TEXTO PARA DISCUSSÃO Nº 482

UM GUIA PARA MODELOS DE VALOR PRESENTE

José W. Rossi*

Rio de Janeiro, maio de 1997

* Da Diretoria de Pesquisa do IPEA e da Uerj.

Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada

O IPEA é uma fundação pública vinculada ao Ministério do Planejamento e Orçamento, cujas finalidades são: auxiliar o ministro na elaboração e no acompanhamento da política econômica e prover atividades de pesquisa econômica aplicada nas áreas fiscal, financeira, externa e de desenvolvimento setorial.

TEXTO PARA DISCUSSÃO tem o objetivo de divulgar resultados de estudos desenvolvidos direta ou indiretamente pelo IPEA, bem como trabalhos considerados de relevância para disseminação pelo Instituto, para informar profissionais especializados e colher sugestões.

ISSN 1415-4765

SERVIÇO EDITORIAL

Rio de Janeiro – RJ
Av. Presidente Antônio Carlos, 51 – 14º andar – CEP 20020-010
Telefax: (021) 220-5533
E-mail: editrj@ipea.gov.br

Brasília – DF
SBS Q. 1 Bl. J, Ed. BNDES – 10º andar – CEP 70076-900
Telefax: (061) 315-5314
E-mail: editbsb@ipea.gov.br

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO

Os modelos de valor presente têm a seguinte formulação básica [Mills (1993)]:

$$y_t = \theta(1-\delta)\sum_{i=0}^{\infty}\delta^{i+1}E\left(x_{t+i}|\phi_t\right)+c$$

indicando que y é uma função linear dos valores esperados para a variável x, os quais são descontados para o presente. Nesta equação c é uma constante, θ um coeficiente de proporcionalidade e δ um fator de desconto. A seguir discutimos vários modelos de valor presente que se aplicam a áreas tão diversas quanto as da determinação da taxa de câmbio, da demanda por moeda, da solvência do setor público, da estrutura a termo da taxa de juros, da hipótese da renda permanente e do preço das ações.

2 - O MODELO PARA A ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS[1]

Em Rossi (1996) mostram-se as circunstâncias em que se obtém a taxa de juros de longo prazo como uma função das taxas de juros de curto prazo. Para os propósitos aqui basta ressaltar que, como demonstrado em Shiller (1979), se o título for uma perpetuidade ou tiver pagamento de cupom e vencimento em n períodos, então, distintamente do caso de um título com desconto puro (cupom zero), as taxas de juros de um futuro mais próximo deveriam ter peso maior na formação da taxa de longo prazo do que as taxas de juros para um futuro mais distante. Mais especificamente no caso genérico a relação entre as taxas de curto e longo prazos proposta por Shiller é o seguinte modelo de valor presente:

$$R_t^n = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^n}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^i E_t\left(r_{t+i}\right)$$
(2.1)

Este resultado é, de fato, obtido com base na linearização, ao redor de uma constante $\alpha = 1/(1+\rho)$, da relação exata da estrutura a termo de um título com vencimento em n períodos e pagamento de cupom; aqui ρ é uma média da taxa de juros de longo prazo.[2] De fato, nesta versão o esquema de pesos adotado segue uma função exponencial truncada.

[1] Esta seção baseia-se em Rossi (1996).

[2] Cushing e Ackert (1994) ressaltam que há alguns pressupostos restritivos por trás desse resultado, dentre os quais o de um valor constante para o termo do prêmio de risco. Além disso, os autores argumentam que ao mesmo tempo em que Campbell (1986) procura defender essa equação também reconhece que a aproximação linear usada na sua derivação só seria válida caso as taxas de juros de curto prazo não variassem muito no tempo. Ocorre que, como sugere Shea (1991), a variação dessas taxas, pelo menos nos Estados Unidos do pós-guerra, é suficientemente grande para que a aproximação linear possa ser justificada.

Vê-se que se n tende a infinito (caso de uma perpetuidade), a equação acima reduz-se a:[3]

$$R_t^n = (1-\alpha)\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i E_t(r_{t+i}) \tag{2.2}$$

A derivação do resultado em (2.2) é, com base em Mankiw (1986), como a seguir. Se P_t é o preço de um perpetuidade que paga R$1,00 cada período, o seu retorno de longo prazo (**yield**) seria então:[4]

$$R_t = \frac{1}{P_t} \tag{2.3}$$

Chame agora o retorno pela retenção de uma perpetuidade por um período de H_t. Como a taxa de retorno pela retenção de uma perpetuidade entre o período t e t+1, e que paga um cupom de R$ 1,00 por período, deve levar em conta tanto o valor do cupom quanto o ganho de capital no período, tem-se:

$$H_t = \frac{1 + P_{t+1} - P_t}{P_t} \tag{2.4}$$

Levando-se em conta na equação (2.4) o retorno de longo prazo (**yield**) dado em (2.3), obtém-se:

$$H_t = R_t - \frac{1 + R_{t+1} - R_t}{R_{t+1}} \tag{2.5}$$

[3] Com taxas de juros variáveis essa equação ficaria [ver Mills(1993)]:

$$R_t^n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{j} \delta_{t+j}\right) Er_{t+i}, \quad \text{onde} \quad \delta_t = \frac{1}{(1+r_t)}$$

[4] Note-se que no período inicial esse preço seria $P_0 = \frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^n}$; ou

$$P_0 = \frac{1}{r}.$$

Os resultados em nada mudam se a perpetuidade, ao invés de pagar R$1,00, pagasse qualquer outro valor. Se tal valor fosse d, por exemplo, então $P_0 = \frac{d}{r}$.

Uma aproximação obtida pela linearização da equação (2.5) resulta em:[5]

$$H_t \cong R_t - \frac{R_{t+1} - R_i}{\rho} \tag{2.6}$$

que envolve, pois, a mera substituição no denominador da equação (2.5), isto é, do retorno de longo prazo em t+1 por uma espécie de taxa média de retorno de longo prazo, ρ.

Pela equação (2.6) vê-se que caso a taxa de retorno de longo prazo (**yield**) não se altere entre os tempos t e t+1, o retorno pela retenção de uma perpetuidade por um período seria igual à sua taxa de retorno de longo prazo. Se, por outro lado, a taxa de retorno de longo prazo aumentar (diminuir), o investidor teria uma perda (ganho) de capital quando retém a perpetuidade por um período, já que neste caso a sua taxa de retorno por manter o ativo de longo prazo durante um período seria menor (maior) do que a sua taxa de retorno de longo prazo.

Para considerar a teoria das expectativas na estrutura a termo da taxa de juros, defina-se o termo do prêmio como sendo a diferença esperada entre o retorno obtido em reter-se uma perpetuidade por um período e o retorno de um título de curto prazo r_t mais precisamente:

$$\theta_t = E_t\left(H_t - r_t\right) \tag{2.7}$$

Assim, o prêmio representa o retorno adicional por se reter um ativo de longo prazo ao invés de um ativo de curto prazo. É útil reescrever essa equação levando-se em conta a relação dada em (2.6), ou seja:

$$R_t - r_t = \frac{\left(E_t R_{t+1} - R_t\right)}{\rho + \theta_t} \tag{2.8}$$

mostrando que o **spread** entre as taxas de curto e de longo prazos reflete as mudanças tanto nas taxas de longo prazo como no termo do prêmio de risco.

Removendo o operador da esperança matemática em (2.7), o excesso de retorno pela retenção do título, H_t-r_t , pode ser escrito como:

$$R_t - r_t = \theta_t + v_{t+1} \tag{2.9}$$

[5] Se ao invés de uma perpetuidade o título vencesse em n períodos, essa equação seria [conforme Shiller (1979)]:

$$H_{t+1}^n = \frac{R_t^n - \alpha_n R_{t+1}^n}{1-\alpha_n}\ , \text{ onde } \quad \alpha_n = \alpha\frac{\left(1-\alpha^{n-1}\right)}{\left(1-\alpha^n\right)}$$

onde:

$$v_{t+1} \cong \frac{\left(R_{t+1} - E_t R_{t+1}\right)}{\rho} \tag{2.10}$$

Supondo que o termo do prêmio de risco seja constante no tempo, vem:

$$R_t - r_t = \theta + v_{t+1} \tag{2.11}$$

Quando esta equação é escrita levando-se em conta a equação (2.6), tem-se:

$$R_{t+1} - R_t = -\rho\theta + \rho\left(R_t - r_t\right) - \rho v_{t+1} \tag{2.12}$$

onde o **spread** entre as taxas de juros de curto e de longo prazos (inclinação da curva de retorno) é agora um previsor da variação na taxa de juros de longo prazo. Assim, se a inclinação da curva de retorno for positiva (negativa), segue que a taxa de retorno de longo prazo deve aumentar (cair).

A equação (2.12) pode ser alternativamente escrita como uma relação entre a taxa de longo prazo e as taxas esperadas para o curto prazo. Assim, seja inicialmente:

$$R_t = \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right) r_t + \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right) E_t R_{t+1} + \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)\theta \tag{2.13}$$

que quando resolvida recursivamente para frente produz:[6]

---

[6] Escreva a equação seqüencialmente em três períodos, por exemplo, como:

$$R_t = (1-\alpha) r_t + \alpha E_t R_{t+1} + (1-\alpha)\theta \quad (1)$$

$$R_{t+1} = (1-\alpha) r_{t+1} + \alpha E_{t+1} R_{t+2} + (1-\alpha)\theta \quad (2)$$

$$R_{t+2} = (1-\alpha) r_{t+2} + \alpha E_{t+2} R_{t+3} + (1-\alpha)\theta \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2) vem:

$$R_{t+1} = (1-\alpha) r_{t+1} + \alpha E_{t+1}\left[(1-\alpha) r_{t+2} + \alpha E_{t+2} R_{t+3} + (1-\alpha)\theta\right] + (1-\alpha)\theta \quad (4)$$

Após substituir (4) em (1) tem-se:

$$R_t = (1-\alpha) r_t + \alpha E_t\left[(1-\alpha) r_{t+1} + \alpha E_{t+1}((1-\alpha) r_{t+2} + \alpha E_{t+2} R_{t+3} + (1-\alpha)\theta\right] + (1-\alpha)\theta] + (1-\alpha)\theta =$$

$$(1-\alpha)\alpha^0 r_{t+0} + \alpha(1-\alpha) r_{t+1} + \alpha^2 + \alpha^3 (1-\alpha) R_{t+3} + \alpha^2 (1-\alpha)\theta + \alpha(1-\alpha)\theta + (1-\alpha)\theta,$$

que para n tendendo a infinito seria:

$R_t^{\infty} = (1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i E_t\, r_{t+i} + \theta$. Note-se que

$(1-\alpha)\left[1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n\right] = (1-\alpha)\left[\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\right] = 1$, pois

$$\lim_{n \Rightarrow \infty} \alpha^n = \lim_{n \Rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^n = 0.$$

$$R_t^{\infty} = \theta + (1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i E_t\, r_{t+j} \tag{2.14}$$

onde, uma vez mais, $\alpha = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)$. Isto é, a taxa de retorno (**yield**) de uma perpetuidade, R_t^{∞}, é uma média geométrica, com pesos decrescentes, das taxas futuras de juros de curto prazo. A partir desta equação obtém-se:[7]

$$R_t^{\infty} - r_t = \theta + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha^i E_t \Delta r_{t+i} \tag{2.15}$$

Desta forma, se o **spread** for elevado as futuras taxas de curto prazo devem estar em média acima da taxa corrente de curto prazo. Alternativamente, o **spread** atual entre as taxas de curto e de longo prazo é um previsor das variações futuras das taxas de curto prazo.[8]

Um aspecto útil dessa relação para o teste empírico é que, se tanto a taxa de curto prazo como a taxa de longo prazo tiverem ordem de integração igual a um, I(1), isto é, a primeira diferença das respectivas variáveis é estacionária, então o

---

[7] Esse resultado pode ser assim demonstrado. Note-se que de (2.14) vem:

$$R_t^{\infty} - r_t = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i E_t r_{t+i} - r_t - \alpha\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i E_t r_{t+i} =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^i E_t r_{t+i} - \sum_{i=1}^{\infty}\alpha^i E_t r_{t+i-1} = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha^i E_t \Delta r_{t+i}$$, pois

$$\alpha^0 E_t r_t = r_t .$$

[8] Resultado semelhante pode ser obtido do caso geral dado na equação (2.1), que por conveniência é aqui reproduzida:

$$R_t^n = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^n}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^i E_t(r_{t+i})$$

Subtraia-se λr_t de ambos os lados da equação, onde $\lambda = \frac{1}{(1-\alpha^n)}$, obtendo-se:

$$R_t^n - \lambda r_t = \lambda\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^i E_t r_{t+i} - \lambda\alpha\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^i E_t r_{t+i} - \lambda r_t$$

$$= \lambda\alpha^0 r_t - \lambda r_t + \lambda\sum_{i=1}^{n-1}\alpha^i E_t r_{t+i} - \lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha^i E_t r_{t+i-1}$$

$$\lambda\sum_{i=1}^{n-1}\alpha^i E_t r_{t+i} - \lambda\sum_{i=1}^{n-1}\alpha^i E_t r_{t+i-1} - \lambda\alpha^n E_t r_{t+n-1}$$

$$= \lambda\sum_{i=1}^{n-1}\alpha^i E_t \Delta r_{t+i} - \lambda\alpha^n E_t\, r_{t+n-1}$$

que para $\lambda=1$ e $\alpha^n=0$ produz o resultado em (2.15) [ver Mills (1991)].

spread deve ser estacionário, ou seja, há co-integração entre as taxas de curto e longo prazos, cujo vetor de co-integração é (1, -1). Isso permite mostrar, conforme se verá, que o modelo de valor presente do tipo aqui discutido equivale à estimação de um modelo VAR (**Vector Autoregressive System**) com restrições impostas nos valores dos seus parâmetros.

O Modelo da Relação entre a Taxa de Juros de Longo Prazo e a Taxa de Inflação Futura

Um segundo modelo de valor presente pode ser ainda aqui obtido tendo a taxa de juros corrente de longo prazo como previsor das taxas de inflação futura. Mais precisamente, com base na equação de Fisher e considerando a linearização do retorno de uma perpetuidade, nos moldes da discussão no contexto das equações (2.1) e (2.2), obtém-se, conforme Shiller e Siegel (1977):[9]

$$R_t^{\infty} = \rho + (1-b)\sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t \pi_{t+j} \qquad (2.16)$$

onde ρ é a taxa de juros real (constante), π é a taxa de inflação e $b = \frac{1}{1+\rho}$.

Assim como se precedeu no caso do **spread** entre as taxas de juros de curto e longo prazos dado na equação (2.15), pode-se transformar essa equação de modo

[9] Ver ainda Engsted (1995).

a torná-la mais adequada ao teste empírico. Com esse objetivo, após subtrair bπ de ambos os lados da equação vem:[10]

$$R_t - b\pi_t = \rho + \sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t \Delta\pi_{t+j} \tag{2.17}$$

Desta forma, se tanto a taxa de inflação como a taxa de juros de longo prazo forem I(1), então a diferença entre essas variáveis deve ser I(0), já que a primeira diferença da taxa de inflação seria neste caso I(0). Vale dizer, as variáveis taxa de juros e taxa de inflação devem co-integrar, com vetor de co-integração (1, -b). Assim como no caso da equação, uma vez mais, recai-se, pois, num problema de estimação de um modelo VAR com restrições nos seus parâmetros, conforme mostrado a seguir.

---

[10] Este resultado é assim obtido, primeiramente:

$R_t - b\pi_t = \rho - b\pi_t + (1-b)\sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t \pi_{t+j} = \rho + (1-b)\sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t (\pi_{t+j} - \pi_t)$, pois

$(1-b)\sum_{j=1}^{\infty} b^j \pi_t = b\pi_t$. Note-se que $(1-b)\sum_{j=1}^{\infty} b^j \pi_t = (1-b)\pi_t \sum_{j=1}^{\infty} b^j = \frac{(1-b)\pi_t}{\rho}$. Além

disso, $(1-b) = \frac{\rho}{1+\rho}$ ou $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{(1-b)(1+\rho)} = \frac{b}{1-b}$.

Ademais $\sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t(\pi_{t+j} - \pi_t) = \sum_{j=1}^{\infty} (1-b)^{-1} b^j E_t \Delta\pi_{t+j}$, pois

$(\pi_{t+j} - \pi_t) = \Delta\pi_{t+1} + \Delta\pi_{t+2} + \ldots \Delta\pi_{t+j}$, e conseqüentemente:

$(\pi_{t+1} - \pi_t) = \Delta\pi_{t+1}; (\pi_{t+2} - \pi_t) = (\pi_{t+2} - \pi_{t+1}) + (\pi_{t+1} - \pi_t) = \Delta\pi_{t+2} + \Delta\pi_{t+1}$ etc.

Assim,

$$\sum_{j=1}^{\infty} b^j (\pi_{t+j} - \pi_t) = (b^1 + b^2 + \ldots + b^j)\Delta\pi_{t+1} + (b^2 + b^3 + \ldots + b^j)\Delta\pi_{t+2} + \ldots.$$

Observe-se que:

$b^1(\pi_{t+1} - \pi_t) = b^1\Delta\pi_{t+1}, b^2(\pi_{t+2} - \pi_t) = b^2(\pi_{t+2} - \pi_{t+1}), b^3(\pi_{t+3} - \pi_t) = b^3(\Delta\pi_{t+3} + \Delta\pi_{t+2} + \Delta\pi_{t+1})$,

Note-se ainda que:

$b^1 + b^2 + \ldots + b^j = \frac{1}{1+\rho}(1-b)^{-1}$; $b^2 + b^3 + \ldots + b^j = \frac{1}{(1+\rho)^2}(1-b)^{-1}$ etc.

Desta forma, $\sum_{j=1}^{\infty} b^j (\pi_{t+j} - \pi_t) = \sum_{j=1}^{\infty} (1-b)^{-1} b^j \Delta\pi_{t+j}$.

Caso o somatório em (2.16) se inicie em zero, ao invés de um, tem-se:

$$R_t - \pi_t = \rho - \pi_t + \sum_{j=0}^{\infty} b^j E_t \pi_{t+j} - b\sum_{j=0}^{\infty} b^j E_t \pi_{t+j} = \rho + \sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t \pi_{t+j} - \sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t \pi_{t+j-1} = \rho + \sum_{j=1}^{\infty} b^j E_t \Delta\pi_{t+j}$$

Implementação do Modelo de Valor Presente

As duas versões do modelo de valor presente apresentadas nas equações (2.15) e (2.17) equivalem, conforme já mencionado, a estimar um modelo VAR com restrições nos parâmetros. Esse resultado é demonstrado a seguir com base em Campbell e Shiller (1987). Como os dois modelos têm basicamente a mesma forma basta usar um deles na exposição.

Assim, seja o modelo:[11]

$$S_t = R_t^{\infty} - r_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i E_t \Delta r_{t+i} \tag{2.18}$$

que mostra, conforme já foi discutido, o **spread** entre as taxas de curto e de longo prazos, S_t, como uma função das variações futuras nas taxas de juros de curto prazo, Δr_{t+i}.

Sabe-se que se duas variáveis não estacionárias, com ordem de integração igual a 1 (um), co-integram (isto é, uma combinação linear delas seria estacionária), então como a primeira diferença de cada uma dessas variáveis seria estacionária, ou I (0), elas combinadas teriam uma representação VAR bivariada de ordem infinita (decomposição de Wold). O modelo pode entretanto ser aproximado por um sistema VAR contendo apenas p defasagens. Se este for o caso das variáveis do modelo de valor presente dado, por exemplo, na equação (2.18) então a sua representação VAR seria:

$$\begin{bmatrix} \Delta r_t \\ S_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(L) & b(L) \\ c(L) & d(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r_{t-1} \\ S_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

onde, $a(L) = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + ... + a_p L^{p-1}$, com L sendo o operador de defasagens (**lag operator**).

Campbell (1987) demonstra então que modelos de valor presente, como o da equação (2.18), equivalem a estimar um modelo VAR após impor certas restrições nos seus parâmetros, que no caso aqui seriam:

$$a_1 = -c_1, ..., a_p = -c_p, \; d_1 + b_1 = \alpha^{-1}, \; b_2 = -d_2, ..., b_p = -d_p \tag{2.20}$$

Isso pode ser assim demonstrado. Seja o modelo VAR em (2.19) representado alternativamente por:

[11] Exceto pela exclusão do termo para o prêmio de risco, essa equação é idêntica àquela dada em (2.15).

$$\begin{bmatrix} \Delta r_t \\ \Delta r_{t-p+1} \\ S_t \\ S_{t-p+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \dots a_p b_1 \dots b_p \\ I_{p-1} 0 \\ c_1 \dots c_p d_1 \dots d_p \\ 0 I_{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r_{t-1} \\ \Delta r_{t-p} \\ S_{t-1} \\ S_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ 0 \\ u_{2t} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

que em notação matricial seria:

$$z_t = Az_{t-1} + v_t , \tag{2.22}$$

onde:

$$z_t = \left[\Delta r_t \dots \Delta r_{t-p+1} S_t \dots S_{t-p+1} \right]' \tag{2.23}$$

e:

$$v_t = \left[u_{1t} \, 0 \dots 0 \; u_{2t} \, 0 \dots 0 \; \right] \tag{2.24}$$

Note-se que da equação (2.22) obtém-se a previsão condicionada:

$$E_t z_{t+j} = A^j z_t . \tag{2.25}$$

Desta forma, a variável do lado direito da equação (2.18) pode, em vista da sua representação em (2.21), ser escrita como:

$$E_t \Delta r_{t+j} = h' A^i z_t , \tag{2.26}$$

onde h' é um vetor linha tendo a unidade como primeiro elemento, com todos os demais elementos sendo zero. Do mesmo modo, para a variável do lado esquerdo da equação (2.18) tem-se:

$$S_t = g' z_t , \tag{2.27}$$

onde g' é um vetor linha consistindo de p zeros, seguidos do número um, e novamente p - 1 zeros. Esses dois últimos resultados substituídos no modelo de valor presente da equação (2.18) produzem:

$$g' z_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i h' A^i z_t \tag{2.28}$$

Considere-se, em seguida, a seguinte aproximação:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i A^i = \alpha A[I - bA],^{-1} \quad ^{12} \tag{2.29}$$

o que permite escrever a equação (2.28) como:

$$g' z_t = h' \alpha A[I - \alpha A]^{-1} z_t, \tag{2.30}$$

ou mais simplesmente:

$$g' [I - \alpha A] = h' \alpha A, \tag{2.31}$$

onde I é a matriz identidade com a mesma dimensão da matriz A. Assim, em vista da definição da matriz A, é fácil verificar que esse resultado equivale a estimar o modelo VAR em (2.19) ou (2.21) com as restrições em (2.20).

Assim, a hipótese nula representando as restrições no modelo VAR seria:

$$H_0 : g' (I - \alpha A) - h' \alpha A = 0 \tag{2.32}$$

Chame-se:

$$S_t' = h \alpha A (I - \alpha A)^{-1} z_t \tag{2.33}$$

o valor que se espera obter caso os dados estejam de acordo com o modelo de valor presente. O teste das restrições no modelo VAR equivale, então, a testar:

$$H_0 : S_t = S_t' \tag{2.34}$$

Assim, a aceitação de H_0 significa que o modelo de valor presente não pode ser rejeitado.

As restrições em (2.20) permitem uma interpretação interessante para o problema da relação entre as taxas de juros de curto e longo prazos. Mais precisamente, somando as duas equações do modelo VAR em (2.19) ou (2.21) obtém-se:

---

[12] Este resultado pode ser assim demonstrado. Seja $y = I + \alpha A + (\alpha A)^2 + \ldots..$, que multiplicado por αA dá $y \alpha A = \alpha A + (\alpha A)^2 + \ldots.$ Isto é, tem-se $y(I - \alpha A) = I - (\alpha A)^n$ ou

$$y = \frac{I - (\alpha A)^n}{I - \alpha A} = (I - \alpha A)^{-1}.$$

Note-se que para o segundo termo do numerador tender a zero, quando n tende a infinito, pressupõe-se que as séries Δr_t e S_t sejam estacionárias, isto é, a soma dos elementos de cada linha da matriz A não deve exceder a unidade, condição esta que é atendida quando as séries são estacionárias.

$$\Delta r_{t+1} + S_{t+1} = \sum_{i=1}^{\rho}(a_i + c_i)\Delta r_{t+1-i} + \sum_{i=1}^{\rho}(b_i + d_i)S_{t+1-i} + u_{1t+1} + u_{2t+1} \tag{2.35}$$

que, após levar em conta as restrições em (2.20), vem:

$$\Delta r_{t+1} + S_{t+1} - \alpha^{-1}S_t = u_{1t+1} + u_{2t+1} = u_t \tag{2.36}$$

de onde obtém-se, finalmente:[13]

$$r_t - \frac{\alpha R_{t+1} - R_t}{1-\alpha} = u_t \tag{2.37}$$

Este resultado mostra que as restrições no modelo VAR equivalem à hipótese de que o excesso de retorno $H_{t+1} - r_t$ é imprevisível dada a informação sobre os valores passados de Δr_t e S_t. Isso significa que na regressão:

$$H_{t+1} - r_t = \alpha + \beta x_t + u_t \tag{2.38}$$

onde:

$$X_t = \left(\Delta r_t, \ldots, \Delta r_{t-p+1}, S_t \ldots, S_{t-p+1}\right) \tag{2.39}$$

a hipótese nula H_o: $\beta=0$ seria equivalente a testar as restrições no modelo VAR apresentadas acima.[14]

---

[13] Note-se que essa equação pode ser escrita como:

$r_{t+1} - r_t + R^{\infty}_{t+1} - r_{t+1} - \alpha^{-1}\left(R^{\infty}_t - r_t\right) = u_t$, ou $\alpha^{-1}r_t - r_t + R^{\infty}_{t+1} - \alpha^{-1}R^{\infty}_t = u_t$

permitindo-se obter $r_t - \alpha r_t + \alpha R^{\infty}_{t+1} - R^{\infty}_t = u_t$ ou $r_t - \dfrac{\alpha R^{\infty}_{t+1} - R^{\infty}_t}{(1-\alpha)} = u_t$.

Note-se que o segundo termo à esquerda desta igualdade é H_{t+1}, ou seja, o retorno pela retenção de uma perpetuidade por um período (ver a nota 5).

[14] Um teste alternativo é como a seguir. Primeiramente viu-se na nota anterior que:

$H^n_{t+1} = \dfrac{R^n_t - \alpha_n R^n_{t+1}}{1-\alpha}$, onde $\alpha_n = \alpha\dfrac{\left(1-\alpha^{n-1}\right)}{\left(1-\alpha^n\right)}$.

Após substituir esse resultado na equação (2.38) obtém-se:

$\Delta R^n_{t+1} = \sigma' + \beta' S^n_t + u'_{t+1}$ onde $\Delta R^n_{t+1} = R^n_{t+1} - R^n_t, \beta = \dfrac{(1-\alpha_n)}{\alpha_n}, \alpha' = \phi\beta'$ e

$u'_{t+1} = -(1-\alpha_n)u_{t+1}$.

Assim, o teste alternativo refere-se ao parâmetro β', ao invés de β dada na equação (2.38). Sobre este ponto ver Mills (1991).

Finalmente, a equação (2.18) sugere que a relação de causalidade vai de S_t para Δr, hipótese que poderia ser também testada no modelo VAR apresentado em (2.19). Mais precisamente, o teste de causalidade de Granger seria, neste caso, c(L) = 0 e b(L) ≠ 0. A inversão desses resultados muda, é claro, a direção de causalidade, e se ambos os conjuntos de parâmetros forem diferentes de zero a relação de causalidade é dita bidirecional.

3 - O MODELO PARA TESTAR A SOLVÊNCIA DA DÍVIDA

3.1 - O Caso da Dívida Pública

A Restrição Orçamentária em Termos Nominais

O ponto de partida para se determinar a solvência do setor público é a equação da sua restrição orçamentária. Assim, considere-se, inicialmente, a restrição orçamentária do governo em termos nominais:

$$M_t - M_{t-1} + B_t - B_{t-1} + V_t\left(B_t^* B_{t-1}^*\right) - V_t\left(F^* - F^*\right) = G_t - T_t + i_{t-1}B_{t-1} + i_{t-1}V_t\left(B_{t-1} - F_{t-1}\right) \tag{3.1}$$

onde M é o estoque nominal da base monetária, $B(\tilde{B}^*)$ o estoque da dívida pública em moeda doméstica (estrangeira), F^* o estoque de divisas em moeda estrangeira, G e T são, respectivamente, os gastos (exclui as despesas com os juros da dívida) e as receitas do governo, i (i^*), é a taxa de juros doméstica (estrangeira) nominal e V é a taxa de câmbio nominal.

Se chamarmos $B^* = \tilde{B}^* - F^*$ a dívida estrangeira líquida, tem-se:

$$B_t + V_t B_t^* = B_{t-1}\left(1 + i_{t-1}\right) + V_t B_{t-1}^*\left(1 + i_{t-1}^*\right) + A_t - H_t\,, \tag{3.2}$$

onde $A_t = G_t - T_t$ é o déficit primário e $H_t = \left(M_t - M_{t-1}\right)$ é a receita de senhoriagem. Se a dívida total é $D = B + VB^*$, obtém-se:[15]

$$D_t = D_{t-1}\left(1 + i_{t-1}\right) + V_{t-1}B_{t-1}^*\left[\left(1 + \varepsilon_{t-1}\right)\left(1 + i_{t-1}^*\right) - \left(1 + i_{t-1}\right)\right] + A_t - H_t \tag{3.3}$$

onde $\varepsilon_{t-1} = \dfrac{\left(V_t - V_{t-1}\right)}{V_{t-1}}$. Note-se que caso a condição da paridade da taxa de juros seja atendida, então, o termo em colchete seria nulo.

[15] Para se obter esse resultado somou-se e, ao mesmo tempo, subtraiu-se o termo $V_{t-1}B_{t-1}^*\left(1 + i_{t-1}\right)$ no lado direito da equação (2); além de se utilizar a relação: $V_t = V_{t-1}\left(1 + \varepsilon_{t-1}\right)$

Definindo o déficit primário aumentado como sendo:

$$\tilde{A}_t = A_t + V_{t-1} B^*_{t-1}\left[(1+\varepsilon_{t-1})(1+i^*_{t-1}) - (1+i_{t-1})\right] \tag{3.4}$$

tem-se, por fim:

$$D_t = (1+i_{t-1})D_{t-1} + \tilde{A}_t - H_t \tag{3.5}$$

A Restrição Orçamentária como Proporção do PIB

Os fluxos e estoques da equação (3.1) podem ser ainda definidos em valores reais e/ou por unidade do PIB. Neste último caso tem-se (as variáveis em letra minúscula são as correspondentes variáveis em letra maiúscula como proporção do PIB):[16]

$$b_t + b^*_t = b_{t-1}\frac{(1+i_{t-1})}{(1+\pi_{t-1})(1+n_{t-1})} + \frac{b^*_{t-1}(1+\varepsilon_{t-1})(1+i^*_{t-1})}{(1+\pi_{t-1})(1+n_{t-1})} + a_t - h_t \tag{3.6}$$

onde π é a taxa de inflação e η a taxa de expansão do PIB real, isto é, se o nível dos preços é P e o PIB real é Y, tem-se $Y_t = Y_{t-1}(1+\eta_{t-1})$ e $P_t = P_{t-1}(1+\pi_{t-1})$.[17]

---

[16] Note-se que $b_t = \dfrac{B_t}{P_t y_t}$ e $b^*_t = \dfrac{V_t B^*_t}{P_t y_t}$. Logo:

$$\frac{B_{t-1}}{P_t y_t} = \frac{B_{t-1}}{P_{t-1}y_{t-1}(1+\pi_{t-1})(1+n_{t-1})} = \frac{b_{t-1}}{(1+\pi_{t-1})(1+n_{t-1})} \quad \text{e}$$

$$\frac{V_t B_{t-1}}{P_t y_t} = \frac{V_t B_{t-1}(1+\varepsilon^*_{t-1})}{P_{t-1}y_{t-1}(1+\pi_{t-1})(1+n_{t-1})} = \frac{b^*_{t-1}(1+\varepsilon^*_{t-1})}{(1+\pi_{t-1})(1+n_{t-1})}.$$

[17] Para considerar aqui o estoque de capital do setor público basta acrescentar na equação da restrição orçamentária do governo tanto os gastos com investimento como o retorno do estoque de capital. Mais precisamente, fazendo como Buiter e Patel (1992) e Corsetti (1990), acrescente-se na versão da restrição orçamentária (como proporção do PIB) os termos $P_t\dfrac{(K_t - K_{t-1})}{P_t y_t}$, para os gastos de investimento, e $P_t\dfrac{(\rho_{t-1}-\delta_{t-1})K_{t-1}}{P_t y_t}$, para o retorno do capital, onde K é o estoque de capital real, ρ é a taxa de retorno do capital e δ é a taxa de depreciação do estoque de capital. Esses dois termos podem ser combinados como a seguir:

$$P_t\frac{\left[K_t - (1-\delta_{t-1})K_{t-1}\right]}{P_t y_t} \quad \text{e} \quad \frac{P_t\rho_{t-1}K_{t-1}}{P_t y_{t-1}(1+n_{t-1})} = \frac{\rho_{t-1}k_{t-1}}{1+n_{t-1}}$$

os quais devem ser incluídos na definição de a_t na equação (3.6), que coincidiria, então, com a equação proposta por Buiter e Patel (1992).

Denotando-se $d = b + b^*$ sendo $E = \frac{VP^*}{P}$ a taxa de câmbio real, onde P^* é o nível dos preços internacionais, a equação (3.6) pode ser rescrita como:[18]

$$d_t = \left(1+\tilde{r}_{t-1}\right)d_{t-1} + \left(\frac{b^*_{t-1}}{1+n_{t-1}}\right)\left[\left(1+r^*_{t-1}\right)\left(1+\varepsilon_{t-1}\right) - \left(1+r_{t-1}\right)\right] + a_t - h_t \qquad (3.7)$$

onde $e_{t-1} = \frac{\left(E_t - E_{t-1}\right)}{E_{t-1}}$, $\tilde{r} = (r-n)(1+n)^{-1}$, e $r\left(r^*\right)$ é a taxa de juros doméstica (internacional) real.

Finalmente, sendo o déficit primário aumentado dado por:

$$\tilde{a}_t = a_t + \left(\frac{b^*_{t-1}}{1+n_{t-1}}\right)\left[\left(1+r^*_{t-1}\right)\left(1+\varepsilon_{t-1}\right) - \left(1+r_{t-1}\right)\right] \qquad (3.8)$$

a equação (3.7) fica:

$$d_t = \left(1+\tilde{r}_{t-1}\right)d_{t-1} + \tilde{a}_t - h_t \qquad (3.9)$$

[18] Para se obter este resultado some-se inicialmente e, ao mesmo tempo, subtraia-se: $\frac{b^*_{t-1}\left(1+i_{t-1}\right)}{\left(1+\pi_{t-1}\right)\left(1+n_{t-1}\right)}$ no lado direito da equação (3.6). Usou-se também a relação: $\left(1+\varepsilon_{t-1}\right)\frac{\left(1+e_{t-1}\right)\left(1+\pi_{t-1}\right)}{\left(1+\pi^*_{t-1}\right)}$, com base no fato de que se $E_t = \frac{V_t P^*_t}{P_t}$ então $V_t = \frac{E_t P_t}{P^*_t}$.
Desta forma,
$V_{t-1}\left(1+\varepsilon_{t-1}\right) = \frac{E_{t-1}P_{t-1}\left(1+e_{t-1}\right)\left(1+\pi_{t-1}\right)}{P^*_{t-1}\left(1+\pi^*_{t-1}\right)}$. Como $V_{t-1} = \frac{E_{t-1}P_{t-1}}{P^*_{t-1}}$ a relação entre essas taxas fica estabelecida. Foram ainda usadas as seguintes relações entre taxa de juros nominais e reais:
$\left(1+r\right) = \frac{1+i}{1+\pi}$ e $\left(1+r^*\right) = \frac{1+i^*}{1+\pi^*}$. Finalmente usou-se a relação
$\frac{1+\pi}{1+n} = 1 + \frac{r-n}{1+n} = 1 + \tilde{r}$.

que tem, pois, a mesma forma da equação (3.5) onde os fluxos e os estoques da restrição orçamentária do governo são dados em valores nominais.[19]

Da equação (3.9) tem-se:

$$d_{t-1} = \frac{1}{1+\tilde{r}_{t-1}}\left[-a_t + h_t + d_t\right] \tag{3.10}$$

e por extensão:

$$d_t = \frac{1}{1+\tilde{r}_t}\left[-a_{t+1} + h_{t+1} + d_{t+1}\right] \tag{3.11}$$

[19] Caso se deseje definir a restrição orçamentária apenas em função das variáveis reais, e não como proporção do PIB, seria necessário, então, eliminar apenas a variável taxa de expansão do PIB real das equações acima e, é claro, redefinir as variáveis de tal modo que as letras minúsculas indicassem agora os valores reais das correspondentes variáveis nominais dadas em letra maiúsculas. Desta forma, os resultados aqui derivados aplicam-se à restrição orçamentária quer sejam as variáveis definidas em valores nominais, valores reais ou como proporção do PIB.

Após sucessivas substituições nesta equação, primeiramente de d_{t+1} em função de a_{t+2}, h_{t+2} e d_{t+2}, então d_{t+2} em função de a_{t+3}, h_{t+3} e d_{t+3}, e assim por diante para d_{t+3}, d_{t+4}, etc. obtém-se finalmente:[20]

---

[20] Uma derivação alternativa é como a seguir. Da equação da restrição orçamentária vem:

$(a_t - h_t) = d_t - (1 + r_{t-1})d_{t-1}$.

Assim, os resultados de cada período, em termos de valor presente do período inicial, seriam:

$$\frac{(a_{t+1} - h_{t+1})}{1+\tilde{r}_t} = \frac{d_{t+1}}{1+\tilde{r}_t} - \frac{(1+\tilde{r})d_t}{1+\tilde{r}_t}$$

$$\frac{(a_{t+2} - h_{t+2})}{(1+\tilde{r}_t)(1+\tilde{r}_{t+1})} = \frac{d_{t+2}}{(1+\tilde{r}_t)(1+\tilde{r}_{t+1})} - \frac{(1+\tilde{r}_{t+1})d_{t+1}}{(1+\tilde{r}_t)(1+\tilde{r}_{t+1})_t}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{(a_{t+n} - h_{t+n})}{\prod_{j=0}^{n-1}(1+\tilde{r}_{t+j})} = \frac{d_{t+n}}{\prod_{j=0}^{n-1}(1+\tilde{r}_{t+j})} - \frac{(1+\tilde{r}_{t+n-1})d_{t+n-1}}{\prod_{j=0}^{n-1}(1+\tilde{r}_{t+j})}$$

Somando-se os termos, tem-se, pois:

$$d_t = \prod_{j=0}^{n-1}(1+r_{t+j})^{-1} + d_{t+n} + \sum_{i=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{n-1}(1+r_{t+j})^{-1}(h_{t+n} - a_{t+n})$$

que estendendo a soma até infinito daria a equação (3.12).

Se definirmos, conforme em Buiter e Patel (1992), $q_i = \prod_{j=0}(1+\tilde{r}_j)^{-1}$ como sendo o fator de desconto entre o tempo zero e t+i, sendo $q_{-1}=1$, então a equação (3.12) pode ser escrita como:

$$d_t = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{q_{t+i}}{q_{i-1}}\right)(-\tilde{a}_{t+i+1} + a_{t+i+1}) + Lim_{i\to\infty}\left(\frac{q_{t+i}}{q_{t-1}}\right)d_{t+i+1}$$

Note-se que sendo:

$$q_{t+i} = \prod_{j=0}^{t+i}(1+r_j)^{-1} = [(1+r_0)(1+r_1)\ldots(1+r_{t-1})(1+r_t)\ldots(1+r_{t+i})]^{-1}$$

segue-se que:

$$\prod_{j=0}^{t+i}(1+r_j)^{-1} = [(1+r_t)(1+r_{t+1})\ldots(1+r_{t+1})]^{-1} = \frac{q_{t+i}}{q_{t-1}}$$

Como o valor presente no tempo zero da dívida existente no tempo t é:

$\tilde{d}_t = q_{t-1}d_t$

e os valores presentes no tempo zero do superávit primário (aumentado) e da senhoriagem existentes no tempo t+i+1 são, respectivamente:

$\Delta_{t+i+1} = q_{t+i}a_{t+i+1}$ e $S_{t+i+1} = q_{t+i}h_{t+i+1}$

então a equação (3.12) pode ser escrita como:

$$\tilde{d}_t = \sum_{i=0}^{\infty}(-\Delta_{t+i+1} + S_{t+i+1}) + \lim_{i\to\infty}\tilde{d}_{t+i}\,.$$

Desta forma, a equação (3.9) pode ser reescrita como:

$\tilde{d}_t = \tilde{d}_{t-1} + \Delta_t - S_t$

$$d_t = \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{i} \frac{1}{1+\tilde{r}_{t+j}} \left(-a_{t+i+1} + h_{t+i+1}\right) + Lim_{i\to\infty} \prod_{j=0}^{i} \frac{1}{1+\tilde{r}_{t+j}} d_{t+1+i} \qquad (3.12)$$

Para a solvência da dívida requer-se que:

$$Lim_{i\to\infty} \prod_{j=0}^{i} \frac{1}{1+\tilde{r}_{t+j}} d_{t+1+i} \leq 0 \qquad (3.13)$$

o que reduz a equação (3.12) ao seu primeiro termo à direita do sinal de igualdade, significando que a existência de um estoque positivo da dívida no tempo t exige que superávits primários aumentados sejam eventualmente gerados no futuro. Note-se que a solvência como indicada na equação (3.13) significa que a dívida não pode aumentar a uma taxa que seja sistematicamente superior à taxa de juros r.

Caso a taxa de juros seja constante então o primeiro termo à direita da igualdade na equação (3.12) poderia ser escrita como:

$$d_t = \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j S_{t+j} \qquad (3.14)$$

onde $\beta = \frac{1}{1+r}$ e S_t é o superávit primário aumentado. Como se viu na Seção 2 essa equação pode ser escrita como (ver a nota 10):

$$d_t - r^{-1} S_t = \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \left(S_{t+j} - S_t\right) = \left(1-\beta\right)^{-1} \sum \beta^j \Delta S_{t-j} \qquad (3.15)$$

Note-se que $\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j = \left(\frac{1}{1+r}\right)\left(1+\frac{1}{r}+...\right) = \left(\frac{1}{1+r}\right).\left(\frac{1+r}{r}\right) = r^{-1}$,

Isto implica pois que, caso a série do superávit fiscal, S_t , seja não-estacionária, com grau de integração igual a um (isto é, a primeira diferença dessa variável, ΔS_t, é estacionária), então para que a equação (3.15) seja satisfeita (que no caso significa que a dívida não deve crescer mais rapidamente do que a taxa de juros) as séries d_t e S_t devem co-integrar. No caso, exige-se que a série d seja também não-estacionária com grau de integração igual a um, já que para a co-integração requer-se a mesma ordem de integração das duas variáveis. É claro que caso a série de S_t já seja estacionária, também ΔS_t o será. Neste situação, por exigência da equação (3.15), a série d_t teria que ser igualmente estacionária; caso contrário, seria violada a condição de solvência da dívida.

Assim como se fez em (2.28), tem-se aqui:

$$g' z_t = (1-\beta)^{-1} \sum \beta^i h' A^i z_t$$

que conforme visto em (2.29) e (2.30) pode ser escrito como:

$$g' z_t = (1-\beta)^{-1} h' \beta A [I - \beta A]^{-1} z_t$$

ou simplesmente:

$g'[I - \beta A] = (1-\beta)^{-1} \beta h' A = r^{-1} h' A$, onde $r^{-1} = \beta(1-\beta)^{-1}$

Desta forma as restrições do modelo VAR seriam agora:

a) $-\beta a_i = r^{-1} c_i$ ou $c_i = -(1-\beta) a_i$ para i = 1,2,..., p;
b) $1-\beta b_1 = r^{-1} d_i$ ou $d_1 = (\beta^{-1} - b_1)(r/1+r)$;
c) $-\beta d_j = r^{-1} d_j$ ou $d_j = -(1-\beta) b_j$ para j=2,3,...,p.

A título de ilustração apenas, a aplicação dessas restrições no modelo de equilíbrio intertemporal das contas do setor público federal, com dados mensais no período 1973/95, produziu um valor calculado para a distribuição Qui-quadrado de 153,52. Isso comparado com o valor tabelado dessa distribuição com oito (número de restrições testadas) graus de liberdade sugere, pois, forte rejeição do modelo de valor presente.

3.2 - O Caso da Dívida Externa

É fácil derivar, nas mesmas linhas dos resultados derivados na Subseção 3.1, também uma equação que descreva a dinâmica da dívida externa e conseqüentemente estabelecer as condições para a sua solvência. Assim, considere-se inicialmente a razão dívida externa/PIB:

$$b^* = \frac{B^* E}{Py} \qquad (3.16)$$

onde B^* é o estoque da dívida externa em moeda estrangeira, E é a taxa de câmbio nominal dada em unidades da moeda doméstica por unidade da moeda estrangeira, Py é o PIB nominal, sendo P o nível dos preços domésticos, e y é o PIB real. Escreva-se essa equação alternativamente como:

$$b^* = \frac{B^* e}{P^* y} \qquad (3.17)$$

onde $e = \frac{EP^*}{P}$ é a taxa de câmbio real, sendo P^* o nível dos preços internacionais.

De (3.17) obtém-se facilmente:

$$\frac{\Delta b^*}{b} = \frac{\Delta B^*}{B} + \hat{e} - \pi^* - \rho \tag{3.18}$$

onde $\hat{e}$ é a variação percentual da taxa de câmbio real , π^* é a taxa de inflação estrangeira e r é a taxa real de expansão do PIB doméstico.

Note-se que da equação do balanço de pagamentos tem-se:

$$\Delta B^* = (M - X) + i^* B^* \tag{3.19}$$

onde M e X são, respectivamente, as importações e exportações de bens e serviços (exclusive pagamento de juros) e i^* é a taxa nominal de juros internacionais que incide sobre o estoque da dívida externa. A substituição de (3.19) em (3.18) produz, então:

$$Db^* = d + \left(r^* + \hat{e} - r\right)b^* \tag{3.20}$$

onde d é o déficit primário das contas externas em percentagem do PIB (isto é, d=(M-X)E/Py), e $r^* = i^* - \pi^*$ é a taxa real dos juros internacionais. A solução da equação (3.20) é:[21]

$$b_t^* = b_{t+n}^* \exp\left[-\left(r^* + \hat{e} - r\right)\right] + \int_{j=t}^{t+n} \left(X_j - M_j\right)\frac{E}{Py} \exp\left[-\left(r^* + \hat{e} - r\right)\right](j-t) d_j \tag{3.21}$$

Desta forma, para a solvência da dívida externa requer-se:

$$\lim_{n \to \infty} b_n^* \exp\left[-\left(r^* + \hat{e} - r\right)\right] = 0 \tag{3.22}$$

ou seja, a razão dívida/PIB deve crescer a taxas menores do que a diferença entre a taxa real dos juros internacionais, ajustada para a taxa de desvalorização do câmbio, e a taxa de expansão do PIB real. Esse resultado levado à equação (3.21) indica que para a solvência da dívida externa requer-se que o valor atual dos superávits primários, presentes e futuros, da balança em transações correntes seja igual ao estoque corrente da dívida externa líquida (privada ou pública); vale dizer, o balanço de pagamentos teria de estar em equilíbrio intertemporal.

[21] Para detalhes, ver Rossi (1992).

Observe-se que se recai aqui num problema semelhante ao da dívida interna tratada na Subseção 3.1. Assim, a solução seria, em termos da análise de co-integração, semelhante àquela discutida no contexto da equação (3.15).[22] Da mesma forma, o teste do modelo de valor presente poderia ser realizado com base na estimação de um modelo VAR com restrições nos valores dos seus parâmetros, nos moldes do exposto na Seção 2.

4 - O MODELO DE HALL PARA A HIPÓTESE DA RENDA PERMANENTE

Hall (1978) apresenta uma versão matemática elegante para a hipótese da renda permanente que estabelece não só a ligação entre a poupança e a renda esperada, mas mostra ainda como os dados da poupança podem ser utilizados para prever as variações futuras na renda. O modelo de Hall é como vem a seguir. A família tem vida infinita e a utilidade esperada pelo seu consumo futuro é dada pela função:[23]

$$E\sum_{t=0}^{\infty}\beta^{i}u(c_t) \qquad (4.1)$$

onde $u(c_t)$ mede a utilidade do consumo de c_t, β é um fator de desconto com valor entre zero e um, e E simboliza o valor esperado.

O balanço de recursos da família no final do período t é dado por:

$$A_{t+1} = A_t + S_t = (1+r)A_t + y_{lt} - c_t \qquad (4.2)$$

já que ela tem no início do período um total de ativos A_t, que com a taxa de juros r permite obter renda de capital de $y_{kt} = rA_t$.; note-se que a renda do trabalho é y_{lt} e a poupança é, por definição, $s_t = y_t - c_t$, onde $y_t = y_{lt} + y_{ht}$. Da solução para a frente dessa equação obtém-se:[24]

[22] Para uma aplicação nessas linhas com dados da dívida externa do Brasil, ver Ponta (1996).

[23] A exposição aqui segue Sargent (1987), podendo ser ainda vista em Blanchard e Fischer (1989).

[24] Note-se que desta equação tem-se:

$A_t = A_{t+1}(1+r)^{-1} - (1+r)^{-1}(y_{lt} - c_{lt})$. Para simplificar, chame $d_t = (y_{lt} - c_{lt})$. Assim, tem-se a seqüência: $A_0=A_1(1+r)^{-1} - d_0(1+r)^{-1}$, $A_1=A_2(1+r)^{-1} - d_1(1+r)^{-1}$, $A_{T-1}=A_T(1+r)^{-1} - d_{T-1}(1+r)^{-1}$

Com substituições sucessivas para a frente para A_i, i=1,2,..., e supondo $\lim_{i\Rightarrow\infty} A_i(1+r)^{-T} = 0$ (condição de transversilidade), vem:

$$A_0 = -\sum_{t=0}^{\infty} d_t (1+r)^{-(t+1)}$$

que mudando a referência do tempo para t vem a equação (4.3).

$$A_t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{t+j} - y_{lt+j}}{(1+r)^{j+1}} \tag{4.3}$$

Após aplicar o operador de esperança matemática, a equação (4.3) fica:

$$A_t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E_t c_{t+j}}{(1+r)^{j+1}} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E_t y_{lt+j}}{(1+r)^{j+1}} \tag{4.4}$$

significando que se a família tem dívida hoje (isto é, um valor negativo para A_t), então o consumo futuro deverá estar em média abaixo da renda futura do trabalho.

Pode-se demonstrar que a maximização da equação (4.1) sujeita ao atendimento da restrição dada em (4.2) e uma vez satisfeita a condição de transversalidade apresentada na nota 26, produz [ver Sargent (1987) ou Blanchard e Fischer (1989)]:

$$u'(c\ ) = \beta(1+r)E_t u'(c_{t+1}) \tag{4.5}$$

que nada mais é do que uma generalização da solução clássica do equilíbrio do consumidor dada pela tangência entre a linha orçamentária e a curva de indiferença. Note-se que a razão entre a utilidade marginal do consumo em t e a utilidade marginal esperada do consumo em t+1, descontada para o presente, deve ser igual à taxa de juros.

Para simplificar os resultados, faça-se $\beta = 1/(1+r)$. Suponha-se ainda que a função de utilidade seja quadrática do tipo $u(c_t) = ac_t + bc_t^2$. A solução ótima dada em (4.5) seria, então:

$$c_t = E_t\, c_{t+1} \tag{4.6}$$

mostrando que o consumo segue um passeio aleatório (**random walk**). Esse é um importante resultado obtido por Hall (1978), e simplifica bastante a solução em (4.4) que seria:[25]

$$c_t = rA_t + \frac{r}{1+r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E_t y_{lt+j}}{(1+r)^j} \tag{4.7}$$

---

[25] Isto é obtido após levar em conta o resultado (2.6) na equação (2.4). Assim, tem-se:

$$A_t = c_t \sum_{j=0}^{\infty} (1+r)^{-(j+1)} - \sum_{j=0}^{\infty} y_{lt+j} (1+r)^{-(j+1)}$$

donde se obtém a equação (4.7).

Subtrai-se agora y_{lt} dos dois lados da equação. Sendo a poupança definida como $s_t = y_{kt} + y_{lt} - c_t$ obtém-se:[26]

$$s_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_t \Delta y_{lt+j}}{(1+r)^j} \tag{4.8}$$

mostrando que a poupança corrente é igual ao valor presente do declínio esperado para a renda futura do trabalho. Assim poupa-se menos hoje quando se esperam ganhos futuros de renda. Desta forma, dados sobre a poupança podem ser úteis na previsão de variações na renda futura.[27]

Note-se que sendo $s_t = y_t - c_t$, então caso as séries y_t e c_t sejam não-estacionárias com grau de integração igual a um (isto é, a primeira diferença dessas variáveis é estacionária), então se a renda do trabalho, y_{lt}, for não-estacionária, mas de ordem de integração um, segue que para que a equação (4.8) seja satisfeita as séries y_t e c_t devem co-integrar.

O teste do modelo de valor presente através do teste das restrições nos coeficientes do modelo VAR obedece aqui a mesma regra daquela em (2.18), exceto pela mudança de sinal de alguns dos coeficientes, já que o lado direto da equação (4.8) é negativo, enquanto aquele da equação (2.18) é positivo.

---

[26] Note-se que a poupança é:

$$s_t = y_{kt} + y_{lt} - c_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{r}{(1+r)} \frac{E(y_{lt+j} - y_{lt})}{(1+r)^j}$$ já que $E_t y_t = y_t$ e

$$y_{lt} = \frac{r}{1+r}\sum_{j=0}^{\infty} y_{lt}$$, pois $$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^j} = \frac{1+r}{r}.$$

Para se obter (4.8) proceda-se como na nota 10 da Seção 2.

[27] É interessante observar que com procedimento similar ao utilizado por Hall (1978), Leiderman e Blejer (1988), e também Leiderman e Razin (1988), se obtém um modelo de valor presente que relaciona o consumo corrente ao fluxo esperado para o da renda líquida (isto é, renda bruta menos impostos), corrente e futura. Mais precisamente, a equação é:

$$c_t = -\beta_0(R-1) + (1-\gamma)\beta_1 E_{t-1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{R}\right)^{t+j}\left(Y_{t+j} - T_{t+j}\right) + \psi C_{t-1} + \varepsilon_t \quad ,$$

(2.9)

onde C é o consumo **per capita**, R é a taxa de juros, β_0 e β_1 são parâmetros, Y e T são, respectivamente, a renda bruta e os impostos, também em base **per capita**. Essa equação permite testar a Equivalência Ricardiana. Por exemplo, quando $\gamma=1$ o comportamento do consumidor satisfaria a neutralidade Ricardiana, pois nesse caso apenas o consumo do período anterior influencia o consumo corrente. Se, todavia, $\gamma>1$ a riqueza esperada afeta, então, o consumo corrente acima do efeito causado pelo consumo defasado. Assim, um corte nos impostos correntes aumenta a riqueza esperada e com isso aumenta o consumo corrente, violando assim a Equivalência Ricardiana.

5 - O MODELO DE DETERMINAÇÃO DA TAXA DE CÂMBIO[28]

Sendo a taxa de câmbio a razão entre os níveis dos preços de dois países, é natural que no modelo monetário de determinação da taxa de câmbio seja dada ênfase aos fatores que explicam as variações nesses preços. Assim, o ponto de partida na discussão desse tipo de modelo é a questão do equilíbrio monetário. Nesse sentido, sejam as respectivas funções da demanda por moeda dos países doméstico e estrangeiro dadas por:

$$M/P = f(Z) = kY^{\alpha}e^{-\beta i} \quad \text{e} \quad M^{\bullet} / P^{\bullet} = f(Z^{\bullet}) = K^{\bullet}Y^{\bullet\alpha^{\bullet}} e^{\beta^{\bullet} i^{\bullet}} \tag{5.1}$$

onde P, Y e i são, respectivamente, o nível dos preços, o PIB real e a taxa de juros nominal, com k, a e b sendo parâmetros; as correspondentes magnitudes do país estrangeiro são indicadas com um asterisco. A Paridade do Poder de Compra da Moeda (PPC) significa que a taxa de câmbio é dada por $S = P/P^{\bullet}$. Substituindo, pois, os preços extraídos das equações em (5.1) nesta relação, obtém-se (para simplificar, impôs-se a igualdade nos parâmetros das funções de demanda por moeda dos dois países):

$$s = (m-m^{\bullet})-\alpha(y-y^{\bullet}) + \beta(i-i^{\bullet}) \tag{5.2}$$

onde as variáveis em letra minúscula são o logaritmo das correspondentes variáveis em letra maiúscula. Essa é, pois, a especificação básica do modelo monetário.

Suponha ainda, como em MacDonald e Taylor (1994a), que também a Paridade da Taxa de Juros (PTJ) seja atendida, isto é, $i_t - i_t^{\bullet} = E(\Delta s^e_{t+1} | I_t)$, onde I_t é o conjunto de informações disponíveis no tempo t. Esta condição levada em conta na equação (5.2) permite obter:

$$s_t = x_t + \beta E(\Delta s^e_{t+1} | I_t) \tag{5.3}$$

onde $x_t = m'_t - \alpha y'_t$, com $m' = m-m^{\bullet}$ e $y' = y-y^{\bullet}$. Após considerar aqui a condição de transversalidade $\lim_{i\Rightarrow\bullet}[\beta/(1+\beta)]^i E_t s_{t+i}] = 0$, e que sejam racionais as expectativas, significando que o erro de previsão é nulo, tem-se:[29]

$$s_t = (1+\beta)^{-1}x_t + \beta(1+\beta)^{-1} E(s_{t+1} | I_t) \tag{5.4}$$

[28] Esta seção baseia-se em Rossi (1996).

[29] A condição de transversalidade significa que a taxa de câmbio não deve subir mais que o fator de desconto $\beta / (1+\beta)$. Como este último equivale à taxa 1/β, então a taxa de câmbio terá que crescer menos que este valor. Quanto ao resultado em (5.4), como $s_t = x_t + \beta i'_t$, e $i'_t = E\left(\Delta s^e_{t+1} | I_t\right)$ onde $i' = i-i^{\bullet}$, vem então $s_t = x_t + \beta i E\left(\Delta s^e_{t+1} - s_t\right)$. Segue que $s_t = x_t+\beta E(s^e_{t+1} - s_t)$. Assim $s_t+\beta s_t - \beta E s_{t+1} = x_t + \beta E(s^e_{t+1} - s_{t+1})$. De acordo com as expectativas racionais este último termo é nulo, obtendo-se finalmente o resultado em (5.4).

Com substituições recursivas para frente na equação (5.4) obtém-se:[30]

$$s_t = (1+\beta)^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\beta/(1+\beta)\right]^i E(x_{t+i}|I_t) \qquad (5.5)$$

Isto é, a taxa de câmbio, hoje, é determinada pela trajetória dos valores futuros (esperados) das variáveis oferta monetária e crescimento do PIB real que é, pois, o modelo de valor presente para o modelo monetário de determinação da taxa de câmbio.

Reescreva-se a equação (5.5) como (para simplificar a notação fez-se b= $\beta/(1+\beta)$:

$$s_t = (1-b)\sum_{i=0}^{\infty} b^i E_t x_{t+i} \qquad (5.6)$$

já que $(1 + \beta)^{-1} = (1 - b)$. Considerando apenas os termos do lado direito da equação, tem-se:

$$\sum_{i=0}^{\infty} b^i E_t x_{t+i} - b\sum_{i=0}^{\infty} b^i E_t x_{t+i} = x_t + \sum_{i=1}^{\infty} b^i E_t x_{t+i} - b\sum_{i=1}^{\infty} b^{i-1} E_t x_{t+i} = x_t + \sum_{i=1}^{\infty} b^i E_t x_{t+i} - \sum_{i=1}^{\infty} b^i E_t x_{t+i-1} \qquad (5.7)$$

Desta forma, obtém-se finalmente:

$$s_t - x_t = \sum_{i=1}^{\infty} b^i E_t \Delta x_{t+i} \qquad (5.8)$$

mostrando que o **spread** atual, $s_t - x_t$, pode ser explicado por variações futuras esperadas para x_t .

Fica claro na equação (5.8) que se a variável x_t for não-estacionária com ordem de integração igual a um, I(1), então as variáveis s_t e x_t devem co-integrar. Neste caso pode se proceder como na situação discutida na Seção 2. Assim, as restrições no modelo VAR aqui são iguais àquela em (2.20). O teste dessas restrições em Rossi (1996), que usa dados do Brasil no período 1980/94, indicam forte rejeição

[30] Seja $s_t = (1+\beta)^{-1}x_t + \beta(1+\beta)^{-1} Es_{t+1}$. Substituindo s_{t+1} nesta equação vem:
$s_t = (1+\beta)^{-1}x_t + \beta(1+\beta)^{-1} E[(1+\beta)^{-1}x_{t+1} + \beta(1+\beta)^{-1} Es_{t+2}]$. Substituindo agora para s_{t+2},s_{t+3} etc. vem:
$s_t = (1+\beta)^{-1}x_t + \beta(1+\beta)^{-2} x_{t+1} + \beta^2(1+\beta)^{-3} x_{t+2} + ...+ [\beta/(1+\beta)] E_t s_{t+i}$ Assim:
$(1+\beta)s_t = \beta^0(1+\beta)^0 x_t + \beta(1+\beta)^{-1}x_{t+1} + \beta^2(1+\beta)^{-2} x_{t+2} + ...$Finalmente, vem:
$s_t = (1+\beta)^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\beta/(1+\beta)\right]^i x_{t+i}$, que aplicando o operador de esperança matemática produz (5.5).

do modelo de valor presente; mais precisamente, o valor calculado para a distribuição Qui-quadrado foi de 74,02 que situa-se bem acima do valor crítico dessa distribuição com oito (número de restrições testadas) graus de liberdade.

6 - O MODELO HIPERINFLACIONÁRIO DA DEMANDA POR MOEDA[31]

O modelo de Cagan para a demanda por moeda em situação de hiperinflação é:[32]

$$m_t - p_t = \beta \Delta p_t^e + 1 \qquad (6.1)$$

onde m_t e p_t são, respectivamente, o logaritmo natural do estoque de moeda e do nível dos preços no tempo t, Δ é o operador de primeira-diferença e o sobrescrito (^{e}) representa a expectativa do agente econômico no tempo t. Já que em situações de hiperinflação é desprezível o efeito de variáveis macroeconômicas reais sobre a demanda por encaixes monetários, tais variáveis são omitidas na especificação acima.[33] As variáveis omitidas poderiam, neste caso, ser representadas por um erro aleatório, com a única exigência que fosse estacionário.[34]

Quanto ao processo de formação das expectativas inflacionárias da equação (6.1), suponha que o erro de previsão da inflação seja estacionário, não havendo qualquer outra exigência como, por exemplo, que tais expectativas sejam do tipo adaptativa ou racional, vale dizer:

$$\Delta p_{t+1} = \Delta p_{t+1}^e + \eta_{t+1} \qquad (6.2)$$

onde η_{t+1} é o erro (estacionário) de previsão. Resolvendo para Δp_{t+1}^e e substituindo em (6.1) tem-se:

$$m_t - p_t = \beta \Delta p_{t+1} + \varepsilon_{t+1} \qquad (6.3)$$

onde $\varepsilon_{t+1} = -\beta \eta_{t+1}$.

---

[31] Esta seção segue Rossi (1994), que baseia-se, por sua vez, em Engsted (1993) e Phylatkis e Taylor (1992).

[32] Para facilitar a exposição exclui-se aqui a constante. Acresça-se que a inclusão do erro estocástico na especificação da equação (6.1) em nada alteraria as conclusões do modelo. Sobre esses pontos, ver Taylor (1991) e Rossi (1994).

[33] Este, parece, tem sido efetivamente o caso do Brasil durante o período de alta inflação, onde pode-se constatar facilmente que a inclusão da variável renda na especificação da demanda por moeda resulta, quando aplicada a dados recentes, em coeficiente não significativo para tal variável. Evidência dessa perda de significância estatística para a variável renda, já na primeira metade dos anos 80, pode ser vista em Rossi (1988).

[34] Ver, a esse respeito, Taylor (1991).

Em situação de hiperinflação pode-se supor que tanto os encaixes monetários reais quanto a taxa de inflação são processos não-estacionários, com as suas respectivas taxas de variação sendo estacionárias, isto é, tais variáveis são nos seus níveis I(1).Supondo ser este efetivamente o caso, subtraia-se, então, bΔp de ambos os lados da equação (6.3), obtendo-se:

$$(m_t - p_t) - \beta\Delta p_t = \beta\Delta^2 p_{t+1} + \varepsilon_{t+1} \tag{6.4}$$

Já que por pressuposto ambos os termos à direita do sinal de igualdade da equação (6.4) são estacionários segue-se que também estacionário seria o lado esquerdo dessa equação. Note-se, porém, que como as séries dos dois termos do lado esquerdo são individualmente não-estacionárias, isso implica que elas devem co-integrar. Nestas circunstâncias, pode-se obter uma estimativa para o parâmetro do modelo de Cagan, β, que, além de robusta a problemas de viés – que ocorrem tanto em face de relações simultâneas entre as variáveis quanto devido à omissão de variáveis no modelo [ver Engle e Granger (1987)] – é ainda altamente eficiente [superconsistente, na terminologia de Stock (1987)].

Com poucos pressupostos adicionais, pode-se obter no modelo de Cagan uma outra relação de co-integração, mas precisamente entre os encaixes monetários reais e a taxa de variação da oferta monetária, conforme é demonstrado por Engsted (1993) a quem seguimos nas equações abaixo. Assim, suponha-se que as expectativas sejam racionais (isto é, a expectativa dos agentes econômicos com relação à taxa de inflação do próximo período é a verdadeira expectativa matemática, com base nas informações disponíveis no tempo t), o que permite representar o modelo de Cagan como:[35]

$$m_t - p_t = \alpha - \beta[\mathrm{E}_t p_{t+1} - p_t] + u_t \tag{6.5}$$

onde E_t é o operador para as expectativas condicionais com base nas informações disponíveis no tempo t. Após adicionar-se βP_{t+1} em ambos os lados dessa equação, obtém-se:

$$\Delta p_{t+1} = \alpha\beta^{-1} - \beta^{-1}(m_t - p_t) + \beta^{-1}u_t + \varepsilon_{t+1} \tag{6.6}$$

onde $\varepsilon_{t+1} = p_{t+1} - E_t p_{t+1}$ é o erro da expectativa racional que se supõe seja estacionário, além de temporalmente não-autocorrelacionado.

[35] Note-se que à parte a inclusão da constante e do erro estocástico, essa especificação é essencialmente igual àquela da equação (6.1) com a diferença apenas de que agora a inflação esperada, $(\mathrm{E}_t p_{t+1} - p_t)$, segue a expectativa racional ao invés de ser livre como no caso da equação (6.1). Ressalte-se que em ambas as especificações supõe-se que seja instantâneo o ajustamento no mercado de moeda.

Resolvendo-se a equação (6.5) recursivamente para a frente, obtém-se o correspondente modelo de valor presente, a saber:[36]

$$p_t = (1-b)\sum_{i=0}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t\left(m_{t+1} - u_{t+1}\right) - \alpha\,; \qquad b = \beta(1+\beta)^{-1} \tag{6.7}$$

Após multiplicar a equação (6.7) por -1 e adicionar m em ambos os seus lados vem:[37]

$$(m_t - p_t) = -\sum_{i=0}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t \Delta m_{t+1} + (1-b)\sum_{i=0}^{\infty} b^i E_t u_{t+i}\,] + \alpha \tag{6.8}$$

que mostra ser a demanda por encaixes reais hoje explicada por futuras variações esperadas para a oferta monetária. Assim, se os encaixes reais aumentam hoje, por exemplo, é porque espera-se uma futura redução na taxa de expansão da moeda; a subseqüente queda na taxa de inflação que isso acarreta explica, pois, o aumento hoje na demanda por encaixes reais.

---

[36] Note-se que de (6.5) vem:

$$P_t = (1+b)^{-1}(m_t - u_t) + \beta(1+\beta)^{-1}\mathrm{E}_t p_{t+1} - (1+\beta)^{-1}\alpha$$

Após substituir-se recursivamente aqui p_{t+1},p_{t+2} etc. por equações análogas àquela para p_t e multiplicar então ambos os lados da expressão por (1+β) vem:

$$(1+\beta)p_t = \sum_{i=0}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t\left(m_{t+1} - u_{t+1}\right) - \alpha\sum_{i=0}^{\infty} b^i + b^{n+1}\mathrm{E}_{t+n} p_{t+n+1}$$

Como $\sum b^i = (1+\beta), \lim_{n\Rightarrow\infty} b^n = 0$ e $(1+\beta) = (1-b)$, vem finalmente a equação (6.7).

Para de (6.5) obter (6.7) há ainda que se impor a condição de transversalidade $\lim_{n\Rightarrow\infty} b^n \mathrm{E}_{t+n} p_{t+n+1} = 0$.

[37] Este resultado pode assim ser demonstrado: primeiramente, multiplique-se a equação (6.7) por -1 obtendo-se:

$$-p_t = -(1-b)\sum_{i=0}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t m_{t+i} + (1-b)\sum_{i=0}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t u_{t+i} - \alpha\,.$$

Após somar-se m_t em ambos os lados desta equação vem:

$$m_t - p_t = [m_t - \sum_{i=0}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t m_{t+1} + b\sum_{i=0}^{\infty} b^i E_t m_{t+i}\,] + (1-b)\sum_{i=0}^{\infty} b^i u_{t+i} + \alpha$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty} b^i \sum_{i=0}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t m_{t+1} + b\sum_{i=0}^{\infty} b^i E_t m_{t+i}\,] = -\sum_{i=0}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t m_{t+1} + b\sum_{i=0}^{\infty} b^{i-1} E_t m_{t+i} E_t m_{t+i-1} = -\sum_{i=0}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t m_{t+1} +$$

$$+b\sum_{i=0}^{\infty} b^{i-1} E_t m_{t+i} E_t m_{t+i-1},$$

obtendo-se, então, o resultado em (6.8).

Para, finalmente, obter no modelo de Cagan a relação de co-integração entre os encaixes reais e a taxa de variação na oferta monetária, primeiramente reescreva-se a equação (6.8) como:

$$(m_t - p_t) = -\alpha - \Theta(1-b)\sum_{i=1}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t \Delta m_{t+i} + (1-b)\sum_{i=1}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t u_{t+i} \tag{6.9}$$

onde $\Theta = (1-b)^{-1}$. Adicionando-se $\Theta b m_t (= \beta \Delta m_t)$, em ambos os lados dessa equação, vem:[38]

$$(m_t - p_t) + \beta \Delta m_t - \alpha = -(1-b)^{-1}\sum_{i=i}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t \Delta^2 m_{t+i} + (1-b)\sum_{i=i}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t u_{t+i} \tag{6.10}$$

Desta forma, se, como se supõe, a oferta de moeda m é I(2), com u sendo I(0), isto é, todo o lado direito dessa equação (6.10) é I(0), segue-se que também o seu lado esquerdo há de ser I(0); vale dizer, os encaixes reais e a taxa de variação da oferta monetária co-integram, com vetor de co-integração (1, β, -α). Desta forma, procedendo-se como em (2.28) tem-se aqui (supõe-se u_t=0 para todo t):

$$g' z_t = -(1-b)^{-1}\sum b^i h' A^i z_t$$

que, conforme visto em (2.29) e (2.30), pode ser escrito como:

$$g' z_t = -(1-b)^{-1} h' bA[I - bA]^{-1} z_t$$

ou simplesmente:

$$g'[I - bA] = -(1-b)^{-1} bh' A = -\beta h' A$$ [39]

[38] Para se obter esse resultado proceda-se de modo análogo à nota anterior . Assim, para considerar apenas o termo $\Theta\sum_{i=i}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t \Delta m_{t+i} - \Theta b \sum_{i=i}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t \Delta m_{t+i} + \Theta b \Delta m_t$, note-se que os dois últimos termos equivalem a

$\Theta\sum_{i=i}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t \Delta m_{t+i} = \Theta b \sum_{i=i}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t \Delta m_{t+i} = \Theta \sum_{i=i}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t \Delta m_{t+i-1}$. Combinado-se o último termo desta equação com o primeiro termo da equação anterior, vem finalmente $\Theta\sum_{i=i}^{\infty} b^i \mathrm{E}_t \Delta^2 m_{t+i}$, como requer, pois, a equação (6.10).

[39] Como $b=\beta(1+\beta)^{-1}$, tem-se $(1-b)^{-1}=1+\beta$. Assim, $(1-b)^{-1}b=\beta$.

Note-se que essas restrições guardam alguma semelhança com aquelas da Seção 3 relativas ao modelo do equilíbrio intertemporal das contas do governo, podendo ser ainda escritas como:

a) $-bc_i = -\beta a_i$ ou $c_i = (1+\beta)a_i$ para i = 1,2,..., p;
b) $1-bd_1=-\beta b_1$ ou $d_1 = (1+\beta)(\beta^{-1}+b_1)$;[40]
c) $-bd_j=-\beta d_j$ ou $d_j=(1+\beta)b_j$ para j=2,3,...,p.

O modelo VAR com essas restrições foi estimado para a demanda por moeda de Cagan com dados mensais do Brasil no período 1980/93. O valor utilizado aqui para o parâmetro β foi o mesmo obtido em Rossi (1994). Para o conceito de moeda adotou-se tanto o agregado monetário M1 como a base monetária. No primeiro caso o valor calculado para a distribuição Qui-quadrado foi 160,8, enquanto para a base monetária obteve-se 261,8. Assim, em ambos os casos rejeita-se fortemente o modelo de valor presente.

7 - O MODELO DA TAXA DE RETORNO NO MERCADO ACIONÁRIO

Seja a taxa de retorno de uma ação mantida por um período dada por:

$$r_{t+1} = \frac{P_{t+1} + D_t - P_t}{P_t} \tag{7.1}$$

onde P e D são o seu preço da ação e o dividendo pago, respectivamente. Da equação (7.1) obtém-se:

$$P_t = \left(1 + r_{t+1}\right)^{-1}\left[P_{t+1} + D_t\right] \tag{7.2}$$

que após supor taxas de juros constantes e aplicando o operador de esperança matemática vem:

$$P_t = \left(1 + r\right)^{-1} E_t\left(P_{t+1} + D_t\right) \tag{7.3}$$

Com substituições recursivas para a frente nesta equação, obtém-se:

$$P_t = \sum_{i=0}^{n} \alpha^{i+1} \quad E_t D_{t+i} + \alpha^n E_t P_{t+n} \tag{7.4}$$

[40] Note-se que $b^{-1}-d_1=-\beta\, b^{-1}b_1$ ou $\beta^{-1}(1+\beta)-d_1=-b_1(1+\beta)$.

onde $\alpha = \frac{1}{(1+r)}$, supondo a condição de transversalidade $\lim_{n\Rightarrow\infty} \alpha^n E_t P_{t+n} = 0$ vem, finalmente:[41]

[41] Se $P_t = \frac{1}{(1+r)}\left[P_{t+1} + D_t\right]$ (1)

então:

$$P_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left[P_{t+2} + D_{t+1}\right] \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) vem:

$$P_t = \frac{1}{(1+r)}\left[\frac{1}{1+r}\left[P_{t+2} + D_{t+1}\right] + D_t\right] = \left[\frac{1}{1+r}\right]P_{t+z} + \left[\frac{1}{1+r}\right]D_{t+1} + \left[\frac{1}{1+r}\right]D_t \quad (3)$$

Assim como feito nas equações (1) e (2), tem-se, também:

$$P_{t+2} = \frac{1}{1+r}\left[P_{t+2} + D_{t+1}\right] \quad (4)$$

que substituindo em (3) resulta:

$$P_t = \left[\frac{1}{1+r}\right]^3 P_{t+3} + = \left[\frac{1}{1+r}\right]^3 D_{t+z} + \left[\frac{1}{1+r}\right]^2 D_{t+1} + \left[\frac{1}{1+r}\right]D_t \quad (5)$$

Prosseguindo as substituições nessa mesma linha vem, finalmente:

$$P_t = \left[\frac{1}{1+r}\right]^T P_{t+T} + \left[\frac{1}{1+r}\right]^T D_{t+T-1} + \left[\frac{1}{1+r}\right]^{T-1} D_{t+T-2} + \ldots + \left[\frac{1}{1+r}\right]^2 + D_{t+1} + \left[\frac{1}{1+r}\right]D_t, \quad (6)$$

que levando em conta a condição de transversalidade:

$$\lim_{T\Rightarrow\infty}\left[\frac{1}{1+r}\right]^T P_{t+T} = 0 \quad (7)$$

resulta:

$$P_t = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{1+r}\right]^{j+1} D_{t+j} \quad (8)$$

Aplicando agora o operador de esperança matemática vem [ver Hamilton (1994)]:

$$P_t = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{1+r}\right]^{j+1} E_t D_{t+j}, \quad (9)$$

que é idêntico à equação (7.5).

$$P_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{i+1} E_t D_{t+i} \tag{7.5}$$

Note-se que:[42]

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{i+1} E_t D_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{i+1} D_t = r^{-1} D_t \tag{7.6}$$

Assim, combinando os resultados em (7.5) e (7.6) tem-se:

$$P_t - r^{-1} D_t = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{i+1} \left(D_{t+i} - D_t \right) \tag{7.7}$$

que, conforme se viu na Seção 2 (ver nota 10) pode ser escrito como:

$$P_t - r^{-1} D_t = E_t \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^{-1} \alpha^j \Delta D_{t+j} \tag{7.8}$$

Assim, se a série D_t é I(1) então P_t e D_t devem co-integrar com vetor de co-integração $(1,-r^{-1})$. Este modelo de valor presente pode ser testado com o mesmo tipo de restrições nos coeficientes do modelo VAR que aquelas para a demanda por moeda discutida acima.

Caso as taxas de juros sejam variáveis, então é fácil verificar que a equação (7.5) torna-se [ver Mills (1994)]:

$$P_t = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_{t+j} \right) D_{t+i} \tag{7.9}$$

que dividida por D_t seria:[43]

$$\frac{P_t}{D_t} = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_{t+j} \right) \frac{D_{t+i}}{D_t} = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_{t+j} \alpha_{t+j} \right) \tag{7.10}$$

---

[42] A segunda igualdade decorre do fato de que toda a informação contida em D_t está disponível no tempo t, enquanto a última desigualdade é o resultado da soma de uma progressão geométrica.

[43] Note-se que a equação (7.9) seria, neste caso:

$$\frac{P_t}{D_t} = \delta_t \frac{D_t}{D_t} + \delta_t . \delta_{t+1} \frac{D_{t+1}}{D_{t+1}} \frac{D_{t+1}}{D_t} + \delta_t . \delta_{t+1} . \delta_{t+2} \frac{D_{t+2}}{D_{t+1}} \frac{D_{t+1}}{D_t} \frac{D_t}{D_t} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{i} \delta_{t+j} \alpha_{t+j} ,$$

onde $\delta_t = \alpha_t = 1$, para j=0.

onde $\alpha_{t+j} = \dfrac{D_{t+j}}{D_{t+j-1}}$. [44] Mills (1994) afirma, com base em prova apresentada em Cochrane e Sbordone (1988), que $\dfrac{P_t}{D_t}$ seria estacionário quando δ_t for estacionário e α_t não crescer muito rapidamente. Assim, pode-se ter aqui a mesma representação VAR do modelo com aquela discutida nas seções anteriores:

Para estabelecer a relação entre a taxa de retorno da ação, o seu preço e os respectivos dividendos, seja agora o log da taxa de retorno bruta dada por:[45]

$$h_{1t} = \log\left(\left(P_{t+1} + D_t\right) / P_t\right) = \log\left(P_{t+1} + D_t\right) - \log\left(P_t\right)^{46} \tag{7.11}$$

que pode ser escrita em termos da taxa de crescimento dos dividendos (Δd_t) e da razão dividendo-preço (δ_t) como a seguir:

$$h_{it} = \log\left(\exp\left(\delta_t - \delta_{t+1}\right) + \exp\left(\delta_t\right)\right) + \Delta d_t \tag{7.12}$$

A expansão de Taylor da equação (7.12) em torno do ponto $\delta_t = \delta_{t+1} = \delta$ permite obter:

$$h_{1t} \cong \xi_{1t} \equiv \delta_t - \rho\delta_{t+1} + \Delta d_t + k = (1-\rho)d_t + \rho p_{t+1} - p_t + k \tag{7.13}$$

onde $\rho = \dfrac{1}{\left(1+\exp(\delta)\right)} = \exp p\left(-(r-g)\right)$, e $k = \log\left(1+\exp(\delta)\right) - \delta \exp\dfrac{(\delta)}{\left(1+\exp(\delta)\right)}$.

[44] Com as taxas de juros constantes tem-se:

$$P_t = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^{i+1} D_{t+i},$$

que dividida por D_t produz:

$$\frac{P_t}{D_t} = \sum_{i=0}^{\nabla} \delta^{i+1} \frac{D_{t+1}}{D_t} = \delta \frac{D_t}{D_t} + \delta_t . \delta_{t+1} \frac{D_{t+1}}{D_{t+1}} \frac{D_{t+1}}{D_t} + \delta_t . \delta_{t+1} . \delta_{t+2} \frac{D_{t+2}}{D_t} \frac{D_{t+1}}{D_t} = \delta + \sum_{i=1}^{\infty} \delta \prod_{j=1}^{i} \delta\alpha_{t+j}$$

resultado que é idêntico ao apresentado em Mills (1994) que afirma ser isto estacionário se α_t for estacionário; novamente o autor baseia-se em prova apresentada em Cochrane e Sbordone (1988).

[45] Os resultados daqui em diante baseiam-se em Campbell e Shiller (1988).

[46] Note-se que da equação (7.1) tem-se: $r_{t+1} = \left(\dfrac{P_{t+1} + D_t}{P_t} - 1\right)$. Usando-se, agora, a aproximação $r_{t+1} \cong \ln\left(1 + r_{t+1}\right) = h_{1,t+1}$ obtem-se o resultado em (7.11).

Isto é, o log do retorno por um período, que é aproximado pela variável ξ_{it}, é uma função linear do log das razões dividendo-preço, δ_t e δ_{t+1}, e da taxa de crescimento dos dividendos, (Δd_t) .

Defina-se, agora, a versão multiperíodo da equação (7.13) como:

$$\xi_{it} \equiv \sum_{j=0}^{i-1} \rho^j \xi_{1,t+j} \tag{7.14}$$

onde ξ_{it} é a soma descontada dos retornos (aproximados) por um período, entre o tempo t e t +i - 1. [47] Combinando, então, os resultados em (7.13) e (7.14) vem:

$$\xi_{it} = \delta_t - \rho^i \delta_{t+i} + \sum_{j=0}^{i-1} \rho^i \Delta d_{t+j} + k \frac{\left(1-\rho^i\right)}{\left(1-\rho\right)}, \tag{7.15}$$

mostrando que o log do retorno durante todo o período i será tanto maior quanto: **a**) maior for a razão dividendo-preço no início do investimento; **b**) menor for essa razão no término do investimento; e **c**) maior for o crescimento dos dividendos entre essas datas dos dois itens anteriores.

Fazendo na equação acima $\lim_{i \Rightarrow \infty} \rho^i E_t \delta_{t+i} = 0$ vem:

$$\lim_{i \Rightarrow \infty} \xi_{it} = (1-\rho) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j d_{t+j} - p_t + \frac{k}{(1-\rho)} \tag{7.16}$$

cujo resultado relaciona-se, aliás, com uma medida de volatilidade do retorno do ativo.

Caso adote-se o pressuposto $E_t \xi_{it} = r$, que resulta em $E_t \xi_{it} = r \frac{\left(1-\rho^i\right)}{(1-\rho)}$, tem-se, após aplicar expectativa condicional na equação (7.15):

$$\delta_t = -\sum_{j=0}^{i-1} \rho^j E_t \Delta d_{t+j} + \rho^i E_t \delta_{t+i} + (r-k) \frac{\left(1-\rho^i\right)}{(1-\rho)} \tag{7.17}$$

indicando que a razão dividendo-preço em t é determinada pela expectativa do crescimento real dos dividendos futuros ao longo do período i, pela esperada

---

[47] De fato, ξ_{it} é a linearização da fórmula exata para o log do retorno bruto no período i, dada por:

$$H_{it} = \ln\left\{ \exp\left(\delta_t - \delta_{t+i} + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta d_{t+j} \right) + \sum_{j=0}^{i-1} \exp\left(\delta_t + \sum_{k=0}^{j} \Delta d_{t+k} + r(i-j-1) \right) \right\}$$

razão dividendo-preço i períodos adiante, e por uma taxa de retorno constante sobre os ativos acionários. Uma vez mais, fazendo-se $\lim_{i \Rightarrow \infty} \rho^i E_t \delta_{t+i} = 0$ vem:

$$\delta_t = -\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j E_t \Delta d_{t+j} + \frac{(r-k)}{(1-\rho)} \tag{7.18}$$

que expressa a razão dividendo-preço como uma função linear do crescimento real esperado para os dividendos no futuro e que vai até o infinito.

O pressuposto de que o excesso do retorno das ações sobre aquele de um ativo alternativo com retorno r seja constante, isto é, $E_t \xi_{it} = E_t r_t + c$, permite, por outro lado, obter:

$$\delta_t = \sum_{j=0}^{i-1} \rho^j E_t \left[r_{t+j} - \Delta d_{t+j} \right] + \rho^i E_t \delta_{t+i} + (c-k) \frac{\left(1-\rho^i\right)}{(1-\rho)} \tag{7.19}$$

que tomando o limite quando i tende para infinito resulta:

$$\delta_t = \sum_{j=0}^{i\infty} \rho^j E_t \left[r_{t+j} - \Delta d_{t+j} \right] + \frac{(c-k)}{(1-\rho)} \tag{7.20}$$

Esse é o chamado modelo da razão dividendo, proposto por Campbell e Shiller (1988).

Os modelos em (7.18) e (7.20) podem ser testados com a mesma metodologia do modelo VAR com restrições nos parâmetros discutida no contexto dos modelos das seções anteriores. Por exemplo, em (7.18) o vetor de variáveis no modelo VAR seria $Z_t=(\delta_t; r_{t+j}-\Delta d_{t+j})$, com as restrições nos coeficientes do modelo sendo como aquelas da Seção 2.

BIBLIOGRAFIA

BLANCHARD, J. O., FISCHER, S. **Lectures on macroeconomics**. MIT Press, 1989.

BUITER, W. H., PATEL, U. R. Debt, deficts, and inflation: an application to the public finances of India. **Journal of Public Economics,** v.47, p.171-205, North-Holland, 1992.

CAMPBELL, J. Y. Does saving anticipate declining labor income? An alternative test of the permanent income hypothesis. **Econometrica**, v.55, n.6, Nov. 1987.

______.A defense of traditional hypotheses about the term structure of interest rates. **The Journal of Finance**, v.41, n.1, p.183-194, Mar. 1986.

CAMPBELL, J. Y., SHILLER, R. J. Cointegration and tests of present value models. **Journal of Political Economy**, v.95, n.5, p.1.062-1.088, Oct. 1987

______.Stock prices, earnings and expected dividends. **The Journal of Finance**, v.XLIII, n.3, p.661-676, July 1988.

COCHRANE, J. H., SBORDONE, A. M. Multivariate estimates of the permanent components of GNP and stock prices. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v.12, p. 255-296, 1988.

CUSHING, M. J., ACKERT, L. F. Interest rate innovations and the volatility of long-term bond yields. **Journal of Money, Credit and Banking**, v.26, n.2, p.171-344, May 1994.

ENGSTED, T. D. The long-term interest rate predict future inflation? A multicountry analysis. **The Review of Economics and Statistics**, v. LXXVII, p.42-54, 1995.

ENGLE, D., GRANGER, C. W. J. Cointegration and error correction: representation, estimation and testing. **Econometrica**, v.55, p.251-276, 1987.

HALL, R. E. Stochastic implications of the life cycle-permanent income hypothesis: theory and evidence. **Journal of Political Economy**, v.86, n.6, p.971-988, Dec. 1978.

HAMILTON, J. D. **Time series analysis.** Princeton University Press, 1994.

LEIDERMAN, L., BLEJER, M. I. Modeling and testing Ricardian equivalence. **Staff Papers**, v.35, n.1, Mar. 1988.

LEIDERMAN, L., RAZIN, A. Testing Ricardian neutrality with an intertemporal stochastic model. **Journal of Money, Credit and Banking**, v.20, n.1, Feb. 1988.

MACDONALD, R., TAYLOR, M. Reexamining the monetary approach to the exchange rate: the dollar-franc, 1976-90. **Applied Financial Economics**, v.4, p.423-429, 1994**a**.

MILLS, T. C. The term structure of UK interest rates: tests of the expectations hypothesis. **Applied Economics**, v.23, p. 599-606, 1991.

______.The econometric modelling of financial time series. **Cambridge University Press**, 1993.

PHYLAKTIS, K., TAYLOR, M. P. The monetary dynamics of sustained high inflation: Taiwan, 1945-49. **Southern Economic Journal**, v.58, n.3, p.610-622, Jan. 1992.

PONTA, A. F. **A sustentabilidade do endividamento externo no Brasil: uma análise de co-integração.** (A ser publicado em **Pesquisa e Planejamento Econômico**).

ROSSI, J. W. A demanda por moeda no Brasil: o que ocorreu a partir de 1980? **Pesquisa e Planejamento Econômico**, v.18, n.1, p.37-53, abr. 1988.

______. **A equação da restrição orçamentária do governo: uma resenha dos usos e interpretações**. Rio de Janeiro: IPEA, abr. 1992, 48 p. (Texto para Discussão Interna, 254).

______. O modelo hiperinflacionário da demanda por moeda de Cagan e o caso do Brasil. **Pesquisa e Planejamento Econômico**, v.24, n.1, p.73-96, abr. 1994.

______. **A estrutura a termo da taxa de juros: uma breve resenha**. Rio de Janeiro: IPEA, jan. 1996, 35 p.

SARGENT, T. J. Macroeconomic theory. **Academic Press Incorporation**. Second edition, 1987.

SHEA, G. S. Qualms about the linearized expectations hypothesis and variance-bounds studies of the interest rate term structure. In: GRUBER, J. (ed.). **Econometric decision models: new modeling and modeling and applications**. Berlim: Springer-Verlag, 1991.

SHILLER, R. J. The volatility of long-term interest rates and expectations models of the term structure. **Journal of Political Economy**, v.87, n.4, p. 1.190-1.219, Dec.1979.

SHILLER, R. J., JEREMY, J. S. The Gibson paradox and historical movements in real interest rates. **Journal of Political Economy**, v.85, n.5, Oct.1977.

STOCK, J. H. Asymptotic properties of least square estimators of co-integration vectors. **Econometrica**, v.55, p. 1.035-1.056, 1987.

TAYLOR, M. P. The hyperinflation model of money demand revisited. **Journal of Money**, **Credit, and Banking**, v.23, p. 327-351, 1991.