INSTITUTO DE PLANEJAMENTO ECONÔMICO E SOCIAL
FUNDAÇÃO INSTITUTO DE PESQUISAS ECONÔMICAS

Relatório Final

UM MODELO PARA ESTIMAÇÃO DE DEMANDA DERIVADA DE INSUMOS INTERMEDIÁRIOS

Luiz Martins Lópes

José Carlos de Souza Santos

São Paulo

Junho - 1983

APRESENTAÇÃO

O objetivo desta pesquisa é o arranjo funcional de um modelo de estimação de demanda de insumos intermediários (= demanda derivada de materiais). Esse arranjo tem por base a literatura geral dos modelos do valor adicionado, da produção bruta e do modelo linear de produção (= "insumo-produto"). Cada um desses tipos de modelo tem as formas de estimação de demanda dos insumos e dos fatores primários (= demanda derivada dos fatores trabalho e capital). Embora a demanda dos fatores primários sejam um sub produto do modelo aqui tratado, ela não é uma finalidade desta pesquisa(*).

Apesar do desenvolvimento diferenciado desses três tipos de modelo, a ênfase deste trabalho é o marco referencial das estimações econométricas da demanda derivada que não sejam "ad hoc" (= sem explicação teórica), de um lado, e que não sejam limitadas "a priori" por uma tecnologia de produção específica (= exclusão de outras julgadas complexas "a priori").

A não exclusão de qualquer tecnologia de produção, e a estimação da demanda derivada com o limite tecnológico real da empresa, é uma possibilidade tratada de forma crescente na literatura contemporânea. Isso é feito partindo-se do comportamento econômico da firma, ou seja, do dual das atividades tecnologicamente factíveis à ela (=não se impõe uma tecnologia específica, como, por

(*) O modelo foi desenvolvido junto com José Carlos de Souza Santos (Prof. da FEA-USP e Pesquisador da FIPE. A parte geral do modelo é uma revisão da literatura, tendo sido efetuada na pesquisa preliminar da sua tese de doutorado, em fase final de elaboração neste momento). Na parte de fatores, as notas de aula do curso de Lewis (1969) apresentam uma dedução de um modelo completo de estimação da demanda derivada de mão-de-obra.

exemplo, a Cobb-Douglas e a CES). Neste caso, ao invés de partir de uma tecnologia específica, parte-se do comportamento econômico da firma, que é o dual das tecnologias factíveis da firma.

A demanda derivada é estimada por insumo e por empresa, ao nível individual, ou por insumo e por setor (=indústria), aos níveis setorial, regional e nacional.

Esta pesquisa é desenvolvida em quatro capítulos, seguidos do capítulo final do sumário e das conclusões.

O capítulo 1 é um tratamento mais simples possível das questões substantivas dos modelos de demanda de insumos intermediários, mostrando formas finais da demanda derivada, bem como as elasticidades da demanda e as interpretações das aplicações do modelo.

Os capítulos 2,3 e 4 são respectivamente as deduções e as explicações dos modelos do valor adicionado, da produção bruta e do modelo linear de produção, a partir dos quais são obtidas as formas finais da demanda derivada do primeiro capítulo. Os capítulos 2, 3 e 4 são tratados nesta pesquisa como acessórios do primeiro capítulo (= as respectivas deduções dos resultados finais dos quadros números 1, 2 e 3 do capítulo 1).

O capítulo do sumário e conclusões mostra as sugestões práticas de estimação do modelo de demanda derivada aqui desenvolvido, bem como as suas limitações mais severas e as suas aplicações no contexto das mudanças das características da economia brasileira desde a década de 1970 (= crises das matérias primas importadas de 1974 e 1979, a exemplo do petróleo e demais produtos estratégicos).

SUMÁRIO

PRIMEIRA PARTE
MODELOS DE DEMANDA DERIVADA

CAPÍTULO 1

MODELOS DE DEMANDA DERIVADA

A demanda derivada de uma empresa por insumos intermediários e fatores primários, como o próprio nome diz, é derivada da produção. Ou seja, o engajamento na produção por parte de uma empresa tem como contrapartida a compra de insumos e fatores de produção. Esses aspectos da empresa estão ligados em microeconomia à Teoria da Produção.

Tradicionalmente nos estudos empíricos de produção é desprezado o papel dos insumos intermediários (matérias primas, energia e materiais em geral) no processo produtivo. Normalmente, tais estudos partem da especificação de uma função de produção, relacionando o valor adicionado real com os fatores primários (capital, trabalho e terra). O uso de tal representação tecnológica da empresa é válida apenas se os insumos intermediários possuem elasticidades de substituição idênticas com relação a todos os fatores primários, ou ainda se o preço relativo dos insumos e do produto se mantém constante ao longo do tempo.

Em uma perspectiva mais ampla, os estudos empíricos de produção devem levar em conta a contribuição das matérias primas e da energia, sem impor a "priori" hipóteses ou características que talvez não sejam comprovadas por dados empíricos. É duvidoso que o preço relativo das matérias primas, como a energia, e produto tenha se mantido constante tanto no Brasil, como em qualquer outro país das economias capitalistas ocidentais. Da mesma forma, é difícil se acreditar que a elasticidade de substituição entre capital e energia seja a mesma que a entre trabalho e energia. Não existem portanto razões "a priori" para que se dê aos insumos intermediários um papel menos importante do que é atribuído ao capital e trabalho. Dessa maneira, a teoria da demanda derivada das matérias primas e energia é a mesma dos fatores primários.

Encontramos na literatura, vários tipos de demanda derivada, cada uma das quais com o seu significado próprio. *Mosak* (1938) analisa três diferentes especificações da demanda derivada. A primeira, derivada a partir de um processo de minimização de custos sujeita à um dado produto, está relacionada com o problema de escolha da técnica. Ela aparece como consequência da construção da curva de custo mostrando apenas o efeito substituição nas elasticidades preço. Esse modelo, dado sua extrema simplicidade tem sido largamente utilizado em estudos empíricos da produção, e suas principais características estão resumidas no Quadro 2 deste capítulo. A teoria subjacente à este modelo encontra-se desenvolvida no capítulo 3. Outros dois modelos de demanda derivada analisados em *Mosak* (1938) são o de demanda derivada para custo constante - correspondente à função demanda de consumidor com renda nominal constante - e custo marginal constante (utilidade marginal da moeda constante na teoria do consumidor). Esse último tipo de demanda está relacionada com a maximização de lucros. Uma forma híbrida da demanda derivada de máximo lucro, onde são dados tanto o preço do produto, como também o nível de utilização dos fatores primários, é apresentada no capítulo 2, sendo que suas principais características estão expostas no Quadro 1 a seguir. A função demanda derivada com custo constante, faz mais sentido no âmbito da teoria do consumidor.

Os dois modelos de demanda derivada acima referidos e analisados neste trabalho (quadros 1 e 2) tem em comum, em primeiro lugar, que os preços tanto dos insumos e fatores como do produto são exógenos ao comportamento das empresas. Isso significa que é suposto que as empresas tem consciência que sua ação econômica não pode alterar preços nos mercados competitivos.

Em segundo lugar, os modelos apresentados não tratam dos problemas relacionados com produção conjunta. Embora essas questões sejam tradicionalmente esquecidas nos trabalhos empíricos de produção, os modelos dos capítulos 2 e 3 permitem essa extensão, a partir de uma maior complexidade da elaboração teórica. O que se pode ter certeza é que a maioria dos resultados apresentados nesses capítulos continua valendo se for introduzida produção conjunta.

Finalmente, esses dois modelos de demanda derivada tem em comum, o fato de se referirem ao comportamento da empresa ou firma individual. Mas, isso não impede que o mesmo seja aplicado em um contexto de setor, região ou nação, bastando para tanto que hipóteses mais fortes sejam elaboradas. Por exemplo, supõe do que a tecnologia de um dado setor produtivo possa ser representado por uma função de produção bruta, e que o setor em conjunto se comporta no sentido de minimizar custos, então todos os resultados apresentados no capítulo 3 passam a valer para o setor.

Finalmente, o terceiro modelo apresentado neste estudo é um modelo linear. A partir de uma matriz de contabilidade social, é descrito um modelo linear, onde são levados em conta tanto os efeitos multiplicadores de *Leontief*, como também os efeitos multiplicadores *Keynesianos*.

As principais características desse modelo de simulação e mensuração do consumo de bens intermediários estão desenvolvidas no capítulo 4 e sumarizados no Quadro 3.

QUADRO 1

VALOR ADICIONADO E DEMANDA DE INSUMOS INTERMEDIÁRIOS (COEFICIENTES; ELASTICIDADES E RESULTADOS FINAIS DO MODELO DO CAPÍTULO 2)

Equações	Significados
equação 1.4 (as variáveis representam vetores, exceto π) $\hat{M} = \hat{M}\ (L, P, \pi)$	$\hat{M}$ quantidade do insumo (alumínio, por exemplo e qualquer material intermediário da fabricação do produto); L fatores primários (trabalho e capital); P preço do insumo (idem outros materiais); π preço do produto;
equação 1.30 (uma forma funcional especifica da equação 1.4 para vários insumos; no caso de dois insumos, por exemplo, alumínio i e não alumínio j, fazer $m = 2$) $-\hat{m}_i = a_{ii} + \sum_{j=0}^{m} a_{ij} (\frac{p_1}{p_i})^{1/2} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ \ell_j$ $i = 1, \ldots, m$	$\hat{m}_i$ a demanda derivada do insumo é função do preço relativo entre insumos (idem entre insumo e produto; p_1/p_i e o caso onde $p_o = \pi$), bem como da alocação dos fatores primários (trabalho e capital, ℓ_j); a_{ij} e b_{ij} são os coeficientes dos preços relativos, e das quantidades dos fatores primários;
elasticidades preço da demanda e de insumos (= relação entre a quantidade de insumo e o preço do insumo, própria ou cruzada) equação 1.31 $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \ell n\ \hat{m}_i}{\partial \ell n\ p_j} = \frac{a_{ij}}{2} (\frac{p_1}{p_i})^{1/2}$	elasticidade preço cruzada (*)
equação 1.32 $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \ell n\ \hat{m}_i}{\partial \ell n\ p_i} = -\frac{a_{ii}}{2} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} (\frac{p_j}{p_i})^{1/2}$	elasticidade preço própria (*)
elasticidades fator primário da demanda de insumo (= relação entre a quantidade do insumo e a quantidade do fator primário); equação 1.33 $\eta_{ij} = \frac{\partial \ell n\ \hat{m}_i}{\partial \ell n\ \ell_j} = \frac{\ell_j}{\hat{m}_i} b_{ij}$	elasticidade com relação ao fator trabalho, ou capital (*)

continua

continuação

Equações	Significados
elasticidade preço do produto da demanda de insumo;	
equação 1.34 $\theta_i = \frac{\partial \ln \hat{m}_i}{\partial p_o} = \frac{a_{io}}{2}\left(\frac{\pi}{\hat{m}_i} \frac{1}{(\pi p_i)^{1/2}}\right)$	elasticidade com relação ao preço do produto(*)
Formas de interpretação das elasticidades cruzadas (=transformação a partir da elasticidade substituição)	
equação 1.43 $\varepsilon_{rK} = \frac{\partial \ln \hat{m}_r}{\partial \ln p_K} = \sigma_{rK} \quad \alpha_K$	σ_{rK} elasticidade de substituição entre os insumos r e K; α_K é a proporção do custo real do insumo no custo real total.

(*) Obs: Essas elasticidades dependem da forma funcional específica adotada para a função valor adicionado. Esses resultados são específicos da equação 1.30 (derivada a partir de uma função de valor adicionado do tipo generalizado de Leontief). Outras elasticidades podem ser obtidas com especificação diferente da função valor adicionado.

QUADRO 2

PRODUÇÃO BRUTA E DEMANDA DE INSUMOS INTERMEDIÁRIOS (COEFICIENTES; ELASTICIDADES E RESULTADOS FINAIS DO MODELO DO CAPÍTULO 3)

Equações	Significados
equação 2.6 (as variáveis representam vetores, exceto X) $\hat{M} = \hat{M}\ (X, P, W)$	$\hat{M}$ quantidade de insomo; X produção bruta; P preço de insumo; W preço de fator
equação 2.33 (uma forma funcional específica da equação 2.6. para o caso da demanda derivada a partir da função custo translog) $\Theta_i = \gamma_i + \sum_1 \gamma_{ij}\ \ell n\ R_j + \gamma_{ix}\ \ell n\ X$ $i = 1, \ldots, m + n$	Θ_i proporção do custo real do insumo i no custo real total (= insumos e fatores); P_j preços dos insumos P_j (idem fatores W_j); As únicas variáveis necessárias para a estimação da equação 2.33 são os preços, o produto e a proporção do custo do insumo no custo de produção. Porém ela permite obter as elasticidades de substituição entre insumos, diretamente;
elasticidades preço da demanda de insumos	
equação 2.34 $\eta_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\Theta_i} + \Theta_j$ $i = 1, \ldots, m;\ 1 = 1, \ldots, m+n\ \ i \neq 1$	elasticidade preço cruzada (*)
$\eta_{ii} = \frac{\gamma_{ii}}{\Theta_i} + \Theta_i - 1$	elasticidade preço própria (*)
Formas de interpretação das elasticidades cruzadas (= transformação a partir da elasticidade substituição	
equação 2.21 $\eta_{ij}^{MM} = \frac{\partial \ell n\ \hat{M}_i}{\partial \ell n\ p_j} = \Theta_M\ \Theta_{Mj}\ \sigma_{ij}^{MM}$	σ_{ij}^{MM} elasticidade substituição entre os insumos i e j; σ_{ij}^{ML} elasticidase substituição entre o insumo i e o fator j;

continua

Equações	Significados
θ_M, θ_L	representam, respectivamente, as proporções do custo real dos insumos intermediários e dos fatores primários no custo real total;
θ_{Mj}, θ_{Lj}	representam, respectivamente, as proporções do custo real do insumo j e do fator j nos respectivos custos reais totais dos insumos e dos fatores

(*) Obs: Essas elasticidades dependem da forma funcional específica adotada para a função custo. Esses resultados são específicos da equação 2.33 (derivada a partir de uma função custo do tipo translog). Outras elasticidades podem ser obtidas com especificação diferente da função custo.

QUADRO 3

MODELO LINEAR DE PRODUÇÃO E DEMANDA DE INSUMOS INTERMEDIÁRIOS (COEFICIENTES E RESULTADOS FINAIS DO MODELO DO CAPÍTULO 4)

Equações	Significados
equação 4.5 $m_i = \sum_j y_i^S \; a_{ij}$ (*)	m_i utilização do insumo ; y_j^S produção bruta do setor j; a_{ij} coeficiente unitário do insumo utilizado na produção do setor j

(*) Obs: Note que y^S deve satisfazer um sistema de equações lineares (ver 4.2 do capítulo 4). O vetor y^S mostra o produto bruto setorial compatível com a geração líquida de um nível de investimento, exportação, gasto do governo e transferências para as famílias. Esse vetor de produção bruta leva em conta tanto os efeitos multiplicadores de *Leontief*, bem como os efeitos multiplicadores *Keynesianos*.

SEGUNDA PARTE

VALOR ADICIONADO

CAPÍTULO 2

VALOR ADICIONADO

A literatura econômica a respeito da relação entre o valor adicionado e o uso de insumos intermediários é surpreendentemente reduzida. Os estudos mais completos dessa interrelação são devidos a *Bruno*[1] (1978) e *Diewart* (1978), e é a partir destes estudos que se baseará o presente capítulo.

Vamos supor uma empresa, produzindo um único produto X. Os limites tecnológicos dessa empresa podem ser adequadamente descritos por uma função de produção que relaciona o nível de produção bruta X, com um vetor de insumos primários L (trabalho, capital, etc) e um vetor de insumos intermediários M (matérias primas, energia etc.):

$$(1.1) \qquad X = X \quad (L,M),$$

onde L é um vetor $n \times 1$ e M é um vetor $m \times 1$ com preços dados exogenamente pelo vetor P $m \times 1$.

Dado π como o preço exógeno do produto desta empresa, o processo de maximização de lucros conduz a:

$$(1.2) \qquad \pi \frac{\partial X}{\partial mi} = p_i \quad i=1, \quad \ldots, m \quad , \quad ou$$

$$(1.3) \qquad \pi X_M (L,M) = P,$$

onde $X_M (L,M)$ representa o vetor dos produtos marginais da função de produção (*1.1*) com relação aos insumos intermediários. Resolvendo-se o sistema resultante (*1.3*) chegariamos às funções de demanda derivada de máximo lucro para essa empresa:

$$(1.4) \qquad \hat{M} = \hat{M} \, (L,P,\pi)$$

A questão é que nem sempre é possível, ou fácil, encontrar matemáticamente a expressão dessas demandas derivadas. Se for adotado como representação tecnológica para esta empresa uma função de produção menos restritiva que as usuais Cobb-Douglas e CES, o trabalho matemático de solução do sistema (*1.3*) pode se tornar extremamente complexo. Felizmente existe um caminho mais simples para a obtenção destas funções, e este é dado pela relação entre a função de valor adicionado e a demanda de fatores. Essa relação faz parte do conjunto de teoremas conhecidos na literatura econômica como a teoria de dualidade entre as representações tecnológicas e as funções derivadas de comportamento econômico.

O valor adicionado nominal é definido por:

$$G = \pi X - P'M,$$

ou seja, ele é dado pela diferença entre a receita da empresa e o custo dos insumos intermediários, correspondendo portanto à contribuição dada na produção pelos fatores primários (P' é o vetor transposto de P).

A função de valor adicionado dá, para cada vetor de insumos primários e preços, o maior valor adicionado possível de ser gerado por essa empresa ajustando o seu nível de produto e sua utilização dos insumos intermediários:

$$(1.5) \quad G(L,\pi,P) = \max_{X,M} \{ \pi X - P'M : X \; X \leq X(L,M) \}$$

ou simplesmente

$$(1.6) \quad G(L,\pi,P) = \pi \hat{X}(L,P,\pi) - P' \hat{M}(L,P,\pi),$$

sendo $\hat{X}$ e $\hat{M}$ a oferta de produto e a demanda de insumos intermediários de maximização de lucros, dado o custos de fatores primários e os preços do produto e dos insumos intermediários. Essa função como pode ser vista é homogênea de grau 1 nos preços dos insumos intermediários e do produto. A não ser pelo fato de não estarem computados em (*1.5*) o custo dos fatores primários, a função (*1.6*) de valor adicionado corresponde ao conceito análogo da função lucro, derivado inicialmente na literatura por *Hotelling* (1932, 1935), e desenvolvimento posteriores sendo dados pro *Samuelson* (1947), *Shephard* (1953, 1970), *Lau* (1972, 1976) e *McFadden* (1966 e 1978).

Pode-se mostrar que[1]:

(1.7) $G_L = \pi X_L = W^*$ e

(1.8) $G_{\pi} = \hat{X}$ e $G_P = -\hat{M}$[2]

A relação (1.7) nos diz que a derivada da função valor adicionado com relação aos fatores primários é igual ao preço sombra W^* destes fatores. Sendo G efetivamente maximizada com respeito a L, e sendo os mercados de L caracterizados como de concorrência perfeita, então o vetor de preços sombra W^* será igual aos preços efetivamente pagos por essa firma.

As expressões em (1.8) nos dizem que as derivadas parciais da função de valor adicionado com relação aos preços igualam respectivamente a oferta de produto e as demandas derivadas de máximo lucro. Esse resultado é extremamente importante para os estudos empíricos de produção. Ele mostra um caminho alternativo para a obtenção de um sistema de funções demanda derivada a oferta de maximização de lucro. O ponto de partida convencional encontrado na literatura corresponde à especificação de uma função de produção que obedece a certas condições de regularidade para a tecnologia da empresa. A partir dessa função de produção e da hipótese de maximização de lucros chega-se a um sistema de oferta de produto e demanda de insumos. Acontece que nem sempre esse processo é factível de ser feito, dado as limitações impostas pela complexidade da matemática envolvida na solução do sistema (1.3). O resultado (1.8) fornece uma outra alternativa para se chegar à esse sistema de demanda derivada e oferta compatíveis com a hipótese de maximização de lucros. Ao invés de se especificar uma função de produção como a (1.1), pode-se definir uma função de valor adicionado como (1.6). Podemos utilizar para tanto uma forma funcional flexível[3] que restringe bem menos os limites tecnológicos da firma que as usuais CES e Cobb-Douglas.

2.1. Resultados de estática-comparativa

As relações estabelecidas até aqui permitem estabelecer de forma simples alguns resultados de estática comparativa para a empresa maximizadora de lucros.

a. Mudança nas demandas derivadas de insumos intermediários devido à alterações nos preços destes.

Para simplificar a exposição, vamos assumir primeiramente apenas dois insumos intermediários, após o que generalizaremos os resultados para m insumos.

Com dois insumos intermediários,

$$\frac{\partial \hat{m}_1}{\partial p_1} = - \frac{\partial^2 G}{\partial p_1^2}$$

$$(1.9) \quad \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial p_2} = - \frac{\partial^2 G}{\partial p_1 \partial p_2}$$

$$\frac{\partial \hat{m}_2}{\partial p_1} = - \frac{\partial^2 G}{\partial p_2 \partial p_1}$$

$$\frac{\partial \hat{m}_2}{\partial p_2} = - \frac{\partial^2 G}{\partial p_2^2}$$

Essas derivadas podem ser entendidas facilmente a partir da condição de maximização de lucros (1.3)

$\pi X_M(L,M) = P$, ou após a substituição das demandas de máximo lucro,

$$\pi X_M(L, \hat{M}(L, P, \pi)) = P.$$

Para dois insumos intermediários apenas:

$$(1.10) \quad \pi X_1(L, \hat{m}_1, \hat{m}_2) = p_1 \quad (4)$$

$$\pi X_2(L, \hat{m}_1, \hat{m}_2) = p_2$$

Derivando-se esse sistema com relação à p_1 e a p_2, chega-se à dois conjuntos de equações:

$$(1.11) \quad \pi X_{11} \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial p_1} + \pi X_{12} \frac{\partial \hat{m}_2}{\partial p_1} = 1$$

$$\pi X_{21} \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial p_1} + \pi X_{22} \frac{\partial \hat{m}_2}{\partial p_2} = 0 \qquad \text{e}$$

$$\text{(1.12)}\quad \begin{cases} \pi X_{11} \dfrac{\partial \hat{m}_1}{\partial p_2} + \pi X_{12} \dfrac{\partial \hat{m}_2}{\partial p_2} = 0 \\[2ex] \pi X_{21} \dfrac{\partial \hat{m}_1}{\partial p_2} + \pi X_{22} \dfrac{\partial \hat{m}_2}{\partial p_2} = 1 \end{cases}$$

Escrevendo os sistemas (*1.11*) e (*1.12*) sob a forma matricial chega-se a:

$$\text{(1.13)}\quad \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{m}_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial \hat{m}_1}{\partial p_2} \\[2ex] \dfrac{\partial \hat{m}_2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial \hat{m}_2}{\partial p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\pi}$$

Sendo sua solução portanto dada por:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{m}_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial \hat{m}_1}{\partial p_2} \\[2ex] \dfrac{\partial \hat{m}_2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial m_2}{\partial p_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

Genericamente, para m insumos chega-se à seguinte relação:

$$\text{(1.14)}\quad \frac{\partial \hat{M}}{\partial P} = - \frac{\partial^2 G}{\partial P^2} = \frac{1}{\pi} X_{MM}^{-1} \quad , \qquad \text{onde}$$

X_{MM} é a matriz Hessiana obtida de (*1.1*) mostrando as relações entre os insumos intermediários (= derivada de segunda ordem a serem usadas nos cálculos das elasticidades). Note que sendo os m insumos substitutos brutos[5], então (*1.14*) é uma matriz negativa definida. A expressão (*1.14*) mostra claramente que o uso da abordagem do valor adicionado para a estimação das relações de estática-comparativa no modelo com insumos intermediários simplifica bastante o processo de obtenção dessas relações. Partindo de uma função de produção, a análise de estática-comparativa envolveria a inversão da matriz Hessiana X_{MM} , que sendo uma transformação não linear não permite a avaliação correta da propagação dos erros das estimativas econométricas.

As elasticidades preço própria e cruzadas das demandas derivadas dos insumos intermediários podem ser encontradas após a estimação do sistema (*1.8*):

$$(1.15) \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \ell n \; \hat{m}_i}{\partial \ell n \; p_j} = \frac{G_{ij} \; G_i}{p_j} = \frac{X^{ij}}{} \; \frac{m_i}{p_j} \qquad i,j = 1,\ldots, m$$

onde X^{ij} é o elemento i,j da matriz inversa de X_{MM}.

b. Mudanças nas demandas derivadas de insumos intermediários devido à alterações na utilização dos fatores primários.

Novamente aqui, vamos estabelecer as relações para o caso mais simples, dois fatores primários e dois insumos intermediários, após o que generalizaremos os resultados.

As condições de máximo lucro em (*1.10*) para 2 fatores primários correspondem a:

$$(1.16) \qquad \pi X_1 \; (\ell_1, \ell_2, \; \hat{m}_1 \; , \; \hat{m}_2) \; = p_1$$

$$\pi X_2 \; (\ell_1, \ell_2, \; \hat{m}_1 \; , \; \hat{m}_2) \; = p_2$$

Derivando-se totalmente esse sistema com relação à ℓ_1 e ℓ_2 chega-se a:

$$(1.17) \qquad \begin{aligned} X_{11} \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial \ell_1} + X_{12} \frac{\partial \hat{m}_2}{\partial \ell_1} &= - \frac{\partial X_1}{\partial \ell_1} \\ X_{21} \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial \ell_1} + X_{22} \frac{\partial \hat{m}_2}{\partial \ell_1} &= - \frac{\partial X_2}{\partial \ell_1} \end{aligned} \qquad \text{e}$$

$$(1.18) \qquad \begin{aligned} X_{11} \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial \ell_2} + X_{22} \frac{\partial \hat{m}_2}{\partial \ell_2} &= \frac{\partial X_1}{\partial \ell_2} \\ X_{21} \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial \ell_2} + X_{22} \frac{\partial \hat{m}_2}{\partial \ell_2} &= - \frac{\partial X_2}{\partial \ell_2} \end{aligned}$$

Juntando-se (1.17) e (1.18) sob a forma matricial chega-se ao sistema:

$$(1.19)\quad \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial \ell_1} & \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial \ell_2} \\ \frac{\partial \hat{m}_2}{\partial \ell_1} & \frac{\partial \hat{m}_2}{\partial \ell_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \ell_1} & \frac{\partial X_1}{\partial \ell_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial \ell_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \ell_2} \end{bmatrix}$$

$$(1.20)\quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial \ell_1} & \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial \ell_2} \\ \frac{\partial \hat{m}_2}{\partial \ell_1} & \frac{\partial \hat{m}_2}{\partial \ell_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \ell_1} & \frac{\partial X_1}{\partial \ell_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial \ell_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \ell_2} \end{bmatrix}$$

Em termos genéricos, para uma firma com n fatores primários e insumos intermediários, a relação acima fica

$$(1.21)\quad \frac{\partial \hat{M}}{\partial L} = - X_{MM}^{-1} \; X_{ML} \quad ,$$

X_{ML} é a matriz Hessiana de (1.1) que mostra as relações de substituição entre os insumos intermediários (por exemplo energia)e os fatores de produção primários (capital e trabalho, por exemplo).

A elasticidade da demanda derivada dos insumos intermediários com relação aos fatores primários vai depender protanto das relações de substutibilidade bruta entre os insumos intermediários, como entre insumos intermediários e os fatores primários:

$$(1.22)\quad \eta_{ij} = \frac{\partial \ln \hat{m}_i}{\partial \ln \ell j} = - \frac{\partial \ln G_i}{\partial \ln \ell j} \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix}$$

c. Outros resultados de estática-comparativa

De forma análoga ao mostrado anteriormente, os efeitos das alterações de preço do produto sobre a demanda derivada são dada por:

$$(1.23) \quad \frac{\partial \hat{M}}{\partial \pi} = -\frac{1}{\pi^2} X_{MM}^{-1} P = \frac{\partial \hat{X}}{\partial P}, \qquad \text{ou seja,}$$

o efeito de alterações nos preços do produto sobre a demanda derivada de insumos é o mesmo que as alterações nos preços de insumos trazem para a oferta de máximo lucro do produto. Assim, essas elasticidades serão dadas por:

$$(1.24) \quad \Theta_i = \frac{\partial \ell n \; \hat{m}_i}{\partial \ell n \; \pi} = \left(-\frac{1}{\pi^2} \sum_j X^{ij} p_j\right) \frac{\pi}{mi} = -\frac{1}{\pi m_i} \sum_j X^{ij} p_j .$$

Estabelecidos os resultados de estática-comparativa, o efeito total na demanda de insumos intermediários de alterações nos preços destes, no preço do produto e no nível de utilização dos fatores primários pode ser encontrado de forma bastante simples.

Dado as expressões para a demanda de insumos intermediários em *(1.4)*, a diferencial total para a demanda do insumo i fornece:

$$(1.25) \quad d\hat{m}_i = \sum_j \frac{\partial \hat{m}_i}{\partial p_j} dp_j + \sum_j \frac{\partial \hat{m}_i}{\partial \ell_j} d\ell j + \frac{\partial \hat{m}_i}{\partial \pi} d\pi ,$$

o que colocado em termos de taxas de crescimento é igual a

$$(1.26) \quad \frac{d\hat{m}_i}{m_i} = \sum_j \frac{\partial \hat{m}_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{\hat{m}_i} \frac{dp_j}{p_j} + \sum_j \frac{\partial \hat{m}_i}{\partial \ell_j} \frac{\ell_j}{\hat{m}_i} \frac{d\ell_j}{\ell_j} + \frac{\partial \hat{m}_i}{\partial \pi} \frac{\pi}{\hat{m}_i} \frac{d\pi}{\pi} \qquad \text{ou}$$

$$(1.27) \quad \dot{m}_i = \sum_j \varepsilon_{ij} \dot{p}_j + \sum_j \eta_{ij} \dot{\ell}_j + \Theta_i \dot{\pi}$$

Em termos matriciais essa expressão fica:

$$(1.28) \quad \dot{M} = E_P \dot{P} + E_L \dot{L} + E_\pi \dot{\pi}$$

E_P, E_L, E_π são as matrizes de elasticidade dadas por *(1.15)*, *(1.22)* e *(1.24)* respectivamente.

Para melhor ilustrar o poder dessa forma de estimação das demandas derivadas de insumos intermediários, vamos calcular as expressões das elasticidades para uma função de valor adicionado do tipo generalizada de Leontief:

$$(1.29) \qquad G = g(L,\pi,P) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}(p_i p_j)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, p_i\, \ell_j + a_o,$$

onde $p_o = \pi$, e $a_{ij} = a_{ji}$

Sabemos por (1.8) que:

$$\hat{M} = -\frac{\partial G}{\partial p} \quad \text{e} \quad \hat{X} = \frac{\partial G}{\partial \pi}, \quad \text{portanto:}$$

$$(1.30) \qquad -\hat{m}_i = a_{ii} + \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\left(\frac{p_j}{p_i}\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, \ell_j$$

é a demanda derivada do insumo intermediário i. As elasticidades da demanda derivada são (a partir dessa equação em termos de logaritmo natural ℓn):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \ell n\, \hat{m}_i}{\partial \ell n\, p_j} = \frac{a_{ij}}{2}\left(\frac{p_j}{\hat{m}_i}\, \frac{1}{(p_i p_j)^{1/2}}\right) \qquad i \neq j$$

$$i,j = 1, \ldots, m$$

$$(1.31) \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \ell n\, \hat{m}_i}{\partial \ell n\, p_j} = \frac{a_{ij}}{2}\left(\frac{p_j}{\hat{m}_i}\, \frac{1}{(p_i p_j)^{1/2}}\right) = \frac{a_{ij}}{2}\, \frac{1}{\hat{m}_i}\left(\frac{p_j}{p_i}\right)^{1/2} \qquad i \neq j$$

$$i,j = 1, \ldots, m$$

$$(1.32) \qquad \varepsilon_{ii} = \frac{\partial \ell n\, \hat{m}_i}{\partial \ell n\, p_j} = -\frac{1}{2p_i} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\left(\frac{p_j}{p_i}\right)^{1/2}$$

De forma análoga:

$$(1.33) \qquad \eta_{ij} = \frac{\partial \ell n\, \hat{m}_i}{\partial \ell n\, \ell j} = \frac{\ell_j}{\hat{m}_i}\, b_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array} \quad ; \text{ são}$$

as elasticidades das demandas de insumos com relação aos fatores primários de produção.

Finalmente, a elasticidade com relação ao preço do produto é dada, lembrando que $p_o = \pi$, por:

$$(1.34) \qquad \Theta_i = \frac{\partial \ell n\, \hat{m}_i}{\partial p_o} = \frac{a_{io}}{2}\left(\frac{\pi}{\hat{m}_i}\, \frac{1}{(\pi p_i)^{1/2}}\right)$$

2.2. Formas de interpretação das elasticidades

Existe uma outra interpretação das elasticidades preço que surgem no modelo de valor adicionado.

O correspondente à elasticidade de substituição parcial de Allen (1938), levando em consideração apenas os insumos intermediários, é dado por:

$$(1.35) \quad \sigma_{Kr} = \frac{\Sigma m_i X_i}{m_K m_r} (X_{MM})^{-1}_{rK} \qquad \text{onde}$$

r e K denotam dois insumos intermediários quaisquer.

Como a derivada parcial do insumo intermediário r em relação ao preço do insumo K é dada por:

$$(1.36) \quad \frac{\partial \hat{m}_L}{\partial p_K} = \frac{1}{\pi} (X_{MM})^{-1}_{rK} , \qquad \text{então}$$

$$(1.37) \quad \sigma_{Kr} = \frac{\Sigma \hat{m}_i X_i}{\hat{m}_K \hat{m}_r} \frac{\partial \hat{m}_r}{\partial p_K} \pi$$

No ponto de máximo lucro:

$$(1.38) \quad \pi X_i = p_i \qquad \text{para qualquer} \quad i,$$

logo,

$$(1.39) \quad \sigma_{Kr} = \frac{\Sigma \hat{m}_i p_i}{\hat{m}_K \hat{m}_r} \frac{\partial \hat{m}_r}{\partial p_K} \qquad \text{ou}$$

$$(1.40) \quad \sigma_{Kr} = \frac{\Sigma \hat{m}_i p_i}{\hat{m}_K \hat{m}_r} \frac{\partial \hat{m}_r}{\partial p_K} \frac{p_K}{\hat{m}_r} \frac{\hat{m}_r}{p_K} \qquad \text{e portanto}$$

$$(1.41) \quad \sigma_{Kr} = \frac{\Sigma \hat{m}_i p_i}{\hat{m}_K p_K} \frac{\partial \hat{m}_r}{\partial p_K} \frac{p_K}{\hat{m}_r}$$

Denotando por α_K a participação do insumo intermediário K no custo total dos insumos intermediários, isto é:

$$(1.42) \qquad \alpha_K = \frac{\hat{m}_K \; p_K}{\Sigma \hat{m}_i \; p_i} \quad , \text{ então}$$

a elasticidade preço da demanda derivada do insumo intermediário r com relação ao preço do insumo K é dada por:

$$(1.43) \qquad \varepsilon_{rK} = \frac{\partial \ln \hat{m}_r}{\partial \ln p_K} = \sigma_{rK} \quad \alpha_K,$$

ou seja, esta elasticidade depende da elasticidade de substituição entre esses insumos intermediários (dado os fatores primários) e da proporção do insumo K no custo total dos insumos intermediários.

Em termos matriciais, como:

$$\frac{\partial \hat{M}}{\partial P} = \frac{1}{\pi} X_{MM}^{-1} \quad ,$$

então a matriz de elasticidade preço cruzadas das demandas derivadas é dada por:

$$(1.44) \qquad \Omega = [\hat{M}]^{-1} \frac{\partial \hat{M}}{\partial p} [P]^{(6)} \quad , \qquad \text{ou}$$

$$(1.45) \qquad \Omega = \frac{1}{\pi} [\hat{M}]^{-1} X_{MM}^{-1} [P] \quad , \qquad \text{ou ainda}$$

$$(1.46) \qquad \Omega = \Sigma [\alpha] \quad , \quad \text{sendo}$$

Σ a matriz $m \times m$ de elasticidade de substituição entre os insumos intermediários, e α o vetor participações dos insumos no custo dos insumos intermediários.

De (*1.45*) chega-se a que:

$$(1.47) \qquad X_{MM}^{-1} = \pi [\hat{M}] \; \Omega [P]^{-1}$$

Como:

$\frac{\partial \hat{M}}{\partial \pi} = - \frac{1}{\pi^2} X_{MM}^{-1} P$ então, substituindo-se(*1.47*) chega-se a

$$(1.48) \quad \frac{\partial \hat{M}}{\partial \pi} = - \frac{1}{\pi} \left[\hat{M}\right] \Omega \, e \,,$$ onde e é um vetor coluna com todos os elementos iguais à unidade.

Premultiplicando (*1.48*) por $[\hat{M}]^{-1}$ e multiplicando por π o vetor de elasticidade das demandas dos insumos intermediários com relação ao preço do produto será dada por:

$$(1.49) \quad \left[\hat{M}\right]^{-1} \frac{\partial \hat{M}}{\partial \pi} \pi = - \Omega \, e,$$

ou seja, ela é igual à soma das elasticidades preços própria e cruzadas de cada equação.

2.3. Valor Adicionado Nominal e Real

Até aqui nós consideramos o valor adicionado G medido em termos nominais. Existem duas formas de se trabalhar com o valor adicionado em termos reais. A primeira abordagem consiste na deflação do valor adicionado nominal pelo preço π do produto produzido por essa empresa. Como $G = G(L, \pi, P)$ é homogenea de grau 1 em preços então:

$$(1.50) \quad \frac{G}{\pi} = G(L, 1, \frac{P}{\pi}) = g\ (L,\ p).$$

Os resultados até aqui encontrados não mudam muito com a utilização dessa definição da valor adicionado:

$$(1.51) \quad \begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial L} &= X_L \\ \frac{\partial G}{\partial P} &= - \hat{M} \\ \frac{\partial \hat{M}}{\partial P} &= X_{MM}^{-1} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \hat{M}}{\partial L} = - X_{MM}^{-1} X_{ML}$$

A outra forma de se trabalhar com valor adicionado real consiste no processo de deflação dupla, onde todos os preços são normalizados na época base e a medida de valor adicionado real é feita tomando-se como base os preços de insumos e do produto na época base. Essa abordagem é bastante utilizada nos estudos empiricos da produção, o valor adicionado real substituindo o produto bruto da empresa e sendo uma função de fatores primários apenas, normalmente capital e trabalho.

Existem três condições que validam essa abordagem:

- bem intermediários são utilizados em proporção fixa em relação ao produto bruto
- preços relativo dos bens intermediários em relação ao preço do produto é constante ou
- função de produção bruta é separavel em insumos primários e insumos intermediários(7).

Se nenhuma dessas três condições é satisfeita, então, a substituição da produção bruta por valor adicionado real (dupla deflação) deve mais a viéses no processo de estimação.

NOTAS

(1) Veja por exemplo McFadden (1966, 1978) ou Lau (1972,1976).

(2) Notação: $G_L = \partial G/\partial \ell_1 \; ... \; \partial G/\partial \ell_n$

$G_\pi = \partial G/\partial \pi$

$G_P = \partial G/\partial p_1 \; ... \; \partial G/\partial p_m$

(3) Uma forma é dita ser flexível quando ela fornece uma aproximação de segunda ordem para uma função qualquer. Isto é, mesmo não conhecendo a forma específica da função de valor adicionado, podemos aproximá-la satisfatoriamente nos trabalhos econométricos por uma forma funcional flexível. Veja Diewart (1973) e Christensen, Jorgenson e Lau (1971) sobre os conceitos de formas funcionais flexíveis e duas formas flexíveis bastante utilizadas nos trabalhos econométricos: a Translog e a Leontief Generalizada.

(4) Para tornar mais simples a exposição a notação aqui utilizada é a seguinte:

$$X_i = \partial X/\partial m_i$$

$$X_{ij} = \partial^2 X/\partial m_i \partial m_j$$

(5) Nesse caso todos os elementos de X_{MM} fora da diagonal principal são negativos e portanto todos os elementos de X_{MM}^{-1} são negativos. Ver McKenzie(1960).

(6) Notação: vetores entre colchetes representam as matrizes diagonais formadas por esses vetores.

(7) Uma função de produção bruta $X = X(L,M)$ é dita ser separável em relação aos vetores primários e insumos intermediários se X pode ser escrita como

$$X = X(F(L),M),$$

onde $F(L)$ é o valor adicionado real-Berndt e Christensen(1973) mostram que nesse caso as elasticidades de substituição parcial entre cada insumo intermediário e todos os fatores primários são iguais tanto no sinal como na magnitude.

TERCEIRA PARTE
PRODUÇÃO BRUTA

CAPÍTULO 3

PRODUÇÃO BRUTA

A teoria da dualidade em economia apresenta vários resultados. Um deles é apresentado no capítulo anterior formando as bases teóricas de um modelo de demanda derivada por insumos intermediários. O cerne da teoria de dualidade em economia está no fato que qualquer conjunto convexo (a representação tecnológica de uma empresa ou setor de atividade) pode ser igualmente descrito pelos semi espaços que o suportam (as funções derivadas do comportamento econômico de maximização ou minimização de uma função objetivo)(1). É bastante conhecido na literatura o fato que as condições tecnológicas de uma empresa condicionam o comportamento das funções custo. É conhecido também, embora não tão bem, que a partir das funções custo é possível obter todas as informações necessárias sobre as caracterîticas tecnológicas da empresa. Este caminho, não usual nos estudos de produção, é o mais simples para se obter um sistema de demandas derivadas das empresas, sistema este compatível com um comportamento econômico.

A dualidade entre funções custo e tecnologia foi exaustivamente discutida na literatura. Os modelos completos são os trabalhos de Shephard (1953, 1970) e McFadden (1966, 1978), dado a extensão como o assunto é tratado, embora outros autores, como por exemplo, Samuelson (1947), Uzawa (1964) já tenham tratado do mesmo assunto.

Vamos supor uma empresa, produzindo um produto bruto X, e para tanto utilizando um vetor L nx1 de fatores primários e de um vetor M mx1 de insumos intermediários. Os fatores primários são aqueles normalmente considerados nos estudos de produção: capital, trabalho, terra, etc. Os insumos intermediários compreendem as matérias primas, energia e outros fatores. Vamos supor também que a tecnologia desta empresa pode ser corretamente representada por uma função de produção bruta do tipo:

$$(2.1) \qquad X = X\,(L,\ M)$$

Essa função de produção obedece as condições de regularidades normalmente impostas sobre funções de produção e bastante conhecidas na teoria de produção.

Condições de regularidade de X

(A.1) $X = X(L,\ M)$ é definida para todo vetor de insumos primário e intermediário como uma função real, não negativa, diferenciável duas vezes;

(A.2) Se $L = 0_n$ e $M = 0_M$ então $X = 0$, ou seja, não é possível produzir algo sem insumos[2];

(A.3) A função de produção é não decrescente nos insumos ou seja, os produtos marginais são maiores ou iguais a zero;

(A.4) A função de produção é côncava e finita para insumos finitos[3] e não limitada para pelo menos uma seqüência de insumos não limitada.

O problema econômico de maximização de lucros:

$$(2.2)\ \text{Max lucros} = \pi X\,(L,\ M) - W'L - P'M,$$

pode ser dividido em dois sub-problemas: O primeiro deles é dado por um processo de minimização de custos de produção para cada nível de produto. Esse problema dá origem às curvas de custo da empresa e pode ser entendido como o problema da escolha de técnicas. O segundo sub-problema consiste em escolher o nível ótimo de produto dado as combinações eficientes entre os insumos da empresa (W' e P' são vetores transpostos).

Formalmente o primeiro sub-problema é dado por:

$$(2.3)\ \underset{L,M}{Min}\ C = W'L - P'M$$
$$Suj.\ X = X(L,\ M)$$

ou ainda:

$$(2.4)\ \underset{L,M,\lambda}{Min}\ R = W'L - P'M - \lambda\ (X - X\ (L,\ M)),$$

onde:

λ = multiplicador de Lagrange
W = vetor nx1 de preços exógenos dos fatores primários
P = vetor mx1 de preços exógenos dos insumos intermediários.

As condições de primeira ordem do problema *(2.4)* acima são dadas por:

$$(2.5)\ \frac{\partial R}{\partial L} = 0_n \quad \text{ou} \quad W = \lambda X_L{}^{(4)}$$

$$\frac{\partial R}{\partial M} = 0_m \quad \text{ou} \quad P = \lambda X_m.$$

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda} = 0 \text{ ou } X = (L,\ M)$$

A solução do sistema *(2.5)* fornece um conjunto de funções demanda derivada para os insumos intermediários e fatores primários, para cada nível de produto:

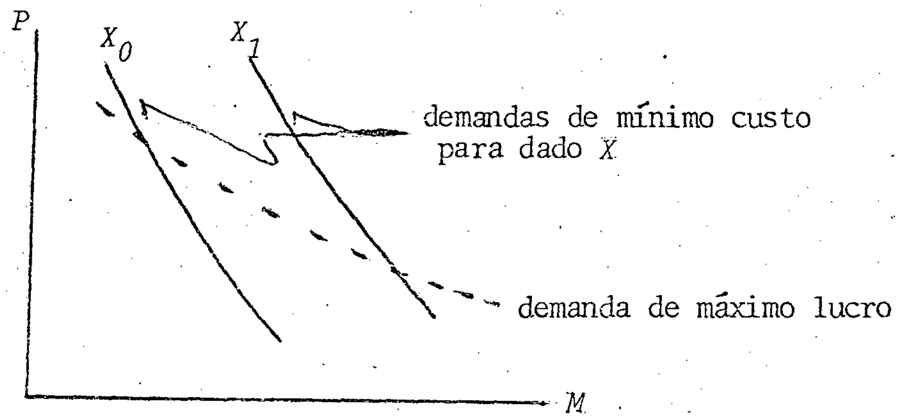
$$(2.6)\ \hat{L} = \hat{L}\ (X,P,W)^{(5)}$$

$$\hat{M} = \hat{M}\ (X,P,W)$$

$$\hat{\lambda} = \hat{\lambda}\ (X,P,W)$$

As funções demanda $\hat{L}$ e $\hat{M}$ são funções demanda compatíveis com o processo de minimização de custos, mostrando apenas o efeito substituição para cada valor de produto. Elas diferem das demandas derivadas de máximo lucro no sentido que as últimas incluem tanto o efeito substituição entre os insumos, como o efeito expansão, dado pela determinação do nível ótimo de produção. Portanto as funções mostram as combinações entre L e M eficientes para cada nível dado de produto.

O gráfico abaixo mostra a diferença entre os dois tipos de curva de demanda derivada:



Substituindo *(2.6)* no custo de produção da empresa chega-se à função custo:

(2.7) $C = W'\hat{L} + P'\hat{M} = W'\hat{L}\ (X,P,W) + P'M\ (X,P,W)$, ou simplesmente

(2.8) $C = C\ (X,P,W)$

A função custo *(2.8)* mostra, para cada nível de produto e conjunto P, W de preços, qual o mínimo custo necessário para se gerar esse produto. Pode-se mostrar que as condições de regularidade impostas sobre a tecnologia não implicam em algumas características da função custo[6].

Condições de Regularidade da função custo

(B.1) C é uma função real, positiva para $X > 0$ e preços estritamente positivos

(B.2) C é não decrescente em X.

(B.3) C é não decrescente nos preços dos insumos

(B.4) C é homogênea de grau 1 em preços

(B.5) C é função côncava nos preços dos insumos

(B.6) C é contínua nos preços para cada X.

Ou seja, as condições *(A.1) - (A.4)* impostas sobre a função de produção bruta não implicam que a função custo existe e obedece às propriedades *(B.1) - (B.6)*. Mais ainda, o caminho inverso pode ser percorrido. Dado uma função custo, que obedece *(B.1) - (B.6)*, pode-se chegar à função de produção. O problema custo é:

(2.9) $Max\ X = \{X : W'L + P'M \geq C\ (X,P,W)$ para todos os preços positivos}

O problema acima eventualmente pode não reconstruir exatamente a tecnologia da empresa, para o caso em que função de produção tenha segmentos não côncavos. Mas, essa possibilidade não importa, pois se admitido o comportamento de minimização de custos para empresa, tais pontos nunca serão observáveis no mercado.

Uma propriedade importante da função custo é conhecida como lema de Shephard-Uzawa. Essa propriedade permite a geração de um sistema completo de demandas derivadas a partir da especificação *a"priori"*de uma função custo:

$$(2.10)\quad \frac{\partial C}{\partial W} = \hat{L}\ (X,P,W) \text{ e}$$

$$\frac{\partial C}{\partial P} = \hat{M}\ (X,P,W)$$

3.1 Mudanças nos Preços

A teoria até aqui apresentada permite a dedução de alguns resultados importantes da estática-comparativa.

Substituindo *(2.6)* na condição de 1a. ordem de mínimo custo temos:

$$(2.11)\quad X = X\ (\hat{L},\hat{M})$$

$$W = \hat{\lambda} X_L\ (\hat{L},\hat{M})$$

$$P = \hat{\lambda} X_M\ (\hat{L},\hat{M})$$

Tomando-se a derivada de *(2.11)* com relação ao vetor W chega-se ao sistema:

$$(2.12)\quad 0_{1n} = 0\,\frac{\lambda_W}{\lambda} + X'_L\, L_W + X'_M\, M_W$$

$$\frac{1}{\lambda} I_n = X_L\,\frac{\lambda_W}{\lambda} + X_{LL}\, L_W + X_{LM}\, M_W$$

$$0_{mn} = X_M\,\frac{\lambda_W}{\lambda} + X_{ML}\, L_W + X_{MM}\, M_W \quad (7)\ (8)$$

Cuja solução é dada por:

$$(2.13)\quad \begin{bmatrix} \frac{\lambda_W}{\lambda} \\ L_W \\ M_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & X'_L & X'_M \\ X_L & X_{LL} & X_{LM} \\ X_M & X_{ML} & X_{MM} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{1n} \\ \frac{1}{\lambda} I_n \\ 0_{mn} \end{bmatrix}$$

Representando os blocos da matriz inversa acima por superescrito temos:

$$(2.14)\quad L_W = \frac{\partial \hat{L}}{\partial W} = \frac{1}{\lambda} X^{LL} \qquad \left(\frac{\partial \hat{L}i}{\partial W_j} = \frac{1}{\lambda} X^{LL}_{ij}\right)$$

$$M_W = \frac{\partial M}{\partial W} = \frac{1}{\lambda} X^{ML} \;.\; \left(\frac{\partial \hat{M}i}{\partial W_j} = \frac{1}{\lambda} X^{ML}_{ij}\right)$$

De forma equivalente com relação à alterações nos preços P dos insumos intermediários, a derivação de *(2.11)* com relação à P conduz ao seguinte sistema.

$$(2.15)\quad O_{1m} = 0\,\frac{\lambda_P}{P} + X'_L\,L_P + X'_M\,M_P$$

$$O_{nm} = X_L\,\frac{\lambda_P}{P} + X_{LL}\,L_P + X_{LM}\,M_P$$

$$\frac{1}{\lambda}\,I_m = X_M\,\frac{\lambda_P}{P} + X_{ML}\,L_P + X_{MM}\,M_P,$$

Com solução dada por:

$$(2.16)\quad \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_P}{\lambda} \\ L_P \\ M_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & X'_L & X'_M \\ X_L & X_{LL} & X_{LM} \\ X_M & X_{ML} & X_{MM} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} O_{1m} \\ O_{nm} \\ \dfrac{1}{\lambda}\,I_m \end{bmatrix}$$

ou

$$(2.17)\quad L_P = \frac{\partial \hat{L}}{\partial P} = \frac{1}{\lambda}\,X^{LM} \qquad \left(\frac{\partial \hat{L}i}{\partial P_j} = \frac{1}{\lambda}\,X^{LM}_{ij}\right)$$

$$M_P = \frac{\partial \hat{M}}{\partial P} = \frac{1}{\lambda}\,X^{MM} \qquad \left(\frac{\partial \hat{M}i}{\partial P_j} = \frac{1}{\lambda}\,X^{MM}_{ij}\right)$$

Tomando-se as elasticidades de substituição parcial, definidas por Allen (1938), como sendo:

$$(2.18)\quad \sigma^{MM}_{ij} = \frac{X'_M\,\hat{M} + X'_L\,\hat{L}}{m_i\,m_j}\,X^{MM}_{ij} \quad \text{(entre insumos intermediários),}$$

$$\sigma^{LL}_{ij} = \frac{X'_M\,\hat{M} + X'_L\,\hat{L}}{\ell_i\,\ell_j}\,X^{LL}_{ij} \quad \text{(entre fatores primários),}$$

$$\sigma_{ij}^{LM} = \frac{X'_M \hat{M} + X'_L \hat{L}}{\ell_i \; m_j} X_{ij}^{LM} \quad \text{(intermediários e primários) e}$$

$$\sigma_{ij}^{ML} = \frac{X'_M \hat{M} + X'_L \hat{L}}{m_i \; \ell_j} X_{ij}^{ML} \quad \text{(primários e intermediários),}$$

a substituição de *(2.17)* e *(2.14)* conduz a:

$$\sigma_{ij}^{MM} = \frac{X'_M \hat{M} + X'_L \hat{L}}{m_i \; m_j} \lambda \frac{\partial Mi}{\partial p_j}$$

$$(2.19) \quad \sigma_{ij}^{LL} = \frac{X'_M \hat{M} + X'_L \hat{L}}{\ell_i \; \ell_j} \lambda \frac{\partial Li}{\partial w_j}$$

$$\sigma_{ij}^{LM} = \frac{X_{M'} \hat{M} + X'_L \hat{L}}{\ell_i \; m_j} \lambda \frac{\partial Li}{\partial p_j}$$

$$\sigma_{ij}^{ML} = \frac{X'_M \hat{M} + X'_L \hat{L}}{m_i \; \ell_j} \lambda \frac{\partial Mi}{\partial w_j}$$

Como no ponto de mínimo custo, as condições de primeira ordem *(2.3)* garantem a proporcionalidade entre preços dos fatores e insumos e as produtividades marginais, então:

$$(2.20) \quad \sigma_{ij}^{MM} = \frac{P'\hat{M} + W'\hat{L}}{m_i \; m_j} \frac{\partial \hat{M}i}{\partial p_j} = \frac{C}{m_i \; m_j} \frac{\partial \hat{M}i}{\partial p_j} = \frac{C}{(\frac{\partial C}{\partial p_i})(\frac{\partial C}{\partial p_j})} \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \; \partial p_j}$$

$$\sigma_{ij}^{LL} = \frac{P'\hat{M} + W'\hat{L}}{\ell_i \; \ell_j} \frac{\partial \hat{L}i}{\partial w_j} = \frac{C}{\ell_i \; \ell_j} \frac{\partial \hat{L}i}{\partial \hat{w}_j} = \frac{C}{(\frac{\partial C}{\partial w_i})(\frac{\partial}{\partial w_j})} \frac{\partial^2 C}{\partial w_i \; \partial w_j}$$

$$\sigma_{ij}^{LM} = \frac{p'\hat{M} + w'\hat{L}}{\ell_i \, m_j} \; \frac{\partial \hat{L}_i}{\partial p_j} = \frac{C}{\ell_i \, m_j} \; \frac{\partial \hat{L}_i}{\partial p_j} = \frac{C}{\left(\frac{\partial C}{\partial w_i}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial p_i}\right)} \; \frac{\partial^2 C}{\partial w_i \, \partial p_j}$$

$$\sigma_{ij}^{ML} = \frac{p'\hat{M} + w'\hat{L}}{m_i \, \ell_j} \; \frac{\partial \hat{M}_i}{\partial w_j} = \frac{C}{m_i \, \ell_j} \; \frac{\partial \hat{M}_i}{\partial w_j} = \frac{C}{\left(\frac{\partial C}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial w_j}\right)} \; \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \, \partial w_j}$$

Multiplicando e dividindo simultaneamente pelas demandas e preços chega-se ao seguinte resultado:

$$(2.21) \quad \sigma_{ij}^{MM} = \frac{\eta_{ij}^{MM}}{\Theta_M \, \Theta_{Mj}} \quad \text{ou} \quad \eta_{ij}^{MM} = \frac{\partial \ln \hat{M}_i}{\partial \ln p_j} = \Theta_M \, \Theta_{Mj} \, \sigma_{ij}^{MM} \, ;$$

$$\sigma_{ij}^{LL} = \frac{\eta_{ij}^{LL}}{\Theta_L \, \Theta_{Lj}} \quad \text{ou} \quad \eta_{ij}^{LL} = \frac{\partial \ln \hat{L}_i}{\partial \ln w_j} = \Theta_L \, \Theta_{Lj} \, \sigma_{ij}^{LL} \, ;$$

$$\sigma_{ij}^{LM} = \frac{\eta_{ij}^{LM}}{\Theta_M \, \Theta_{Mj}} \quad \text{ou} \quad \eta_{ij}^{LM} = \frac{\partial \ln \hat{L}_i}{\partial \ln p_j} = \Theta_M \, \Theta_{Mj} \, \sigma_{ij}^{LM},$$

$$\sigma_{ij}^{LM} = \frac{\eta_{ij}^{ML}}{\Theta_L \, \Theta_{Lj}} \quad \text{ou} \quad \eta_{ij}^{ML} = \frac{\partial \ln \hat{M}_i}{\partial \ln w_j} = \Theta_L \, \Theta_{Lj} \, \sigma_{ij}^{ML},$$

onde: Θ_m e Θ_L são respectivamente as participações dos insumos intermediários e dos fatores primários não custo ótimo total, Θ_{mj} a participação do insumo intermediário j no custo mínimo dos insumos intermediários e analogamente para os fatores primários com relação à Θ_{Lj}.

A importância das expressões acima é que os mesmos resultados de estática-comparativa obtidos a partir da estimação de funções de produção, podem ser conseguidos a partir da função custo, com a vantagem que para a última não é necessário inverter a matriz do Hessiano orlado e assim propagar erros das estimativas através de transformações não lineares.

3.2 Mudanças no Nível de Produto

As respostas das demandas derivadas para variações no nível de produto podem ser facilmente mostradas a partir da derivação do sistema *(2.11)* (condição da 1a. ordem) com relação do nível X de produto:

$$(2.22)\quad 1 = 0\,\frac{\lambda_X}{\lambda} + X'_L\,L_X + X'_M\,M_X$$

$$0_{n1} = X_L\,\frac{\lambda_X}{\lambda} + X_{LL}\,L_X + X_{LM}\,M_X$$

$$0_{m1} = X_M\,\frac{\lambda_X}{\lambda} + X_{ML}\,L_X + X_{MM}\,M_X,$$

cuja solução é dada por:

$$(2.23)\quad \begin{bmatrix} \frac{\lambda_X}{\lambda} \\ L_X \\ M_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & X'_L & X'_M \\ X_L & X_{LL} & X_{LM} \\ X_M & X_{ML} & X_{MM} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{n1} \\ 0_{m1} \end{bmatrix}$$

Ou seja

$$(2.24)\quad L_X = X^L \qquad \left(\frac{\partial \hat{L}i}{\partial X} = X_i^L\right)$$

$$M_X = X^M \quad \text{(9)} \qquad (\frac{\partial \hat{M}i}{\partial X} = X_i^M)$$

Note também que como pelo lema de Shephard-Uzawa

$$(2.25) \quad \frac{\partial C}{\partial wi} = \hat{L}_i \text{ e } \frac{\partial C}{\partial p_i} = \hat{M}_i \text{ então:}$$

$$(2.26) \quad \frac{\partial Li}{\partial X} = \frac{\partial^2 C}{\partial w_i \, \partial X} = \frac{\partial}{\partial w_i} (\frac{\partial C}{\partial X})$$

$$\frac{\partial \hat{M}i}{\partial X} = \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \, \partial X} = \frac{\partial}{\partial p_i} (\frac{\partial C}{\partial X}).$$

Como $\partial C/\partial X$ é o custo marginal da empresa, o acréscimo na demanda derivada do insumo intermediário (fator primário) i devido ao aumento do produto é igual ao aumento do custo marginal devido à elevação do preço do insumo i (fator i).

Em termos de elasticidades os resultados acima demonstrados ficam:

$$(2.27) \quad \varepsilon_i^L = \frac{\partial \ell n \hat{L}_i}{\partial \ell n X} = \frac{\partial L_i}{\partial X} \frac{X}{L_i} = X_i^L \frac{X}{L_i} = \frac{\partial^2 C}{\partial W_i \, \partial X} \frac{X}{L_i} = \frac{\partial CM_g}{\partial W_i} \frac{X}{\frac{\partial C}{\partial W_i}}$$

$$\varepsilon_i^M = \frac{\partial \ell n \hat{M}_i}{\partial \ell n X} = \frac{\partial M_i}{\partial X} \frac{X}{M_i} = X_i^M \frac{X}{M_i} = \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \, \partial X} \frac{X}{M_i} = \frac{\partial CM_g}{\partial p_i} \frac{X}{\frac{\partial C}{\partial W_i}}$$

3.3 Diferencial Total da Demanda Derivada

Diferenciando-se totalmente com relação ao tempo a expressão *(2.10)*, que contém as demandas derivadas por insumos intermediários e fatores primários, chega-se a:

$$(2.28) \quad \dot{m}_i = \varepsilon_i^M \dot{x} + \sum_j \eta_{ij}^{MM} \dot{p}_j + \sum_j \eta_{ij}^{LM} \dot{w}_j \quad \text{e}$$

$$\dot{\ell}_i = \varepsilon_i^L \dot{x} + \sum_j \eta_{ij}^{ML} \dot{p}_j + \sum_j \eta_{ij}^{MM} \dot{w}_j$$

3.4 Exemplo de Aplicação

Vamos mostrar como podem ser estimadas as funções demanda derivadas tanto de insumos intermediários, como dos fatores primários. Para tanto usaremos uma forma funcional flexível bastante utilizada ultimamente nos trabalhos econométricos de produção e consumo. Essa forma é conhecida como translog e se deve basicamente aos trabalhos de Christensen, Jorgenson e Lau (1971).

Para simplificar a exposição, será feita uma alteração da notação:

$$V = \begin{bmatrix} M \\ L \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix}, \text{ ou seja,}$$

os vetores V e R englobam respectivamente as quantidades e preços dos insumos intermediários e dos fatores primários.

A expressão da função custo translog é dada por:

$$(2.29) \quad \ell n C = \gamma_0 + \gamma_X \ell n X + \sum_i \gamma_i \ell n R_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \gamma_{ij} \ell n R_i \ell n R_j +$$

$$+ \sum_i \gamma_{iX} \ell n R_i \ell n X,$$

onde $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$.

Para que *(2.29)* seja homogênea de grau 1 em preços é necessário que:

$$(2.30) \quad \sum_i \gamma_i = 1 \qquad \sum_i \gamma_{ij} = \sum_j \gamma_{ij} = 0.$$

Em *(2.29)*, a derivada de ℓnC com relação à $\ell n\ R_j$ é dada por:

$$(2.31) \quad \frac{\partial \ell nC}{\partial R_j} = \frac{\partial C}{\partial R_j}\ \frac{Rj}{C}$$

Utilizando-se o lema de Shephard-Uzawa em *(2.31)* chega-se a:

$$(2.32) \quad \frac{\partial \ell nC}{\partial R_j} = \frac{\partial C}{\partial R_j}\ \frac{R_j}{C} = \frac{V_j\ R_j}{C} = \Theta_j$$

Ou seja, a derivada do lado esquerdo da translog com relação ao log do preço é igual à participação do fator ou insimo no custo total.

Assim, o sistema a ser estimado é dado por:

$$(2.33) \quad \Theta_i = \gamma_i + \sum_j \gamma_{ij}\ \ell n\ R_j + \gamma_{ix}\ \ell n\ X, \quad i=1,\ldots,m+n.$$

Note que no caso da função custo translog, as únicas variáveis necessárias para a estimação do modelo são os preços, o produto e as participações dos insumos intermediários e fatores primários no custo de produção. Informações de nível de utilização de insumos e fatores, em geral mais complicados de serem mensurados, são desnecessários.

As elasticidades de substituição do modelo custo translog são dadas diretamente por:

$$(2.34)\quad \eta_{ij} = \frac{1}{\Theta_i\ \Theta_j}\ \gamma_{ij} + 1 \text{ para } i \neq j \text{ e}$$

$$\eta_{ij} = \frac{1}{\Theta_i^2}\ (\gamma_{ii} + \Theta_i^2 - \Theta_i),$$

ou seja, elas prescindem da inversão da matriz do Hessiano orlado da função de produção.

As elasticidades preço da demanda de fatores são dadas por:

$$(2.34)\quad \eta_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\Theta_i} + \Theta_j \text{ para } i \neq j \text{ e}$$

$$\eta_{ii} = \frac{\gamma_{ii}}{\Theta_i} + \Theta_i - 1$$

NOTAS

(1) Essa proposição decorre de um famoso teorema matemático, o teorema de Minkowski. Ver Rockafellar (1970) sobre o teorema de Minkowski.

(2) Notação:
a) O_K é o vetor nulo $Kx1$;
b) Se x e y são vetores então:
$x>>y$ implica que $x_i > y_i$ qualquer i,
$x>y$ implica que $x_i \geq y_i$ qualquer e $x \neq y$,
$x \geq y$ implica que $x_i \geq y_i$ qualquer i.

(3) Pode-se relaxar bastante essas características da função de produção, trabalhando inclusive com outras representações tecnológicas, como por exemplo, conjuntos de possibilidade de produção. Veja McFadden (1978, pp. 62-64), axiomas 1 a 3.

(4) Notação:

$$X_L = \begin{bmatrix} \partial X/\partial \ell_1 \\ \vdots \\ \partial X/\partial \ell n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial R}{\partial L} = \begin{bmatrix} \partial R/\partial \ell_1 \\ \vdots \\ \partial R/\partial \ell n \end{bmatrix}$$

(5) Notação

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 \\ \vdots \\ \hat{m}_m \end{bmatrix}$$

(6) Veja Shephard (1953, 1970), por exemplo.

(7) Notação: I_n = matriz identidade de ordem nxm. O_{mn} é a matriz nula de ordem mxn. X_{LL}, X_{LM}, X_{ML} e X_{MM} são as matrizes das derivadas segunda da função de produção. L_W, M_W e λ_W são matrizes das derivadas das demandas em relação ao vetor de preços W. Apóstrofe em cima da matriz significa transposição desta.

(8) Note que a matriz de blocos $\begin{bmatrix} O & X'_L & X'_M \\ X_L & X_{LL} & X_{LM} \\ X_M & X_{ML} & X_{MM} \end{bmatrix}$, representa a matriz do Hessiano orlado da função de produção X (derivadas de segunda ordem, a serem usados nas elasticidades e derivadas de primeira ordem).

(9) Notação: X^L e X^M correspondem respectivamente aos vetores da inversa da matriz Hessiana Orlada.

QUARTA PARTE
MODELO LINEAR DE PRODUÇÃO

CAPÍTULO 4

MODELO LINEAR DE PRODUÇÃO

Uma outra classe de modelos bastante útil na análise de produção tem como cerne a metodologia de insumo-produto.

O ponto central dos modelos de insumo produto é o reconhecimento da interdependência dos vários setores produtivos entre si. Para que seja gerada uma unidade líquida de um determinado produto é necessário que antes sejam produzidos os insumos, e antes destes os insumos dos insumos, e assim por diante, formando uma cadeia interminavel de relações entre os setores produtivos.

O modelo aqui apresentado corresponde a uma versão ampliada do modelo de insumo-produto comumente utilizado na literatura. O desenvolvimento deste modelo, a partir de uma matriz de contabilidade social, foi feito por *Pyatt*, *Roe* et alli (1977) e *Pyatt* e *Round* (1977, 1978), tendo sido aplicado no Brasil em estudos de geração de emprego por *Prado* e *Kadota* (1982) e *Prado* (1982).

A característica mais importante do modelo de *Pyatt* está no fato em que nele estão computados não apenas os efeitos multiplicadores da interdependência setorial, conhecidos como multiplicadores de *Leontief*, como também dos multiplicadores Keynesianos. O aumento de produto tem como contrapartida um aumento no fluxo de renda da economia. Esse acréscimo de renda volta em parte à economia materializado sob a forma de um aumento no consumo, que por sua vez aumenta o produto e assim por diante, configurando o que se conhece como os efeitos multiplicadores de *Leontief*.

4.1. Matriz de Contabilidade Social

O modelo aqui apresentado tem como ponto de partida uma matriz conhecida como Matriz de Contabilidade Social. Essa matriz descreve, para uma dada sociedade, os fluxos monetários e de bens ocorridos dentro de um determinado período.

Matriz de Contabilidade Social

	Gastos: Formas de Renda	Gastos: Famílias	Gastos: Contas Exógenas	Gastos: Setores Produtivos	Totais
Formas de Renda				$\overset{*}{v}$ $(m \; x \; n)$	y^v $(m \; x \; 1)$
Famílias	$\overset{*}{R}$ $(k \; x \; m)$	$\overset{*}{S}$ $(k \; x \; k)$	s $(k \; x \; 1)$		y^F $(k \; x \; 1)$
Contas Exógenas	ℓ' $(1 \; x \; m)$	p' $(1 \; x \; k)$		t' $(1 \; x \; n)$	y^E $(1 \; x \; 1)$
Setores Produtivos		$\overset{*}{C}$ $(n \; x \; k)$	G $(n \; x \; 1)$	$\overset{*}{A}$ $(n \; x \; n)$	y^S $(n \; x \; 1)$
Totais	$(y^v)'$ $(1 \; x \; m)$	(y^F) $(1 \; x \; k)$	y^E $(1 \; x \; 1)$	$(y^S)'$ $(1 \; x \; n)$	

Obs: Os números abaixo de cada matriz representam a ordem da matriz.

A renda derivada do processo produtivo nos n setores da economia são divididas em m tipos diferentes pela matriz $\overset{*}{V}$, sendo que os totais de cada tipo de renda são dados no vetor y^v. A matriz $\overset{*}{K}$ mostra como essas m formas de renda que compõe o valor adicionado do produto se repartem em k tipos de famílias. A matriz $\overset{*}{S}$ mostra as transferências entre famílias para o pagamento de serviços (serviços domésticos, médicos, dentistas, etc).O vetor s mostra as transferências para os k tipos de famílias do setor Governo e do setor externo(=Resto do Mundo).A soma em linha das famílias resulta no vetor de renda familiar y^F

por tipo de família. Na linha de contas exógenas, o vetor ℓ' mostra a parte do valor adicionado que é retida pelas empresas ou transferida para o exterior, não indo portanto para as famílias. O vertor p' responde pelo montante de impostos diretos pagos pelas famílias, poupança e importações de bens e serviços. O vetor t' mostra os impostos diretos pagos pelas empresas ao setor governo, mais o total de importações de bens e serviços pelas mesmas. Finalmente, o último bloco de matrizes corresponde as compras de bens e serviços por parte das famílias ($\overset{*}{C}$), setor governo exportação e investimento (G) e setores produtivos ($\overset{*}{A}$). A matriz $\overset{*}{A}$ compreende exatamente a matriz tradicional de insumo-produto. Note também, que a matriz constante da tabela mostra identidades contábeis da economia, sendo que a soma das linhas é idêntica à soma das colunas.

4.2. Especificação do Modelo

A Matriz de Contabilidade Social mostra apenas um retrato fiel dos fluxos de renda e produto ocorridos dentro da sociedade dentro de um período de tempo. Para que essa matriz possa servir de base para um modelo de simulação da economia são necessárias algumas hipóteses sobre como se comportam os vários agregados da matriz para diferentes níveis de renda e produto. A hipótese aqui feita é que a escala do modelo não afeta suas proporções internas, ou seja, que os coeficientes unitários são constantes. Para o sub-modelo intersetorial essa suposição corresponde à aceitação das hipóteses de retornos crescentes à escala e coeficientes técnicos fixos de produção. Tais hipóteses se estendem as outros blocos da Matriz de Contabilidade Social, guardadas as devidas proporções com relação a interpretação dentro de cada bloco.

A operacionalização do modelo, a partir das hipóteses acima mencionadas é dada pela divisão das colunas dos blocos Formas de Renda, Famílias e Setores Produtivos, pelos respectivos totais, chegando-se ao seguinte sistema de equações

$$
(3.1)\quad
\begin{aligned}
Iy^{v} &+ \mathbf{0}y^{F} - Vu^{S} = \mathbf{0} \\
-Ry^{v} &+ (I-S)\, y^{F} + \mathbf{0}y^{S} = s \\
\mathbf{0}y^{v} &- C\, y^{F} + (I-A)\, y^{S} = g\ ,
\end{aligned}
$$

onde V, R, S e A são as matrizes de coeficientes unitários derivadas, sob as hipóteses acima mencionadas, a partir da divisão por coluna da $\overset{*}{V}$, $\overset{*}{R}$, $\overset{*}{S}$ e $\overset{*}{A}$ pelos respectivos totais.

Escrevendo o sistema (4.1) sob a forma de matriz chega-se a

$$
(3.2)\quad
\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & -V \\ -R & (I-S) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -C & (I-A) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y^{v} \\ y^{F} \\ y^{S} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ s \\ g \end{bmatrix}
$$

, cuja solução é dada por:

$$
(3.3)\quad
\begin{bmatrix} y^{v} \\ y^{F} \\ y^{S} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & -V \\ -R & (I-S) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -C & (I-A) \end{bmatrix}^{-1}
\begin{bmatrix} 0 \\ s \\ g \end{bmatrix}
$$

Ou seja, a partir de um dado conjunto exógeno de gastos governamentais, exportações e investimento (vetor g) e das transferências governamentais e do exterior para as famílias (s) é possível obter o produto total gerado pelos setores produtivos y^{S}, o valor adicionado por tipo (salário, lucro, alugueis, juros, etc) y^{v}, e a renda por tipo de família, y^{F}.

A parcela de insumos intermediários utilizada durante o processo produtivo é dada por setor pela matriz $\overset{*}{M}$ $n \times n$, onde cada m_{ij} representa a quantidade de insumo do setor i utilizada pelo setor j:

$$
(3.4)\qquad \overset{*}{M} = A\left[y^{S}\right]^{(1)} \qquad (\overset{*}{m}_{ij} = a_{ij}\ y_{j}^{S})
$$

A utilização total da produção dos vários setores como insumo de outros setores é dada pela soma em linha da matriz M, ou seja:

$$(3.5) \qquad M = \overset{*}{M} e = A \left[y^S \right] e = A y^S \text{ ou } m_i = \sum_j y_j^S \, a_{ij} \text{ do insumo } i;$$

NOTAS

(1) Notação, vetor entre colchetes representa a matriz diagonal gerada a partir do vetor.

SUMÁRIO E CONCLUSÕES

O desenvolvimento da teoria de dualidade em microeconomia trouxe um novo vigor aos estudos empíricos de produção. As demandas derivadas e as características tecnológicas das empresas não mais precisam ser abordadas através do enfoque de função de produção. Funções derivadas de comportamento econômico das empresas encerram em si todas as características da tecnologia de produção e podem ser utilizadas para a obtenção das demandas derivadas e dos parâmetros tecnológicos. Esse desenvolvimento se deu de forma crescente a partir da década de 1970 e simplificou bastante a tarefa dos economistas. As mudanças das características ocorridas na última década nas economias ocidentais, ditas desenvolvidas ou em desenvolvimento, motivaram o aparecimento de um grande número de estudos empíricos aplicando a abordagem da dualidade, na mesma linha do trabalho pioneiro de *Nerlove* (1963).

Foram apresentados neste estudo dois modelos que se valem dos resultados da teoria de dualidade, nos capítulos 2 e 3. A principal limitação dos dois modelos é que ambos não levam em conta o papel tanto das demandas por produto final (consumidor) como da oferta de fatores, pois em ambos são dados o preço do produto, dos insumos e dos fatores. O que se está sugerindo é que uma extensão dos modelos apresentados nos capítulos 2 e 3, para modelos de equilíbrio geral - tal qual o modelo linear do capítulo 4, mas sem as restrições de constância dos coeficientes unitários pode trazer implicações valiosas para outras análises de várias questões atuais, complementando-se, assim, aquelas propostas nos capítulos 2 e 3 e tratadas em suas formas finais no capítulo 1.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEN, R.G. (1938) *Mathematical Analysis for Economists*.

BERNDT, E.R. and L.R. Christensen (1973) - "The Internal structure of functional relationships: Separability, substitution and aggregation", *RES*, vol. 40, nº 3.

BRUNO, M. (1978) "Duality, Intermediate Inputs and Value-Added", *in Production Economics: A Dual Approach To Theory and Applications* - Melvyn Fuss and Daniel McFadden Editors.

CHRISTENSEN, L.R., D. W. Jorgenson and L.J. Lau (1971). "Conjugate duality and the transcendental logarithmic functions", *Econometrica*, vol. 39, nº 4.

DIEWERT, W.E. (1978) "Hicks' Aggregation Theorem and the Existence of a Real Value - Added Function", *in Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications* - Melvyn Fuss and Daniel McFadden Editors.

__________ (1973) "Functional forms for profit and transformation functions", *JET*, vol. 6, nº 3.

HOTTELING, H. (1935) "Demand functions with limited budgets", *Econometrica*, ~~vol~~. 3.

__________ (1932) "Edgeworth's taxation paradox and the nature of demand and Supply functions", *JPE*, vol. 40, nº 5.

LAU, L.J. (1976) "A Characterization of the normalized restricted profit function", *JET*, vol 12, nº 1.

__________ (1972) "Profit functions of technologies with multiple inputs and outputs" - *RES*, vol. 54, nº 3.

LEWIS, G. (1969) "Class Notes of Derived Demand" *University of Chicago* Mimeo.

McFADDEN, D. (1978) "Cost, Revenue, and Profit Functions" *in Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications* - Melvyn Fuss and Daniel McFadden Editors.

__________ (1966) "Cost, revenue and profit functions". A cursory review" - *in Institute for Business and Economic Research ~~Working~~ Paper nº 86 - Berkeley*.

MOSAK, J. L. (1938) "Interrelations of Production, Price and Derived Demand" *JPE*, 46.

NERLOVE, M. (1963) "Returns to scale in electricity supply" *in C.F. Christ et al eds Measurement in Economics: Studies in Mathematical Economics and Econometrics in Memory of Yehuda Grunfeld*.

PRADO, E.F.S. e Décio K. Kadota (1982). "Multiplicadores de emprego no Brasil" *PPE*, abril.

PRADO, E.F.S. (1982) "Emprego e Setor Publico no Brasil" *Estudos Econômicos IPE-USP* agosto.
PYATT, G. e Round, J.J. (1978) *Keynesian Multipliers, the Leontief inverse and the distribution of income* - World Bank. mimeo.
____________ (1977) "Social accounting matrices for development planning" - *RIW*, vol. 23,nº 4, dez.
PYATT, G. e Roe, et alii (1977) *Social Accounting for development planning; with special reference to Sri Lanka.*
ROCKAFELLAR, R.T. (1970) *Convex Analysis.*
SAMUELSON, P.A. (1947) *Foundations of Economic Analysis.*
SHEPHARD, R.W. (1970) *Theory of Cost and Production Functions.*
____________ (1953) *Cost and Production Functions.*
UZAWA, H. (1964) "Duality principles in the theory of cost and production" - *IER* vo. 5, nº 2.