participação da nova empresa no mercado é igual a:

$$H_f = (s_1 + s_2)^2 + \sum_{i=3}^{n} s_i^2 = s_1^2 + s_2^2 + 2s_1 s_2 + \sum_{1=3}^{n} s_i^2 = H_0 + 2s_1 s_2$$

Logo, o novo índice será maior que o antigo: $H_f \geqslant H_0$.

A partir do índice de Hirschman-Herfindahl pode-se definir o número equivalente de empresas de igual tamanho que conduziria ao mesmo índice H. O número equivalente de empresas seria igual ao inverso do índice de Hirschman-Herfindahl:

$$\eta_e = 1/H$$

Como H está compreendido entre zero e $1/n$, segue-se que o número de empresas efetivamente existente no mercado é maior ou igual ao número equivalente de empresas, que, por sua vez, é maior ou igual a 1:

$$n \geqslant \eta_e \geqslant 1$$

1 Examinando-se as derivadas segundas da função L é fácil verificar que para $p_i = 1/n$ o valor de H é mínimo.

A Entropia

A entropia é definida por:

$$I = \sum_{i=1}^{n} s_i \log \frac{1}{s_i} = - \sum_{i=1}^{n} s_i \log s_i$$

O valor mínimo de I é igual a zero, enquanto seu valor máximo é igual ao logaritmo natural de n. O mínimo da entropia ocorre quando $s_i = 1$ para algum i, e $s_j = 0$ para todo $j \neq i$, lembrando-se que o limite de $x \log x$ é igual a zero quando x se aproxima de zero.

O valor máximo da entropia é obtido através da solução do seguinte problema de máximo condicionado:

maximizar $- \sum_{i=1}^{n} s_i \log s_i$ com a condição de que

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = 1.$$

A expressão de Lagrange para este problema é:

$$L = - \sum_{i=1}^{n} s_i \log s_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} s_i - 1 \right)$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. Igualando-se a zero a derivada parcial de L com respeito a s_i:

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = -1 - \log s_i - \lambda = 0, \; i = 1, \ldots, n$$

obtém-se para a proporção s_i o seguinte valor:

$$s_i = e^{-\lambda - 1}, \; i = 1, \ldots, n$$

que independe do índice i. Logo, todas as participações s_i são iguais a $1/n$ e a entropia máxima é igual a: [2]

$$I_{max} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log n = \log n$$

A entropia é, portanto, uma medida inversa de concentração, que está compreendida entre 0 e $\log n$:

$$0 \leqslant I \leqslant \log n$$

Será máxima a entropia quando todas empresas tiverem a mesma participação no mercado e igual a zero quando existir uma única empresa.

[2] A condição de segunda ordem confirma que para $s_i = 1/n$ o valor de I é máximo. Para isto, basta que se examine os sinais das derivadas segundas de L com respeito a s_i.

O número equivalente de empresas, com a mesma participação no mercado, que levaria ao índice I efetivamente observado, é definido através da seguinte expressão:

$$\eta_e = e^I$$

Quando I for máximo, $I = \log n$, e portanto $\eta_e = n$. Por outro lado, quando a entropia for mínima, $I = 0$ e $\eta_e = 1$. Assim, o número equivalente de empresas está compreendido entre 1 e n:

$$1 \leqslant \eta_e \leqslant n$$

IX.3.1.1 — O Modelo Clássico de Cournot

Admita-se um mercado oligopolista constituído de n empresas, que empregam dois fatores de produção, x_1 e x_2, comprados em mercados competitivos aos preços r_1 e r_2, na produção de um determinado bem. O lucro da i-ésima empresa é igual à diferença entre seu faturamento e seu custo de produção:

$$\pi_i = pq_i - r_1\, x_{1,i} - r_2\, x_{2,i} \tag{3.1}$$

onde $x_{1,i}$ e $x_{2,i}$ indicam as quantidade de fatores de produção comprados pela i-ésima empresa.

A função de produção de cada empresa é expressa por

$$q_i = q_i\,(x_{1i}, x_{2i}) \tag{3.2}$$

onde a notação q_i ( ) indica que as tecnologias podem não ser igualmente acessíveis para todas as empresas.

A equação inversa de demanda de mercado que relaciona o preço de mercado p com a quantidade demandada q, a renda real y e outros fatores que afetam o preço, aqui representados pelo parâmetro α, é expressa por:

$$p = p\,(q, y, \alpha) \tag{3.3}$$

A quantidade total negociada no mercado é igual à soma das quantidades vendidas pelas n empresas:

$$q = \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{3.4}$$

IX.3.1.1.1 — Maximização do Lucro

O lucro da i-ésima empresa depende não-somente das quantidades de fatores de produção por ela utilizada, mas também das quantidades de fatores de produção empregados nas demais empresas. Isto ocorre em virtude de o preço de venda p ser função da quantidade total q transacionada no mercado que, por sua vez, é igual à soma das quantidades produzidas por todas as empresas que nele participam.

A pressuposição básica do modelo de Cournot é de que cada empresa, ao tomar sua decisão de quanto produzir, não leva em conta a interdependência existente entre as várias empresas do mercado. Assim, a i-ésima empresa maximiza o seu lucro supondo que as quantidades dos insumos comprados pelas demais não é afetada por suas decisões.

A condição de primeira ordem para a solução do problema de maximização é obtida igualando-se a zero as derivadas parciais do lucro em relação às quantidades de fatores de produção:

$$p\left(1 + \frac{1}{\eta_i}\right) \frac{\partial q_i}{\partial x_{1,i}} = r_1 \tag{3.5}$$

e:

$$p\left(1 + \frac{1}{\eta_i}\right) \frac{\partial q_i}{\partial x_{2,i}} = r_2 \tag{3.6}$$

onde $\eta_i = \dfrac{p}{q_i} \dfrac{\partial q_i}{\partial p}$ é a elasticidade-preço da demanda.

Dividindo-se a primeira expressão pela segunda conclui-se que a taxa marginal de substituição técnica entre os fatores de produção é igual ao preço relativo dos mesmos,

$$\frac{\partial q_i / \partial x_{1i}}{\partial q_i / \partial x_{2i}} = \frac{r_1}{r_2},$$

condição esta que deve satisfazer uma empresa para minimizar o seu custo de produção, como já foi visto no Capítulo VI. Assim, o lucro π_i pode ser escrito como a diferença entre o faturamento pq_i e o custo mínimo de produção $C_i(q_i, r_1, r_2)$:

$$\pi_i = pq_i - C_i(q_i, r_1, r_2) \tag{3.7}$$

e a determinação do nível de produção da empresa oligopolista pode ser, então, analisado a partir desta função de lucro.

A condição de primeira ordem para maximizar o lucro π_i em (3.7), supondo-se que as empresas concorrentes não alterem seus níveis de produção, é dada por:

$$p\left(1 + \frac{1}{\eta_i}\right) = Cmg_i, \; i = 1, \ldots, n \tag{3.8}$$

Este sistema de n equações contém n incógnitas, as quantidades $q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n$ a serem produzidas por cada empresa. O equilíbrio de Cournot existe quando este sistema de equações tiver uma solução. Além da existência de equilíbrio, presume-se que a solução do sistema seja estável, assunto que não será tratado aqui.

IX.3.1.1.2 — Casos Particulares: Concorrência Perfeita e Monopólio

O modelo de Cournot contém como casos particulares os modelos das empresas em concorrência perfeita e em monopólio. Com efeito, quando a curva de demanda com que se defronta a empresa for infinitamente elástica, $\eta_i \rightarrow -\infty$, a posição de equilíbrio de cada empresa é determinada através da equalização do preço de mercado ao custo marginal de produção:

$$p = Cmg_i$$

A elasticidade-preço de demanda de cada empresa, η_i, é igual à da demanda de mercado, η, dividida por sua participação $s_i = q_i/q$ no total do mercado, pois:

$$\eta_i = \frac{p}{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial p_i} = \frac{p}{q} \frac{\partial p}{\partial q} \frac{q}{q_i} = \frac{\eta}{s_i}$$

Quando s_i for igual a 1 e $s_j = 0$, para $j \neq i$, a condição de equilíbrio (3.8) transforma-se em:

$$p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) = Cmg_i$$

que é a condição de equilíbrio de uma empresa monopolista.

IX.3.1.1.3 — Interdependência e Funções de Reação

A hipótese básica do modelo de Cournot pressupõe um comportamento bastante simplista e irrealista por parte das empresas que participam do mercado oligopolista, em virtude de admitir que cada empresa não leve em conta as reações das demais face às suas decisões.

Esta interdependência, do ponto de vista teórico, poderia ser formalizada através de funções de reação, para cada empresa, onde estaria devidamente explicitado como cada uma reagiria quando as demais variassem seu nível de produção. Isto é, uma função de reação do tipo

$$q_j = R_j(q_1, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, \ldots, q_n), \; j = 1, \ldots, n$$

indicaria como a empresa j ajustaria a sua produção em função dos níveis de produção das suas concorrentes.

Um bom número de hipóteses acerca do formato das equações de reação são encontradas na literatura econômica, mas estas hipóteses, de um modo geral, são arbitrárias e pouco têm contribuído para uma compreensão abrangente, não casuística, dos mercados oligopolistas.

IX.3.1.1.4 — Modelo de Fatias de Mercado

Com a finalidade de exemplificar um modelo em que a função de reação é usada, considere o caso em que a empresa j tenha como objetivo a manutenção de sua participação no mercado, com uma fração s_j da produção total:

$$q_j = s_j\, q, \quad j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$$

A soma das participações das $n - 1$ empresas, não incluindo-se aí a i-ésima empresa, é igual a s, que obviamente deve ser inferior à unidade, isto é:

$$\sum_{j \neq i} s_j = s < 1$$

Na hipótese de que a i-ésima empresa deseje manter uma fatia do mercado superior à fração $1 - s$ que lhe sobra, haveria um conflito entre os objetivos dos empresários cuja solução o modelo não prevê. Pressupondo que este não seja o caso, admitamos que a i-ésima empresa fixe o preço de venda do produto de tal modo a maximizar seu lucro. Como $q = q_i/1 - s$, a derivada de π_i com relação a q_i é igual a:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = p + q_i \frac{\partial p}{\partial q} \frac{1}{1 - s} - \frac{\partial C_i}{\partial q_i}$$

Igualando-se a zero esta derivada parcial, conclui-se que o lucro da i-ésima empresa é máximo quando a receita marginal (do mercado ou da empresa, porque ambas são iguais neste caso) for igual ao seu custo marginal de produção:

$$p\left(1 + \frac{q}{q} \frac{\partial p}{\partial q}\right) = p\left(1 + \frac{q_i}{p} \frac{\partial p}{\partial q_i}\right) = Cmg_i$$

Esta conclusão é interessante, pois para este tipo particular de função de reação — em geral apresentado nos livros-textos como o modelo de fatias de mercado (*market shares*) — a solução do modelo no que toca ao preço de venda é aquele que corresponderia ao modelo de monopólio, caso a i-ésima empresa fosse a única a produzir num mercado com um tamanho igual à fração $1 - s$ do mercado existente. Cabe ainda ressaltar que o modelo de fatias de mercado não explica como cada uma das empresas componentes escolheu a sua fatia de mercado. Na verdade, as fatias s_j são variáveis exógenas do modelo.

IX.3.1.2 — Grau de Monopólio e o Índice de Hirschman-Herfindahl

O grau de monopólio de um mercado será definido pela seguinte expressão:

$$g = \frac{p - Cmg}{-q \dfrac{\partial p}{\partial q}}$$

onde p é o preço de mercado, Cmg é o custo marginal da indústria, q é a quantidade vendida no mercado, e $\partial p/\partial q$ é a derivada parcial do preço em relação à quantidade, obtida a partir da equação inversa de demanda. Como a elasticidade-preço de demanda η é igual a:

$$\frac{q}{p} \frac{\partial p}{\partial q} = \frac{1}{\eta}$$

o grau de monopólio g pode ser escrito também do seguinte modo:

$$g = \frac{p - Cmg}{p} \cdot |\eta|$$

O grau de monopólio está, em geral, compreendido entre zero e 1. O valor de g é igual a 1 quando a indústria se comportar como um monopólio, pois, neste caso:

$$\frac{p - Cmg}{p} = \frac{1}{|\eta|}$$

Quando a indústria for competitiva, o preço de mercado é igual ao custo marginal e, conseqüentemente, o grau de monopólio é igual a zero.

IX.3.1.2.1 — *Concentração e Grau de Monopólio*

O custo marginal da indústria *Cmg* é igual a uma média ponderada dos custos marginais das empresas que compõem a indústria, de acordo com:

$$Cmg = \sum_{i=1}^{n} Cmg_i \frac{dq_i}{dq} \tag{3.9}$$

Lembrando-se que s_i é a fatia da *i*-ésima empresa no mercado, $s_i = q_i/q$, a derivada de q_i em relação a q pode ser escrita do seguinte modo:

$$\frac{dq_i}{dq} = \frac{d\,(s_i q)}{dq} = s_i + q\,\frac{ds_i}{dq}$$

Levando-se em conta esta expressão, o custo marginal da indústria (3.9) transforma-se em:

$$Cmg = \sum_{i=1}^{n} Cmg_i \left(s_i + q\,\frac{ds_i}{dq}\right) \tag{3.10}$$

No modelo de Cournot o equilíbrio de cada empresa ocorre quando a receita marginal é igual ao custo marginal:

$$Cmg_i = p\left(1 + \frac{1}{\eta_i}\right) = p\left(1 + \frac{s_i}{\eta}\right)$$

onde levou-se em conta o fato de que $\eta_i s_i = \eta$.

Substituindo-se a expressão anterior em (3.10), resulta:

$$Cmg = \sum_{i=1}^{n} p\left(1 + \frac{s_i}{\eta}\right)\left(s_i + q\,\frac{ds_i}{dq}\right)$$

que é igual a:

$$Cmg = p\left[\sum_{i=1}^{n} s_i + q\sum_{i=1}^{n} \frac{ds_i}{dq} + \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n} s_i^2 + \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n} s_i\, q\,\frac{ds_i}{dq}\right] \tag{3.11}$$

A soma das fatias de cada empresa é igual a um: $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$. Portanto, a expressão

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{ds_i}{dq}$$

é igual a zero. Segue-se, então, que o custo marginal da indústria em (3.11) é igual a:

$$Cmg = p + \frac{p}{\eta} \left[\sum_{i=1}^{n} s_i^2 + \sum_{i=1}^{n} s_i q \frac{ds_i}{dq} \right]$$

Substituindo-se o valor de *Cmg* dado por esta expressão na equação que define o grau de monopólio *g*, obtém-se:

$$g = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 + \sum_{i=1}^{n} s_i q \frac{ds_i}{dq} \tag{3.12}$$

No início desta seção mostramos que a soma dos quadrados das participações de cada empresa, $H = \Sigma s_i^2$, é uma medida de concentração, denominada de índice de Hirschman-Herfindahl, cujos valores máximo e mínimo são iguais a 1 e a $1/n$, respectivamente. O valor máximo ocorre quando toda a produção está concentrada em uma única empresa e o mínimo corresponde ao caso em que todas as empresas têm idênticas participações no mercado.

A taxa de variação do índice de Hirschman-Herfindahl em relação à quantidade q é igual a:

$$\frac{dH}{dq} = \frac{d}{dq} \sum_{i=1}^{n} s_i^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} s_i \frac{ds_i}{dq}$$

Substituindo-se este resultado em (3.12), o grau de monopólio g é igual a:

$$g = H + \frac{q}{2} \frac{dH}{dq} \tag{3.13}$$

Definindo-se a elasticidade de H com relação a q por:

$$\epsilon_{H,q} = \frac{q}{H} \frac{dH}{dq}$$

a expressão do grau de monopólio g em (3.13) transforma-se em:

$$g = H \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon_{H,q} \right) \tag{3.14}$$

O grau de monopólio g depende, portanto, do índice de concentração H e da elasticidade deste índice em relação à quantidade vendida no mercado. Quando a elasticidade $\epsilon_{H,q}$ for igual a zero, o grau de monopólio será igual ao índice de Hirschman-Herfindahl.

IX.3.2 — Cartéis e Fusão: A Solução de Coalizão

Os modelos da empresa oligopolista estudados até agora supõem que o objetivo de cada empresa consiste em maximizar seu lucro individual (levando-se em conta ou não a interdependência existente entre as decisões das várias empresas) sem contudo examinar a possibilidade de que uma ação conjunta através de decisões coordenadas, no que toca à fixação de preços e distribuição das vendas totais entre os vários participantes, representaria em termos de lucros mais elevados para a indústria como um todo.

O modelo de coalizão de mercado admite que o objetivo de cada empresa oligopolista é a maximização do lucro conjunto da indústria. Este lucro é igual à diferença entre o valor total das vendas e a soma dos custos de produção das empresas que operam no mercado oligopolista, isto é:

$$\pi = pq - \sum_{i=1}^{n} C_i\,(q_i, r_1, r_2) \tag{3.15}$$

onde $C_i\ (q_i, r_1, r_2)$ é a função de custo da i-ésima empresa cujos argumentos são o nível de produção q_i e os preços r_1 e r_2 dos fatores de produção, p é o preço de venda e q é a quantidade total absorvida pelo mercado, igual à soma das quantidades produzidas pelas n empresas:

$$q = \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{3.16}$$

A limitação de mercado é expressa através da equação inversa de demanda:

$$p = p\,(q, y, \alpha) \tag{3.17}$$

onde y é a renda real total dos consumidores e α é um parâmetro que simboliza outras variáveis que influenciam o comportamento do preço de venda do produto.

Condição de primeira ordem para que o lucro seja máximo é que a derivada parcial de π com respeito a q_i seja igual a zero:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i} = p + q\,\frac{\partial p}{\partial q} - \frac{\partial C_i}{\partial q_i} = 0 \tag{3.18}$$

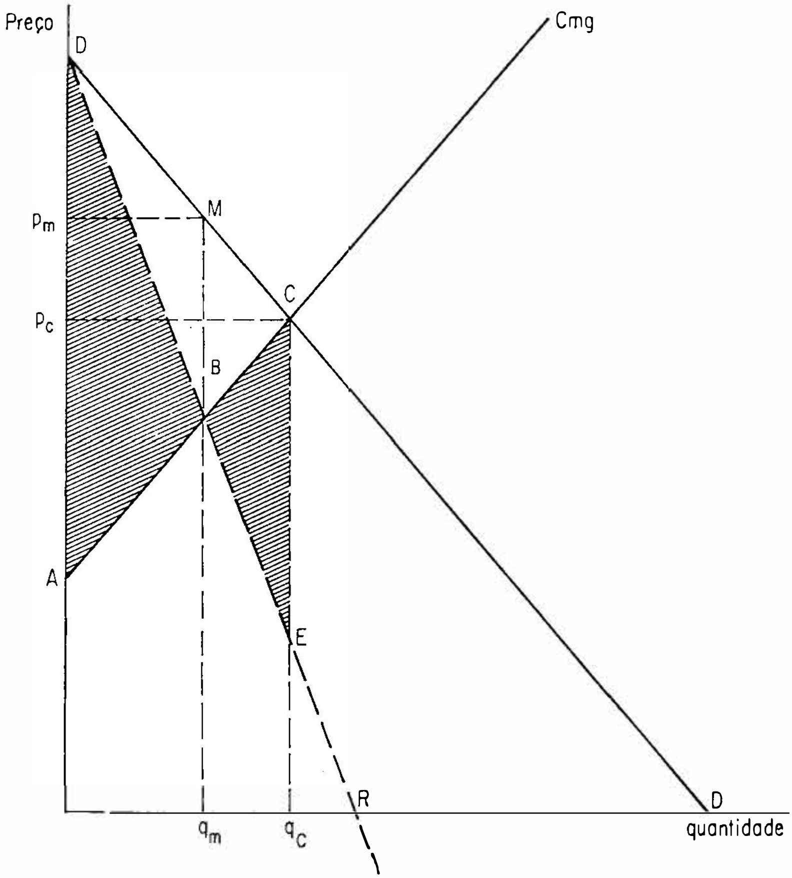
Em equilíbrio os custos marginais de produção das n empresas são iguais entre si e à receita marginal de mercado. Em símbolos:

$$Rmg = p\left(1 + \frac{q}{p}\,\frac{\partial p}{\partial q}\right) = Cmg_i,\ i = 1, \ldots, n \tag{3.19}$$

A Figura IX.5 mostra o equilíbrio de mercado no caso de empresas que agem de acordo com o modelo de coalizão. A curva DD é a de demanda de mercado, Cmg é a curva de custo marginal de indústria e DR a de receita marginal de

Figura IX. 5

COALIZÃO DA INDÚSTRIA



mercado. O equilíbrio de mercado corresponde ao ponto *M* da curva de demanda em que o preço de mercado é igual a p_m e a quantidade vendida é igual a q_m. Observe-se que o equilíbrio competitivo corresponderia ao ponto *C*, onde a curva de custo marginal da indústria corta a de demanda *DD*. O lucro total da indústria, no caso de agirem as empresas em coalizão, como se fossem um monopólio, é dada pela área *ABDA*, que deve ser subtraída da área *BCEB* para chegar-se ao lucro da indústria quando esta se comporta de maneira competitiva.

É fácil concluir-se, então, que cada empresa oligopolista tem um incentivo bastante forte para que atue de forma coordenada com as demais com vistas à maximização do lucro conjunto da indústria. Por outro lado, existe um outro tipo de incentivo, atuando na direção oposta, fazendo com que uma empresa isoladamente procure agir de maneira diversa da preconizada pelo modelo de coalizão, desde que seu comportamento não seja imitado ou detectado pelas demais empresas oligopolistas. Com efeito, da condição de equilíbrio (3.18) e da expressão (3.16), segue-se que:

$$p + \left(\sum_{j \neq i} q_j + q_i\right) \frac{\partial p}{\partial q} = Cmg_i$$

ou, alternativamente:

$$\left(p + q_i \frac{\partial p}{\partial q}\right) - Cmg_i = -\left(\sum_{j \neq i} q_j\right) \frac{\partial p}{\partial q} > 0$$

Esta desigualdade afirma que para cada empresa oligopolista, tomada isoladamente, a receita marginal é maior do que o custo marginal de produção. Isto significa dizer que se uma empresa aumentar sua produção e vendê-la a um preço mais baixo do que o das empresas concorrentes, o seu lucro aumentará.

O modelo de coalizão mostra claramente que a empresa oligopolista está sujeita a dois tipos diferentes de incentivos que atuam em direções opostas. De um lado, se a empresa agir de forma coordenada com as demais que participam do mercado, o lucro conjunto da indústria será maior do que na hipótese contrária, de busca individual de cada empresa pelo seu lucro máximo. Por outro lado, cada empresa agindo isoladamente poderá aumentar seu lucro desde que seu comportamento não seja detectado, acompanhado ou imitado pelas demais empresas. O modelo de coalizão não apresenta solução para este dilema. Todavia, cabe assinalar que em um mercado com um pequeno número de empresas seria tolice imaginar-se que os empresários não perceberiam que o preço a pagar, quando estes agissem em desacordo com a política coordenada de fixação de preços e de produção, seria bastante elevado e traduziria uma visão míope do mundo dos negócios onde decréscimos nos lucros futuros não seriam devidamente contabilizados no presente.

Uma solução do ponto de vista organizacional para resolver o dilema do modelo de coalizão é o cartel. Este tipo de instituição é estabelecido com a finalidade de coordenar as atividades de seus membros no tocante à fixação de preços, níveis de produção, divisão de mercado e possivelmente serve como um fórum onde os conflitos entre os seus membros podem ser resolvidos através de um processo de negociação direta. Em alguns países, como por exemplo nos Estados Unidos, este tipo de organização é proibida. Todavia, vale lembrar que a coalizão pode ser feita de modo tácito. Por exemplo, uma empresa pode exercer o papel de coordenadora da coalizão da indústria anunciando sua lista de preços que é prontamente seguida pelas demais.

O modelo de coalizão mostra, também, que existe um forte incentivo para a fusão de várias empresas através do controle acionário pelo mesmo grupo econômico das diversas empresas componentes do mercado oligopolista. Obviamente, quando todas as empresas passarem a pertencer a um mesmo proprietário o mercado deixa de ser oligopolista e passa a ser monopolista.

Um problema em que não se tocou até aqui diz respeito às condições de entrada de novos concorrentes no mercado. Evidentemente, lucros extraordinários costumam atrair capitais sedentos de retornos acima dos considerados normais pelo mercado. Assim, é de imaginar-se que as empresas oligopolistas levem na devida conta a ameaça que representa a entrada de novos concorrentes no mercado. Este assunto será tratado mais adiante na subseção que se segue à próxima.

IX.3.3 — A Teoria da Maximização da Receita

O controle das grandes empresas nas sociedades capitalistas modernas, segundo um bom número de economistas, não se encontra nas mãos dos seus proprietários, mas nas de um pequeno grupo de administradores que são os responsáveis pelas decisões das empresas. Em outras palavras, segundo estes analistas, existe uma dissociação completa entre a administração e a propriedade da grande empresa.

Baseados neste tipo de observação, estes economistas argumentam que o objetivo dos administradores não é a maximização do lucro, como ocorre na empresa familiar onde a figura do administrador se confunde com a do proprietário. Baumol (1962) sugeriu a hipótese de que os administradores teriam como objetivo básico o crescimento da empresa, crescimento este medido pela evolução do faturamento da empresa. A preocupação dos administradores com os proprietários se refletiria através de políticas de distribuição de dividendos que conduzissem a uma remuneração que satisfizesse os acionistas da empresa. Em um modelo estático, o objetivo da empresa oligopolista consistiria, então, em maximizar o total da receita, com a condição de que o lucro da empresa atinja um certo valor mínimo.

A determinação do nível de lucro mínimo, segundo Baumol, seria feita de tal modo a satisfazer aos acionistas da empresa, através de uma taxa de retorno adequada, e ao mesmo tempo manter o preço das ações em níveis considerados atrativos pelo mercado de capitais. No modelo estático que iremos apresentar, o nível de lucro mínimo, que representaremos por $\bar{\pi}$, é uma variável considerada exógena.

Analiticamente, o problema de maximização condicionado da empresa consiste em determinar as quantidades de insumos x_1 e x_2, e, conseqüentemente, a quantidade q a ser produzida assim como o preço p de venda do produto, de tal modo que a receita $R = pq$ seja maximizada com a condição de que o lucro π seja igual ao nível mínimo $\bar{\pi}$, isto é:

maximizar

$$R = pq$$

com a condição de que

$$\pi = \bar{\pi}$$

O lucro π da empresa é igual à diferença entre a receita e o custo total de produção:

$$\pi = pq - r_1 x_1 - r_2 x_2$$

A equação de receita média da empresa, igual à equação inversa da demanda do produto da empresa, é dada por:

$$p = p\ (q,\ y,\ \alpha)$$

onde y é a renda real dos consumidores e α é um parâmetro que simboliza outras variáveis que influenciam o preço de venda do produto.

A tecnologia usada pela empresa está sintetizada na seguinte função de produção:

$$q = q\ (x_1,\ x_2)$$

a qual presumimos que possua derivadas contínuas até a segunda ordem.

IX.3.3.1 — Equilíbrio da Empresa

O problema de maximização condicionada enunciado acima pode ser resolvido com o auxílio da seguinte expressão

$$L = pq - \lambda\ [\bar{\pi} - pq + r_1\ x_1 + r_2\ x_2]$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. A derivada parcial de L com respeito a x_i é igual:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = (1 + \lambda) \left(p \frac{\partial q}{\partial x_i} + q \frac{\partial p}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) - \lambda\ r_i,\ i = 1, 2$$

A condição de primeira ordem para um máximo condicionado da receita é obtida igualando-se a zero esta expressão, ou seja:

$$Rmg \frac{\partial q}{\partial x_i} = \frac{\lambda}{1 + \lambda} r_i,\ i = 1, 2 \tag{3.20}$$

onde Rmg é a receita marginal da empresa:

$$Rmg = p + q \frac{\partial p}{\partial q} = p \left(1 + \frac{q}{p} \frac{\partial p}{\partial q} \right) = p \left(1 + \frac{1}{\eta} \right)$$

e η é a elasticidade-preço da demanda.

A condição de equilíbrio (3.20) implica que a contribuição marginal de cada fator de produção, em termos de valores, é igual ao custo unitário do fator multiplicado por um coeficiente que depende de λ, o multiplicador de Lagrange. Observe-se que se λ for igual a zero a receita marginal é igual a zero. Neste caso a restrição de lucro mínimo é inoperante, a empresa estará operando no ponto da curva de demanda em que a receita é máxima e a elasticidade-preço é igual a — 1. Por outro lado, quando o parâmetro $\lambda \rightarrow \infty$, a condição de equilíbrio (3.20) implica que o benefício marginal de cada fator seja igual a seu custo unitário,

$$Rmg \frac{\partial q}{\partial x_i} = r_i,$$

e que a empresa se estaria comportando como maximizadora do lucro.

IX.3.3.2 — Minimização do Custo de Produção

A empresa oligopolista que maximiza a receita, com a restrição de que o lucro atinja um determinado nível, minimiza o seu custo de produção. Com efeito, da condição (3.20), resulta que:

$$\frac{\partial q/\partial x_1}{\partial q/\partial x_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Esta igualdade entre a taxa marginal de substituição técnica e os preços relativos dos fatores de produção é a condição de primeira ordem para a minimização do custo de produção. Este custo de produção pode ser escrito como

$$C = C\ (q,\ r_1,\ r_2)$$

cujas propriedades já foram estudadas no Capítulo VI.

IX.3.3.3 — Interpretação do Multiplicador de Lagrange

A derivada parcial da receita R com respeito ao lucro $\bar{\pi}$ é igual a:

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{\pi}} = \frac{\partial R}{\partial x_1}\ \frac{\partial x_1}{\partial \bar{\pi}} + \frac{\partial R}{\partial x_2}\ \frac{\partial x_2}{\partial \bar{\pi}}$$

Como em equilíbrio

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\ r_i$$

segue-se que

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{\pi}} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\left(r_1\ \frac{\partial x_1}{\partial \bar{\pi}} + r_2\ \frac{\partial x_2}{\partial \bar{\pi}}\right) \tag{3.21}$$

Derivando-se ambos os lados de

$$\bar{\pi} = pq - r_1\ x_1 - r_2\ x_2$$

com relação a $\bar{\pi}$, obtém-se:

$$r_1\ \frac{\partial x_1}{\partial \bar{\pi}} + r_2\ \frac{\partial x_2}{\partial \bar{\pi}} = \frac{\partial R}{\partial \bar{\pi}} - 1$$

Substituindo-se este resultado em (3.21), conclui-se que:

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{\pi}} = -\ \lambda \tag{3.22}$$

O multiplicador de Lagrange é o preço-sombra do lucro, pois, segundo (3.22), para cada cruzeiro adicional no nível de lucro mínimo requerido a receita deve variar em $-\lambda$ cruzeiros. O sinal de λ tanto pode ser negativo como positivo, pois da condição de equilíbrio (3.20) temos que:

$$\lambda = \frac{Rmg \dfrac{\partial q}{\partial x_1}}{r_1 - Rmg \dfrac{\partial q}{\partial x_1}} = \frac{Rmg \dfrac{\partial q}{\partial x_2}}{r_2 - Rmg \dfrac{\partial q}{\partial x_2}}$$

Examinando-se esta expressão é óbvio que, *a priori,* nada se pode afirmar acerca do sinal de λ tendo em vista que a receita marginal tanto pode ser positiva como negativa. Esta última hipótese, pouco plausível na prática, implica que, contrariamente à empresa que maximiza o lucro, a que maximiza condicionalmente a receita pode operar no trecho inelástico da curva de demanda. A Figura IX.6 ilustra uma possibilidade em que este fato ocorre. A curva de custo médio é decrescente e a empresa só começa a ter um lucro positivo quando a receita marginal torna-se negativa. No ponto de equilíbrio E o lucro é igual a $\bar{\pi}$, satisfazendo a restrição de lucro mínimo, o preço do produto é igual a p e a receita marginal é negativa.

IX.3.3.4 — Estática Comparativa

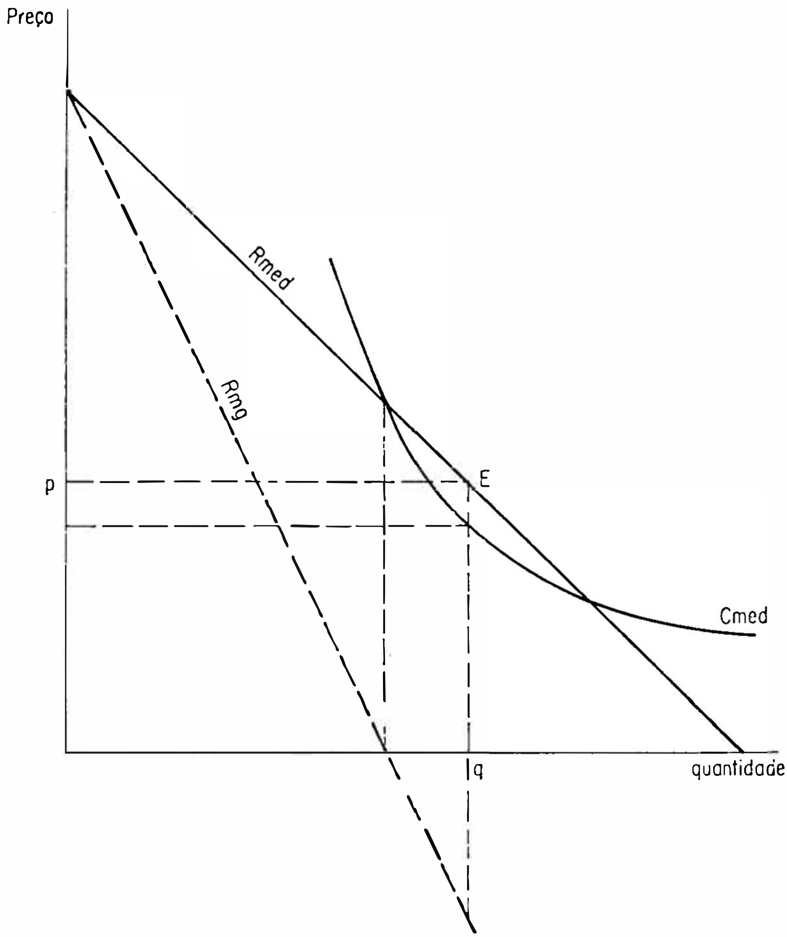
A condição de equilíbrio (3.20), a função de produção, a equação de receita média e a restrição de lucro mínimo formam um sistema de quatro equações com quatro variáveis endógenas, x_1, x_2, p e q, e cinco variáveis exógenas: r_1, r_2, $\bar{\pi}$, y e α. Em princípio, este sistema de equações permite que se escreva cada variável endógena do modelo em função das variáveis exógenas, isto é:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = x_1 (r_1, r_2, \bar{\pi}, y, \alpha) \\ x_2 = x_2 (r_1, r_2, \bar{\pi}, y, \alpha) \\ p = P (r_1, r_2, \bar{\pi}, y, \alpha) \\ q = Q (r_1, r_2, \bar{\pi}, y, \alpha) \end{array}\right.$$

A principal diferença entre estas equações e aquelas correspondentes ao modelo da empresa que maximiza o lucro diz respeito à inclusão do nível de lucro mínimo $\bar{\pi}$ como uma variável que influencia a determinação das quantidades de fatores e de produto, bem como o preço deste último.

Os sinais das derivadas parciais das variáveis endógenas em relação às exógenas podem ser obtidos, com um pouco de álgebra, diferenciando-se as quatro equações que deram origem àquelas que expressam cada variável endógena do modelo em função das variáveis exógenas e levando-se em conta as condições de segunda ordem do problema de máximo condicionado. Este tipo de exercício iria mostrar, por exemplo, que o sinal da derivada parcial de q com relação a $\bar{\pi}$ é ambíguo do ponto de vista teórico. No caso mais usual $\partial q / \partial \bar{\pi} < 0$, ou seja, um aumento no nível de lucro mínimo acarreta uma retração de produção e um aumento do preço p, $\partial p / \partial \bar{\pi} > 0$.

Figura IX.6
MAXIMIZAÇÃO CONDICIONADA DA RECEITA NO TRECHO INELÁSTICO DA CURVA DE DEMANDA



Cabe ainda salientar que, contrário à empresa que maximiza o lucro, variações nos custos fixos e nos impostos sobre lucros afetam decisões do empresário no tocante a preços, produção e compra de insumos, pois nestes casos o lucro mínimo $\bar{\pi}$ é afetado.

IX.3.3.5 — Fixação de Preços e Margem de Lucro

A marcação do preço pela empresa oligopolista que maximiza a receita, condicionada à restrição de nível de lucro mínimo, não é incompatível com a regra de bolso, segundo a qual o preço de venda é obtido adicionando-se ao custo médio uma margem de lucro. Esta proposição pode ser comprovada a partir da restrição de lucro, que afirma que o preço de venda p é igual à soma do custo médio ao lucro unitário:

$$p = \frac{C}{q} + \frac{\bar{\pi}}{q}$$

Denominando-se por k a relação entre o lucro $\bar{\pi}$ e o custo total de C, $k = \bar{\pi}/C$, o preço p na expressão anterior torna-se igual a:

$$p = (1 + k)\ Cm$$

A margem de lucro k, neste caso, é função do lucro mínimo $\bar{\pi}$ e daqueles fatores que afetam o custo total de produção. Assim, ela estaria correlacionada negativamente com o nível de produção e com os preços dos fatores de produção, e positivamente com o nível de lucro mínimo.

IX.3.4 — A Teoria do Preço-Limite

Os modelos de oligopólio apresentados nas subseções anteriores admitem que o número de empresas que participam deste tipo de mercado é fixo e que estas não se preocupam com o papel que pode desempenhar a entrada potencial de possíveis concorrentes no mercado do produto em questão. A teoria do preço-limite parte da hipótese de que a ameaça da entrada de novos concorrentes no mercado desempenha um papel fundamental na formação de preços e, conseqüentemente, na quantidade total a ser vendida no mercado. Ademais, nos modelos de preço-limite admite-se que existe algum tipo de barreira que dificulta a entrada de uma nova empresa no mercado.

A premissa básica dos modelos de preço-limite é a de que as empresas existentes na indústria atuem em coalizão e de que estas irão cobrar um preço pelo seu produto que seja o mais elevado possível, mas que ao mesmo tempo seja de tal ordem que impeça a entrada de novos concorrentes no mercado.

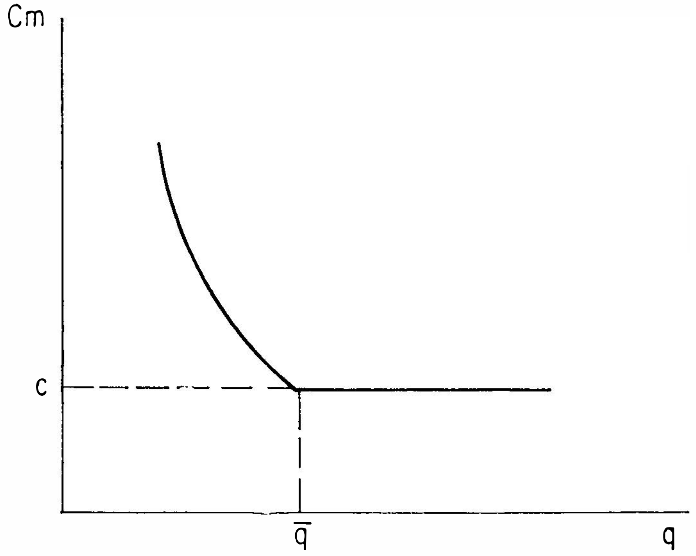
Entre os vários modelos de preço-limite existentes na literatura iremos apresentar um modelo em que a barreira de entrada para novas empresas deve-se à existência de retornos crescentes de escala até um certo nível de produção. Deste nível de produção em diante os retornos de escala são constantes. Admitiremos que a tecnologia é accessível para qualquer empresa e que a curva de custo médio de produção, de longo prazo, tem o formato em L da Figura IX.7. A escala mínima de produção para uma nova empresa no mercado é dada pelo nível de produção $\bar{q}$, onde o custo médio passa a ser constante e igual a c. Este custo médio independe do nível de produção, mas é função dos preços r_1 e r_2 dos fatores de produção,[3] isto é:

$$c = c\ (r_1, r_2) \tag{3.23}$$

[3] Um destes preços é o custo de oportunidade do capital.

Figura IX.7

CUSTO MÉDIO DE PRODUÇÃO



Uma empresa que está contemplando a possibilidade de entrar no mercado de um determinado produto tem de fazer alguma hipótese com relação ao comportamento das já estabelecidas face à sua entrada. O postulado de Sylos, assim denominado por Modigliani para caracterizar a hipótese de Sylos-Labini, admite que a empresa potencial espera que as já estabelecidas no mercado adotem a política mais desfavorável para sua entrada. Esta política consiste na manutenção da produção aos níveis praticados antes da entrada pelas empresas existentes, aceitando, conseqüentemente, uma redução no preço de venda para acomodar a comercialização da produção da nova empresa.

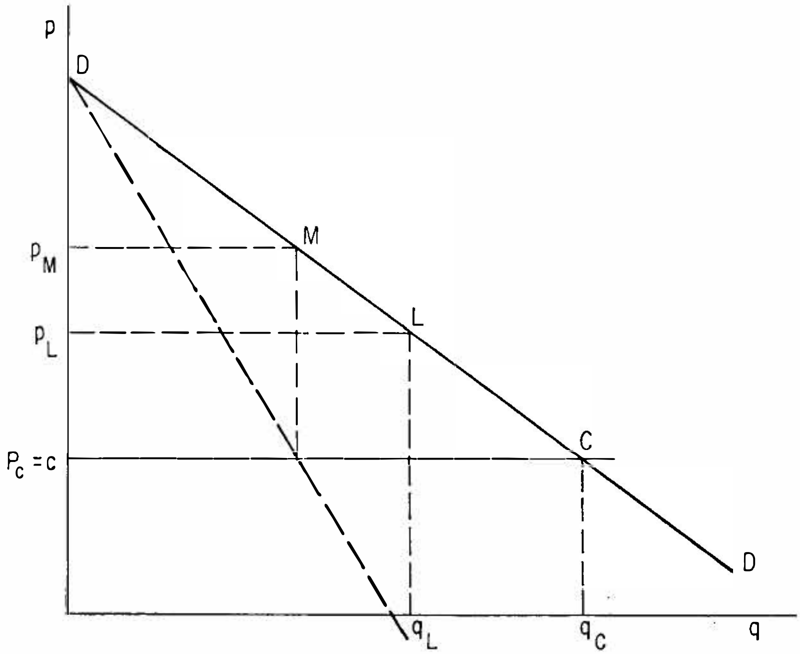
A equação inversa de demanda de mercado é dada por:

$$p = p\ (q,\ \alpha) \tag{3.24}$$

onde α é um parâmetro que simboliza outras variáveis além da quantidade q que influenciam o preço p. A Figura IX.8 mostra a curva de demanda de mercado. Se não existisse barreira para a entrada de novas empresas no mercado, o preço de equilíbrio de mercado, no longo prazo, seria o preço de equilíbrio competitivo p_C igual ao custo médio de longo prazo c. Todavia, devido ao tamanho mínimo q requerido para uma nova unidade ser lucrativa, as empresas da indústria podem cobrar um preço igual a p_L sem atrair novos concorrentes no mercado. Esta proposição é uma conseqüência do postulado de Sylos, pois a entrada de uma nova empresa iria fazer com que o preço de mercado p_L baixasse para o nível do preço competitivo p_C, devido ao acréscimo de $\bar{q}$ ao

Figura IX.8

DETERMINAÇÃO DO PREÇO-LIMITE



nível de produção q_L: $q_C = q_L + \bar{q}$. Assim, o preço-limite p_L, se praticado no mercado, impede a entrada de novas empresas. Obviamente para que o preço p_L seja o preço de mercado é preciso que ele seja inferior ao de monopólio p_M, como indicado na Figura IX.8.

Quando o preço de monopólio for inferior ao preço-limite p_L, o de mercado será igual ao de monopólio, que maximiza o lucro conjunto de indústria.

A diferença percentual entre o preço-limite e o competitivo é definida por Bain como a condição de entrada E, isto é:

$$E = \frac{p_L - p_C}{p_C}$$

ou, alternativamente:

$$p_L = p_C (1 + E) = c (1 + E)$$

onde levamos em conta que o preço competitivo é igual ao custo médio de produção. Quando E for igual a zero, o preço de mercado é igual ao preço competitivo: $p_L = p_C$. Se E for igual ao inverso do valor absoluto de elasticidade-preço da demanda de mercado o preço-limite será igual ao de monopólio:

$$p_L = c\ (1 + 1/|\eta|).$$

A teoria do preço-limite fornece uma explicação para a regra de bolso, já mencionada anteriormente e de acordo com alguns autores bastante popular no mundo dos negócios, segundo a qual o preço de venda é obtido adicionando-se ao custo médio uma margem de lucro k. Esta margem no modelo do preço-limite aqui apresentado é igual à condição de entrada: $k = E$.

A margem de lucro é função da elasticidade da demanda, $|\eta|$, da escala mínima de produção, $\bar{q}$, e do tamanho do mercado q_C. Uma fórmula interessante que mostra claramente a dependência da margem de lucro de $|\eta|$, $\bar{q}$ e q_C pode ser desenvolvida a partir da aproximação da elasticidade-preço da demanda através da seguinte fórmula:

$$\eta = \frac{\Delta\, q/q}{\Delta\, p/p}$$

onde: $p = p_L$, $\Delta p = p_L - p_C$, $q = q_L$ e $\Delta q = q_L - q_C = -\bar{q}$. Substituindo-se estes valores na expressão anterior, obtém-se:

$$p_L = p_C \left(1 + \frac{\bar{q}}{|\eta|\; q_C}\right) = c \left(1 + \frac{\bar{q}}{|\eta|\; q_C}\right) \qquad (3.25)$$

A partir desta expressão chega-se facilmente às seguintes proposições com respeito às variações do preço-limite p_L:

a) preço-limite varia no mesmo sentido dos preços dos fatores de produção;

b) preço-limite é correlacionado positivamente com a escala mínima de produção;

c) preço-limite e a elasticidade-preço de demanda estão correlacionados negativamente; e

d) preço-limite e o tamanho do mercado estão correlacionados negativamente.

Alguns autores, como Stigler, criticam os modelos de preço-limite argumentando que os mesmos criam mais problemas do que são capazes de resolver. Este tipo de crítica é, sem dúvida alguma, bastante radical. Todavia, vale ressaltar que apesar de o modelo conter uma *rationale* para a regra do *mark-up* usada pelas empresas, e conter um bom número de implicações empíricas potencialmente refutáveis, o modelo não leva em conta o crescimento de demanda, não considera o problema de entrada de novas empresas sob um ponto de vista dinâmico, nem explica como o mercado é dividido entre as empresas existentes. Além destas, outras críticas podem ser levantadas contra as próprias hipóteses do modelo: existência de barreiras de entrada, escala mínima de produção, postulado de Sylos.

IX.4 — Exercícios

1. Uma empresa monopolista defronta-se com a seguinte equação de demanda

$$q = A\, p^{-\eta}\, y^{\varepsilon}$$

e sua função de produção é dada por:

$$q = \gamma\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}$$

Os fatores de produção são comprados em mercados competitivos e seus preços são, respectivamente, iguais a r_1 e r_2.

Derive os valores de p, q, x_1 e x_2 em função dos preços dos fatores, do nível de renda y e dos parâmetros da equação de demanda e da função de produção, nas seguintes situações:

a) A empresa tem como objetivo maximizar o lucro; e

b) A empresa tem como objetivo maximizar o faturamento, sujeito à restrição de atingir um determinado lucro.

2. A equação de demanda de um produto vendido por uma empresa monopolista é dada por:

$$p = 1000 - 2q$$

e sua função de custo variável é expressa por:

$$C = 100\, q$$

Admita que a empresa tem como objetivo maximizar o lucro.

a) Qual a quantidade e o preço de venda do monopolista?

b) Supondo que o produto pode ser importado livremente a um preço unitário igual a 200, qual o volume de produção do monopolista?

3. Uma empresa produz um bem a partir de um único fator (mão-de-obra), com a seguinte função de produção:

$$q = \gamma\, L^{\alpha},\ 0 < \alpha < 1$$

A empresa opera num mercado competitivo e tem como objetivo maximizar o lucro. Mostre que o preço de venda é obtido adicionando-se uma margem bruta de lucro $k = (1 - \alpha)/\alpha$ ao custo unitário de produção.

4. Uma empresa produz um bem usando dois fatores de produção, matéria-prima M e mão-de-obra L, a partir da seguinte função de produção:

$$q = \min \left\{ \gamma\, L^{\alpha},\ \frac{M}{\delta} \right\}$$

A empresa opera num mercado competitivo e tem como objetivo maximizar o lucro. Mostre que o preço de venda é obtido adicionando-se uma margem bruta de lucro

$$k = \frac{1 - \alpha}{\alpha(1 + j)}$$

ao custo unitário de produção, onde j é a proporção dos gastos com matéria-prima em relação à folha de pagamento dos salários.

5. Suponha que o preço de venda p de um produto é obtido adicionando-se ao custo variável unitário uma margem bruta de lucro k, isto é:

$$p = (1 + k)\frac{\omega L + rM}{q}$$

onde ω é o salário-hora, r é o preço unitário da matéria-prima, L e M são, respectivamente, as quantidades de mão-de-obra e de matéria-prima, e q é o volume de produção. Mostre que, mantidas constantes as demais condições, a proporção dos salários no valor adicionado de empresa varia em sentido contrário: i) à margem de lucro k e ii) à proporção dos gastos com matéria-prima em relação ao total de salários pago pela empresa.

6. Uma empresa oligopolista defronta-se com a seguinte função inversa de demanda:

$$p = \min \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 q & , \quad q \leqslant \bar{q} \\ \alpha_2 - \beta_2 q & , \quad q > \bar{q} \end{cases}$$

onde $\bar{q} = (\alpha_1 - \alpha_2) / (\beta_1 - \beta_2)$, $\alpha_2 > \alpha_1$ e $\beta_2 > \beta_1$.

Admitindo-se que o custo marginal de produção seja constante, discuta o equilíbrio da empresa quando a curva de custo marginal intercepta a de receita marginal no trecho em que ela é descontínua.

7. Admita que as funções de produção e de demanda de um grupo de empresas em concorrência monopolista são iguais entre si. A função inversa de demanda para uma empresa do grupo é dada por:

$$p = p(q, n), \quad \frac{\partial p}{\partial q} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial p}{\partial n} < 0$$

onde n é o número de firmas no grupo. Supondo que no longo prazo o ajustamento ocorre através de mudança no número de firmas no grupo e que inexista produção conjunta, mostre que o aumento do preço de um fator de produção acarreta diminuição do número de firmas no grupo.

8. A função inversa de demanda de um produto homogêneo num mercado duopolista é expressa por:

$$p = \alpha - \beta q$$

As funções de custo de cada empresa são dadas por:

$$C(q_i) = a_i\, q_i + b_i\, q_i^2, \quad i = 1, 2$$

a) Quais as equações de reação de cada empresa?

b) Qual a solução de equilíbrio de mercado?

c) Supondo que ocorre uma coalisão entre as duas empresas, qual o preço de venda e as quantidades vendidas por cada empresa?

9. A função inversa de demanda de um produto homogêneo num mercado oligopolista com n participantes é expressa por:

$$p = \alpha - \beta\, q$$

As funções de custo das empresas são idênticas e o custo marginal é constante, isto é:

$$C(q_i) = cq_i, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

a) Qual seria a solução de concorrência perfeita neste mercado?

b) Quais as equações de reação e a solução de Cournot para este mercado oligopolista?

c) Mostre que a solução de Cournot tende para a solução de concorrência perfeita quando o número de empresas aumenta $(n \to \infty)$.

10. A função inversa de demanda de um produto homogêneo num mercado oligopolista com n participantes é expressa por:

$$p = 3 - 2\, q$$

As funções de custo das empresas são idênticas e dadas por:

$$C(q_i) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\, q_i - \dfrac{1}{2}\, q_i^2 \, , & 0 \leqslant q_i \leqslant 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\, q_i + \dfrac{1}{2}\, q_i^2 \, , & 1 < q_i < \infty \end{cases} \quad , \; i = 1, \ldots, n$$

a) Qual seria a solução de concorrência perfeita neste mercado?

b) Quais as equações de reação e a solução de Cournot para este mercado oligopolista?

c) Mostre que a solução de Cournot não converge para a solução de concorrência perfeita quando o número de empresas aumenta $(n \to \infty)$.

11. Certo ou Errado. Justifique a sua resposta

a) Se a elasticidade-preço de demanda do produto de um monopolista é igual a 3, em valor absoluto, então o preço cobrado deve exceder o custo marginal em 50%;

b) Alguns economistas afirmam que as empresas oligopolistas aumentam a margem de lucro (*mark-up*) quando a demanda cai. Este comportamento é incompatível com a maximização do lucro;

c) Se todas as firmas de uma indústria cobram de seus clientes o mesmo preço pelos seus produtos, então essa indústria opera em condições de concorrência perfeita;

d) Um empresário estabelece seu preço acrescentando ao custo marginal uma margem bruta de lucro igual a uma percentagem fixa deste custo. Este procedimento é inconsistente com a hipótese de maximização do lucro;

e) Como o monopolista não possui curva de oferta, não se pode prever o efeito de um imposto de 10% sobre seu produto;

f) Um imposto *ad valorem* sobre um produto vendido em condições monopolistas será totalmente repassado aos consumidores; e

g) Uma empresa que tem como objetivo maximizar a receita, com a condição de atingir uma determinada lucratividade, não se preocupa em minimizar o custo de produção.

IX.5 — Bibliografia

BARBOSA, F. de H. Medidas de concentração. *Revista de Econometria, 1*:31-53, 1981.

BAUMOL, W. J. *Business behavior, value and growth.* New York, Harcourt & Brace, 1962.

CHAMBERLIN, E. H. *The theory of monopolistic competition.* 8.ª ed.; Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1962.

KOUTSOYIANNIS, A. *Modern microeconomics.* 2.ª ed.; London, Macmillan, 1979.

MODIGLIANI, F. New developments on the oligopoly front. *Journal of Political Economy, 66*:215-32, 1958.

RADER, T. *Theory of microeconomics.* New York, Academic Press, 1972.

ROBINSON, J. *The economics of imperfect competition.* London, Macmillan, 1933.

SYLOS-LABINI, P. *Oligopoly and technical progress.* Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1962.

STIGLER, G. J. *The organization of industry.* Homewood, Ill., Richard D. Irwin, 1968.

APÊNDICE MATEMÁTICO

Este apêndice matemático apresenta de maneira concisa, sem nenhuma preocupação com rigor, os principais resultados matemáticos que são largamente usados no texto, com o objetivo de torná-lo auto-suficiente, * não pretendendo, todavia, fornecer o conhecimento básico de cálculo diferencial e integral e de álgebra linear que é recomendável ao eventual leitor deste livro.

A.I — Sistema de Equações Lineares

Definição: Um sistema de m equações lineares com n incógnitas é dado por:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}$$

onde os a_{ij} e b_i são constantes.

Este sistema pode ser representado em notação matricial do seguinte modo:

$$Ax = b$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

* Gostaria de registrar aqui meus agradecimentos aos comentários e sugestões de Paulo Klinger.

Definição: Um conjunto de vetores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é linearmente independente quando

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$$

implica que os escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são todos iguais a zero: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Em caso contrário, isto é, se existirem valores de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, nem todos nulos tais que a igualdade anterior se verifica, diz-se que o conjunto de vetores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é linearmente dependente.

Quando os vetores forem linearmente dependentes, um vetor pode ser escrito como uma combinação linear dos demais. Com efeito, suponha que $\lambda_1 \neq 0$, então;

$$a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} a_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} a_n$$

Definição: O posto de uma matriz A, de dimensão $m \times n$, é igual ao maior número de colunas (ou linhas) linearmente independentes desta matriz.

Observação: Pode-se demonstrar que o maior número de colunas linearmente independentes de uma matriz é sempre igual ao maior número de linhas linearmente independentes da mesma. Obviamente, o posto $\rho(A)$ de uma matriz A obedece à seguinte desigualdade:

$$\rho(A) \leqslant \min(m, n)$$

onde min (,) indica o menor dos dois números.

Teorema — O sistema de equações lineares $Ax = b$ tem solução se e somente se o posto da matriz A for igual ao posto da matriz $[A \vdots b]$.

Demonstração (Condição Necessária): Suponha que o sistema $Ax = b$ tem solução. Então, o posto da matriz

$$[A \vdots b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

é igual ao posto da matriz A, pois o vetor coluna formado pelos valores dos coeficientes b_i é uma combinação linear dos vetores colunas da matriz A.

(Condição Suficiente): Suponha que o posto da matriz $[A \vdots b]$ é igual ao posto da matriz A. Então existe um conjunto de escalares tais que o conjunto de vetores das colunas da matriz A e o vetor b formam um conjunto de vetores linearmente dependentes.

Teorema — Quando o sistema de equações lineares $Ax = b$ tiver solução e o posto da matriz A for igual ao número de incógnitas n, o sistema tem uma única solução. Neste caso, a solução do sistema é dada por:

$$x = (A'A)^{-1} A'b$$

Demonstração: Pré-multiplicando-se ambos os lados da equação $Ax = b$ pela transposta da matriz A, obtém-se:

$$A'Ax = A'b$$

Como o posto da matriz A é igual a n, o posto da matriz $A'A$ também é igual a n. Logo, a matriz $A'A$ possui inversa e o valor de x é igual a:

$$x = (A'A)^{-1} A'b$$

Quando a matriz A é quadrada, este resultado simplifica-se, isto é:

$$x = A^{-1} b$$

Exemplo: Considere o sistema de duas equações e duas incógnitas:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

Em notação matricial este sistema pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Se $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$, é fácil verificar-se que:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

A solução do sistema de equações é dada, então, por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

ou alternativamente:

$$x_1 = \frac{a_{22} b_1 - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{-a_{21} b_1 + a_{11} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Definição: Uma partição da matriz A, de dimensão m x n, é definida por:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde A_{11} é uma matriz m_1 x n_1, A_{12} é m_1 x n_2, A_{21} é m_2 x n_1 e A_{22} tem dimensão m_2 x n_2, e $m_1 + m_2 = m$, $n_1 + n_2 = n$.

Teorema — Considere a seguinte partição da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Admita-se, também, que as matrizes A e A_{11} têm inversas. Então, a matriz inversa da matriz A é dada por:

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

onde:

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}$$

$$B_{12} = - A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1}$$

$$B_{21} = - (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}$$

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1}$$

Demonstração: Como $AB = I$, segue-se então que:

$$A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} = I$$

$$A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} = 0$$

$$A_{21} B_{11} + A_{22} B_{21} = 0$$

$$A_{21} B_{12} + A_{22} B_{22} = I$$

É fácil verificar-se que as expressões de B_{11}, B_{12}, B_{21} e B_{22} satisfazem estas equações.

A.II — Funções Homogêneas

Definição: A função $f(x_1, \ldots, x_n)$ é homogênea de grau k se, e somente se:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Teorema (Euler) — A função $f(x_1, \ldots, x_n)$, com derivadas contínuas de primeira ordem, é homogênea de grau k se, e somente se:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k\, f(x_1, \ldots, x_n)$$

para todos os valores de $x_1, \ldots, x_n$ onde f é definida.

Demonstração (Condição Necessária): Suponha que f é homogênea do grau k:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_n)$$

Derivando-se ambos membros desta igualdade com respeito a λ resulta:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial \lambda x_i}(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = k\, \lambda^{k-1} f(x_1, \ldots, x_n)$$

Fazendo-se $\lambda = 1$, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k\, f(x_1, \ldots, x_n)$$

(Condição Suficiente): Defina a função

$$g(\lambda) = f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Derivando-se esta função com respeito a λ e multiplicando-se o resultado daí obtido por λ, tem-se:

$$\lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i \frac{\partial f}{\partial \lambda x_i}(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Supondo-se que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k\, f(x_1, \ldots, x_n)$$

a expressão anterior é igual a:

$$\lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda} = k\, f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Defina para $\lambda > 0$, a função:

$$F(\lambda) = g(\lambda)/\lambda^k$$

A derivada desta função com respeito a λ é igual a zero, pois:

$$\frac{dF}{d\lambda} = \frac{\lambda^{k-1}}{(\lambda^k)^2}\left[\lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda} - kg(\lambda)\right] = 0$$

Logo, $F(\lambda) = C$, onde C é uma constante. Como $F(1) = C$, segue-se que:

$$F(\lambda) = F(1)$$

Portanto:

$$g(\lambda) = \lambda^k g(1)$$

ou, alternativamente:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_n)$$

e a função $f(x_1, \ldots, x_n)$ é homogênea do grau k.

Teorema — Se a função $f(x_1, \ldots, x_n)$ é homogênea do grau k, então a função

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$$

é homogênea do grau $k - 1$.

Demonstração: Suponha que f é homogênea do grau k. Logo, pelo teorema anterior:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k\, f(x_1, \ldots, x_n)$$

Derivando-se ambos os lados desta expressão com respeito a x_j, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_j} = k \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

ou:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = (k-1) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Concluí-se, portanto, pelo teorema anterior, que a função $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ é homogênea do grau $k - 1$.

A.III — Funções Implícitas

Definição: A equação $f(x, y) = c$ define implicitamente y como função de x quando existe uma função $y = g(x)$, que associa a cada x de um conjunto S um valor de y do conjunto T, tal que $f(x, g(x)) = c$.

Observação: Nesta definição x, y e c podem representar escalares ou vetores. No caso em que x, y e c fossem vetores, teríamos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= c_1 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= c_2 \\
&\vdots \\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= c_n
\end{aligned}$$

e as seguintes funções:

$$\begin{aligned}
y_1 &= g_1(x_1, \ldots, x_m) \\
y_2 &= g_2(x_1, \ldots, x_m) \\
&\vdots \\
y_n &= g_n(x_1, \ldots, x_m)
\end{aligned}$$

Exemplos: a) na teoria do consumidor, as condições de primeira ordem para um máximo interior de uma função-utilidade, sujeita a restrição orçamentária, fornecem o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial u}{\partial q_i} - \lambda\, p_i = 0,\ i = 1, \ldots, n$$

$$y - \sum_{i=1}^{n} p_i\, q_i = 0$$

Este sistema, dentro de certas condições que serão vistas a seguir, define implicitamente as quantidades $q_1, \ldots, q_n$ e o multiplicador de Lagrange λ como funções do vetor de preços, $p_1, \ldots, p_n$, e da renda y; e

b) na teoria da empresa em concorrência perfeita, as condições de primeira ordem para um máximo interior da função-lucro fornecem o seguinte sistema de equações:

$$p\,\frac{\partial q}{\partial x_i} = r_i,\ i = 1, \ldots, n$$

Este sistema, dentro de certas condições que serão vistas a seguir, define implicitamente as quantidades demandadas de fatores, $x_1, \ldots, x_n$, como funções do vetor de preços dos fatores de produção, $r_1, \ldots, r_n$, e do preço do produto p.

Teorema (da Função Implícita) — Sejam as funções $f_1, f_2, \ldots, f_n$, com derivadas parciais contínuas num conjunto S, e seja $(x^0, y^0) = (x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, \ldots, y_n^0)$ uma solução interna do seguinte sistema de equações:

$$f_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = c_1$$

$$f_2(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = c_2$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = c_n$$

Suponha, também, que o determinante jacobiano de $f_1, \ldots, f_n$ com respeito a $y_1, \ldots, y_n$, avaliado no ponto (x^0, y^0), seja diferente de zero. Isto é:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \neq 0$$

Então, numa vizinhança do ponto (x^0, y^0) existem funções $g_1, \ldots, g_n$, com derivadas parciais contínuas, tais que:

$$y_1 = g_1(x_1, \ldots, x_m)$$

$$\vdots$$

$$y_n = g_n(x_1, \ldots, x_m)$$

para valores de (x, y) na vizinhança do ponto (x^0, y^0).

Demonstração: Para uma demonstração rigorosa deste teorema, consulte-se Brandão (1982) e Sydsaeter (1981) e as referências citadas por estes autores. Uma idéia intuitiva deste teorema pode ser obtida a partir do seguinte argumento. Diferenciando-se as funções $f_1, f_2, \ldots, f_n$, obtém-se:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} dy_n = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_n}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n} dy_n = 0$$

ou, em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix}$$

Este sistema de equações lineares tem solução, de acordo com o teorema mencionado anteriormente, se a matriz que multiplica o vetor $dy = (dy_1, \ldots, dy_n)$, possuir inversa, isto é, se o determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

for diferente de zero.

Exemplos: a) uma condição suficiente para que as condições de primeira ordem do problema da teoria do consumidor,

$$\frac{\partial u}{\partial q_i} - \lambda\, p_i = 0, \; i = 1, \ldots, n$$

$$y - \sum_{i=1}^{n} p_i\, q_i = 0$$

forneça o sistema de equações de demanda e a equação da utilidade marginal da renda é que o determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_n} & -p_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial q_n \partial q_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial q_n^2} & -p_n \\ -p_1 & \cdots & -p_n & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

seja diferente de zero no ponto de equilíbrio do consumidor; e

b) uma condição suficiente para que as condições de primeira ordem do problema da teoria da empresa em concorrência perfeita,

$$p \frac{\partial q}{\partial x_i} = r_i, \; i = 1, \ldots, n$$

forneça o sistema de equações de demanda de fatores é que o determinante

$$\begin{vmatrix} p \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & \cdots & p \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ p \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & p \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

seja diferente de zero no ponto de equilíbrio da empresa.

A.IV — Formas Quadráticas

Definição: Uma forma quadrática em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma função definida pela seguinte expressão:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_i \, x_j$$

Em notação matricial, a forma quadrática Q pode ser definida como:

$$Q = x' \, A \, x$$

onde x' é o vetor linha, $x' = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ e A é a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Observe-se que não há perda de generalidade se admitirmos que a matriz A é simétrica, pois:

$$Q = \frac{x'Bx + x'B'x}{2} = x' \left(\frac{B + B'}{2} \right) x = x' \, Ax$$

onde a matriz $A = (B + B') / 2$ é simétrica.

Definições: a) a forma quadrática Q (matriz A) é positiva definida quando $Q = x'Ax > 0$, para todo vetor $x \neq 0$;

b) a forma quadrática Q (matriz A) é positiva semidefinida quando $Q = x'Ax \geqslant 0$, o sinal de igualdade valendo para algum $x \neq 0$.

c) a forma quadrática Q (matriz A) é negativa definida quando $Q = x'Ax < 0$, para todo $x \neq 0$; e

d) a forma quadrática Q (matriz A) é negativa semidefinida quando $x'Ax \leqslant 0$, o sinal de igualdade valendo para algum $x \neq 0$.

Definição: O menor principal sucessivo de ordem k da matriz A, de dimensão n x n, é o determinante da matriz que se obtém quando se eliminam as últimas $n - k$ linhas e colunas de matriz A, isto é:

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \; k = 1, \ldots, n$$

Teorema — A matriz A é positiva definida se, e somente se, todos os menores principais sucessivos de A forem positivos, isto é:

$$x'Ax > 0 \iff |A_k| > 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

Demonstração: Consulte-se, por exemplo, Hadley (1965).

Teorema — A matriz A é negativa definida se, e somente se, todos os menores principais de A alternarem de sinal de acordo com:

$$(-1)^k \, |A_k| > 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, n$$

Demonstração: Se a matriz A é negativa definida, então a matriz $-A$ é positiva definida. Logo, de acordo com o teorema precedente:

$$|-A_k| = (-1)^k \, |A_k| > 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, n.$$

Derivada de Forma Linear — Seja a forma lienar:

$$L = a' \, x = \sum_{i=1}^{n} a_i \, x_i$$

onde $a' = (a_1, \ldots, a_n)$ e $x' = (x_1, \ldots, x_n)$. A derivada parcial de L com respeito a x_i é igual a:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = a_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Em notação matricial podemos escrever estas derivadas do seguinte modo:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a$$

Derivadas de Forma Quadrática – Seja a forma quadrática:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j + a_{kk}\, x_k^2$$

Para calcular a derivada parcial de Q com respeito a x_k é interessante escrever esta forma quadrática do seguinte modo:

$$Q = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_{ki}\, x_k\, x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j + a_{kk}\, x_k^2$$

É fácil verificar-se que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, x_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, x_i$$

Como a matriz A é simétrica, $a_{ki} = a_{ik}$, logo:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k} = 2 \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, x_i \quad , \quad k = 1, \ldots, n$$

Este resultado pode ser escrito em notação matricial do seguinte modo:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\, x_i \\ \vdots \\ 2 \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\, x_i \end{bmatrix} = 2\, A\, x$$

Com base na expressão da derivada para formas lineares, é fácil concluir-se que:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial x'} = \left\{ \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i\, \partial x_j} \right\} = 2A$$

Teorema – A forma quadrática $Q = x'Ax$ é negativa semidefinida (definida) para os valores de x que satisfazem à restrição $b'x = 0$, se, e somente se, a matriz orlada

$$\begin{bmatrix} A & b \\ b' & 0 \end{bmatrix}$$

for negativa semidefinida (definida).

Demonstração (Condição Necessária): A forma quadrática

$$Q_1 = [x' \; z] \begin{bmatrix} A & b \\ b' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

é igual a:

$$Q_1 = x' Ax + 2z\, b'x$$

Suponha-se que $x'Ax \leqslant 0$ quando $b'x = 0$. Logo, $Q_1 \leqslant 0$.

(Condição Suficiente): Admita-se que a matriz orlada é negativa semidefinida, ou seja:

$$Q_1 = x'Ax + 2z\, b'x \leqslant 0$$

Se $b'x \neq 0$ é possível encontrar valores de z tal que a forma quadrática Q_1 seja positiva. Este fato contraria a hipótese admitida. Logo $b'x = 0$ e $x'Ax \leqslant 0$.

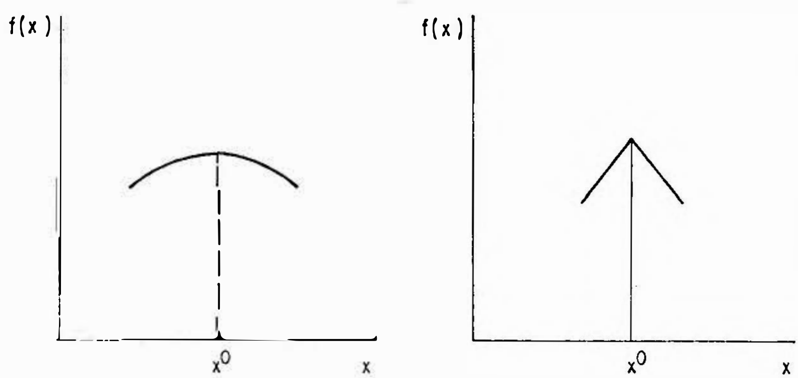
A.V — Máximos e Mínimos

Definição: A função $f(x)$, definida num conjunto S, tem um máximo [mínimo] relativo no ponto x^0 se existe um número $\delta > 0$, tal que para valores de x no intervalo $x^0 - \delta < x < x^0 + \delta$: $f(x^0) \geqslant f(x)$ $[f(x^0) \leqslant f(x)]$.

Definição: A função $f(x)$, definida num conjunto S, tem um máximo [mínimo] global no ponto x^0 se $f(x^0) \geqslant f(x)$ $[f(x^0) \leqslant f(x)]$, para todos os valores de x onde f é definida.

A Figura A.1 mostra dois exemplos de pontos de máximo.

Figura A.1



Teorema (Condição Necessária de Primeira Ordem) — Seja $f(x)$ uma função definida no conjunto S, com derivadas contínuas de primeira ordem, e seja x^0 um ponto interior do domínio de f. Se x^0 for um ponto de máximo [mínimo] local de $f(x)$, então:

$$\frac{df(x^0)}{dx} = 0$$

Demonstração: Pelo teorema do valor médio:

$$f(x) = f(x^0) + \frac{df(\bar{x})}{dx}(x - x^0)$$

onde $\bar{x} = x^0 + \theta\,(x - x^0)$. Se $f(x^0)$ é um ponto de máximo [mínimo] local, $f(x^0) \geqslant f(x)$. Então:

$$\frac{df(\bar{x})}{dx}(x - x^0) \leqslant 0$$

Logo, para $x \leqslant x^0$, $\frac{df(\bar{x})}{dx} \geqslant 0$ e para valores de $x \geqslant x^0$, $\frac{df(\bar{x})}{dx} \leqslant 0$. Como, por hipótese, a derivada de primeira ordem é contínua, segue-se que:

$$\frac{df(x^0)}{dx} = \lim_{x \to x^0} \frac{df(\bar{x})}{dx} = 0$$

Teorema (Condição Necessária de Segunda Ordem) — Seja $f(x)$ uma função definida no conjunto S, com derivadas contínuas de segunda ordem, e seja x^0 um ponto interior do domínio de f. Se x^0 for um ponto de máximo [mínimo] local de $f(x)$, então:

$$\frac{d^2f(x^0)}{dx^2} \leqslant 0 \; [\geqslant 0]$$

Demonstração: A expansão de Taylor da função $f(x)$ em torno do ponto x^0 é igual a:

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2}\frac{d^2f(\bar{x})}{dx^2}(x - x^0)^2$$

onde $\bar{x} = x^0 + \theta\,(x - x^0)$, e levou-se em conta o fato de que, pelo teorema anterior, $\frac{df(x^0)}{dx} = 0$. Se x^0 é um ponto de máximo local, $f(x^0) \geqslant f(x)$, logo:

$$\frac{d^2f(\bar{x})}{dx^2} \leqslant 0$$

Como, por hipótese, a derivada de segunda ordem da função $f\ (x)$ é contínua, segue-se que:

$$\frac{d^2f\,(x^0)}{dx^2} = \lim_{x \to x^0} \frac{d^2f\,(\bar{x})}{dx^2} \leqslant 0$$

Teorema (Condição Suficiente de Segunda Ordem) — Seja $f\ (x)$ uma função definida no conjunto S, com derivadas contínuas de segunda ordem, e seja x^0 um ponto interior do domínio de f tal que $\dfrac{df\,(x)}{dx} = 0$. Então, se $\dfrac{d^2f\,(x^0)}{dx^2} <$ $< 0\ [> 0]$ a função $f\,(x)$ tem um máximo [mínimo] local do ponto x^0.

Demonstração: A expansão de Taylor da função $f\,(x)$ em torno do ponto x^0 é igual a:

$$f\,(x) = f\,(x^0) + \frac{1}{2}\ \frac{d^2f\ (\bar{x})}{dx^2}\ (x - x^0)$$

onde $\bar{x} = x^0 + \theta\ (x - x^0)$. Como a derivada de segunda ordem é contínua,

$$\lim_{x \to x^0} \frac{d^2f\,(\bar{x})}{dx^2} = \frac{d^2f\,(x^0)}{dx^2} < 0$$

Conclui-se, portanto, que para valores de x próximos de x^0, $\dfrac{d^2f\,(\bar{x})}{dx^2} < 0$. Logo, x^0 é um ponto de máximo local, pois:

$$f\ (x^0) > f\,(x).$$

Teorema (Condição Necessária de Primeira Ordem) — Seja $f\,(x) = f\,(x_1, \ldots, x_n)$ uma função definida no conjunto S, com derivadas contínuas de primeira ordem, e seja $x^0 = (x^0_1, \ldots, x^0_n)$ um ponto interior do domínio de f. Se x^0 for um ponto de máximo [mínimo] local de $f\,(x_1, \ldots, x_n)$, então:

$$\frac{\partial f\ (x^0)}{\partial x_i} = 0,\ i = 1, \ldots, n$$

Demonstração: Defina a função $g\,(x_i) = f\,(x^0_1, \ldots, x_i, \ldots, x^0_n)$. Se x^0 for um ponto de máximo local da função $f\ (x)$, então a função $g\,(x_i)$ terá um máximo para $x_i = x^0_i$. Logo, pelo teorema que estabelece a condição necessária de primeira ordem, é fácil concluir-se que:

$$\frac{dg\ (x^0_1)}{dx_i} = \frac{\partial f\ (x^0)}{\partial x_i} = 0$$

Teorema (Condições Necessárias de Segunda Ordem) — Seja $f\,(x) = f\,(x_1, \ldots, x_n)$ uma função definida no conjunto S, com derivadas contínuas de segunda ordem, e seja $x^0 = (x_0^1, \ldots, x_n^0)$ um ponto interior do domínio de f. Se x^0 for um ponto de máximo [mínimo] local de $f(x_1, \ldots, x_n)$, então a matriz hessiana da função $f(x)$,

$$H(x^0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

é negativa semidefinida [positiva semidefinida] no ponto $x = x^0$, isto é:

$$z'H\, z \leqslant 0 \quad [\geqslant 0]$$

para todo vetor $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z \neq 0$.

Demonstração: A expansão de Taylor da função $f(x)$, em torno do ponto x^0, é dada por:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

onde $\bar{x} = x^0 + \theta\,(x - x^0)$. Se x^0 é um ponto de máximo [mínimo] local, esta expressão, pelo teorema precedente, transforma-se em:

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

Como $f(x^0) \geqslant f(x)$, segue-se que:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) = z' H(x)\, z \leq 0$$

onde $z = x - x^0$. Devido ao fato de as derivadas de segunda ordem da função $f(x)$, por hipótese, serem contínuas, é fácil concluir-se que:

$$z'H(x^0)\, z \leqslant 0$$

Teorema (Condições Suficientes de Segunda Ordem) — Seja $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma função definida no conjunto S, com derivadas contínuas de segunda ordem, e seja $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ um ponto interior do domínio de f tal que

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

Suponha também que a matriz hessiana da função $f(x)$,

$$H(x^0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

é negativa [positiva] definida. Então a função $f(x)$ tem um máximo [mínimo] local no ponto x^0.

Demonstração: A expansão de Taylor da função $f(x)$, em torno do ponto x^0, é dada por:

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\overline{x})}{\partial x_i \, \partial x_j} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

onde $\overline{x} = x^0 + \theta(x - x^0)$. Se a matriz hessiana da função $f(x)$ é negativa definida e se as derivadas de segunda ordem são contínuas, é fácil concluir-se que $f(x^0) > f(x)$. Logo, x^0 é um ponto de máximo local de f.

Teorema (Condições Necessárias de Primeira Ordem) — Sejam $f(x_1, \ldots, x_n)$ e $g(x_1, \ldots, x_n)$ funções com derivadas contínuas de primeira ordem, definidas no conjunto S, e tal que pelo menos uma das derivadas $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ seja diferente de zero. Seja $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ um ponto interior no conjunto S. Suponha que x^0 seja um ponto de máximo local de $f(x)$, que atenda à restrição $g(x) = b$. Então existe um valor único para λ tal que a expressão de Lagrange

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda\,(b - g(x))$$

tem um máximo local no ponto x^0, e suas derivadas parciais, avaliadas no ponto x^0, são iguais a zero:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, \ldots, n$$

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $\dfrac{\partial g}{\partial x_1} \neq 0$. O teorema da função implícita permite que se escreva, a partir da restrição $g(x) = b$, x_1 como função de $x_2, \ldots, x_n$, em uma vizinhança do ponto $x = x^0$, isto é:

$$x_1 = h(x_2, \ldots, x_n)$$

Substituindo-se esta expressão na função $f(x)$, obtém-se f como função de $x_2, \ldots, x_n$:

$$f\,(h\,(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$$

Como x^0 é um ponto de máximo desta função, segue-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \; i = 2, \ldots, n$$

Da restrição

$$g\,(h\,(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) = b$$

resulta que:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad i = 2, \ldots, n$$

Multiplicando-se esta expressão por λ e subtraindo-se da anterior, obtém-se:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \; i = 2, \ldots, n$$

Em virtude de $\dfrac{\partial g}{\partial x_1} \neq 0$ existe um valor único para λ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}$$

Conclui-se, então, que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \; i = 2, \ldots, n$$

Teorema (Condições Necessárias de Segunda Ordem) — Sejam $f(x_1, \ldots, x_n)$ e $g(x_1, \ldots, x_n)$ funções com derivadas contínuas de segunda ordem, definidas no conjunto S, e tal que pelo menos uma das derivadas $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ seja diferente de zero. Seja $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ um ponto interior do conjunto S. Se x^0 for um ponto de máximo de $f(x)$, com a condição de que $b = g(x)$, então a matriz hessiana da expressão de Lagrange,

$$L\,(x, \lambda) = f(x) + \lambda\,(b - g(x))$$

definida por

$$H\,(x^0) = \left\{ \frac{\partial^2 L\,(x^0, \lambda)}{\partial x_i\, \partial x_j} \right\}$$

é negativa semidefinida para todo vetor $z = (z_1, \ldots, z_n)$ que satisfaça a restrição:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} z_i = 0$$

Demonstração: A expansão de Taylor da função $L(x, \lambda)$ em torno do ponto x^0 é dada por:

$$L(x,\lambda) = L(x^0,\lambda) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L(x^0,\lambda)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(\bar{x},\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

onde $\bar{x} = x^0 + \theta(x - x^0)$.

Em virtude do teorema precedente e do fato de que $L(x, \lambda) = f(x)$ e $L(x^0, \lambda) = f(x^0)$ para os valores de x que satisfazem a restrição $g(x) = b$, a expansão de Taylor transforma-se em:

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(\bar{x},\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

A expansão de Taylor da função $g(x)$ em torno do ponto x^0 é gual a:

$$g(x) = g(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(\bar{x}^*)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0)$$

onde $\bar{x}^* = x^0 + \delta\,(x - x^0)$. Portanto, para os valores de x que satisfazem a restrição $g(x) = b$, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(\bar{x}^*)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) = 0$$

Se x^0 é um ponto de máximo condicionado $f(x^0) \geqslant f(x)$, para os valores de x que satisfazem $g(x) = b$. Conclui-se, então, que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(\bar{x},\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \leqslant 0$$

para os valores de $x_i - x_i^0$ que satisfazem a restrição:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(\bar{x}^*)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) = 0$$

Como as derivadas de segunda ordem de $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas, segue-se então que:

$$z' \, H(x^0) \, z \leqslant 0$$

para os valores de z que satisfazem:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} z_i = 0$$

Teorema (Condições Suficientes de Segunda Ordem) – Sejam $f(x_1, \ldots, x_n)$ e $g(x_1, \ldots, x_n)$ funções, com derivadas contínuas de segunda ordem, definidas no conjunto S, e tal que pelo menos uma das derivadas $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ seja diferente de zero. Seja $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ um ponto interior do conjunto S, tal que:

$$\frac{\partial L(x^0, \lambda)}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, \ldots, n$$

onde $L(x, \lambda)$ é a expressão de Lagrange,

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda(b - g(x))$$

Se a matriz hessiana de $L(x, \lambda)$, definida por:

$$H(x^0) = \left\{ \frac{\partial^2 L(x^0, \lambda)}{\partial x_i \, \partial x_j} \right\}$$

for negativa definida para todo vetor $z = (z_1, \ldots, z_n)$ que satisfaça à restrição

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} z_i = 0$$

então x^0 é um ponto de máximo de $f(x)$, que atende à restrição $b = g(x)$.

Demonstração: A partir da expansão de Taylor do teorema precedente é fácil verificar-se que $f(x^0) > f(x)$, quando x^0 satisfaz a restrição $g(x^0) = b$. Logo, x^0 é um ponto de máximo condicionado.

Teorema (da Envoltória) – Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ e $g(x_1, \ldots, x_n)$ funções com derivadas contínuas de segunda ordem, definidas no conjunto S. Suponha que x^0 seja um ponto interior de máximo de $f(x)$, sujeito à restrição $g(x) = b$. Suponha, também, que o sistema de equações,

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i}, \; i = 1, \ldots, n$$

$$g(x^0) = b$$

obedece às condições do teorema da função implícita. Então:

$$\frac{df(x^0)}{db} = \lambda$$

Demonstração: A derivada de $f(x^0)$ com respeito a b é igual a:

$$\frac{df(x^0)}{db} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial b} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial b}.$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Segue-se que:

$$\frac{df(x^0)}{db} = \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial b} + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial b}\right) =$$

$$= \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial b} + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial b}\right)$$

Da restrição $g(x^0) = b$, resulta que:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial b} + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial b} = 1$$

Combinando-se este resultado com o anterior, conclui-se que:

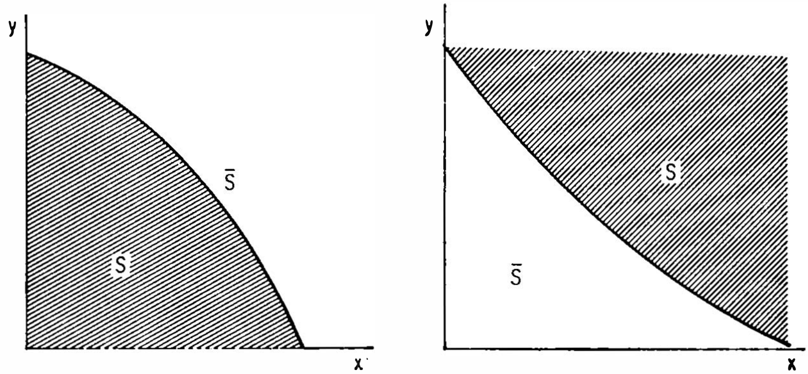
$$\frac{df(x^0)}{db} = \lambda$$

A.VI — Funções Côncavas

Definição: Um conjunto S é convexo se, e somente se, $x \in S$, $x^0 \in S$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $\lambda x + (1 - \lambda)\, x^0 \in S$.

Esta definição equivale a dizer que um conjunto é convexo quando o segmento de reta que une dois pontos do conjunto também pertence ao conjunto. A Figura A.2 mostra dois exemplos de conjuntos convexos. Observe-se que os conjuntos dos pontos $\bar{S}$ não formam um conjunto convexo.

Figura A.2



Definição: A função $f(x)$ definida no conjunto convexo é côncava se, e somente se, $x \varepsilon S$, $x^0 \varepsilon S$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) x^0) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x^0)$$

Em outras palavras, uma função é côncava quando os pontos do segmento de reta que une dois pontos da função estão situados abaixo da função, ou quando muito coincidem com o valor da função. A Figura A.3 mostra o gráfico de uma função côncava.

Definição: A função $f(x)$ é convexa se a função $-f(x)$ for côncava.

Teorema — Se a função $f(x)$, definida no conjunto convexo S, é côncava, então, para cada número real α, o conjunto $L = \{x \varepsilon S: f(x) \geqslant \alpha\}$ é convexo.

Demonstração: Suponha que $x^0 \varepsilon L$, $x \varepsilon L$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Segue-se que $\lambda x^0 + (1-\lambda) x \varepsilon S$. Por hipótese $f(x) \geqslant \alpha$ e $f(x^0) \geqslant \alpha$. Como $f(x)$ é côncava, segue-se que:

$$f(\lambda x^0 + (1-\lambda) x) \geqslant \lambda f(x^0) + (1-\lambda) f(x)$$

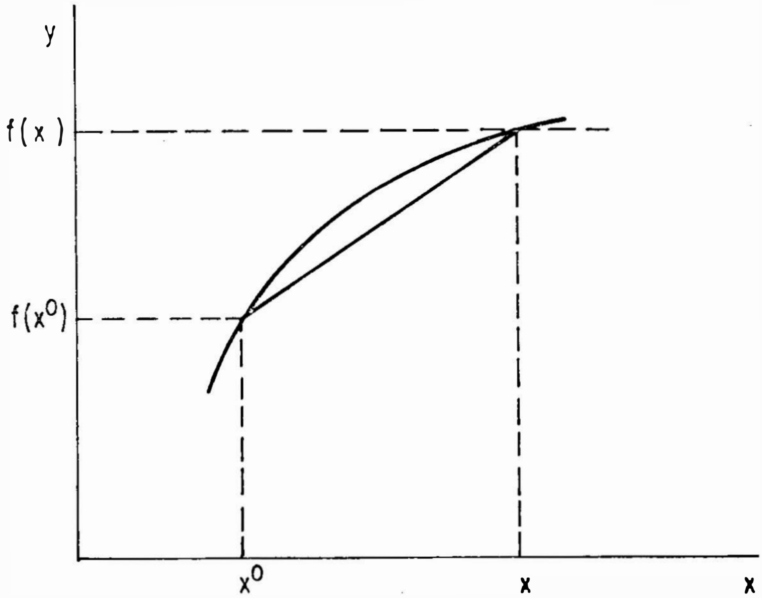
Em virtude de $f(x) \geqslant \alpha$, $f(x^0) \geqslant \alpha$, tem-se que:

$$f(\lambda x^0 + (1-\lambda) x) \geqslant \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha$$

Portanto $\lambda x^0 + (1-\lambda) x \varepsilon L$, e L é um conjunto convexo.

Figura A.3

FUNÇÃO CÔNCAVA



A Figura A.4 ilustra, do ponto de vista geométrico, o conteúdo deste teorema para uma função côncava $f(x_1, x_2)$. O conjunto dos pontos x tais que $f(x) \geqslant \alpha$ é um conjunto convexo.

Teorema — A função $f(x)$ diferenciável, definida no conjunto convexo aberto S, é côncava se, e somente se,

$$f(x) \leqslant f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0)$$

para $x \varepsilon S$ e $x^0 \varepsilon S$.

Demonstração (Condição Necessária): Suponha que $f(x)$ é côncava, então:

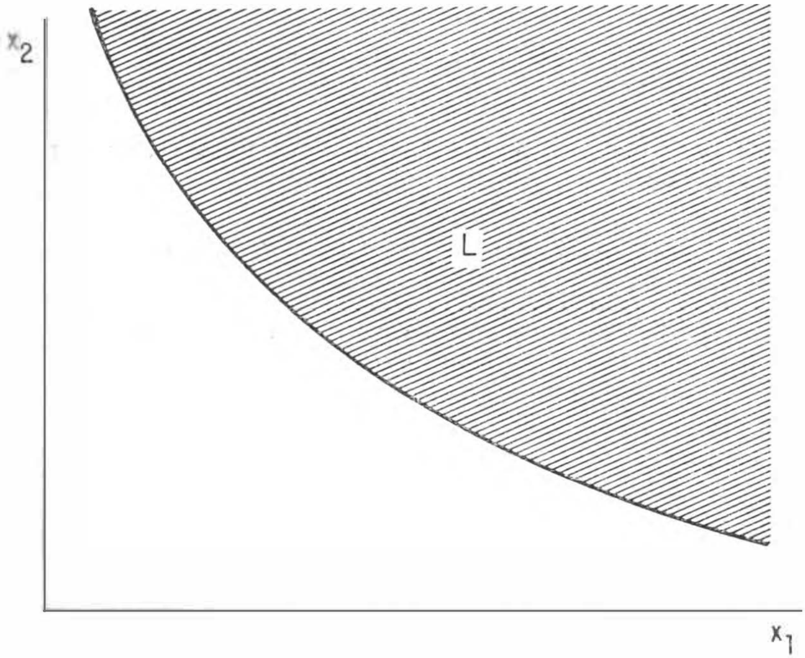
$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x^0) \leqslant f(\lambda x + (1 - \lambda) x^0)$$

Logo:

$$f(x) - f(x^0) \leqslant \frac{f(x^0 + \lambda(x - x^0)) - f(x^0)}{\lambda}$$

Figura A.4

FUNÇÃO CÔNCAVA E CONJUNTO CONVEXO



No limite, quando $\lambda \to 0$, tem-se que:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x^0 + \lambda(x - x^0)) - f(x^0)}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0)$$

Segue-se, portanto, que:

$$f(x) - f(x^0) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0)$$

(Condição Suficiente): Suponha que

$$f(x) \leqslant f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0)$$

e seja $\overline{x} = \lambda x + (1 - \lambda) x^0$, $\overline{x}$ ε S. Segue-se que

$$f(x) - f(\overline{x}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} (x_i - \overline{x}_i)$$

$$f(x^0) - f(\overline{x}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} (x_i^0 - \overline{x}_i)$$

Multiplicando-se a primeira expressão por λ, a segunda por $(1 - \lambda)$ e adicionando-se os dois resultados, obtém-se:

$$\lambda(f(x) - f(\bar{x})) + (1 - \lambda)(f(x^0) - f(\bar{x})) \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} (\lambda x_i + (1 - \lambda)\, x_i^0 - \bar{x}_i)$$

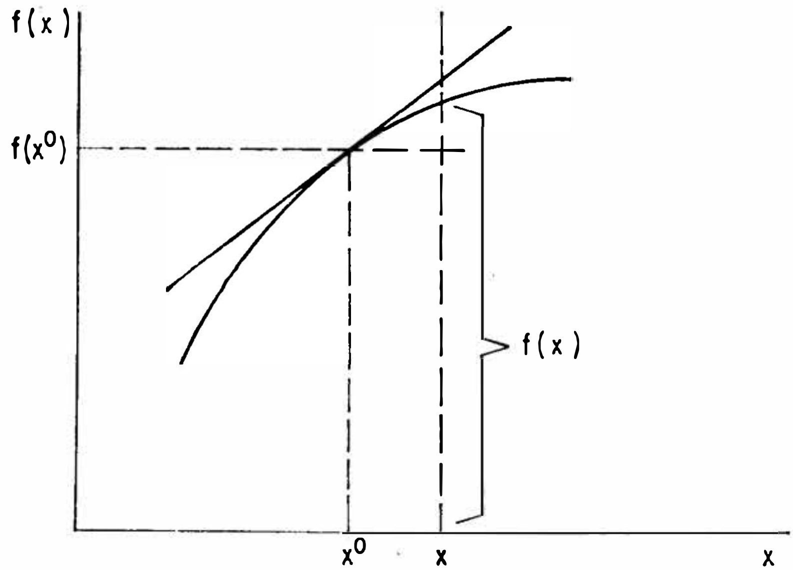
Como, por construção, $\lambda x_i + (1 - \lambda)\, x_i^0 - \bar{x}_i = 0$, conclui-se que a função $f(x)$ é côncava, pois:

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)\, f(x^0) \leqslant f(\lambda x + (1 - \lambda)\, x^0)$$

O conteúdo geométrico deste teorema é bastante simples. Ele afirma que os pontos da linha tangente a um ponto da função côncava estão situados acima dos pontos da função. Em n dimensões os pontos do hiperplano tangente estão situados acima dos pontos de superfície côncava. A Figura A.5 contém uma ilustração gráfica deste teorema.

Figura A.5

TANGENTE DA FUNÇÃO CÔNCAVA



Teorema — Seja $f(x)$ uma função definida num conjunto convexo aberto em S com derivadas contínuas de segunda ordem. A função $f(x)$ é côncava em S se, e somente se, sua matriz hessiana H for negativa semidefinida:

$$z' H z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j \leqslant 0$$

Demonstração (Condição Necessária): Suponha que $f(x)$ é côncava em S. Logo, pelo teorema anterior:

$$f(x) \leqslant f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x^0)$$

A expansão de Taylor da função $f(x)$ em torno do ponto x^0 é dada por:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

onde $\bar{x} = x^0 + \theta(x - x^0) = \theta x + (1 - \theta) x^0 \in S$, pois $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Segue-se, então que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \leqslant 0$$

Logo, a matriz hessiana H de $f(x)$ é negativa semidefinida.

(Condição Suficiente): Suponha que a matriz hessiana H de $f(x)$ é negativa semidefinida:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j \leqslant 0$$

Segue-se, então, da expansão de Taylor acima que

$$f(x) - f(x^0) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) \leqslant 0$$

Logo, pelo teorema anterior $f(x)$ é côncava.

Teorema — Seja $f(x)$ uma função côncava definida num conjunto convexo S. Se x^0 é um ponto de máximo local de $f(x)$, então x^0 é um ponto de máximo global de $f(x)$.

Demonstração: Suponha que x^0 não é um máximo global de $f(x)$. Então existe um ponto x^1 tal que: $f(x^1) > f(x^0)$. Como a função $f(x)$ é côncava, segue-se que:

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^0) \geqslant \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^0)$$

para $0 < \lambda < 1$. Em virtude de $f(x^1) \geqslant f(x^0)$, resulta:

$$f(x) = f(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^0) \geqslant f(x^0)$$

onde $x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0)$. Portanto, para valores de x próximos de x^0, $f(x) \geqslant f(x^0)$. Esta conclusão contradiz a hipótese de que x^0 é um ponto de máximo local. Logo, x^0 é um ponto de máximo global de $f(x)$.

A.VII — Funções Quase-Côncavas

Definição: A função $f(x)$ definida no conjunto convexo S é quase-côncava se, e somente se, para $x \in S$, $x^0 \in S$, $f(x) \geqslant f(x^0)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$:

$$f(\lambda\, x + (1-\lambda)\, x^0) \geqslant f(x^0)$$

Esta última desigualdade pode ser escrita de maneira mais elegante do seguinte modo:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\, x^0) \geqslant \min\, \{f(x),\, f(x^0)\}$$

onde a notação min $\{\,,\}$ indica o menor dos dois números.

Cabe ainda observar que esta definição de função quase-côncava é equivalente à seguinte: A função $f(x)$ definida no conjunto convexo S é quase-côncava se, e somente se, para $x \in S$, $x^0 \in S$, $f(x) = f(x^0)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\, x^0) \geqslant f(x^0)$$

Para provar que esta definição implica a precedente basta tomar uma combinação linear dos pontos $\bar{x} = \lambda x + (1-\lambda)x^0$ e x^0 e verificar que:

$$f(\theta \bar{x} + (1-\theta)x^0) \geqslant f(x^0).$$

A Figura A.6 mostra o gráfico de três funções quase-côncavas.

Definição: A função $f(x)$ é quase-convexa se a função $-f(x)$ for quase-côncava.

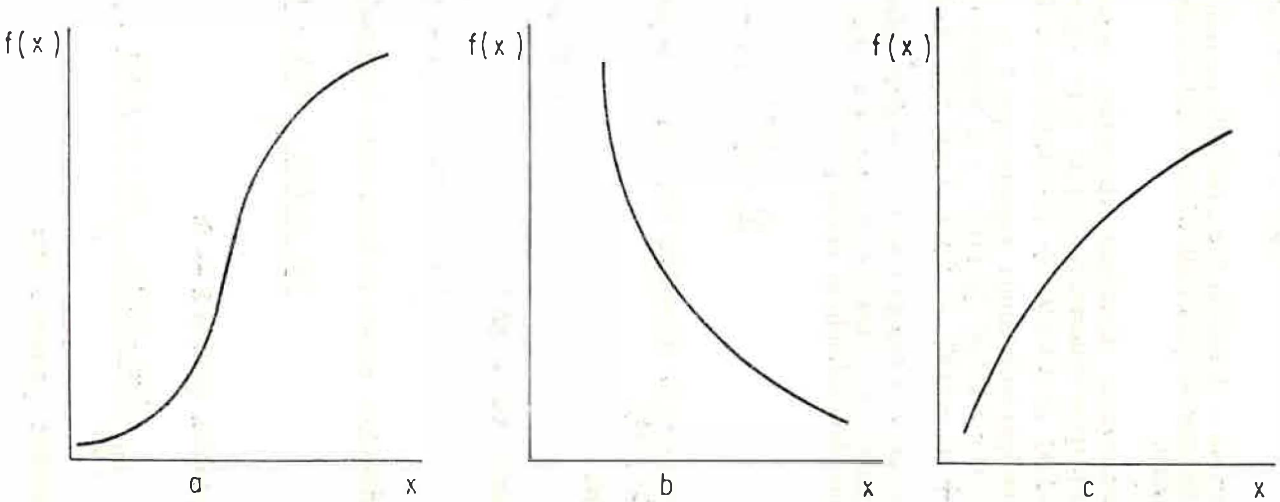
Teorema — Toda função côncava (convexa) é quase-côncava (quase-convexa).

Demonstração: Se a função $f(x)$ é côncava segue-se, por definição, que:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x^0) \geqslant f(x^0) + \lambda\, [f(x) - f(x^0)]$$

Figura A.6

FUNÇÕES QUASE-CÔNCAVAS



Portanto, se $f(x) \geqslant f(x^0)$, conclui-se que:

$$f(\lambda x + (1 - x)\, x^0) \geqslant f(x^0)$$

Teorema — A função $f(x)$, definida no conjunto convexo S, é quase-côncava se, e somente se, para cada número real α o conjunto $L = \{x \in S: f(x) \geqslant \alpha\}$ é convexo.

Demonstração (Condição Necessária): Suponha que $f(x) \geqslant f(x^0)$ e que $f(x)$ seja quase-côncava, isto é: $f(\lambda x + (1 - \lambda)\, x^0) \geqslant f(x^0)$. Façamos $f(x^0) = \alpha$. Logo, $f(x) \geqslant \alpha$ e $f(\lambda x + (1 - \lambda)\, x^0) \geqslant \alpha$. Portanto: $\lambda x + (1 - \lambda)\, x^0 \in L$.

(Condição Suficiente): Suponha que $L = \{x \in S: f(x) \geqslant \alpha\}$ seja convexo, $x \in S$, $x^0 \in S$ e $f(x) \geqslant f(x^0) = \alpha$. Segue-se que $\lambda x + (1 - \lambda)\, x^0 \in L$ e que $f(\lambda x + (1 - \lambda)\, x^0) \geqslant f(x^0)$. Logo, $f(x)$ é quase-côncava.

Teorema — A função $f(x)$ diferenciável, definida no conjunto convexo aberto S, é quase-côncava em S se, e somente se, para $x \in S$, $x^0 \in S$, $f(x) \geqslant f(x^0)$, a seguinte desigualdade se verifica:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) \geqslant 0$$

Demonstração (Condição Necessária): Suponha que $f(x)$ é quase-côncava e $f(x) \geqslant f(x^0)$.

Logo,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)\, x^0) \geqslant f(x^0)$$

Segue-se, então, que:

$$f(x^0 + \lambda (x - x^0)) - f(x^0) \geqslant 0$$

Dividindo-se ambos os lados desta desigualdade por λ, obtém-se:

$$\frac{f(x^0 + \lambda (x - x^0)) - f(x^0)}{\lambda} \geqslant 0$$

No limite, quando $\lambda \to 0$:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x^0 + \lambda (x - x^0)) - f(x^0)}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0)$$

Conclui-se, portanto, que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) \geqslant 0$$

(Condição Suficiente): Suponha que para $f(x) \geqslant f(x^0)$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x^0) \geqslant 0$$

Defina a função $g(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda) x^0) = f(\bar{x})$. Observe que $g(1) = f(x) \geqslant g(0) = f(x^0)$. A derivada de g com respeito a λ é dada por:

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} (x_i^0 - \bar{x}_i)$$

pois $\bar{x} - x^0 = \lambda (x - x^0)$. Se $f(x^0) \geqslant f(\bar{x})$, segue-se que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} (x_i^0 - x_i) \geqslant 0$$

Logo $\frac{\partial g}{\partial \lambda} \leqslant 0$ e $g(\lambda)$ seria uma função decrescente. Isto é, teríamos uma contradição: $f(x) \leqslant f(x^0)$. Logo, $f(\bar{x}) \geqslant f(x^0)$ e a função $f(x)$ é quase-côncava.

Teorema — Seja $f(x)$ uma função definida num conjunto convexo aberto S com derivadas contínuas de segunda ordem. A função $f(x)$ é quase-côncava em S se, e somente se, sua matriz hessiana H for negativa semidefinida:

$$z'H\, z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j \leqslant 0$$

para todo vetor $z' = [z_1, \ldots, z_n]$ que satisfaça a restrição:

$$z' \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0$$

Demonstração (Condição Necessária): Suponha que $f(x)$ seja quase-côncava, isto é: se $f(x) = f(x^0)$, então $f(\lambda x + (1-\lambda) x^0) \geqslant f(x^0)$. Defina a função $g(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda) x^0)$. Como $f(x)$ é quase-côncava, segue-se que $g(\lambda) \geqslant g(1) = g(0)$. Logo $g(\lambda)$ tem um máximo e, neste ponto de máximo:

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) = 0$$

e:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \leqslant 0$$

onde $\bar{x} = \lambda x + (1-\lambda) x^0$.

(Condição Suficiente) : Suponha que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j \leqslant 0 \text{ quando } \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} z_i = 0$$

A expansão de Taylor da função $f(x)$ em torno do ponto x^0 é dada por:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x^0) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

onde $\bar{x} = x^0 + \lambda(x - x^0) \;\varepsilon\; S$, e $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Segue-se, então, que:

$$f(x) - f(x^0) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) \leqslant 0$$

quando $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} (x_i - x^0) = 0$

Esta desigualdade pode ser escrita como:

$$f(x) - f(x^0) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0)$$

Conclui-se, então, que

$$\sum_{=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) \geqslant 0$$

quando $f(x) \geqslant f(x^0)$. Logo, pelo teorema anterior $f(x)$ é quase-côncava.

Exemplo: A função $f(x_1, x_2) = e^{x_1} - e^{-x_2}$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ é uma função quase-côncava. As derivadas parciais desta função são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = e^{x_1} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = e^{-x_2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = e^{x_1} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = - e^{-x_2}$$

A forma quadrática $z'H\, z$, onde H é a matriz hessiana de $f(x)$ é igual a:

$$Q = z'H\, z = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j = z_1^2 e^{x_1} - z_2^2 e^{-x_2}$$

A expressão de Q para os valores de z_1 e z_2 que satisfazem a restrição

$$z_1 \, e^{x_1} + z_2 \, e^{-x_2} = 0$$

é igual a:

$$Q = z_1^2 \, e^{x_1} \, (1 - e^{x_1} \, e^{x_2})$$

Como $e^x \geqslant 1$, para $x \geqslant 0$, segue-se então que $Q \leqslant 0$. Logo, a função $f(x_1, x_2)$ é uma função quase-côncava.

A.VIII — Equações de Diferenças Finitas de Segunda Ordem

Definição: A equação de diferenças finitas de segunda ordem é expressa por:

$$y_t = a_1 \, y_{t-1} + a_2 \, y_{t-2} + k$$

onde $a_2 \neq 0$. Quando $k = 0$ a equação é denominada homogênea.

Teorema — A solução geral da equação de diferenças finitas de segunda ordem consiste de duas partes aditivas. A primeira, denominada solução de equilíbrio, é obtida através da resolução da seguinte equação:

$$y^e = a_1 \, y^e + a_2 \, y^e + k, \quad 1 - a_1 - a_2 \neq 0$$

A segunda parte da solução geral é a solução da equação homogênea correspondente que depende das raízes

$$m_i = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2}, \; i = 1, 2$$

da equação do segundo grau,

$$m^2 - a_1 m - a_2 = 0$$

e de acordo com os valores dessas raízes podem conduzir às seguintes situações:

a) raízes reais e desiguais $(a_1^2 + 4a_2 > 0)$:

$$y_t = \frac{k}{1 - a_1 - a_2} + c_1 \, m_1^t + c_2 \, m_2^t$$

b) raízes reais e iguais $(a_1^2 + 4a_2 = 0)$:

$$y_t = \frac{k}{1 - a_1 - a_2} + (c_1 + c_2 t) \, m_1^t$$

c) raízes complexas conjugadas $(a_1^2 + 4a_2 < 0)$:

$$y_t = \frac{k}{1 - a_1 - a_2} + r^t \{c_1 (\cos \theta t + i \text{ sen } \theta t) + c_2 (\cos \theta t - i \text{ sen } \theta t)\}$$

onde:

$$r = \sqrt{-a_2} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{a_1}{2\sqrt{-a_2}}, \; -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$$

Em todas as três situações as constantes c_1 e c_2 dependem das condições iniciais da equação.

Demonstração: É fácil verificar-se que as expressões y_t satisfazem a equação de diferenças finitas de segunda ordem. Com efeito, tomemos o caso das raízes reais e desiguais:

$$\frac{k}{1 - a_1 - a_2} + c_1 m_1^t + c_2 m_2^t = \frac{a_1 k}{1 - a_1 - a_2} + a_1 c_1 m_1^{t-1}$$

$$+ a_1 c_2 m_2^{t-1} + \frac{a_2 k}{1 - a_1 - a_2} + a_2 c_1 m_1^{t-2} + a_2 c_2 m_2^{t-2} + k$$

que pode ser escrito como:

$$\frac{k(1 - a_1 - a_2)}{1 - a_1 - a_2} + c_1 m_1^{t-2} (m_1^2 - a_1 m_1 - a_2)$$

$$+ c_2 m_2^{t-2} (m_2^2 - a_1 m_2 - a_2) = k$$

e que nos leva a concluir que y_t é uma solução.

Quando as raízes são complexas conjugadas elas podem ser expressas por:

$$m_1 = r (\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$$

$$m_2 = r (\cos \theta - i \text{ sen } \theta)$$

lembrando-se que os números complexos $a + bi$, $i^2 = -1$ podem ser escritos nas seguintes formas:

$$a + bi = r (\cos \theta + i \text{ sen } \theta) = r\, e^{i\theta}$$

onde:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \cos \theta = a/r$$

Aplicando-se o teorema de Moivre que afirma

$$[r (\cos \theta + i \text{ sen } \theta)]^n = r^n (\cos n \theta + i \text{ sen } n \theta)$$

às expressões de m_1^t e m_2^t, obtém-se, então, o valor de y_t explicitado para o caso das raízes complexas.

Definição: A solução de equilíbrio y^e é uma solução estável da equação de diferenças finitas, independentemente das condições iniciais se a solução geral convergir com o decorrer do tempo para o valor de equilíbrio y^e, isto é:

$$\lim_{t \to \infty} y_t = y^e$$

Teorema — A solução de equilíbrio y^e é uma solução de equilíbrio estável da equação de diferenças finitas de segunda ordem se, e somente se:

$$1 - a_1 - a_2 > 0$$

$$1 + a_1 - a_2 > 0$$

$$1 + a_2 > 0$$

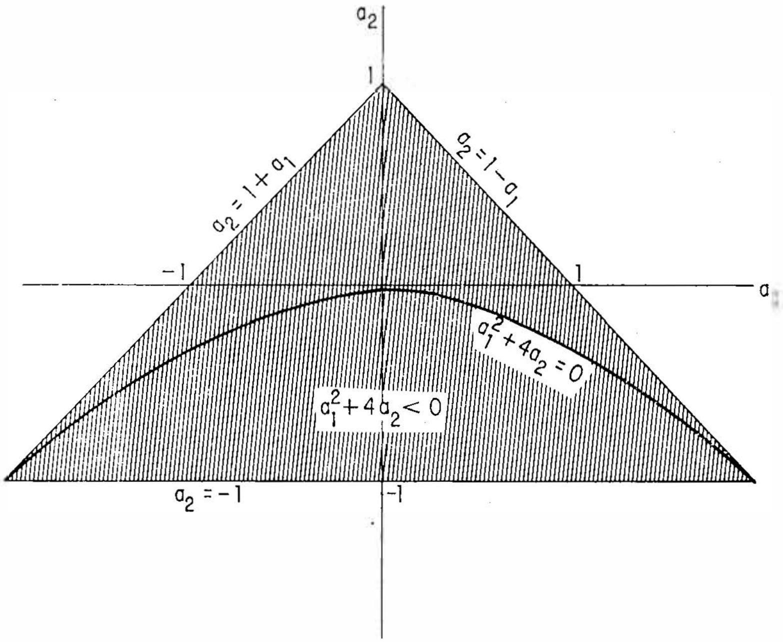
Demonstração (Condição Necessária): Considere a função $f(m) = m^2 - a_1 m - a_2$, que é convexa, pois sua derivada segunda é positiva. Suponha que a solução de equilíbrio da equação de diferenças finitas de segunda ordem é estável. Então, as raízes m_1 e m_2 da equação $f(m) = 0$ são, em valores absolutos, menores do que 1. Portanto $f(1) > 0$, que implica $1 - a_1 - a_2 > 0$, e $f(-1) > 0$, que acarreta a seguinte desigualdade: $1 + a_1 - a_2 > 0$. Obviamente estas duas restrições também são satisfeitas quando as raízes forem complexas. Por outro lado, sabemos que $m_1 \, m_2 = - a_2$. Logo, se as raízes forem complexas $|m_1|^2 = |m_2|^2 = - a_2 < 1$ e se as raízes forem reais o produto delas deve ser menor do que 1, pois elas estão compreendidas entre -1 e 1. Conseqüentemente: $1 + a_2 > 0$.

(Condição Suficiente): Suponha que $1 - a_1 - a_2 > 0$, $1 + a_1 - a_2 > 0$ e $1 + a_2 > 0$. É fácil verificar-se que em qualquer situação os valores absolutos das raízes m_1 e m_2 são menores do que 1. Portanto, a solução de equilíbrio é estável.

A área hachurada da Figura A.7 mostra a região na qual os valores dos parâmetros a_1 e a_2 conduzem a uma solução de equilíbrio estável para a equação de diferenças finitas de segunda ordem.

Figura A.7

ESTABILIDADE DA SOLUÇÃO DE EQUILÍBRIO-EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS FINITAS DE SEGUNDA ORDEM



A.IX — Bibliografia

Brandão, A. S. P. *Análise matemática: um texto para economistas.* Série PNPE, 3. Rio de Janeiro, IPEA/INPES, 1982.

Hadley, G. *Linear algebra.* Massachusetts, Addison-Wesley, 1965.

Sydsaeter, K. *Topics in mathematical analysis for economics.* London, Academic Press, 1981.

Composto e Impresso no Centro de Serviços Gráficos do IBGE — O.S. 22 642

PNPE: OUTRAS PESQUISAS CONCLUÍDAS

A IMIGRAÇÃO ESTRANGEIRA PARA O BRASIL NO PERÍODO 1873-1932 — Elisa Reis

AS CAUSAS DA EVOLUÇÃO RECENTE DA POSSE DE BENS DURÁVEIS NO BRASIL — João Saboia

CARACTERÍSTICAS E NATUREZA DO CRESCIMENTO INDUSTRIAL: 1906-1914 — Maria Tereza Versiani

INFLAÇÃO E BALANÇO DE PAGAMENTOS — Francisco Lopes e André Lara Resende

SALÁRIO E PRODUTIVIDADE NA INDÚSTRIA DE TRANSFORMAÇÃO: 1970-1976 — Paulo Baltar e Paulo Renato Souza

URBANIZAÇÃO E CUSTOS NUMA ECONOMIA EM DESENVOLVIMENTO: O CASO DE MINAS GERAIS — Afrânio Andrade e Roberto Monte-Mór

ENERGIA E ECONOMIA: UM MODELO INTEGRADO — Eduardo Modiano

INFLAÇÃO E NÍVEL DE ATIVIDADE NO BRASIL — Francisco Lopes

REFORMA FINANCEIRA INTERNA E ABERTURA FINANCEIRA AO EXTERIOR NA AMÉRICA LATINA — Edmar L. Bacha e Carlos Díaz-Alejandro

SÉRIE PNPE

1 — FUNDAMENTOS DA POLÍTICA PÚBLICA — Jorge Vianna Monteiro

2 — OS SALÁRIOS NA TEORIA ECONÔMICA — Roberto Macedo

3 — ANÁLISE MATEMÁTICA: UM TEXTO PARA ECONOMISTAS — Antonio Salazar Pessôa Brandão

4 — PROGRAMAÇÃO LINEAR: CONCEITOS E APLICAÇÕES — Edgar Augusto Lanzer

5 — MOEDA E SISTEMA FINANCEIRO NO BRASIL — André Franco Montoro Filho

6 — ANÁLISE MACROECONÔMICA: UM TEXTO INTERMEDIÁRIO — Edmar Lisboa Bacha

7 — ESTRUTURA INDUSTRIAL NO BRASIL: CONCENTRAÇÃO E DIVERSIFICAÇÃO — Sergio Buarque de Holanda Filho

8 — A INFLAÇÃO BRASILEIRA NO PÓS-GUERRA: MONETARISMO *VERSUS* ESTRUTURALISMO — Fernando de Holanda Barbosa

9 — DAS OLIGARQUIAS AO PREDOMÍNIO URBANO-INDUSTRIAL: UM ESTUDO DO PROCESSO DE FORMAÇÃO DE POLÍTICAS AGRÍCOLAS NO BRASIL — Charles C. Mueller

10 — MICROECONOMIA: TEORIA, MODELOS ECONOMÉTRICOS E APLICAÇÕES À ECONOMIA BRASILEIRA — Fernando de Holanda Barbosa

IMPRESSO NO CENTRO
DE SERVIÇOS GRAFICOS DO IBGE