

PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA COM CRITÉRIOS MÚLTIPLOS: UMA  
FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA DE SELEÇÃO DE CARTEIRAS \*

LEONARDO J. LUSTOSA 1/

e

CLOVIS DE FARO 2/

Versão Revista

Setembro, 1978

1/ Professor-Assistente do Departamento de Engenharia Industrial da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - DEI/PUCRJ).

2/ Instituto de Planejamento Econômico e Social - (IPEA/INPES) e Professor Adjunto do DEI/PUCRJ.

\* Eximindo-o de responsabilidade por imperfeições remanescentes, agradecemos os comentários de Christian Stephan.

## PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA COM CRITÉRIOS MÚLTIPLOS: UMA FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA DE SELEÇÃO DE CARTEIRAS

### 1 - Introdução

Na programação matemática tradicional, um problema real é representado por uma região de soluções factíveis, usualmente implícita num conjunto de restrições, e por uma única função-objetivo, que traduz um critério de avaliação das soluções. Por outro lado, apenas raramente decisões gerenciais são tomadas com base em um único critério. Este conflito entre a multiplicidade de critérios nas decisões reais e a singularidade criterial na programação matemática, é, sem dúvida, um forte entrave à aplicação desta.

A teoria da decisão e, em especial, a modelagem de preferências sobre critérios múltiplos, oferecem uma saída para a conciliação da rigidez da programação matemática com a subjetividade e multiplicidade de critérios que caracterizam as decisões gerenciais. Até o final da década de 60, essa saída era predominantemente uma solução teórica. <sup>1/</sup> Em tese, o esquema

---

<sup>1/</sup> Algumas técnicas de caráter prático já existiam mesmo antes dos anos 60; como a bem conhecida Programação de Metas (Goal Programming), desenvolvida por Charnes e outros (1955), e uma sugestão dada por Klahr (1958). Não obstante, essas técnicas exigem que o decisor estabeleça uma ordem de prioridades absolutas para aplicação dos critérios, ou que ele atribua pesos subjetivos fixos para os mesmos. Como veremos adiante, ambos requisitos são muito restritivos.

de solução para o problema de programação matemática com crité  
rios múltiplos (PMCM) é bastante simples. Para tanto, agregam-  
se os vários critérios objetivos em um único, de natureza subje-  
tiva, via uma função-valor. Assim, a cada solução factível do  
problema corresponderá um valor numérico para cada um dos crité  
rios, o que especifica o chamado vetor de "valores criteriais ",  
ou "atributos", da solução. A função-valor traduzirá então esse  
vetor numérico em um índice, reduzindo, pois, o problema multi  
criteriais ao de um único critério.

Do ponto de vista teórico, tal esquema de redu  
ção a um único critério subjetivo não apresenta nenhum problema  
sério, uma vez que é possível demonstrar formalmente a existên  
cia de uma função-preferência para um indivíduo que tome "deci  
sões racionais". <sup>1/</sup> Ademais, essa função-preferência em muitos  
casos é passível de maximização por meio das técnicas usuais da  
programação matemática. Entretanto, é na execução dessa idéia  
que as dificuldades aparecem. O processo de determinação de uma

---

<sup>1/</sup> Em conformidade com a atual tendência na literatura, neste  
artigo usamos o termo função-valor para denominar qualquer  
função que atribua um índice de valor a cada vetor de valo  
res criteriais. Usamos o termo função-preferencia como equi-  
valente a função-utilidade ordinal (termo mais usual na lite-  
ratura de Economia). Assim, os índices de valor de uma fun  
ção-preferência indicam tão somente a ordem de preferência  
entre vetores criteriais, não tendo significado o valor numé-  
rico da diferença entre índices de valor de uma função-prefe  
rência.

A expressão "decisões racionais" é posta entre aspas porque  
"racionalidade" tem aqui um sentido muito restrito e defini  
do axiomáticamente. Para detalhes, veja Fishburn (1970).

função-preferência sobre alternativas com múltiplos atributos, é uma tarefa penosa e cansativa, não só para o analista mas, tam b êm, e principalmente, para o decisor [ Vide, por exemplo, Wehrung e outros(1976)] . <sup>1/</sup> O segundo inconveniente de se reduzir um problema de critérios múltiplos ao de um único critério por meio de uma função-valor, é de natureza psicológica. Isto porque, uma vez explicitada a função-valor do decisor, cabe ao analista usar algum método de programação matemática para determinar uma solução que maximize essa função. Desse modo, o decisor não participa ativamente nessa fase de busca de uma solução "ótima". Essa marginalização na fase de otimização, muitas vezes faz com que o decisor não tenha total confiança na solução que lhe é apresentada pelo analista.

A partir do final da década dos 60, começaram a surgir na literatura propostas de métodos iterativos para a resolução de problemas de PMCM. Nesses métodos, ao invés de se estimar uma função-preferência para posterior otimização, a obtenção de informação sobre preferências do decisor e a busca de uma solução que mais o satisfaça são integradas num só processo, no qual o decisor interage com o método em forma de um diálogo estruturado. O funcionamento desses métodos pode ser visto como uma busca orientada. Nessa busca, o decisor orienta o método reve

---

<sup>1/</sup> Uma exceção é o caso de funções lineares, quando se atribuem "pesos de importância" fixos para cada atributo. Todavia, no mais das vezes tal tipo de função-valor não se constitui sequer em aproximação razoável.

lando suas preferências locais, e o método, por sua vez, usa essa informação para gerar uma nova solução factível, quizá mais de acordo com suas preferências globais.

A abordagem interativa apresenta nítidas vantagens sobre o procedimento de decomposição do problema em duas fases: a de levantamento da função-valor, e a de sua posterior otimização. Entre essas vantagens, podemos destacar:

a) Não há necessidade de se escolher nenhuma forma particular para representar a função-valor.

b) Via de regra, a quantidade de informação sobre preferências do decisor requerida pelos métodos interativos é substancialmente inferior à necessária ao levantamento de uma função-valor. Isso significa que os métodos interativos exigem do decisor menos tempo e esforço psicológico.

c) A participação mais direta e ativa na obtenção da solução ótima, implica em maior motivação para despender seu tempo no psicologicamente penoso processo de efetuar julgamentos subjetivos. Além disso, como notamos acima, o envolvimento direto do decisor na busca de uma solução tende a aumentar a cônfiança do mesmo na solução prescrita pelo modelo.

d) O custo total de computação para o método interativo pode ser inferior ao requerido para maximizar uma função-valor; pois, neste último caso, costuma-se efetuar ainda uma análise de sensibilidade da solução obtida.

e) Em muitos casos, os métodos interativos são passíveis de implementação em um terminal de computador. Quando isto é feito, é necessário apenas que o decisor tenha uma idéia geral do funcionamento do terminal e do método para que ele possa usar o programa sem a intervenção direta do analista de pesquisa operacional [Dyer (1973)]. Isto significa mais confidencialidade e liberdade para o decisor.

O presente artigo tem como objetivo rever e ilustrar um método interativo de PMCM através de uma aplicação à seleção de Carteiras. Na segunda Seção, é efetuada uma exposição, de caráter informal e a nível quase que intuitivo, de um dos mais divulgados métodos interativos de PMCM. A seguir, na terceira Seção, é sugerida uma formulação multi-criterial para o modelo de seleção de Carteiras de Investimento, que se afigura como uma representação mais realista e precisa do problema concreto. Na quarta Seção, a título de ilustração, são apresentados alguns dos detalhes relativos a determinação da solução para uma versão reduzida do modelo.

## 2 - O Método de Frank-Wolfe Interativo

O chamado método de Frank-Wolfe interativo (MFWI), de largo uso em PMCM, é uma adaptação do conhecido algoritmo de Frank-Wolfe (1956), originalmente desenvolvido para problemas de programação quadrática. Essa adaptação, sugerida por Geoffrion (1970), baseia-se na observação de que o funcionamento

de alguns métodos de programação matemática depende, apenas, de informações locais sobre a função-objetivo. Assim, para a aplicação de tais métodos à PMCM, não é necessário que se tenha a função-valor de uma forma explícita; basta que o decisor seja capaz de fornecer informações locais sobre suas preferências, à medida que o método delas necessite.

Entre as vantagens do MFWI em relação a outros métodos interativos propostos na literatura, destacam-se sua simplicidade de implementação, bem como suas propriedades de convergência. A apresentação que se segue tem como objetivo apresentar os rudimentos do MFWI, de uma forma simples e quase intuitiva, através um exemplo hipotético. Para tanto, considere-se a formulação clássica do problema de seleção de Carteiras, devido a Markowitz (1952). Formalmente, tem-se:

$$\text{Max. } U(E_c = \sum_{i=1}^n E_i X_i, V_c = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} S_i S_j X_i X_j)$$

sujeitas às restrições

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1$$

$$0 \leq X_i \leq L_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

onde  $U$  é a função-preferência do investidor, definida sobre os valores dos critérios  $E_c$  e  $V_c$ , respectivamente o retorno esperado da Carteira e a variância desse retorno. Cada variável de de

cisão  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , representa a proporção do  $i$ -ésimo instrumento na composição da carteira; sendo  $L_i$  o máximo estabelecido institucionalmente. As constantes  $E_i$  e  $S_i$  são, respectivamente, o valor esperado e o desvio-padrão do retorno, do  $i$ -ésimo instrumento, sendo que  $r_{ij}$  denota o coeficiente de correlação entre os retornos associados aos  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo instrumentos.

É claro que, se  $U$  fosse conhecida de uma forma explícita, teríamos tão somente um problema convencional de programação não-linear com restrições <sup>1/</sup>. Para manter a característica de PMCM, é necessário supor que  $U$  não seja funcionalmente explicitada. Vamos, então, admitir que, embora o investidor não conheça a especificação de  $U$ , seu comportamento decisório reflete a existência de tal função <sup>2/</sup>.

Para nossa apresentação intuitiva do MFWI vamos

---

<sup>1/</sup> No procedimento proposto por Markowitz (1952),  $U$  também não aparece de uma forma explícita, pois usa-se artifício de gerar a chamada fronteira de eficiência; cabendo ao investidor a tarefa de, posteriormente, selecionar a Carteira eficiente que mais lhe convenha. Entretanto, além de computacionalmente mais eficiente, o método que ora descrevemos é facilmente generalizável para mais de dois critérios. Devido às dificuldades de geração e representação gráfica de uma fronteira de eficiência a mais de duas dimensões, o método de Markowitz dificilmente poderia ser generalizado para mais de dois critérios.

<sup>2/</sup> Essa hipótese é bastante razoável, uma vez que, em teoria da decisão, Cf. Fishburn (1970), se demonstra que certos "princípios de racionalidade", conjugados com algumas condições de densidade do espaço criterial, são suficientes para garantir a existência dessa função implícita.



inicialmente supor que, embora desconhecendo a função  $U$ , por um motivo qualquer sabe-se que ela é linear; isto é:

$$U (E_c, V_c) = p_1 E_c + p_2 V_c + p_3 \quad (2.1)$$

onde  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  são constantes não especificadas.

Como qualquer transformação monótona crescente na função-objetivo de um problema de programação matemática não altera a sua solução ótima, podemos simplificar as coisas fazendo  $p_3 = 0$ . Sendo  $U$  linear, as curvas de isopreferência, isto é, as curvas de nível de  $U$ , são retas paralelas. Além disso, como a preferência cresce com o valor de  $E_c$  e decresce com o de  $V_c$ , as isopreferências de  $U$  teriam o aspecto mostrado na Figura 1.

Mais uma vez usando o fato de que uma transformação monótona crescente na função-objetivo não altera a solução ótima, podemos reescrever a função-preferência na forma:

$$U (E_c, V_c) = E_c + \frac{p_2}{p_1} V_c \quad (2.2)$$

pois, sendo  $E_c$  um critério do tipo "quanto mais melhor", podemos afirmar que  $p_1 > 0$ . O significado de  $p_2/p_1$  fica, então, bem claro. Observe que  $U$  aumentará de uma unidade quer aumentemos  $E_c$  de uma unidade, quer aumentemos  $V_c$  de  $p_1/p_2$ . No jargão dos economistas,  $p_2/p_1$  é a taxa marginal de substituição de  $V_c$  por  $E_c$ ; isto é:

$$w_{V_c E_c} = \frac{\partial U}{\partial V_c} \bigg/ \frac{\partial U}{\partial E_c} = \frac{p_2}{p_1} \quad (2.3)$$

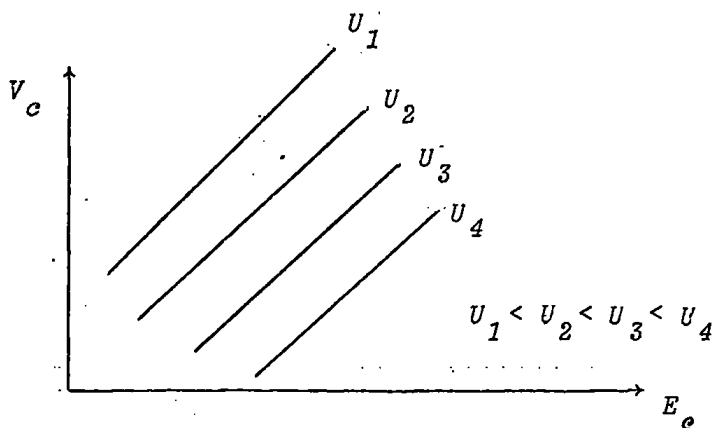


Figura 1 - Isopreferências de uma Função-Preferência Linear

Assim, tudo que necessitamos saber no caso de um investidor com função-preferência linear, é a taxa marginal de substituição, também conhecida como "taxa subjetiva de troca" (subjective tradeoff), de um critério pelo outro. Entretanto, como obter a taxa subjetiva de troca <sup>se</sup> não conhecemos  $U$  de forma explícita? Um modo simples seria o de perguntar ao investidor quantas unidades de redução de  $V_c$  lhe proporcionaria uma "satisfação" exatamente igual a um aumento de uma unidade de  $E_c$ . Segundo a interpretação acima, a resposta seria o valor de  $p_1/p_2 = 1/w_{V_c E_c}$  <sup>1/</sup>.

<sup>1/</sup> Para outras formas de estimação da taxa marginal de substituição veja-se, por exemplo, Geoffrion (1970) e Feinberg (1972).

Sumariando, vimos que, para fins de otimização, uma função-preferência bicriterial linear pode ser posta numa forma tal que um de seus dois termos seja o próprio valor de um dos critérios, critério esse tomado como referência, com o outro sendo o valor do segundo critério convertido a unidades do critério de referência via a taxa subjetiva de troca.

Geometricamente, a maximização da preferência equivale a determinar o ponto da região factível que se encontra sobre a isopreferência que corta o eixo do critério de referência no valor mais alto possível. Isso é ilustrado na Figura 2, onde vemos que não existe nenhuma isopreferência que contenha ao menos um ponto de  $F$  (imagem da região factível no espaço dos critérios) e que corte o eixo de  $E_c$  num valor superior a  $E_c^*$ . <sup>1/</sup>

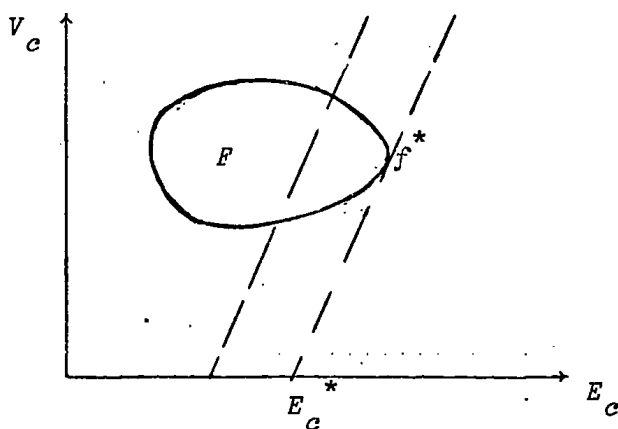


Figura 2 - Ponto Preferido sob uma Função-Preferência Linear

---

<sup>1/</sup> Note, que face a (3.2), o valor  $E_c^*$  é numericamente igual ao da função-preferência do ponto de máximo,  $f^*$ .

É importante observar que a hipótese de linearidade da função-preferência teve um papel fundamental na análise acima. Entretanto, em muitos problemas práticos, a função-preferência linear não se constitui em razoável aproximação. Não obstante, existem argumentos que levam a crer que as isopreferências de um investidor "racional" tenham a concavidade indicada na Figura 3. <sup>1/</sup>

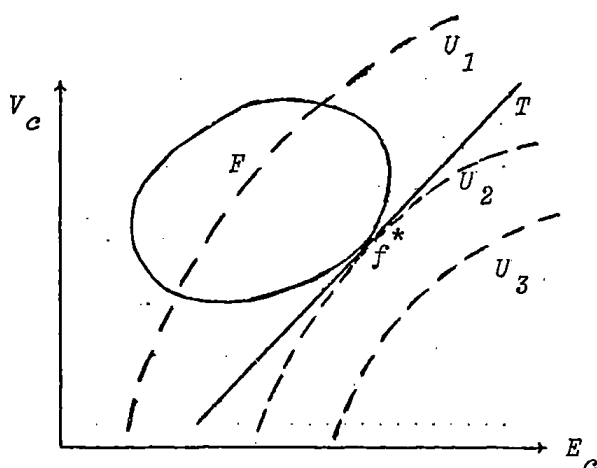


Figura 3 - Ponto Preferido sob Uma Função-Preferência Não-Linear.

Como a função-preferência é não linear, a taxa marginal de substituição não mais é constante, não sendo, pois, possível usar o tipo de análise efetuado para o caso linear. Todavia, comparando-se as Figuras 2 e 3, podemos notar um importante detalhe comum aos dois casos. Devido à convexidade da região  $F$ , aliado ao fato de que as isopreferências têm a concavidade indicada, toda a região admissível se encontra de um mesmo lado da

<sup>1/</sup> Para esses argumentos, consulte, por exemplo, Markowitz (1959)

reta tangente à isopreferência que passa pelo ponto de ótimo  $f^*$ . Como a inclinação dessa tangente em relação aos eixos coordenados é diretamente relacionada com a taxa subjetiva de troca no ponto  $f^*$ , podemos usa-la para formar, como aproximação linear local, uma função-preferência do tipo (2.2). Maximizando essa função-preferência, tal como no caso linear, obteríamos o próprio ponto  $f^*$ . Mas, como poderíamos saber a taxa subjetiva de troca no ponto  $f^*$ , se a taxa varia de ponto para ponto e o que queremos é exatamente encontrar o ponto  $f^*$ ? Bem, se essa observação não nos indica de imediato como encontrar o ponto  $f^*$ , ela ao menos nos provê um meio de identificar se um ponto qualquer de  $F$  é ou não o ponto  $f^*$ . De fato, se nos é dada uma solução qualquer  $f^0$ , podemos usar o seguinte procedimento para testar se ela é a solução  $f^*$  que procuramos: (a) Estime a taxa marginal de substituição no ponto  $f^0$ ; (b) Usando essa taxa, construa uma pseudo função-preferência do tipo (2.2); (c) Maximize essa função; (d) Se essa maximização produzir o ponto  $f^0$ , então esse ponto é de fato o máximo procurado; isto é,  $f^0 = f^*$ .

Para chegarmos ao MFWI, que faz uso das idéias acima expostas, consideremos, inicialmente, o que Boyd (1970) chamou de Método de Aproximações Sucessivas, e que pode ser descrito através a seguinte seqüência de passos.

*Passo 1* - Escolha uma solução arbitrária qualquer para ser o ponto de operação.

*Passo 2* - Obtenha do investidor uma estimativa

da taxa subjetiva de troca no ponto de operação.

*Passo 3* - Construa uma pseudo função-preferência linear do tipo dado por (2.2).

*Passo 4* - Otimize a pseudo função-preferência, observando-se as restrições do modelo. No caso do nosso exemplo, isso seria feito através de um algoritmo de programação quadrática, pois que a pseudo função-preferência é função do quadrado das variáveis de decisão,  $X_1, X_2, \dots, X_n$

*Passo 5* - Se a solução ótima do Passo 4 for o próprio ponto de operação, pare; o ponto de operação é o ponto mais preferido. Caso contrário, tome essa solução ótima como o novo ponto de operação e volte para o Passo 2.

A pergunta que imediatamente surge é se o algoritmo acima definido converge; isto é, se ele realmente produz sempre a solução preferida. Infelizmente, a resposta nem sempre é afirmativa. A Figura 4 ilustra um caso de não convergência.

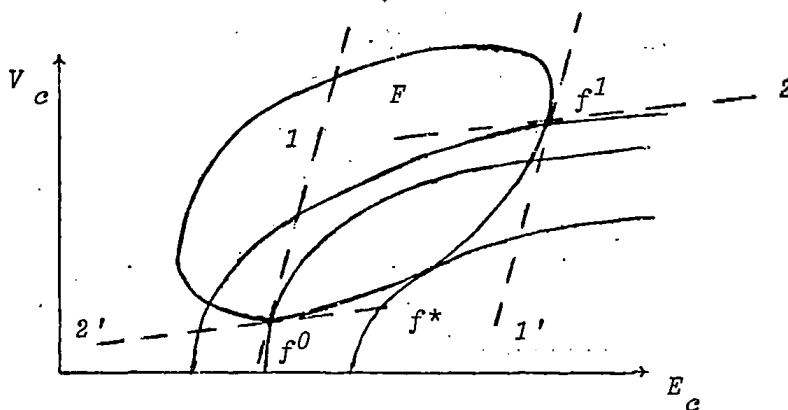


Figura 4 - Caso de Não-Convergência

Partindo do ponto  $f^0$  obteve-se a taxa marginal de substituição local, que determina a inclinação da isopreferência que passa por  $f^0$ . As isopreferências da pseudo função-preferência associada a essa taxa são representadas pela família de retas paralelas à reta 1. A maximização dessa pseudo função-preferência produz o ponto  $f^1$ , cuja otimalidade é caracterizada pelo fato de que a pseudo isopreferência representada pela reta 1' é tangente à região admissível  $F$ . Como  $f^1 \neq f^0$ ,  $f^1$  passa a ser o novo ponto de operação; como prescrito no Passo 5. Repetindo-se o ciclo para o ponto  $f^1$ , obtem-se, como indicado na Figura 4, o ponto inicial  $f^0$ , que voltará a ser o ponto de operação. Desse modo, o algoritmo ficará sempre oscilando entre os pontos  $f^0$  e  $f^1$ , sem jamais alcançar a solução preferida  $f^*$ .

Para evitar a possibilidade acima descrita, é suficiente que se assegure que cada solução obtida seja melhor que a anterior, o que pode ser conseguido através do que em programação matemática se denomina relaxamento. A idéia básica é de dar um passo menor do que o indicado pela otimização da pseudo função-preferência, de modo a garantir que, se o ponto de operação não for ótimo, um ponto melhor será obtido. Na Figura 4, se ligarmos os pontos  $f^0$  e  $f^1$ , vemos que, apesar de  $f^1$  situar-se numa isopreferência mais baixa do que a que passa por  $f^0$ , teremos pontos no segmento de reta  $f^0 - f^1$  que serão superiores a  $f^0$ ; pois que esse segmento corta duas vezes a isopreferência que passa por  $f^0$ . Essa observação, feita sobre o caso particular da Figura 4, é consequência do fato de que a região  $F$  é convexa e

de que a concavidade das isopreferências seja voltada no sentido do crescimento da preferência. Dadas essas duas premissas, pode-se demonstrar que, ao menos que o ponto  $f^0$  seja o ótimo ( o que seria forçosamente revelado no Passo 5, obtendo-se  $f^1 \equiv f^0$  ), existem pontos no segmento  $f^0 - f^1$  que são superiores a  $f^0$ . <sup>1/</sup>

Fundamentando-se no acima observado, o método de Frank e Wolfe prescreve uma busca ao longo do segmento  $f^0 - f^1$  visando localizar o ponto de maior preferência dentre deste segmento. Entretanto, no nosso caso, como efetuar essa busca, se não conhecemos explicitamente a função-preferência? Geoffrion (1970) e Feinberg (1972) fazem várias sugestões. A experiência [veja Feinberg (1972), Agarwal (1973) e Wallenius (1975)] indica que um modo fácil e satisfatório é apresentar os pares de valores criteriais associados a pontos regularmente espaçados no intervalo  $f^0 - f^1$ , cabendo ao decisor escolher o ponto que mais lhe agrade.

O fato de o método de Frank e Wolfe garantir que cada solução gerada seja melhor do que a anterior, não basta. As melhoras sucessivas podem tornar-se cada vez menores de modo que a convergência do método fique assintótica; isto é, embora as soluções sucessivas se aproximem indefinidamente do ótimo, es

---

<sup>1/</sup> As premissas aqui apontadas são suficientes para demonstrar o nosso argumento, mas não são realmente necessárias, pois existem outras condições que garantem o mesmo resultado. Para essas outras condições veja Geoffrion e outros (1972).



te jamais é atingido. Entretanto, na prática, esse problema não se apresenta; pois que, devido às imprecisões do julgamento subjetivo, torna-se improdutivo prosseguir com o método quando as melhoras ficam muito pequenas [ veja Lustosa (1978) ]. Usualmente, o número de iterações até o término do método é inferior a seis.

### 3 - Uma Formulação Multicriterial do Problema de Determinação de Carteiras para Fundos Mútuos.

Buscando tirar proveito da flexibilidade ensejada pela adoção da técnica de PMCM, a formulação que ora iremos sugerir para o problema de seleção de Carteiras de investimentos para um Fundo Mútuo, resulta de uma mescla dos modelos respectivamente desenvolvidos por Lee e Lerro (1973) e por Stone (1973). Como se fará evidente, a combinação resultante não só afigura-se como mais representativa do que cada um desses dois modelos isoladamente, como permitirá soluções que melhor refletem as preferências do analista.

#### 3.1 - Fundamentos: os primeiros três momentos da distribuição do retorno da Carteira.

Considerando-se o caso de  $n$  distintos instrumentos de investimento, seja  $\tilde{R}_i$  a variável aleatória que representa o retorno associado ao  $i$ -ésimo instrumento. Então, como origi

nalmente sugerido por Markowitz (1959, pp. 96-101), e adotando-se o modelo de um único índice, designado por  $\bar{I}$  e que é um indicador do comportamento do mercado como um todo, suponha-se seja válida a seguinte especificação: <sup>1/</sup>

$$\bar{R}_i = A_i + B_i \bar{I} + \tilde{\epsilon}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

onde  $A_i$  e  $B_i$  são constantes estimadas por regressão linear, e  $\tilde{\epsilon}_i$ , interpretada como a variação intrínseca do  $i$ -ésimo instrumento, é tomada como uma perturbação aleatória com média nula, variância  $V_i$  e tal que  $cov(\tilde{\epsilon}_i, \bar{I}) = cov(\tilde{\epsilon}_i, \tilde{\epsilon}_j) = 0, i \neq j$ .

Denotando-se por  $X_i$  a fração do total de recursos que é investida no  $i$ -ésimo instrumento, decorre que o retorno da Carteira de investimentos assim formada será:

$$\bar{R}_c = \sum_{i=1}^n \bar{R}_i X_i = \sum_{i=1}^n A_i X_i + B_c \bar{I} + \sum_{i=1}^n \tilde{\epsilon}_i X_i; \quad (3.2)$$

onde

$$B_c = \sum_{i=1}^n B_i X_i \quad (3.3)$$

---

<sup>1/</sup> É interessante notar que, na literatura, face à popularidade do que foi apresentado em Sharpe (1963), a especificação expressa por (3.1) é denominada de modelo de Sharpe; chamando-se de modelo Markowitz aquele onde as covariâncias entre os retornos são estimadas diretamente. Por exemplo, veja-se Frankfurter e outros (1976), onde é efetuada uma comparação entre os desempenhos dos dois modelos.

tem a conotação de resposta do retorno da Carteira a variações do mercado como um todo.

Tendo em vista as hipóteses, segue-se, então, que os dois primeiros momentos da distribuição do retorno da Carteira, média e variância, serão respectivamente iguais a:

$$E_c = E \left[ \begin{matrix} \tilde{R}_c \\ \tilde{R}_c \end{matrix} \right] = \sum_{i=1}^n A_i X_i + B_c E \left[ \begin{matrix} \tilde{I} \\ \tilde{I} \end{matrix} \right] \quad (3.4)$$

e

$$V_c = \sigma^2 \left[ \begin{matrix} \tilde{R}_c \\ \tilde{R}_c \end{matrix} \right] = \sum_{i=1}^n V_i X_i^2 + (B_c \sigma \left[ \begin{matrix} \tilde{I} \\ \tilde{I} \end{matrix} \right])^2 \quad (3.5)$$

Nos clássicos modelos de seleção de Carteiras, como os de Markowitz (1952 e 1959), Tobin (1958) e os devidos a Sharpe (1963, 1967 e 1971), somente esses dois primeiros momentos têm sido levados em conta. Entratanto, tal enfoque é bastante restritivo, pois que implica em admitir-se que ou os investidores tenham funções-utilidade <sup>1/</sup> quadrática, ou a distribuição do retorno da Carteira dependa de apenas dois parâmetros. Modernamente, face a essas limitações, alguns autores, tais como Jean (1973) e Arditti (1967), tem sugerido que características adicionais da distribuição da Carteira sejam também consideradas. Es

---

<sup>1/</sup> Aqui nos referimos às funções-utilidade ditas Bernoullianas ou de Von Neumann-Morgenstern, que têm caráter cardinal e que se aplicam a decisões que envolvem risco.

pecificamente, como na versão mais geral do modelo de Stone (1973), recomenda-se que seja incluído na análise o chamado coeficiente de assimetria, que é diretamente proporcional ao terceiro momento central da distribuição. <sup>1/</sup> Tal inclusão é justificada pelo fato de que, para dados níveis de média e de variância, os investidores prefeririam as Carteiras cujas distribuições fossem assimétricas à direita (terceiro momento central positivo).

Para incorporação do terceiro momento em nosso modelo, suponhamos adicionalmente que as perturbações aleatórias reflitam as assimetrias intrínsecas das respectivas distribuições do retorno de cada instrumento de investimento, com  $S_i^3 = E [\tilde{\epsilon}_i^3]$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ ; enquanto que a assimetria associada ao mercado como um todo seja dada por:

$$S_I^3 = E \left[ \tilde{I} - E[\tilde{I}] \right]^3 = E[\tilde{I}^3] - E^3[\tilde{I}] - 3E[\tilde{I}] \sigma^2[\tilde{I}] \quad (3.6)$$

Conseqüentemente, para a Carteira, teremos a seguinte expressão para o terceiro momento:

$$S_c^3 = E \left[ \tilde{R}_c - E_c \right]^3 = \sum_{i=1}^n S_i^3 X_i^3 + (B_c S_I)^3 \quad (3.7)$$

---

1/ Para um estudo analítico da influência do terceiro momento na determinação de Carteiras eficientes, bem como para uma explicação teórica para uma controvérsia de caráter empírico, veja-se Arditti e Levy (1975); veja-se também Granito e Walsh (1978).

### 3.2 - Estrutura do modelo

Seguindo-se Geoffrion e outros (1972), a formulação multicriterial que adotaremos para o problema de seleção de uma Carteira de investimentos para um Fundo Mútuo, terá a seguinte forma geral:

$$\max. U \left[ f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), f_3(\underline{x}), f_4(\underline{x}), f_5(\underline{x}), f_6(\underline{x}) \right], \underline{x} \in \chi$$

onde  $f_1, \dots, f_6$  denotam distintas funções criteriosais do vetor de decisão  $\underline{x}$ ;  $\chi$  é o conjunto de decisões factíveis; e  $U$  representa a função-preferência do decisor. Para que o método MFWI possa ser usado, dado que as funções criteriosais que iremos considerar são todas côncavas, iremos supor que, ao menos no trecho relevante,  $U$  seja crescente e côncava. <sup>1/</sup>

Os critérios considerados são:

#### a) Rentabilidade

Do mesmo modo que nos modelos clássicos, o primeiro critério será a seguinte função linear; que contribui positivamente para  $U$ .

---

<sup>1/</sup> Para o caso em que somente os três primeiros momentos da distribuição do retorno sejam relevantes, o que implica em uma função utilidade cúbica, a justificativa da validade teórica de tal suposição é encontrada em Levy (1969). A necessidade de dessas suposições foi mencionada na Seção 2.

$$f_1(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n A_i X_i + \left( \sum_{i=1}^n B_i X_i \right) E \left[ \tilde{I} \right] \quad (3.8)$$

b) Risco (volatilidade)

Como nos modelos de Stone (1973) e de Lee e Lerro (1973), iremos supor que a componente risco, como medida pela variância e que contribui negativamente para  $U$ , seja avaliada pelo tomador de decisões em dois distintos níveis. Isto é, distinguiremos entre a parte da variação que é atribuível ao mercado como um todo, como medida por seu desvio-padrão, e a chamada variação intrínseca, respectivamente representadas pelos dois seguintes critérios:

$$f_2(\underline{x}) = \left( \sum_{i=1}^n B_i X_i \right) \sigma \left[ \tilde{I} \right] \quad - (3.9)$$

e

$$f_3(x) = \sum_{i=1}^n V_i X_i^2$$

c) Assimetria

Similarmente ao caso da componente risco, e seguindo-se Stone (1973), admitiremos que a assimetria, como refletida pelo terceiro momento central da distribuição do retorno da Carteira e que contribui positivamente para  $U$ , também seja percebida pelo tomador de decisões sob duas distintas óticas. Sob a

primeira, teremos a parte da assimetria associada ao mercado como um todo, e que será considerada pela sua raiz cúbica, de tal forma que:

$$f_4(\underline{x}) = \left( \sum_{i=1}^n B_i X_i \right) S_I \quad (3.10)$$

Sob a segunda, teremos a parte da assimetria considerada como inerente aos instrumentos de investimento. Entretanto, para que se assegure a concavidade da correspondente função criterial, e visto que estamos tratando do caso de Fundos Mútuos, iremos adotar a aproximação sugerida por Stone, o que implica em que se tenha:

$$f_5(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n S_i^3 M_i^2 X_i \quad (3.11)$$

onde  $M_i$ , por imposição legal, é a máxima proporção em que o  $i$ -ésimo instrumento ( $i = 1, \dots, n$ ) pode entrar na composição de uma Carteira.

d) Renda corrente

Finalmente, como último argumento de  $U$ , e com contribuição positiva, iremos considerar a função criterial que reflete os dividendos gerados pela Carteira. Isto é, como na formulação de Lee e Lerro (1973), teremos:

$$f_6(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n D_i X_i \quad (3.12)$$

onde  $D_i$  é estimado como uma função dos dividendos distribuídos pelo  $i$ -ésimo instrumento;  $i = 1, \dots, n$ .

### e) Restrições

Para concluir a caracterização da estrutura do modelo, resta tão somente especificar o conjunto  $x$  de decisões factíveis. Lançando mão do apresentado em de Faro e Teixeira (1977), as restrições que devem ser obedecidas são:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad (3.13)$$

$$X_i \leq 0,05, \quad i \in K_1 \quad (3.14)$$

$$\sum_{j \in K_2} X_j \leq 0,40 \quad (3.15)$$

$$\sum_{\ell \in L_j} X_\ell \leq 0,05 \quad (3.16)$$

$$X_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.17)$$

Onde  $K_1$  designa o conjunto dos instrumentos de investimentos sob forma de ação ou debênture conversível;  $K_2$  é o conjunto de instrumentos representados por títulos de renda fixa;



e  $L_j$  simboliza o conjunto dos diferentes tipos de ações de uma mesma empresa  $j$ .

Assim, as restrições representam as seguintes exigências: (3.13) - a totalidade do fundo deverá ser investida; (3.14) - limite de investimento em instrumentos do conjunto  $K_1$  de instrumentos de renda variável (ações); (3.15) - limite no total investido em instrumentos de conjunto  $K_2$  de títulos de renda fixa; (3.16) - limite de investimento total em títulos de uma mesma empresa  $j$ ; (3.17) - não se pode investir quantidades negativas (isto é, não se admite vendas a descoberto).

#### 4 - Implementação: Um Exemplo Numérico

Para exemplificar a aplicação do método interativo na seleção de Carteiras, utilizaremos uma versão simplificada do modelo descrito na Seção 3. As funções criteriosais adotadas são:

##### a) Renda a Longo Prazo Esperada

$$L_e = f_1(\underline{x}) - f_6(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n (A_i - D_i + B_i E [\tilde{I}]) X_i \quad (4.1)$$

Esse critério se refere à rentabilidade esperada da carteira no longo prazo. Numericamente,  $L_e$  é calculado subtraindo-se da rentabilidade total esperada,  $f_1(\underline{x})$ , a renda corrente esperada,  $f_6(\underline{x})$ , obtendo-se uma função linear em  $\underline{x}$ .

b) Renda Corrente Esperada

$$C_c = f_1(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n D_i X_i \quad (4.2)$$

Esse critério corresponde ao <sup>t</sup>retorno proveniente de receitas correntes, tais como dividendos em dinheiro, juros, ganhos de capital realizáveis no curto prazo, etc. Nos dados aqui utilizados, as únicas fontes de renda corrente são dividendos em dinheiro e juros.  $C_c$  é linear em  $\underline{x}$ .

c) Volatilidade Devida ao Mercado

$$D_c = f_2(\underline{x}) = \sigma [\bar{I}] \sum_{i=1}^n B_i X_i \quad (4.3)$$

Nesse critério está representada a parte da volatilidade do retorno da carteira que é "explicada" pela volatilidade do mercado como um todo. A função  $f_2(\underline{x})$  é linear em  $\underline{x}$  e representa a volatilidade em forma de desvio padrão.

d) Volatilidade Intrínseca da Carteira

$$V_c = f_3(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n V_i X_i^2 \quad (4.4)$$

Esse critério representa a parte da volatilida-  
de do retorno que não pode ser explicada como consequência da volatilidade do mercado como um todo. Em contraste com  $D_c$ , que é

representado em forma de desvio padrão,  $V$  é representado em forma de variância.

Os critérios que no modelo geral da Seção 3 representam a assimetria da distribuição do retorno da carteira não são usados no presente exemplo. Em lugar deles, consideraremos que a distribuição do índice geral do mercado  $\tilde{I}$ , bem como a distribuição do retorno de cada instrumento de investimento, são simétricas. Essa simplificação torna o nosso exemplo mais claro e, afora dificuldades não intrínsecas ao método, a inclusão desses critérios de assimetria seria trivial.

Quanto às restrições, visando facilitar os cálculos, eliminaram-se as restrições do tipo (3.16) do modelo completo da Seção 3, e considerou-se um único título de renda fixa. Na prática, essa simplificação se dá sempre que no conjunto de instrumentos elegíveis para a Carteira existe apenas um tipo de título para cada firma, e apenas um tipo de título de renda fixa. Portanto, as restrições consideradas são:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad (4.5)$$

$$X_i \leq 0,05, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.6)$$

$$X_n \leq 0,40 \quad (4.7)$$

$$X_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.8)$$

onde o título de renda fixa é suposto ser <sup>o</sup> $n$ -ésimo instrumento.

Os parâmetros que completam a definição do exemplo foram obtidos do trabalho de Teixeira (1976) [publicados parcialmente por de Faro e Teixeira (1977)], e se encontram reproduzidos em forma adequada no Quadro 1.

QUADRO I

VALORES NUMÉRICOS DOS PARÂMETROS NO EXEMPLO.<sup>1/</sup>

$i$ (j) <sup>2/</sup>	$A_i - D_i$	$B_i$	$D_i$	$V_i$
1 (1)	0,174	0,339	0,145	0,0113
2 (2)	0,274	0,738	0,087	0,0053
3 (3)	0,034	0,567	0,041	0,0260
4 (4)	0,156	0,492	0,101	0,0332
5 (5)	0,625	0,916	0,017	0,0148
6 (6)	0,461	0,533	0,125	0,0154
7 (7)	0,145	1,011	0,017	0,0071
8 (9)	0,299	0,735	0,058	0,0042
9 (10)	0,058	0,893	0,192	0,0424
10 (11)	0,416	0,545	0,068	0,0076
11 (12)	0,226	1,115	0,047	0,0131
12 (14)	- 0,040	0,596	0,062	0,0132
13 (15)	0,642	0,981	0,070	0,0279
14 (16)	0,293	0,999	0,048	0,0090
15 (17)	0,056	0,388	0,000	0,0153
16 (18)	0,238	0,740	0,045	0,0050
17 (20)	0,397	0,966	0,024	0,0150
18 (22)	0,148	0,654	0,083	0,0082
19 (23)	0,416	0,701	0,101	0,0266
20 (24)	0,083	0,550	0,071	0,0094
21 (25)	0,448	0,726	0,221	0,0192
22 (26)	0,142	1,223	0,093	0,0190
23 (27)	0,405	1,095	0,025	0,0083
24 (28)	0,651	0,827	0,014	0,0144
25 (29)	0,323	0,540	0,064	0,0102
26 (30)	0,000	- 0,015	0,297	0,0002

$$E [\tilde{I}] = 0,036 \quad ; \quad \sigma [\tilde{I}] = 0,119$$

1/ Adaptados de Teixeira (1976);  $B_i = B_j$ ,  $V_i = V_j$ ,  $D_i = D_j S_j^2$   
 e  $A_i - D_i = G_j - D_j S_j^2$ .

2/ O índice  $j$  identifica os instrumentos listados no Quadro 1 em de Faro e Teixeira (1977).

#### 4.1 - Obtenção da Informação Subjetiva

Como visto na Seção 2, dois são os tipos de informações subjetivas usadas pelo método FWI.

- a) Taxas subjetivas de troca
- b) Ponto de maior preferência num segmento de reta no espaço dos critérios.

Os métodos aqui empregados para obtenção dessas informações foram usados com sucesso em outras aplicações do método FWI [ veja, por exemplo, Feinberg (1972), Dyer (1973) e Wallenius (1975) ] .

Sem entrar em detalhes, apresentamos abaixo os princípios do funcionamento desses métodos.

##### a) Taxas Subjetivas de Troca

Suporhamos que se deseja estimar a taxa subjetiva de troca de um critério qualquer,  $f_1$ , por um outro critério,  $f_2$ , escolhido como o de referência, num dado ponto  $\bar{f}$ . Para simplificar, vamos admitir que esses dois critérios são desejáveis, isto é, do tipo "quanto mais melhor". Essa suposição não é muito limitante pois, se um ou mais critérios for indesejável, o negativo dele será desejável. A situação pode ser visualizada através da Figura 5.

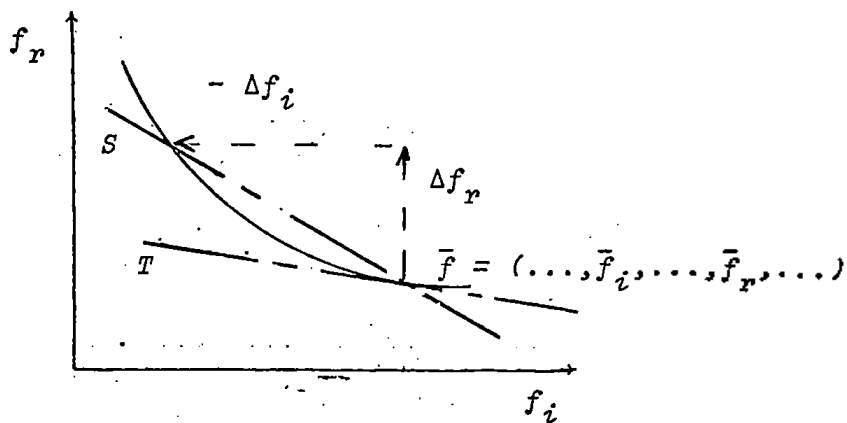


Figura 5 - Determinação da Taxa Subjetiva de Troca

Na Figura 5, estão representadas a isopreferência que passa pelo ponto  $\bar{f}$  (identificado apenas por suas componentes  $\bar{f}_i$  e  $\bar{f}_r$  no plano dos dois critérios em questão) e a reta  $T$ , tangente a essa isopreferência no ponto  $\bar{f}$ . A partir da definição, é fácil ver que a taxa subjetiva de troca de  $f_i$  por  $f_r$  no ponto  $\bar{f}$  é dada pelo negativo da tangente do ângulo que a reta  $T$  faz com o eixo de  $f_i$ . Como, na prática, não dispomos da isopreferência de um modo explícito, uma aproximação desse valor terá que ser obtida através de informações fornecidas pelo decisor. Um modo de obter essa aproximação é descrito a seguir.

1. Apresenta-se ao decisor a alternativa (isto é, os valores criteriais numericamente, ou alguma outra representação desses valores) correspondentes ao ponto de referência  $\bar{f} = (\dots, \bar{f}_i, \dots, \bar{f}_r, \dots)$
2. Acrescenta-se ao valor  $\bar{f}_r$  do critério de re

- referência um pequeno valor positivo  $\Delta f_r$ ; isto é, cria-se o ponto  $(\dots, \tilde{f}_i, \dots, \bar{f}_r + \Delta f_r, \dots)$  obviamente mais desejável que  $\bar{f}$ .
3. Através de um questionamento adequado, determina-se uma perturbação compensatória  $\Delta f_i > 0$  tal que o decisor se demonstre completamente indiferente entre as alternativas representadas pelo ponto de referência,  $(\dots, f_i, \dots, f_r, \dots)$ , e pelo ponto  $(\dots, \tilde{f}_i - \Delta f_i, \dots, f_r + \Delta f_r, \dots)$ .
4. A razão  $\Delta f_r / \Delta f_i$  é o negativo da tangente do ângulo que a reta secante,  $S$ , que passa pelo ponto  $\bar{f}$ , faz com o eixo  $f_i$ . Para pequenos valores de  $\Delta f_r$ , essa razão é uma boa aproximação da taxa subjetiva de troca que buscamos.

A julgar pela Figura 5, parece evidente que quanto menor for a perturbação  $\Delta f_r$ , melhor será a aproximação. Entretanto, isso não se dá. Perturbações muito pequenas podem deixar de ter significado subjetivo para o decisor e, por isso, invalidar a avaliação de indiferença subjetiva essencial ao método. Felizmente, alguns estudos indicam que os erros de aproximação inerentes à informação subjetiva estimada não constituem um problema muito sério para o funcionamento do método FWI; veja Feinberg (1972), Dyer (1974) e Lustosa (1978).



b) Ponto de maior preferência ao longo de um segmento de reta no espaço dos critérios.

A busca de um ponto de maior preferência ao longo do segmento de reta que, no espaço dos critérios, liga o ponto de operação ao ponto obtido pela maximização da pseudo função-preferência, não foi feita como sugerido na Seção 2. Devido à complexidade dos critérios do problema, essa busca foi feita de modo pouco estruturado, seguindo aproximadamente uma estratégia de busca binária.

É claro que no presente exemplo seria demasiado esperar que o decisor fôsse capaz de avaliar alternativas de composições de carteiras usando para isso apenas os números que representam os valores criteriais. Para auxiliá-lo nas suas avaliações, foram usados gráficos de funções de distribuição normais, com parâmetros correspondentes aos valores criteriais.

#### 4.2 - Resumo da Resolução do Exemplo

Arbitramos um peso inicial para cada critério. Multiplicando cada função criterial por seu peso, e somando, obtivemos a pseudo função-preferência (uma função quadrática) a ser maximizada. Maximizando essa função, sujeita às restrições do modelo, <sup>1/</sup> obtivemos um ponto que, na ausência de outra solu

---

<sup>1/</sup> Para tanto, lançou-se mão do algoritmo de Jucker e de Faro, (1975), tal como apresentado em de Faro e Jucker (1975).

ção, passou a ser o ponto de operação. Usando a técnica acima descrita, obtivemos do decisor uma estimativa das taxas subjetivas de troca de cada critério pelo primeiro ( $L_c$ ). Usando essas taxas como pesos, formamos uma nova pseudo função-preferência, cuja maximização sujeita às restrições do modelo nos forneceu um novo ponto, que denominamos  $f^1$ . Visando identificar um ponto mais preferido que o ponto de operação,  $f^0$ , procedemos a uma busca no segmento de reta que, no espaço dos critérios, liga  $f^0$  ao ponto  $f^1$ , produzido pela última otimização. Essa busca indicou o ponto  $f^1$  como o mais preferido pelo decisor. O ponto  $f^1$  passou, então, a ser o novo ponto de operação. De novo questionamos o decisor com vista a estimar as taxas subjetivas de troca no ponto  $f^1$ . As taxas obtidas se mostraram bastante semelhantes às anteriores, indicando uma aparente convergência. Usando essas novas taxas como pesos, formamos uma nova pseudo função-preferência, cuja maximização produziu o próprio ponto  $f^1$ , o que caracteriza o término do algoritmo.

O Quadro 2 resume o desenvolver do método na resolução do exemplo.

## QUADRO 2

RESUMO DOS VALORES NUMÉRICOS OBTIDOS  
DURANTE A SOLUÇÃO DO EXEMPLO

Valores Criteriais e Pesos

Iteração	Ponto de Operação				Taxas Subjetivas de Troca				Ótimo p/ pseudo função-preferência			
	$L_c$	$C_c$	$V_c$	$D_c$	$L_c$	$C_c$	$V_c$	$D_c$	$L_c$	$C_c$	$V_c$	$D_c$
0	-	-	-	-	1,000	1,000	-1,000	-0,100	0,3916	0,0921	0,0895	0,00043
1	0,3916	0,0921	0,0895	0,00043	1,000	1,354	-1,447	-8,090	0,3868	0,0939	0,0867	0,00033
2	0,3868	0,0939	0,0867	0,00033	1,000	1,345	-1,440	-8,174	0,3868	0,0939	0,0867	0,00033

Carteiras geradas

1º ponto de operação: 0,05 de cada instrumento, exceto os instrumentos 3,7,12,15, 18 e 20  
 2º ponto de operação: 0,05 de cada instrumento, exceto os instrumentos 3,7,11,12,15 e 20.

A convergência para a solução final nesse exemplo foi extremamente rápida. Do Quadro 2, vemos que a diferença entre a Carteira com pesos arbitrários (correspondente ao 1º ponto de operação) e a Carteira mais preferida pelo decisor (correspondente ao 2º ponto de operação) é somente a substituição do instrumento Nº 11 pelo instrumento Nº 18. Do ponto de vista dos valores criteriais, obtivemos a partir dos pesos arbitrários os valores:

Renda a longo prazo esperada	: 39,16% ao ano	
Renda Corrente esperada	: 9,21% ao ano	
Volatilidade devida ao mercado	: 29,9 % ao ano	(desvio padrão)
Volatilidade intrínseca da Carteira	: 0,04% ao ano	(desvio padrão)

Para a Carteira mais preferida esses atributos são respectivamente 38,68; 9,36; 29,4 e 0,03. Vemos, assim, que apesar de as duas Carteiras possuírem atributos muito semelhantes, o decisor preferiu aquela que oferece um pouco menos de renda a longo prazo esperada e uma renda corrente esperada ligeiramente superior, além de uma volatilidade devida ao mercado e uma volatilidade intrínseca muito ligeiramente inferior.

O pequeno número de instrumentos de investimento considerados certamente contribuiu para a rapidez da convergência, mas resultados experimentais [ veja Lustosa (1978) ] indicam que o número de interações dificilmente excederá a seis.

## 5. Conclusões

A utilização de métodos interativos para a solução do problema de seleção de Carteiras de investimentos apresenta nítidas vantagens sobre as abordagens tradicionais.

A primeira vantagem, também oferecida pela técnica de Programação de Metas, é a de flexibilidade de modelagem, permitindo a consideração simultânea de mais de dois critérios de seleção. Assim, além dos tradicionais valor esperado e variância do retorno, é fácil expandir o conjunto de critérios para incluir outros aspectos tais como a renda a curto prazo, medidas de assimetria, além de uma desagregação das fontes de volatilidade do retorno.

A segunda vantagem é a oportunidade de participação ativa e direta que o método proporciona ao decisor. Uma participação mais efetiva irá propiciar ao decisor um maior entendimento do problema que se lhe apresenta. Sendo a essência desse problema um complexo balanceamento de objetivos imediatos apenas parcialmente conciliáveis dentro das possibilidades reais, um maior entendimento dos "tradeoffs" envolvidos na decisão irá, certamente, se traduzir em decisões mais de acordo com os objetivos globais do decisor.

Uma terceira vantagem é a eficiência com que o método usa o esforço computacional e, principalmente, o esforço psicológico que a solução do problema, por sua própria natureza,

requer.

A maior dificuldade na implementação do método é, sem dúvida, a obtenção da informação subjetiva. A tradução de grandezas estatísticas tão precisas e abstratas quanto média, desvio padrão e terceiro momento central de rendas sujeitas a variações aleatórias, em conceitos menos precisos e mais reais para o investidor (tais como rentabilidade, risco, competitividade, etc.) é um desafio para o analista de Pesquisa Operacional.

Assim, os métodos interativos como o aqui apresentado juntamente com o estudo do comportamento decisório real do investidor institucional, constituem um campo promissor para pesquisadores que buscam ligar a teoria à prática; o normativo ao comportacional, coisas ainda bem separadas na área de seleção de Carteiras.

REFERÊNCIAS

- Arditti, F.D., "Risk and the Required Return on Equity", The Journal of Finance, Vol. 22, Nº 1 (mar. 1967), p. 19-36.
- \_\_\_\_\_ e Levy, H., "Portfolio Efficiency Analysis in Three Moments: the Multiperiod Case", The Journal of Finance, Vol. 30, Nº 3 (jun. 1975), p. 797-807.
- Boyd, D.W., A Methodology for Analysing Decision Problems Involving Complex Assessments, Menlo Park, Califórnia: Decision Analysis Group, Stanford Research Institute, 1970.
- Charnes, A., Cooper, W.W., e Ferguson, R., "Optimal Estimation of Executive Compensation by Linear Programming", Management Science, Vol. 1, Nº 2, (jan. 1955), p. 138-51.
- de Faro, C. e Jucker, J.V., "Um Procedimento Simple e Exato para uma Formulação Especial do Problema de Seleção de Carteiras", Revista Brasileira de Mercado de Capitais, Vol. 1, Nº 2 (maio 1975), p. 301-27.
- \_\_\_\_\_ e Teixeira, J.P., "Determinação de Carteiras para Fundos Mútuos: Aplicação de um Modelo de Programação de Metas", Revista Brasileira de Mercado de Capitais, Vol. 3, Nº 7 (jan. 1977), p. 5-29.

- Dyer, J.S., "A Time-Sharing Computer Program for the Solution of the Multiple Criteria Problem", Management Science, Vol. 19, Nº 12 (ago. 1973), p. 1379-83.
- \_\_\_\_\_ "The Effects of Errors in the Estimation of the Gradient of the Frank-Wolfe Algorithm, with Implications for Iterative Programming", Operations Research, Vol. 22, Nº 1 (jan. 1974), p. 160-74..
- Feinberg, A., An Experimental Investigation of an Interactive Approach for Multi-Criterion Optimization with an Application to Academic Resource Allocation, Los Angeles, Califórnia: Western Management Science Institute, Working Paper Nº 186, University of California, 1972
- Fishburn, P.C., Utility Theory for Decision Making, New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc. 1970.
- Frank, M. e Wolfe, P., "An Algorithm for Quadratic Programming", Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 13, Nºs 1 e 2 (mar. e jun. 1956), p. 95-110.
- Frankfurter, G.M., Phillips, H.E. e Seagle, J.P., "Performance of the Sharpe Portfolio Selection Model: A Comparison", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 11, Nº 2 (jun. 1976), p. 195-204.
- Geoffrion, A.M., Vector Maximal Decomposition Programming, Los Angeles, Califórnia: Western Management Science Institute, Working Paper Nº 164, University of Califórnia, 1970.



- Geoffrion, A.M., Dyer, J.S. e Feinberg, A., "An Interactive Approach for Multi-Criterion Optimization, with an Application to the Operation of an Academic Department", Management Science, Vol. 19, Nº 4 (dez. 1972), p. 357-68.
- Granito, M. e Walsh, P., "Portfolio Efficiency Analysis in Three Moments - The Multiperiod Case: Comment", The Journal of Finance, Vol. 33, Nº 1 (mar. 1978), p. 345-48.
- Jean, W. H., "More on Multidimensional Portfolio Analysis", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 8, Nº 3 (jun. 1973), p. 475-90.
- Johnsen, E., Studies in Multiobjective Decision Models, Lund: Studentlitteratur, 1968.
- Jucker, J.V. e de Faro, C., "A Simple Algorithm for Stone's Version of the Portfolio Selection Problem", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 10, Nº 5, (dec. 1975), p. 859-70.
- Klahr, C.N., "Multiple Objectives in Mathematical Programming", Operations Research, Vol. 6, Nº 6 (dez. 1958), p. 849-55.
- Markowitz, H.M., "Portfolio Selection", The Journal of Finance, Vol. 7, Nº 1 (mar. 1952), p. 77-91.
- \_\_\_\_\_, Portfolio Selection: Efficient Diversification Investments, New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1959.

- Lee, S.M. e Lerro, A.J., "Optimizing the Portfolio Selection for Mutual Funds", The Journal of Finance, Vol. 28, Nº 5 (dec. 1973) p. 1087-101.
- Levy, H., "A Utility Function Depending on the First Three Moments", The Journal of Finance, Vol. 24, Nº 4 (Sep. 1969); p. 715-19.
- Lustosa, L.J., A Simulated Decision Maker for Testing Multi-criterion Mathematical Programming Methods, Stanford, California: tese de doutorado, Stanford University, 1978.
- Sharpe, W.F., "A Simplified Model for Portfolio Analysis", Management Science, Vol. 9, Nº 2 (jan. 1963), p. 277-93.
- \_\_\_\_\_, "A Linear Programming Algorithm for Mutual Fund Portfolio Selection", Management Science, Vol. 13, Nº 7 (mar. 1967), p. 499-510.
- \_\_\_\_\_, "A Linear Programming, Approximation for the General Portfolio Analysis Problem", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 6, Nº 5 (dez. 1971), p. 1263-75.
- Stone, B.K., "A Linear Programming Formulation of the General Portfolio Selection Problem", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 8, Nº 4 (set. 1973), p. 621-36.

- Teixeira, J.P., Seleção de Carteiras de Ações para um Fundo Mútuo: Comparações entre o Modelo de Programação de Metas, o Modelo de Sharpe e Resultados Reais Relativos a 1975, Rio de Janeiro, R.J.: tese de mestrado, Pontifícia Universidade Católica, 1976.
  
- Tobin, T., "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", The Review of Economic Studies, Vol. 25, Nº 67 (fev. 1958), p. 65-87.
  
- Wallenius, J., Interactive Multiple Criteria Decision Methods: An Investigation and an Approach, Helsink: tese de doutorado, The Helsinki School of Economics, 1975.
  
- Wherung, D.A., Hopkins, D.S.P. e Massy, W.F., Interactive Preference Optimization at Stanford University, Stanford, California: Academic Planning Office, Report Nº 76-1, Stanford University, 1976.

