TEXTO PARA DISCUSSÃO Nº 1479

MODELO DINÂMICO ESTOCÁSTICO DE EQUILÍBRIO GERAL (DSGE) PARA A ECONOMIA BRASILEIRA: VERSÃO 1

Luciano Vereda
Marco A. F. H. Cavalcanti

Brasília, março de 2010

TEXTO PARA DISCUSSÃO Nº 1479

MODELO DINÂMICO ESTOCÁSTICO DE EQUILÍBRIO GERAL (DSGE) PARA A ECONOMIA BRASILEIRA: VERSÃO 1

Luciano Vereda*
Marco A. F. H. Cavalcanti**

Brasília, março de 2010

* Professor do Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).
** Técnico de Planejamento e Pesquisa da Diretoria de Estudos e Políticas Macroeconômicas (Dimac) do Ipea.

URL: http://www.ipea.gov.br
Ouvidoria: http://www.ipea.gov.br/ouvidoria

ISSN 1415-4765

JEL E17, E32

TEXTO PARA DISCUSSÃO

Publicação cujo objetivo é divulgar resultados de estudos direta ou indiretamente desenvolvidos pelo Ipea, os quais, por sua relevância, levam informações para profissionais especializados e estabelecem um espaço para sugestões.

SUMÁRIO

SINOPSE

Este texto apresenta os primeiros resultados de um projeto em andamento cujo objetivo é construir e operacionalizar um modelo *dinâmico estocástico de equilíbrio geral* (DSGE, na sigla em inglês) para o Brasil. O arcabouço teórico básico é importado dos modelos de Smets e Wouters (2003) e Christiano *et al*. (2005), aos quais são adicionadas características típicas de economias emergentes e da economia brasileira em particular. A versão atual do modelo ainda omite diversas características importantes da economia do país, mas já permite representar alguns dos mecanismos de transmissão de choques que parecem relevantes para o país.

ABSTRACT[i]

This paper presents the first results of an ongoing project aimed at building and putting into operation a "dynamic stochastic general equilibrium" (DSGE) model for Brazil. The model is based on Smets and Wouters (2003) and Christiano ET AL.(2005), to which we add features that are typical of emerging economies in general and of the Brazilian economy in particular. The model's current version still omits important characteristics of the Brazilian economy, but is already able to represent the transmission mechanisms of some shocks that seem relevant to the country.

i. The versions in English of the abstracts of this series have not been edited by Ipea's editorial department.
As versões em língua inglesa das sinopses (*abstracts*) desta coleção não são objeto de revisão pelo Editorial do Ipea.

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da última década, o uso de modelos *dinâmicos estocásticos de equilíbrio geral* (DSGE, na sigla em inglês) se difundiu entre instituições de pesquisa e bancos centrais ao redor do mundo enquanto importante instrumento na análise de questões macroeconômicas. Fukac e Pagan (2006) sumarizam a evolução histórica dos modelos macroeconômicos de previsão e simulação usados internacionalmente (notadamente pelos bancos centrais de países desenvolvidos), deixando evidente a tendência rumo a modelos mais consistentes do ponto de vista teórico. A mais recente "geração" de modelos, exemplificada pelos modelos desenvolvidos pelo Banco Central Europeu (NAWM), Banco do Canadá (Totem), Banco da Inglaterra (BEQM), Banco do Japão (JEM), Banco Central do Chile (MAS), Comunidade Europeia (QUEST III) e Fundo Monetário Internacional (GEM), baseia-se justamente no arcabouço teórico dos modelos DSGE.[1]

A atratividade dos modelos DSGE deve-se à sua estrutura teórica rigorosa – que propicia a realização de simulações de política econômica consistentes com os *microfundamentos* do modelo – e à sua flexibilidade para explicar vários *fatos estilizados* da macroeconomia. Cabe destacar que, ao construir um modelo macroeconômico, é preciso atentar para o inexorável *trade-off* entre a obtenção de consistência teórica e de um bom ajuste aos dados. Frequentemente, modelos com boas propriedades teóricas revelam-se inferiores a modelos puramente estatísticos em termos de ajuste aos dados e capacidade preditiva. A abordagem DSGE parece promissora; conforme ressaltado por vários autores, dentre os quais Smets e Wouters (2003), Adolfson *et al.* (2007b) e Lees *et al.* (2007), as novas safras de modelos DSGE revelam-se capazes de aliar a consistência teórica de modelos "microfundamentados" a uma capacidade preditiva de médio ou longo prazo comparável, ou mesmo superior, à obtida por modelos de séries temporais.

Este texto apresenta os primeiros resultados de um projeto em andamento cujo objetivo é construir e operacionalizar um modelo DSGE para o Brasil. Ao final do projeto, espera-se dispor de um modelo que represente adequadamente as principais características da economia brasileira no contexto de uma abordagem dinâmica de equilíbrio geral e que permita identificar os impactos macroeconômicos de diversos "choques" externos e de política econômica no médio prazo.

O texto é composto de seis seções, além desta introdução. A seção 2 apresenta uma visão geral do projeto, destacando seus objetivos e etapas intermediárias. A seção 3 descreve a estrutura do modelo em sua versão básica, que ainda omite diversas características importantes da economia brasileira, mas já permite entender alguns dos mecanismos de transmissão de choques que podem ser relevantes para a economia do país. As seções 4 e 5 apresentam as equações que caracterizam o equilíbrio de *steady-state* e as equações dinâmicas do modelo, respectivamente. A seção 6 apresenta uma parametrização preliminar do modelo e discute alguns resultados de simulação

1. Christoffel *et al.* (2008), Murchison e Rennison (2006), Harrison *et al.* (2005), Fujiwara *et al.* (2005), Medina e Soto (2006), Ratto *et al.* (2009) e Botman *et al.* (2007). O Banco Central do Brasil também vem desenvolvendo um modelo DSGE para o Brasil, o Samba (*Stochastic Analytical Model with a Bayesian Approach*), mas até o momento não foi divulgado nenhum documento descrevendo o modelo em detalhe; para uma apresentação sumária do modelo, ver Gouvêa *et al.* (2008).

sob tal parametrização. Por fim, a seção 7 apresenta alguns comentários à guisa de conclusão. O modelo contém, evidentemente, importantes limitações, que são discutidas na última seção.

2 VISÃO GERAL DO PROJETO

O projeto visa construir e operacionalizar um modelo quantitativo para previsão e simulação de cenários macroeconômicos. O objetivo geral do modelo é identificar os impactos, no médio prazo (entre um e quatro anos), de diversos "choques" externos e de política econômica sobre a evolução das principais variáveis macroeconômicas. Entre os objetivos específicos do modelo, cabe destacar a capacidade de prever os efeitos de mudanças na condução das políticas monetária e fiscal, choques de produtividade e variações nos termos de troca, taxa de juros externa e crescimento mundial.

O modelo busca representar as principais características da economia brasileira no contexto de uma abordagem dinâmica de equilíbrio geral, na qual as inter-relações entre as variáveis macroeconômicas são derivadas a partir das decisões ótimas dos diversos agentes na economia (famílias, firmas e autoridades monetárias e fiscais) em face das restrições impostas pelo ambiente em que operam. O arcabouço teórico básico é importado dos modelos de Smets e Wouters (2003) e Christiano *et al.*(2005), que têm servido de inspiração para modelos DSGE de médio porte adotados por diversos bancos centrais de todo o mundo. Fundamentado no paradigma novo-keynesiano,[2] este modelo apresenta como principais características: *i)* indivíduos com expectativas racionais; *ii)* firmas com poder de mercado e, portanto, capacidade de fixar preços; *iii)* rigidez de preços e salários, que permite que a política monetária tenha efeitos reais sobre a economia; e *iv)* fricções reais, como custos de ajustamento do capital, utilização variável da capacidade instalada e formação de hábito no consumo, que ajudam a explicar vários fatos estilizados associados às flutuações do produto. A extensão do modelo para uma economia aberta segue Dib (2003) e Medina e Soto (2006).

A versão atual do modelo para o Brasil adiciona a essa estrutura básica algumas características típicas de economias emergentes e da economia brasileira em particular, tais como: *i)* a presença de indivíduos alijados do mercado financeiro e de trabalho, que obtêm sua renda a partir de transferências governamentais e são impedidos de suavizar seu padrão de consumo ao longo do tempo; *ii)* a divisão dos bens e serviços produzidos em itens cujos preços são "livres" (transacionados sem qualquer tipo de monitoramento ou intervenção governamental) ou "administrados" (negociados a preços fixados sob algum grau de monitoramento ou intervenção do governo); e *iii)* a inserção de um prêmio de risco sobre os títulos convencionais de renda fixa emitidos pelo governo brasileiro, que depende do passivo externo líquido do país, além de fatores externos, como flutuações na propensão ao risco dos investidores internacionais.

A calibragem e solução do modelo seguem as técnicas descritas, por exemplo, em Smets e Wouters (2003), Christiano *et al.* (2005), Murchison e Rennison (2006) e Medina e Soto (2006), por meio do uso do Dynare, conjunto de rotinas

2. Por exemplo, Woodford (2003).

desenvolvidas por pesquisadores do CEPREMAP (*Centre pour la Recherche Economique et ses Applications*)[3] e executadas pelo *software* MATLAB.

Nas próximas etapas do projeto, pretende-se avançar na estimação econométrica do modelo e na incorporação de novas características à modelagem teórica. No que diz respeito à estimação econométrica, a literatura recente apresenta vários exemplos de modelos DSGE estimados a partir de métodos bayesianos ou máxima verossimilhança – além de Smets e Wouters (2003), ver, dentre outros, An e Schorfeide (2007), Ruge-Murcia (2007), Adolfson *et al.* (2008) e Ratto *et al.* (2009). Pretende-se estimar o modelo através de um ou mais destes métodos, atentando, porém, para os problemas de identificação que costumam afetar os modelos DSGE (CANOVA e SALA, 2007; RUGE-MURCIA, 2007).

No que se refere à modelagem teórica, o objetivo será incorporar novas características que permitam reproduzir aspectos importantes da economia brasileira. Primeiro, o setor fiscal será tratado com mais atenção, através da incorporação de diferentes instrumentos e regras de política fiscal. Segundo, será incluído um setor produtor e exportador de *commodities*, de modo a tentar captar a importância destas atividades para as flutuações da economia brasileira. Por fim, pretende-se modelar a interação entre o setor financeiro e a economia real, que inexistia no modelo original de Smets e Wouters (2003), mas vem sendo incorporada crescentemente aos modelos DSGE mais recentes. A forma mais simples de fazer isso parece ser a introdução de um "acelerador financeiro", nos moldes de Bernanke *et al.* (1999), Elekdag *et al.* (2005), Christensen e Dib (2008) e Gilchrist *et al.* (2009). Outra possibilidade seria a introdução de um setor bancário, conforme Iacoviello (2005) e Broza-Brzezina *et al.* (2009).

A seguir, apresenta-se a versão atual do modelo para a economia brasileira. Derivam-se as equações que estabelecem o *steady-state* do modelo e as equações que governam a dinâmica das variáveis endógenas, sob completa flexibilidade de preços e sob rigidez nominal de preços e salários. Detalhes das derivações estão nos anexos ao final do texto.

3 O MODELO

A estrutura geral do modelo é apresentada na figura 1. A economia inclui dois tipos de indivíduos: indivíduos que se comportam de acordo com a teoria da renda permanente (indivíduos *RP*), distribuindo seus gastos de consumo no tempo de forma ótima, e indivíduos alijados do mercado financeiro, limitados, portanto, a consumir sua renda corrente (indivíduos *RC*). A presença de indivíduos com possibilidades de consumo restritas é importante para permitir captar os efeitos das políticas fiscais (transferências e taxação, em particular) sobre o consumo e produto agregado. Os indivíduos *RP* ofertam trabalho às firmas e delas recebem salários e dividendos (pois também são os proprietários das firmas), enquanto os indivíduos *RC* recebem sua renda através de transferências governamentais. A existência de

3. Ver <http://www.cepremap.cnrs.fr/juillard/mambo/index.php?option=com_frontpage&Itemid=1> para obter mais detalhes e acessar as últimas versões das rotinas.

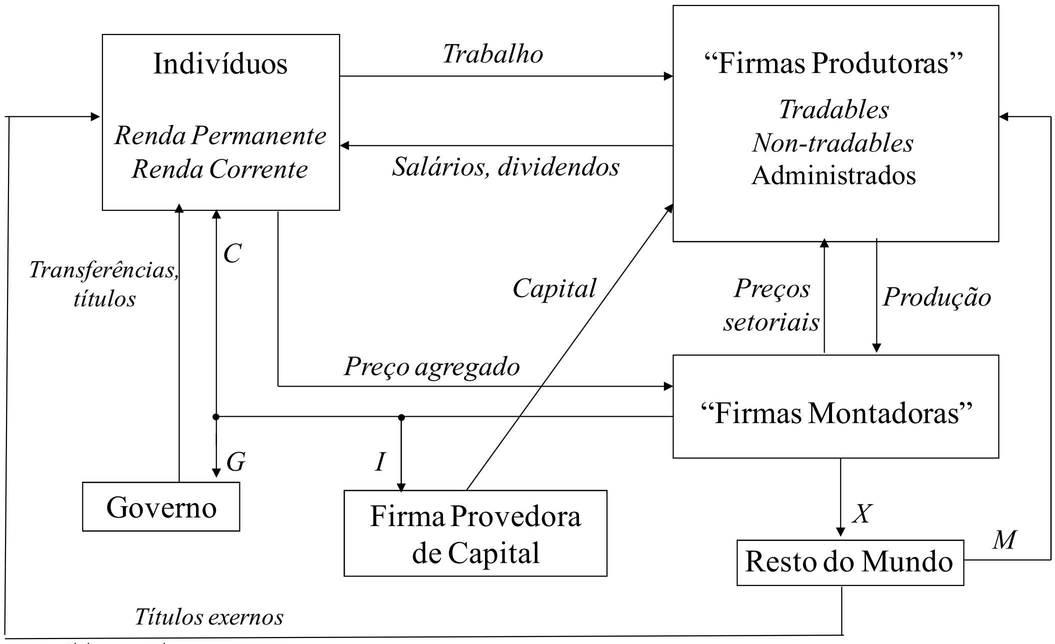
"formação de hábito" no consumo impõe certa inércia à dinâmica do consumo agregado, revelando-se importante para representar este fato estilizado.

Do lado da oferta, o núcleo do modelo é composto por firmas produtoras de três tipos de bens: *tradables*, *non-tradables* e administrados. Esta desagregação tem como objetivo principal captar efeitos de choques setoriais sobre as dinâmicas do nível agregado de preço e da taxa de câmbio real. A existência de firmas "montadoras", que agregam os bens produzidos em cada setor em cestas a serem distribuídas para as famílias e para o governo, transformadas em capital novo ou exportadas, é uma conveniência técnica e não tem impacto sobre a dinâmica das variáveis. A transformação de parte das cestas de bens em capital novo é realizada por uma firma monopolista, que oferta este capital às firmas produtoras; este processo caracteriza-se por utilização variável da capacidade instalada e custos de ajustamento do estoque de capital, que são fricções reais importantes para representar a dinâmica do investimento e produto. Cabe notar que se supõe a existência de rigidez de preços e salários, o que permite que a política monetária tenha efeitos reais sobre a economia.

A relação da economia doméstica com o resto do mundo se dá mediante fluxos comerciais e financeiros: de um lado, exporta-se parte das cestas de bens *tradables* produzidos domesticamente e importa-se parte dos insumos utilizados pelas firmas produtoras; de outro lado, os indivíduos domésticos podem investir em títulos emitidos no exterior.

As próximas seções descrevem o modelo em detalhe.

FIGURA 1
Estrutura do modelo



Elaboração dos autores

3.1 INDIVÍDUOS

A economia inclui dois tipos de indivíduos: indivíduos que se comportam de acordo com a teoria da renda permanente (indivíduos *RP*), e indivíduos que simplesmente consomem sua renda corrente (indivíduos *RC*). Os primeiros têm acesso aos mercados financeiro e de crédito e podem transferir renda ao longo do tempo investindo ou tomando dinheiro emprestado. Os últimos estão alijados destes mercados e direcionam para o consumo toda a renda recebida. Os primeiros detêm ações das firmas que atuam na economia, os últimos não.

Os indivíduos do tipo *RC* pertencem a um contínuo com medida ζ . O *i*-ésimo indivíduo deste conjunto recebe um vencimento mensal igual ao "salário mínimo" W_t^{min}. A ideia subjacente é que estes indivíduos não participam dos mercados financeiros e de crédito porque não têm capacidade para participar do mercado de trabalho (falta de capital humano levando à exclusão social) e acabam sendo sustentados por transferências governamentais. Sob estas hipóteses:

$$P_t\, C_{i,t}^c = W_t^{min} \qquad [1]$$

onde P_t é o nível geral de preços (ou o preço da cesta de bens consumida pelos indivíduos) e $C_{i,t}^c$ é a quantidade de cestas consumida pelos *i*-ésimo indivíduo pertencente à categoria *RC*.[4] O consumo agregado é a soma do consumo dos indivíduos da categoria *RP* (que será derivado a seguir) e dos indivíduos da categoria *RC*:

$$C_t^{tot} = \int_0^1 C_{i,t}di + \int_0^{\zeta} C_{i,t}^c di \qquad [2]$$

Os indivíduos do tipo *RP* pertencem a um contínuo $[0,1]$ e possuem as mesmas preferências, que são crescentes na quantidade consumida de um agregado *CES* de bens (cuja definição precisa será exposta a seguir) e no montante de saldos monetários reais que eles mantêm em carteira, e decrescentes na quantidade de trabalho ofertada às firmas produtoras. Estas preferências estão sujeitas ao impacto dos choques ε_t^B, ε_t^L e ε_t^M, que alteram as utilidades marginais do consumo e dos saldos monetários reais, assim como a desutilidade marginal do trabalho. Sua definição é a seguinte:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \varepsilon_t^B \left[\frac{\left(C_{i,t} - hC_{t-1}\right)^{1-\sigma_C}}{1-\sigma_C} - \varepsilon_t^L \frac{L_{i,t}^{1+\sigma_L}}{1+\sigma_L} + \frac{\varepsilon_t^M}{1-\sigma_M} \left(\frac{M_{i,t}}{P_t} \right)^{1-\sigma_M} \right] \qquad [3]$$

que ressalta o seu caráter intertemporal, pois os indivíduos se importam com os fluxos de consumo, trabalho e saldos monetários reais disponíveis ao longo de todos os momentos da sua vida, que é infinita por hipótese. As variáveis $C_{i,t}$, $L_{i,t}$ e $M_{i,t}$ denotam o consumo, as horas de trabalho e a quantidade de moeda mantida por este indivíduo no instante *t*. Vale notar que a satisfação que o indivíduo *i* deriva do seu nível de consumo depende do valor assumido pelo consumo agregado no instante $t-1$ (C_{t-1}), atributo denominado "formação de hábito" e que impede mudanças bruscas na trajetória do consumo do *i*-ésimo indivíduo. Os parâmetros σ_C e σ_L, por

4. De [1] é trivial mostrar que $C_{i,t}^c = \frac{W_t}{P_t}$, logo o consumo dos indivíduos do tipo *RC* é igual para todos os membros dessa população.

sua vez, medem as elasticidades da utilidade marginal do consumo com relação ao seu nível e da desutilidade marginal do trabalho com relação à quantidade de horas de trabalho ofertada.

A restrição orçamentária do *i*-ésimo indivíduo do tipo *RP* é dada por:

$$M_{i,t} + P_{B,t}B_{i,t} + e_t P^*_{B,t} B^*_{i,t} = M_{i,t-1} + B_{i,t-1} + e_t B^*_{i,t-1} + Y_{i,t} - P_t C_{i,t} \qquad [4]$$

onde $B_{i,t}$ $(B^*_{i,t})$ representa a quantidade de títulos de um período de emissão doméstica (estrangeira) que o indivíduo *i* adquire para a sua carteira no período *t*. O preço de mercado do título doméstico (estrangeiro) no instante *t*, medido em termos nominais e em moeda local, é $P_{B,t}$ $(e_t P^*_{B,t})$, de maneira que $P_{B,t}B_{i,t}$ $(e_t P^*_{B,t} B^*_{i,t})$ é o valor da carteira de títulos domésticos (estrangeiros) adquirida pelo indivíduo *i* no instante *t*. O preço da moeda estrangeira no mercado de divisas local é e_t. Vale notar que uma das fontes de renda do indivíduo *i* no período *t* é o resgate dos investimentos de um período feitos no período $t-1$; ora, isto dá a ele um montante igual a $B_{i,t-1} + e_t B^*_{i,t-1}$ (medida nominal e em moeda local), pois o valor prometido por um título de um período no vencimento é $1 (em moeda local ou estrangeira).

Como em Dib (2003), pressupõe-se que o preço de um título de um período emitido no estrangeiro seja dado por $P^*_{B,t} = \dfrac{1}{\theta_t R^*_t}$. Dib faz $\theta_t = \left(\dfrac{e_t B^*_t}{P_t Y_t}\right)^{-\theta}$ e interpreta esta variável como um prêmio de risco. Segundo Dib (2003, p.7; tradução livre),

> θ_t é um prêmio de risco endógeno, específico ao país, que reflete desvios em relação à condição de paridade descoberta de juros. Assim, no período t, o indivíduo doméstico pode comprar títulos externos, B^*_t, por $P^*_{B,t} = \dfrac{1}{\theta_t R^*_t}$ unidades de produto externo… A existência desse prêmio de risco implica a unicidade do equilíbrio de steady-state e a estacionariedade do modelo.

Adota-se aqui a formulação de Dib, porém inserindo um determinante exógeno para o prêmio de risco:

$$\theta_t = \varepsilon^\theta_t \left(\frac{e_t B^*_t}{P_t Y_t}\right)^{-\theta} \qquad [5]$$

O choque ε^θ_t é interpretado como uma mudança no prêmio de risco que não pode ser explicada por variáveis domésticas como, por exemplo, flutuações no apetite por risco dos investidores internacionais. Este choque é importante, assim, como forma de representar choques externos que sejam transmitidos à economia brasileira através do mercado financeiro.

A variável $Y_{i,t}$ representa a renda nominal auferida pelo indivíduo *i* no instante *t*. $Y_{i,t}$ é definida como $Y_{i,t} = W_{i,t}L_{i,t} + A_{i,t} + Div_{i,t} - Tax_{i,t}$, onde $W_{i,t}$ é o salário pago ao *i*-ésimo indivíduo do tipo *RP* (que é o único fornecedor de trabalho do tipo *i*; serão examinadas as implicações desta hipótese posteriormente), $A_{i,t}$ é o seguro pago a estes indivíduos e que previne flutuações indesejadas no salário por eles recebido[5], $Div_{i,t}$ são os dividendos recebidos das firmas[6] e $Tax_{i,t}$ são os tributos pagos ao governo (iguais para todo *i*).

O problema de escolha dos fluxos ótimos de consumo, investimento (em moeda e títulos) e salário do tipo *i* pode ser colocado da seguinte maneira:

$$\max_{\{C_{i,t},W_{i,t},M_{i,t},B_{i,t},B^*_{i,t}\}} E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\varepsilon_t^B\left[\frac{\left(C_{i,t}-hC_{t-1}\right)^{1-\sigma_C}}{1-\sigma_C}-\varepsilon_t^L\frac{L_{i,t}^{1+\sigma_L}}{1+\sigma_L}+\frac{\varepsilon_t^M}{1-\sigma_M}\left(\frac{M_{i,t}}{P_t}\right)^{1-\sigma_M}\right]$$

$$sa\ M_{i,t}+P_{B,t}B_{i,t}+e_tP^*_{B,t}B^*_{i,t}=M_{i,t-1}+B_{i,t-1}+e_tB^*_{i,t-1}+W_{i,t}L_{i,t}-P_tC_{i,t}+A_{i,t}-Tax_{i,t}+Div_{i,t}$$

O salário $W_{i,t}$ pertence ao conjunto de variáveis de escolha porque o indivíduo *i* é o único provedor de trabalho do tipo *i*, logo tem poder para fixar o melhor salário possível, dadas as condições da demanda, que fazem com que $L_{i,t}$ (demanda total por trabalho do tipo *i)* seja uma função decrescente de $W_{i,t}$. No caso em que há rigidez nominal de salários, o salário ótimo deixa de ser escolhido a cada período porque há uma probabilidade (exógena) α_w de o indivíduo não conseguir fazer escolhas ótimas a todo instante.

A solução do problema é descrita em detalhe no anexo 1 e gera as equações [6] a [9], que caracterizam as escolhas ótimas de C_t , M_t , B_t , B_t^* e $W_{i,t}$. O subscrito *i* foi retirado porque os indivíduos do tipo *RP* fazem as mesmas escolhas ótimas de consumo, saldos monetários (medidos em termos nominais) e quantidades de títulos de renda fixa de um período.[7]

O resultado [6] é a famosa equação de Euler:

$$\varepsilon_t^B\left(C_t-hC_{t-1}\right)^{-\sigma_C}=\beta E_t\left[\varepsilon_{t+1}^B\left(C_{t+1}-hC_t\right)^{-\sigma_C}\frac{R_t}{\pi^\circ_{t+1}}\right] \qquad [6]$$

na qual $R_t=\dfrac{1}{P_{B,t}}$ é a taxa de juros bruta de um período praticada na economia doméstica e $\pi^\circ_{t+1}=\dfrac{P_{t+1}}{P_t}$ é a taxa de inflação bruta referente aos bens finais e medida entre os instantes t e $t+1$. Essa equação estipula que a perda de utilidade incorrida pelo indivíduo quando direciona uma unidade monetária para a aquisição de títulos de renda fixa de um período no instante *t* (e, portanto, adia o consumo que esta unidade monetária poderia proporcionar neste instante) deve ser igual ao ganho

5. O seguro funciona como um *pooling* dos salários recebidos pelos indivíduos seguido de uma divisão do "bolo" em partes iguais. Por conseguinte, ele faz com que todos os indivíduos recebam os mesmos rendimentos oriundos do trabalho e permite que todos se deparem com a mesma restrição orçamentária e façam as mesmas escolhas ótimas de consumo, trabalho e investimento.

6. Tendo em vista que todos os indivíduos são iguais em tudo, exceto quanto ao tipo de trabalho por eles fornecido, e como esta diferença é eliminada (pelo menos em termos da renda oriunda do trabalho oferecido às firmas) pelo seguro que recebem, todos têm a mesma participação acionária nas empresas em operação e acabam recebendo os mesmos valores.

7. Ver notas de rodapé 5 e 6.

coletado quando os títulos são resgatados e o pagamento utilizado para consumir no instante $t+1$.

O resultado [7] estabelece uma relação de equilíbrio entre as taxas de juros doméstica e externa, o prêmio de risco e a utilidade marginal da renda (que é igual a $-\lambda_t$; ver anexo 1):

$$R_t E_t\left[\lambda_{t+1}\right] = \theta_t R_t^* E_t\left[\frac{e_{t+1}}{e_t}\lambda_{t+1}\right] \qquad [7]$$

Na equação desenvolvida, $R_t^* = \dfrac{1}{P_{B,t}^*}$ é a taxa de juros bruta de um período praticada no resto do mundo. A interpretação de [7] é mais fácil examinando-se a sua versão linearizada (ver [76])[8] e percebendo-se que, de acordo com ela, a taxa de juros real *ex-ante* de um período praticada na economia doméstica deve ser igual à soma da sua correspondente do resto do mundo com o prêmio de risco e a expectativa, formada no período *t*, acerca da variação da taxa de câmbio real registrada entre os períodos t e $t+1$.

O problema de escolha de salários admite dois tipos de solução. Sob flexibilidade completa, o salário pode ser escolhido a qualquer instante e a solução ótima é:

$$\frac{W_t}{P_t} = \left(1+\mu_w\right)\varepsilon_t^L\left(L_t\right)^{\sigma_L}\left(C_t - hC_{t-1}\right)^{\sigma_C} \qquad [8]$$

que define o salário real de equilíbrio.

A rigidez nominal de salários é incorporada supondo-se que o salário praticado no período *t* ou é corrigido por meio de uma regra de bolso a fim de se obter o salário cobrado no período $t+1$ (evento que ocorre com probabilidade α_w) ou é recalculado de maneira ótima (evento que ocorre com probabilidade $1-\alpha_w$). A regra de bolso é tal que o salário recebido no período t se relaciona com o salário recebido no período imediatamente anterior de acordo com a fórmula $W_{i,t} = \left(\pi_{t-1}^{\circ}\right)^{\gamma_w}\left(\bar{\pi}_{t-1}^{\circ}\right)^{1-\gamma_w} W_{i,t-1}$, onde $\pi_{t-1}^{\circ} = \dfrac{P_{t-1}}{P_{t-2}}$, $\bar{\pi}_{t-1}$ é a última meta de inflação fixada pelo BC e conhecida pelos agentes, e γ_w e $(1-\gamma_w)$ são os pesos atribuídos à inflação passada e à meta de inflação, respectivamente, no fator de correção. A consequência destas hipóteses é que o salário praticado em um dado período (por exemplo, $t=0$) é reajustado pela regra

8. Como de praxe na abordagem DSGE, o foco da análise será nas versões linearizadas das equações que descrevem o equilíbrio do modelo.

de bolso no período 1 com probabilidade α_w, no período 2 com probabilidade α_w^2, e assim por diante.[9]

Há, aqui, uma pequena mudança com relação a Smets e Wouters (2003), que trabalham com uma regra de bolso na qual $W_{i,t} = \left(\pi_{t-1}^{\circ}\right)^{\gamma_w} W_{i,t-1}$, de maneira que não há papel para a meta de inflação $\overline{\pi}_t^{\circ}$. A formulação aqui adotada parece mais adequada ao caso brasileiro, no qual as expectativas de inflação parecem desempenhar importante papel na atração das expectativas.[10]

Se o indivíduo escolhe o salário ótimo sob o ponto de vista de $t = 0$, então o valor a ser fixado deve obedecer à equação:

$$W_{i,0} = -\left(1+\mu_w\right)\frac{E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\alpha_w \beta\right)^t \varepsilon_t^B \varepsilon_t^L \left(L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w \times W_{i,0}}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} \right)^{\sigma_L} L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}}{E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\alpha_w \beta\right)^t \lambda_t \Upsilon_{0,t-1}^w L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}} \qquad [9]$$

onde $\Upsilon_{0,t-1}^w = \left(\pi_0^{\circ} \times \pi_1^{\circ} \times \pi_2^{\circ} \times \ldots \times \pi_{t-1}^{\circ}\right)^{\gamma_w} \left(\overline{\pi}_0^{\circ} \times \overline{\pi}_1^{\circ} \times \overline{\pi}_2^{\circ} \times \ldots \times \overline{\pi}_{t-1}^{\circ}\right)^{1-\gamma_w}$.

3.2 FIRMAS

As firmas dessa economia se dividem em dois setores, o “produtor” (ou “atacadista”) e o “empacotador” (ou “varejista”, ou “montador”). O setor “produtor” se divide em dois grupos: o primeiro é integrado por firmas cujos produtos são negociados sem qualquer tipo de monitoramento ou intervenção governamental, de maneira que seus preços são considerados livres, enquanto o segundo é composto por firmas cujos produtos são negociados sob algum grau de monitoramento ou intervenção do governo, de forma que seus preços são administrados. O grupo livre se divide em dois subgrupos: o primeiro é integrado por firmas cujos produtos podem ser negociados no mercado internacional (os *tradables*), enquanto o segundo é composto por firmas cujos produtos não são negociados internacionalmente (os *non-tradables*).

As firmas “produtoras” utilizam capital, trabalho e produtos importados para obterem as variedades de bens por elas produzidas, enquanto as firmas “empacotadoras” apenas combinam os produtos fabricados pelas firmas “produtoras” em uma cesta que é depois vendida para as famílias, para o governo ou transformada em capital novo. As firmas “empacotadoras” operam sob um regime de concorrência perfeita e livre entrada e saída do mercado, enquanto as firmas “produtoras” operam sob concorrência monopolística. As firmas “empacotadoras” obtêm três cestas diferentes compostas por bens *tradables*, *non-tradables* e administrados, na primeira

9. Vale observar que essa probabilidade α_w não depende do tempo decorrido desde que o salário foi reajustado pela última vez, nem do tamanho do desajuste – ou seja, da distância entre o salário calculado de maneira ótima e o salário a ser cobrado caso se siga a regra de bolso.
10. Ver, por exemplo, Bevilaqua, Mesquita e Minella (2007).

etapa do processo produtivo, combinando-as na segunda etapa a fim de gerar a cesta de bens finais. Uma parte das cestas de bens *tradables* é exportada.

Há uma única firma na economia responsável pelo acúmulo de capital, que depois é alugado para as demais firmas em troca de certa remuneração. A trajetória ótima de acumulação escolhida visa maximizar o lucro sob um ponto de vista intertemporal.

3.2.1 Firmas "empacotadoras"

Na primeira etapa do processo produtivo, as firmas "empacotadoras" transformam bens diferenciados em cestas que são posteriormente combinadas a fim de obter a cesta de bens finais. As funções de produção aplicadas são:

$$Y_{s,t}^{tot} = \left[\int_0^1 Y_{j,s,t}^{\frac{1}{1+\mu_s}} dj \right]^{1+\mu_s} \quad , \; s = T, NT, A$$

No caso, $Y_{s,t}^{tot}$ é a quantidade de cestas de bens do tipo *s* que são obtidas no instante *t* e $Y_{j,s,t}$ é a quantidade utilizada da *j*-ésima variedade do tipo *s*. O indicador *s* pode ser igual a *T*, *NT*, ou *A*, denotando que a variedade em questão pertence ao grupo de bens *tradables*, *non-tradables* ou administrados. O problema de minimização do custo de produção das cestas é:

$$\min_{\{Y_{j,s,t}\}} \int_0^1 P_{j,s,t} Y_{j,s,t} dj$$

$$sa \quad \left(Y_{s,t}^{tot}\right)^{\frac{1}{1+\mu_s}} = \int_0^1 Y_{j,s,t}^{\frac{1}{1+\mu_s}} dj$$

O resultado final do problema estabelece uma relação ótima entre a quantidade da *j*-ésima variedade do tipo *s* que deve ser aplicada, a quantidade total de cestas do tipo *s* que se deseja obter e o preço relativo da variedade *s* ($\frac{P_{j,s,t}}{P_{s,t}}$):

$$Y_{j,s,t} = Y_{s,t}^{tot} \left(\frac{P_{j,s,t}}{P_{s,t}} \right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} \qquad [10]$$

onde:

$$P_{s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}} = \int_0^1 P_{j,s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}} dj \qquad [11]$$

é um índice de preços que mede o custo de aquisição de uma unidade da cesta *s*. Note-se que a demanda pela *j*-ésima variedade do tipo *s* aumenta com a quantidade total de cestas do tipo *s* e diminui com o preço relativo da *j*-ésima variedade do tipo *s*

($\frac{P_{j,s,t}}{P_{s,t}}$), pois o expoente $-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}$ é negativo quando $\mu_s > 0$. A elasticidade da demanda com relação ao preço relativo $\frac{P_{j,s,t}}{P_{s,t}}$ é igual a este expoente[11].

Nesse ponto, deve-se mencionar que uma parte da produção de cestas de bens *tradables* é exportada. Com efeito, suponha-se que a demanda externa pelas cestas de bens *tradables* produzidos domesticamente ($Y_{T,t}^*$) seja igual a:

$$Y_{T,t}^* = \left(\frac{P_{T,t}}{e_t P_t^*} \right)^{-\frac{1+\tau^*}{\tau^*}} Y_t^* \qquad [12]$$

onde Y_t^* é uma medida do nível de atividade do resto do mundo (variável exógena sob o ponto de vista da economia doméstica). A hipótese em [12] segue Medina e Soto (2006) e Dib (2003), que esclarecem que ela reflete a impossibilidade de as firmas domésticas cobrarem preços diferentes de clientes domésticos e externos.

Segue que a produção de cestas de bens *tradables* ou é enviada para a segunda etapa do processo produtivo ou é exportada, ou seja:

$$Y_{T,t}^{tot} = Y_{T,t} + Y_{T,t}^* \qquad [13]$$

O mesmo não ocorre para $s = NT, A$, de maneira que $Y_{NT,t}^{tot} = Y_{NT,t}$ e $Y_{A,t}^{tot} = Y_{A,t}$.

Na segunda etapa do processo produtivo, as "empacotadoras" combinam as cestas obtidas na primeira etapa a fim de obter a cesta de bens finais. O primeiro passo é combinar as cestas de bens *tradables* e *non-tradables* em uma nova cesta (de bens ditos livres), de acordo com a seguinte função de produção:

$$Y_{L,t} = \left((\gamma)^{\frac{\eta}{1+\eta}} \left(Y_{T,t}\right)^{\frac{1}{1+\eta}} + (1-\gamma)^{\frac{\eta}{1+\eta}} \left(Y_{NT,t}\right)^{\frac{1}{1+\eta}} \right)^{1+\eta}$$

Na função, $Y_{T,t}$ ($Y_{NT,t}$) é a quantidade de cestas de bens *tradables* (*non-tradables*) utilizada nesse ponto. O passo seguinte é combinar as cestas de bens livres (*L*) e administrados (*A*), visando-se obter as cestas de bens finais de acordo com a seguinte função de produção:

$$Y_t = \left((\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{L,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}} + (1-\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{A,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}} \right)^{1+\psi}$$

onde $Y_{L,t}$ e $Y_{A,t}$ denotam as quantidades de cestas de bens livres e administrados, respectivamente, e Y_t denota a quantidade de cestas de bens finais. Nos dois passos, as firmas "empacotadoras" procuram minimizar o custo de se obter uma unidade da cesta desejada, seja ela de bens livres ou de bens finais. O resultado destes problemas de otimização (cuja derivação completa pode ser vista no anexo 2) fornece as seguintes relações:

11. Os comentários feitos para a equação [10] permanecem válidos para as equações [14], [15] e [16].

$$Y_{A,t} = (1-\phi) Y_t \left(\frac{P_{A,t}}{P_t} \right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} \qquad [14]$$

$$Y_{T,t} = \gamma \phi Y_t \left(\frac{P_{L,t}}{P_t} \right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} \left(\frac{P_{T,t}}{P_{L,t}} \right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} \qquad [15]$$

$$Y_{NT,t} = (1-\gamma) \phi Y_t \left(\frac{P_{L,t}}{P_t} \right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} \left(\frac{P_{NT,t}}{P_{L,t}} \right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} \qquad [16]$$

onde define-se:

$$(P_t)^{-\frac{1}{\psi}} = \phi (P_{L,t})^{-\frac{1}{\psi}} + (1-\phi)(P_{A,t})^{-\frac{1}{\psi}} \qquad [17]$$

$$(P_{L,t})^{-\frac{1}{\eta}} = \gamma (P_{T,t})^{-\frac{1}{\eta}} + (1-\gamma)(P_{NT,t})^{-\frac{1}{\eta}} \qquad [18]$$

Esses resultados estabelecem relações ótimas entre as quantidades de cestas de bens *tradables*, *non-tradables* e administrados aplicadas no processo produtivo, os seus preços relativos ($\frac{P_{A,t}}{P_t}, \frac{P_{L,t}}{P_t}, \frac{P_{T,t}}{P_{L,t}}$ e $\frac{P_{NT,t}}{P_{L,t}}$) e a quantidade de cestas de bens finais que se deseja obter. As relações [17] e [18] definem índices de preços que medem o custo de aquisição de uma unidade das cestas de bens finais e livres, respectivamente.

3.2.2 Firma responsável pela acumulação de capital

A acumulação de capital é responsabilidade de uma só firma, que transforma cestas de bens finais em capital novo. Esta firma define a quantidade I_t a ser transformada em capital novo maximizando o lucro auferido na cessão de capital para as firmas "produtoras". A expressão para o lucro auferido por esta firma no instante t (medido em termos nominais) é dada por:

$$\Pi_t(I_t) = R_t^k u_t K_{t-1}^{tot} - P_t \Psi(u_t) K_{t-1}^{tot} - P_t I_t \qquad [19]$$

R_t^k é o *rental price of capital goods*, u_t é a taxa de utilização do estoque de capital existente e $\Psi(u_t) K_{t-1}^{tot}$ é o custo incorrido pela firma (medido em termos reais) quando ela decide ceder o seu capital fora da capacidade plena. Por hipótese, a função $\Psi(\ldots)$ é estritamente convexa e seu valor sob plena utilização do capital (ou seja, $u_t = 1$) é zero ($\Psi(1) = 0$). A lei de movimento do estoque de capital é dada por:

$$K_t^{tot} = (1-\delta) K_{t-1}^{tot} + I_t \left(1 - S\left(\varepsilon_t^I \frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right) \qquad [20]$$

onde δ é a taxa de depreciação desse capital. A função S cria um custo de ajustamento do estoque de capital que depende da taxa bruta de crescimento do investimento. Esta função assume valor zero quando não há choques que elevem o custo (ausência do choque $\Rightarrow$ $\varepsilon_t^I = 1$; ε_t^I é mais um choque estrutural) e quando o investimento não varia ($I_t = I_{t-1} = \overline{I}$). Neste caso, o investimento se transmite integralmente em capital novo. Repetindo Smets e Wouters (2003, p. 1130), "(...) supõe-se adicionalmente que a primeira derivada seja igual a zero em torno do equilíbrio, de modo que os custos de ajustamento dependem apenas da derivada de segunda ordem".

O problema de maximização de lucro da firma detentora de capital é:

$$\max_{\{u_t, K_t^{tot}, I_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \Theta_{0,t} \left(R_t^k u_t K_{t-1}^{tot} - P_t \Psi(u_t) K_{t-1}^{tot} - P_t I_t \right)$$

$$sa\ K_t^{tot} = (1-\delta) K_{t-1}^{tot} + I_t \left(1 - S\left(\varepsilon_t^I \frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right)$$

onde $\Theta_{0,t}$ é o fator de desconto estocástico utilizado para trazer a valor presente os recebimentos futuros esperados. Obviamente, a firma acumuladora de capital vai escolher as trajetórias de u_t, K_t^{tot} e I_t que maximizam o somatório do valor presente dos lucros auferidos ao longo do tempo.

Detalhes da solução desse problema podem ser vistos no anexo 3. A solução gera as seguintes equações, que caracterizam as trajetórias ótimas de u_t, K_t^{tot} e I_t:

$$R_t^k - P_t \frac{d\Psi}{du_t} = 0 \qquad [21]$$

$$\varphi_t = E_t \left[\Theta_{t,t+1} \left(\varphi_{t+1}(1-\delta) - \left(R_{t+1}^k u_{t+1} - P_{t+1} \Psi(u_{t+1}) \right) \right) \right] \qquad [22]$$

$$1 = -\varphi_t^r \left(1 - S\left(\varepsilon_t^I \frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right) + \varphi_t^r I_t \frac{\partial S}{\partial(\arg S)} \frac{\varepsilon_t^I}{I_{t-1}} - E_t \left[\Theta_{t,t+1} \frac{P_{t+1}}{P_t} \varphi_{t+1}^r \frac{\partial S}{\partial(\arg S)} \frac{\varepsilon_{t+1}^I (I_{t+1})^2}{(I_t)^2} \right] \qquad [23]$$

onde φ_t^r é o multiplicador de Lagrange associado à restrição [20] e expresso em termos reais (ou seja, ele é igual à razão entre o preço-sombra do capital e o nível geral de preços), $\arg S$ denota o argumento da função S e $\Theta_{t,t+1}$ é o fator de desconto necessário para calcular o valor em t de um recebimento em $t+1$. É possível demonstrar que $\Theta_{t,t+1} = \beta \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}$.

A interpretação de [21] é imediata: a taxa de utilização do capital deve ser ajustada no ponto em que o custo de explorar uma unidade adicional ($\frac{d\Psi}{du_t}$) é igual ao recebimento oriundo desta exploração ($\frac{R_t^k}{P_t} = r_t^k$). Já [22] e [23] são mais facilmente interpretadas examinando as suas versões linearizadas (ver [77] e [49])[12]. De acordo com [77], o preço-sombra do capital φ_t^r diminui com a taxa de juros real *ex-ante* de um período (pois um aumento na taxa aumenta a atratividade dos investimentos em ativos financeiros) e cresce com as expectativas, formadas em *t*, acerca dos valores assumidos pelo preço-sombra e pela taxa de aluguel do capital (medido em termos reais) no instante $t+1$ (pois um aumento nestes preços eleva a atratividade dos investimentos em ativos reais). Por sua vez, [49] mostra que o investimento corrente depende positivamente do seu valor no período imediatamente anterior, das expectativas correntes acerca do investimento a ser feito no período seguinte e do valor esperado do preço-sombra do capital no instante $t+1$. Vale notar que uma estrutura análoga surge quando se analisa a versão linearizada da equação que governa a evolução do consumo (ver [75]), cuja interpretação já foi exaustivamente discutida na literatura (ver, por exemplo, Woodford, 2003).

3.2.3 Firmas "produtoras"

Cada subsetor *s* ($s = T, NT, A$) do setor de firmas "produtoras" é integrado por um contínuo $\left[0,1\right]$ de firmas que utilizam capital, trabalho e produtos importados para obter as variedades de bens por elas produzidas. Tais firmas operam sob um regime de concorrência monopolística, em que cada uma produz um bem diferenciado dos demais e possui alguma margem de manobra para fixar preços nos níveis considerados ótimos. Tal qual em Smets e Wouters (2003) e Araújo, Bugarin, Muinhos e Silva (2006), a função de produção adotada pela *j*-ésima firma pertencente ao setor *s* é uma Cobb-Douglas:

$$Y_{j,s,t} = A_t^s \left(K_{j,s,t}\right)^{\eta_K^s} \left(L_{j,s,t}\right)^{\eta_L^s} \left(Q_{j,s,t}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}$$

A variável $Y_{j,s,t}$ denota a quantidade que a firma *j* do subsetor *s* deseja produzir, enquanto $K_{j,s,t}$, $L_{j,s,t}$ e $Q_{j,s,t}$, representam as quantidades de capital, cestas de tipos diferenciados de trabalho e cestas de variedades diferenciadas de insumos importados que esta firma utiliza. A_t^s é um choque tecnológico típico do setor *s* e os parâmetros η_K^s e η_L^s medem a importância dos insumos capital e trabalho na tecnologia adotada.

O problema de minimização de custos é:

$$\min_{\left\{K_{j,s,t}, L_{j,s,t}, Q_{j,s,t}\right\}} R_t^k K_{j,s,t} + W_t L_{j,s,t} + P_{T,t}^{\times} Q_{j,s,t}$$

$$sa \;\; Y_{j,s,t} = A_t^s \left(K_{j,s,t}\right)^{\eta_K^s} \left(L_{j,s,t}\right)^{\eta_L^s} \left(Q_{j,s,t}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}$$

12. As versões linearizadas das equações que descrevem o equilíbrio do modelo serão vistas na quinta seção.

onde $P^{\times}_{T,t}$ é o preço da cesta de insumos importados expresso na moeda doméstica. A solução do problema, discutida no anexo 4, gera as seguintes equações:

$$K_{j,s,t} = \frac{Y_{j,s,t}}{A_t^s} \frac{\left(W_t\right)^{\eta_L^s} \left(P_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{\left(R_t^k\right)^{1-\eta_K^s}} \Gamma^K\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right) \quad [24]$$

$$L_{j,s,t} = \frac{Y_{j,s,t}}{A_t^s} \frac{\left(R_t^k\right)^{\eta_K^s} \left(P_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{\left(W_t\right)^{1-\eta_L^s}} \Gamma^L\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right) \quad [25]$$

$$Q_{j,s,t} = \frac{Y_{j,s,t}}{A_t^s} \frac{\left(R_t^k\right)^{\eta_K^s} \left(W_t\right)^{\eta_L^s}}{\left(P_{T,t}^{\times}\right)^{\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}} \Gamma^Q\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right) \quad [26]$$

$$CT\left(Y_{j,s,t}\right) = \frac{Y_{j,s,t}}{A_t^s} \left(R_t^k\right)^{\eta_K^s} \left(W_t\right)^{\eta_L^s} \left(P_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)} \Gamma\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right) \quad [27]$$

Nessas equações, $CT\left(Y_{j,s,t}\right)$ é o custo total incorrido pela *j*-ésima firma do subsetor *s* quando ela produz $Y_{j,s,t}$ unidades do bem e $\Gamma\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right) = \Gamma^K\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right) + \Gamma^L\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right) + \Gamma^Q\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right)$, sendo os parâmetros $\Gamma^K\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right)$, $\Gamma^L\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right)$ e $\Gamma^Q\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right)$ definidos no anexo 4. Uma vez que o custo marginal é simplesmente a derivada parcial da expressão [27] em relação a $Y_{j,s,t}$, segue que:

$$CMg_t = \frac{\left(R_t^k\right)^{\eta_K^s} \left(W_t\right)^{\eta_L^s} \left(P_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{A_t^s} \Gamma\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right) \quad [28]$$

Repare-se que o custo marginal é igual para todas as firmas pertencentes ao subsetor *s* porque ele só depende de variáveis que todas interpretam da mesma maneira. As implicações daí decorrentes são discutidas a seguir.

Firmas maximizadoras de lucro tentarão minimizar o custo de aquisição das cestas de tipos diferenciados de trabalho que elas utilizam, logo a *j*-ésima firma do subsetor *s* deve resolver:

$$\min_{\left\{L_{i,j,s,t}\right\}} \int_0^1 W_{i,t} L_{i,j,s,t}\, di$$

$$sa \quad \left[\int_0^1 L_{i,j,s,t}^{\frac{1}{1+\mu_w}} di\right]^{1+\mu_w} = L_{j,s,t}$$

onde $L_{i,j,s,t}$ é a quantidade de trabalho do tipo *i* que a firma *j* do setor *s* contrata no instante *t* e $L_{j,s,t} = \left[\int_0^1 L_{i,j,s,t}^{\frac{1}{1+\mu_w}} di \right]^{1+\mu_w}$ define a tecnologia utilizada para obter cestas de tipos diferenciados de trabalho a partir dos componentes individuais. A solução deste problema origina os seguintes resultados:

$$L_{i,j,s,t} = L_{j,s,t} \left(\frac{W_{i,t}}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} \qquad [29]$$

onde:

$$W_t^{-\frac{1}{\mu_w}} = \int_0^1 W_{i,t}^{-\frac{1}{\mu_w}} di \qquad [30]$$

O resultado [29] define a quantidade de trabalho do tipo *i* que deve ser utilizada como função da quantidade de cestas de trabalho desejadas e do salário pago ao indivíduo *i* medido em termos relativos ($\frac{W_{i,t}}{W_t}$), enquanto [30] define o nível geral de salários W_t.

Viu-se que as firmas "produtoras" operam sob um regime de concorrência monopolística, logo podem escolher os preços que maximizam os lucros gerados na exploração do seu negócio. O problema de escolha de preços admite dois tipos de solução. Sob preços flexíveis, o preço ótimo pode ser escolhido a qualquer instante (ou seja, ele pode ser escolhido visando maximizar apenas o lucro auferido no instante *t*) e a solução ótima estabelece que:

$$\frac{P_{j,s,t}}{P_t} = \frac{P_{s,t}}{P_t} = (1+\mu_s) \frac{\left(r_t^k\right)^{\eta_K^s} \left(w_t\right)^{\eta_L^s} \left(p_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{A_t^s} \Gamma\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right) \qquad [31]$$

porque o preço relativo ótimo cobrado pelas firmas pertencentes ao subsetor *s* é o mesmo. Isto ocorre porque a expressão para o custo marginal das firmas "produtoras" (ver [28]) mostra que: *i)* ele não depende da quantidade produzida pela firma *j*; e *ii)* ele não depende do próprio *j*, pois somente variáveis "agregadas" constam do lado direito de [28].

A rigidez nominal de preços é incorporada supondo-se que o preço praticado pela *j*-ésima firma do subsetor *s* no período *t* ou é corrigido através de uma regra de bolso a fim de se obter o preço cobrado no período $t+1$ (evento que ocorre com probabilidade α_p^s) ou é recalculado de maneira ótima (evento que ocorre com probabilidade $1-\alpha_p^s$). A regra de bolso é tal que o preço cobrado no período t se relaciona com o preço cobrado no período imediatamente anterior de acordo com a fórmula $P_{j,s,t} = \left(\pi_{t-1}^{\circ}\right)^{\gamma_s} \left(\overline{\pi}_{t-1}^{\circ}\right)^{1-\gamma_s} P_{j,s,t-1}$, na qual γ_s e $(1-\gamma_s)$ são os pesos atribuídos à inflação passada e à meta de inflação, respectivamente, no fator de correção. A consequência destas hipóteses é que o preço praticado em um dado período (diga-se, $t=0$) é reajustado pela regra de bolso no período 1 com probabilidade α_p^s, no período 2 com probabilidade $\left(\alpha_p^s\right)^2$ e assim por diante.[13] Se o indivíduo escolhe o preço ótimo sob o ponto de vista de $t=0$, então o valor a ser fixado deve maximizar o somatório dos valores descontados de todos os lucros recebidos (porque o preço fixado em $t=0$ ainda pode estar em vigor em qualquer período $t>0$ com probabilidade $\left(\alpha_p^s\right)^t$) e portanto ele deve obedecer à equação adiante:

$$P_{j,s,0}=\left(1+\mu_s\right)\frac{E_0\sum_{t=0}^{\infty}\left(\alpha_p^s\right)^t\Theta_{0,t}Y_{s,t}^{tot}\left(\frac{\Upsilon_{0,t}^s}{P_{s,t}}\right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}}CMg\left(Y_{j,s,t}\right)}{E_0\sum_{t=0}^{\infty}\left(\alpha_p^s\right)^t\Theta_{0,t}\Upsilon_{0,t}^sY_{s,t}^{tot}\left(\frac{\Upsilon_{0,t}^s}{P_{s,t}}\right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}}} \qquad [32]$$

Nessa equação, $\Upsilon_{0,t}^s=\left(\pi_0^\circ\times\pi_1^\circ\times\pi_2^\circ\times\ldots\times\pi_{t-1}^\circ\right)^{\gamma_s}\left(\overline{\pi}_0^\circ\times\overline{\pi}_1^\circ\times\overline{\pi}_2^\circ\times\ldots\times\overline{\pi}_{t-1}^\circ\right)^{1-\gamma_s}$ e $Y_{s,t}^{tot}$ é a demanda total pelas cestas compostas por bens produzidos no subsetor *s*. Detalhes desta derivação podem ser vistos no anexo 5.

Foi mencionado anteriormente que as firmas "produtoras" pagam $P_{T,t}^{\times}$ (preço expresso na moeda doméstica) pela cesta de bens importados que aplicam ao longo do processo produtivo. Supõe-se que:

$$P_{T,t}^{\times}=e_tP_{T,t}^{*} \qquad [33]$$

ou seja, o preço em moeda doméstica da cesta de insumos importados é igual ao preço internacional convertido pela taxa de câmbio nominal vigente no instante *t*. O preço internacional $P_{T,t}^{*}$ é uma variável exógena sob o ponto de vista da economia doméstica.

3.3 EQUILÍBRIO NOS MERCADOS DE FATORES

A primeira condição de equilíbrio exige que o capital utilizado pelas firmas "produtoras" seja igual ao capital fornecido pela firma acumuladora de bens de capital, que também escolhe a intensidade com a qual o estoque disponível é utilizado. Assim, define-se $K_t=K_{T,t}+K_{NT,t}+K_{A,t}$ (com $K_{T,t}=\int_0^1K_{j,T,t}dj$, $K_{NT,t}=\int_0^1K_{j,NT,t}dj$ e $K_{A,t}=\int_0^1K_{j,A,t}dj$). O equilíbrio no mercado de bens de capital exige que:

$$u_tK_{t-1}^{tot}=K_t \qquad [34]$$

13. Mais uma vez, a probabilidade α_p^s não depende do tempo decorrido desde que o preço foi reajustado pela última vez nem do tamanho do desajuste, ou seja, da distância entre o preço calculado de maneira ótima e o preço a ser cobrado caso se siga a regra de bolso.

onde K_{t-1}^{tot} é o estoque de capital acumulado no período $t-1$.

A segunda condição de equilíbrio exige que a demanda total por trabalho do tipo i seja igual à soma das demandas das firmas "produtoras" pertencentes a cada subsetor:

$$L_{i,t} = \int_0^1 L_{i,j,T,t}dj + \int_0^1 L_{i,j,NT,t}dj + \int_0^1 L_{i,j,A,t}dj \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow L_{i,t} = \int_0^1 L_{j,T,t}\left(\frac{W_t}{W_{i,t}}\right)^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} dj + \int_0^1 L_{j,NT,t}\left(\frac{W_t}{W_{i,t}}\right)^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} dj + \int_0^1 L_{j,A,t}\left(\frac{W_t}{W_{i,t}}\right)^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} dj \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow L_{i,t} = \left(\frac{W_t}{W_{i,t}}\right)^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}\left(\int_0^1 L_{j,T,t}dj + \int_0^1 L_{j,NT,t}dj + \int_0^1 L_{j,A,t}dj\right) \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow L_{i,t} = L_t\left(\frac{W_{i,t}}{W_t}\right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}$$

onde $L_t = L_{T,t} + L_{NT,t} + L_{A,t} = \int_0^1 L_{j,T,t}dj + \int_0^1 L_{j,NT,t}dj + \int_0^1 L_{j,A,t}dj$ é a demanda total por "cestas" de tipos diferenciados de trabalho. Cabe observar que se chega a uma equação que define a demanda total por trabalho do tipo i como função da necessidade total de trabalho das firmas "produtoras" (L_t) e do salário recebido pelo indivíduo i medido em termos relativos.

3.2 RESTRIÇÃO DE USOS E RECURSOS

É evidente que, a cada período, a riqueza gerada nessa economia (ou seja, os seus recursos) deve ser direcionada para o consumo dos seus habitantes, do governo ou canalizada para investimentos em ativos reais ou financeiros (os usos). As peças fundamentais para a derivação desta restrição (cujos detalhes estão descritos no anexo 6) são, em primeiro lugar, a soma das restrições orçamentárias dos indivíduos dos dois tipos, que gera a seguinte igualdade após levar-se em conta que as escolhas são iguais para todos os indivíduos dentro de uma dada população (*RP* e *RC*):

$$\frac{M_t}{P_t} + P_{B,t}\frac{B_t}{P_t} + e_t P_{B,t}^*\frac{B_t^*}{P_t} = \frac{M_{t-1}}{P_t} + \frac{B_{t-1}}{P_t} + e_t\frac{B_{t-1}^*}{P_t} + w_t L_t + Div_t - Tax_t - \left(C_t^{tot} - \zeta C_t^c\right)$$

A segunda peça fundamental é a restrição orçamentária do governo:

$$\frac{M_t}{P_t} + P_{B,t}\frac{B_t}{P_t} + Tax_t = \frac{M_{t-1}}{P_t} + \frac{B_{t-1}}{P_t} + G_t + \zeta C_t^c$$

Finalmente, a terceira peça fundamental dá o somatório dos dividendos que os indivíduos do tipo *RP* recebem por serem os acionistas das firmas que operam nessa economia:

$$Div_t = Div_{T,t} + Div_{NT,t} + Div_{A,t} + \Pi_t^r$$

onde $Div_{T,t}$, $Div_{NT,t}$, $Div_{A,t}$ e Π_t^r denotam os dividendos pagos pelas firmas "produtoras" dos subsetores *T*, *NT* e *A* e pela firma acumuladora de capital (todos medidos em termos reais)[14]. Após algumas contas chega-se a:

$$Div_t = \frac{P_{T,t}}{P_t}\left(Y_{T,t} + Y_{T,t}^*\right) + \frac{P_{NT,t}}{P_t} Y_{NT,t} + \frac{P_{A,t}}{P_t} Y_{A,t} - w_t L_t - \frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t} Q_t - \Psi\left(u_t\right) K_{t-1}^{tot} - I_t$$

O resultado acima e a restrição orçamentária do governo são substituídos no somatório das restrições orçamentárias individuais a fim de obter, após mais algumas contas:

$$Y_t = C_t^{tot} + I_t + G_t + \Psi\left(u_t\right) K_{t-1}^{tot} + e_t \frac{P_t^*}{P_t}\left[\left(\frac{P_{B,t}^*}{P_t^*} B_t^* - \frac{B_{t-1}^*}{P_t^*}\right) + \left(\frac{P_{T,t}^*}{P_t^*} Q_t - \frac{P_{T,t}}{e_t P_t^*} Y_{T,t}^*\right)\right] \quad [35]$$

Define-se agora $\chi_t = \left(\frac{P_{B,t}^*}{P_t^*} B_t^* - \frac{B_{t-1}^*}{P_t^*}\right) + \left(\frac{P_{T,t}^*}{P_t^*} Q_t - \frac{P_{T,t}}{e_t P_t^*} Y_{T,t}^*\right)$ ([36]). O primeiro termo desta expressão é igual ao valor (medido em termos reais) da diferença entre as saídas (compras de títulos emitidos no exterior) e as entradas (recebimento de juros e principal referentes aos títulos comprados no período anterior) de capitais. O segundo termo é o saldo da balança comercial (medido em termos reais), que neste caso corresponde à diferença entre importações e exportações. A soma dos dois termos é o resultado da balança de pagamentos do país, que deve ser igual a zero em equilíbrio. Para ver isto basta imaginar o que ocorre quando o valor das importações supera o valor das exportações. Neste caso, o segundo termo entre colchetes é positivo, o que deve ser compensado por um resultado negativo do primeiro termo; ou seja, o déficit na balança comercial deve ser sustentado por uma diminuição no estoque de ativos emitidos no exterior e detidos pelos habitantes da economia doméstica, ou mesmo por um volume crescente de dívidas contraídas no resto do mundo, circunstância na qual $B_t^* < 0$.

14. Cabe notar que a concorrência perfeita e a livre entrada e saída do mercado garantem que os lucros do setor de firmas "montadoras" sejam zero individualmente e no agregado.

4 ANÁLISE DO *STEADY-STATE*

Será caracterizado agora o equilíbrio na ausência de choques e com inflação zero.[15] Inserindo-se na equação de Euler [6] as condições $\varepsilon_t^B = 1$, $C_t = \overline{C}$, $R_t = \overline{R}$ e $\pi_t^\circ = \overline{\pi}^\circ = 1$ para todo *t* (pois o valor assumido pelas variáveis endógenas permanece inalterado em *steady-state*) chega-se a $\overline{R} = \frac{1}{\beta}$. Aplicando-se os mesmos princípios para a equação [15], que define o salário real de equilíbrio, chega-se a:

$$\overline{w} = \left(1+\mu_w\right)\left(\overline{L}\right)^{\sigma_L}\left(\left(1-h\right)\overline{C}\right)^{\sigma_C}$$

onde se inserem as condições $\varepsilon_t^L = 1$, $L_t = \overline{L}$ e $C_t = \overline{C}$ a fim de se calcular $\overline{w} = \left.\frac{W_t}{P_t}\right|_{SS}$.

Seguindo o mesmo procedimento para as demais equações da seção 2, chega-se a:

- De [1]: $\overline{C}_t^c = \overline{w}^{min}$
- De [2]: $\overline{C}^{tot} = \overline{C} + \zeta \overline{C}^c$
- De [14]: $\overline{Y}_A = \left(1-\phi\right)\overline{Y}\left(\overline{p}_A\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}}$
- De [15]: $\overline{Y}_T = \gamma\phi\overline{Y}\left(\overline{p}_L\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}}\left(\frac{\overline{p}_T}{\overline{p}_L}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}}$
- De [16]: $\overline{Y}_{NT} = \left(1-\gamma\right)\phi\overline{Y}\left(\overline{p}_L\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}}\left(\frac{\overline{p}_{NT}}{\overline{p}_L}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}}$
- De [17]: $1 = \phi\left(\overline{p}_L\right)^{-\frac{1}{\psi}} + \left(1-\phi\right)\left(\overline{p}_A\right)^{-\frac{1}{\psi}}$
- De [18]: $1 = \gamma\left(\frac{\overline{p}_T}{\overline{p}_L}\right)^{-\frac{1}{\eta}} + \left(1-\gamma\right)\left(\frac{\overline{p}_{NT}}{\overline{p}_L}\right)^{-\frac{1}{\eta}}$
- De [20] e [34]: $\frac{\overline{I}}{\overline{K}} = \delta$
- De [21]: $\overline{r}^k = \left.\frac{d\Psi}{du_t}\right|_{SS}$
- De [22] e [23]: $\overline{r}^k = \frac{1}{\beta} - \left(1-\delta\right)$

15. Detalhes das derivações podem ser vistos no anexo 7.

• De [31]: $\overline{p}_s = (1+\mu_s)\left(\overline{r}^k\right)^{\eta_K^s}\left(\overline{w}\right)^{\eta_L^s}\left(\overline{p}_T^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}\Gamma\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)$, onde $\overline{p}_s = \left.\dfrac{P_{s,t}}{P_t}\right|_{SS}$ e $s = A, T, NT$.

• De [33]: $\overline{p}_T^{\times} = \overline{e}^r\,\overline{p}_T^*$, em que $\overline{e}^r = e_t\left.\dfrac{P_t^*}{P_t}\right|_{SS}$ denota o valor assumido pela taxa de câmbio real em *steady-state*.

• De [12]: $\overline{Y}_T^* = \left(\dfrac{\overline{p}_T}{\overline{e}^r}\right)^{-\frac{1+\tau^*}{\tau^*}}\overline{Y}^*$

• De [24]: $\overline{K}_s = \overline{Y}_s^{tot}\dfrac{\left(\overline{w}\right)^{\eta_L^s}\left(\overline{p}_T^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{\left(\overline{r}^k\right)^{1-\eta_K^s}}\dfrac{1}{\Gamma^K\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)}$

• De [25]: $\overline{L}_s = \overline{Y}_s^{tot}\dfrac{\left(\overline{r}^k\right)^{\eta_K^s}\left(\overline{p}_T^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{\left(\overline{w}\right)^{1-\eta_L^s}}\dfrac{1}{\Gamma^L\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)}$

• De [26]: $\overline{Q}_s = \overline{Y}_s^{tot}\dfrac{\left(\overline{r}^k\right)^{\eta_K^s}\left(\overline{w}\right)^{\eta_L^s}}{\left(\overline{p}_T^{\times}\right)^{\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}\dfrac{1}{\Gamma^Q\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)}$

Cabe lembrar que $Y_{s,t}^{tot} = Y_{s,t}$ se $s = A, NT$ e $Y_{T,t}^{tot} = Y_{T,t} + Y_{T,t}^*$ se $s = T$, logo $\overline{Y}_T^{tot} = \overline{Y}_T + \overline{Y}_T^*$, $\overline{Y}_{NT}^{tot} = \overline{Y}_{NT}$ e $\overline{Y}_A^{tot} = \overline{Y}_A$.

• Das condições de *market-clearin*g aplicadas aos fatores e insumos utilizados pelas firmas "produtoras": $\overline{K} = \overline{K}_T + \overline{K}_{NT} + \overline{K}_A$, $\overline{L} = \overline{L}_T + \overline{L}_{NT} + \overline{L}_A$ e $\overline{Q} = \overline{Q}_T + \overline{Q}_{NT} + \overline{Q}_A$.

• De [35]: $\overline{Y} = \overline{C}^{tot} + \overline{G} + \delta\overline{K}$, em que se usa a condição $\overline{\chi} = 0$, que decorre do equilíbrio da balança de pagamentos do país para todo t.

• De [5]: $\overline{\theta} = 1 = \dfrac{\overline{e}^r\overline{b}^*}{\overline{Y}} \Rightarrow \overline{Y} = \overline{e}^r\overline{b}^*$, onde se supõe que o prêmio de risco é zero (ou seja, $\overline{\theta} = 1$) em *steady-state*.

• De [7]: $\overline{R} = \overline{R}^*$

• De [36] e da condição $\overline{\chi} = 0$: $(1-\beta)\overline{Y} = \overline{e}^r\,\overline{p}_T^*\overline{Q} - \overline{p}_T\overline{Y}_T^*$

As equações relacionadas compõem um sistema de 28 equações envolvendo as variáveis endógenas $\overline{w}$, $\overline{C}$, $\overline{C}^{tot}$, $\overline{C}^c$, $\overline{L}$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Y}$, $\overline{p}_A$, $\overline{Y}_T$, $\overline{p}_L$, $\overline{p}_T$, $\overline{Y}_{NT}$, $\overline{p}_{NT}$, $\overline{r}^k$, $\overline{e}^r$, $\overline{p}_T^{\times}$, $\overline{Y}_T^*$, $\overline{K}_A$, $\overline{K}_T$, $\overline{K}_{NT}$, $\overline{K}$, $\overline{L}_A$, $\overline{L}_T$, $\overline{L}_{NT}$, $\overline{Q}_A$, $\overline{Q}_T$, $\overline{Q}_{NT}$ e $\overline{Q}$ (que totalizam 28, obviamente) e as variáveis exógenas $\overline{Y}^*$, $\overline{p}_T^*$, $\overline{G}$ e $\overline{w}^{min}$. A solução deste sistema está implementada em programas a serem executados no *software* Matlab.

Antes da próxima seção, fazem-se necessários alguns comentários adicionais. É possível classificar os parâmetros do modelo em duas categorias: parâmetros "primitivos" e parâmetros "derivados", cujo valor depende do valor assumido por outros parâmetros. Os parâmetros $\frac{\overline{C}}{\overline{C}^{tot}}$, $\frac{\overline{K}_T}{\overline{K}}$, $\frac{\overline{K}_{NT}}{\overline{K}}$, $\frac{\overline{K}_A}{\overline{K}}$, $\frac{\overline{L}_T}{\overline{L}}$, $\frac{\overline{L}_{NT}}{\overline{L}}$, $\frac{\overline{L}_A}{\overline{L}}$, $\frac{\overline{Q}_T}{\overline{Q}}$, $\frac{\overline{Q}_{NT}}{\overline{Q}}$, $\frac{\overline{Q}_A}{\overline{Q}}$, $\frac{\overline{Y}_T^*}{\overline{Y}_T^{tot}}$, $\frac{\overline{C}^{tot}}{\overline{Y}}$, $\frac{\overline{K}}{\overline{Y}}$, $\overline{p}_T \frac{\overline{Y}_T^*}{\overline{Y}}$ e $\overline{e}^r \overline{p}_T^* \frac{\overline{Q}}{\overline{Y}}$ se enquadram nesta última categoria, pois pertencem ao conjunto de parâmetros presentes nas equações que descrevem as trajetórias de equilíbrio das variáveis endógenas em resposta aos choques e seus valores dependem da solução do sistema de equações descrito nesta seção. Isto quer dizer que é necessário saber o valor assumido por parâmetros como h, σ_C, σ_L etc. e resolver o sistema de equações que caracteriza o *steady-state* para, em seguida, calcular o valor assumido por estes parâmetros. Este ponto será importante na seção 6.

5 TRAJETÓRIAS DE EQUILÍBRIO EM RESPOSTA AOS CHOQUES

As trajetórias de equilíbrio das variáveis endógenas do modelo podem ser computadas sob perfeita flexibilidade e sob rigidez nominal de preços e salários. É praxe na literatura trabalhar com um sistema composto por equações linearizadas, ou seja, que correspondam a meras aproximações de primeira ordem das suas versões exatas em torno de um ponto de aproximação convenientemente escolhido (via de regra, o *steady-state* descrito na quarta seção). De maneira informal, se é verdade que, para choques de magnitude tão pequena quanto se queira, as soluções encontradas para os desvios das variáveis endógenas em torno do ponto de aproximação também possuem uma magnitude pequena, então a solução do sistema linearizado pode ser considerada uma boa aproximação para a do modelo exato.

5.1 TRAJETÓRIAS DE EQUILÍBRIO SOB FLEXIBILIDADE DE PREÇOS E SALÁRIOS

O conjunto de equações linearizadas que descreve as trajetórias de equilíbrio das variáveis endógenas quando não há rigidez nominal de preços e salários será exposto nesta subseção.[16] Todas as variáveis estão escritas em termos de desvios percentuais, ou seja, para uma variável genérica z_t, $\hat{z}_t = \frac{z_t - \overline{z}}{\overline{z}}$, onde $\overline{z}$ é o valor que esta variável adquire em *steady-state*. O sistema de equações linearizadas é passível de ser resolvido

16. A derivação completa se encontra no anexo 8.

pelas técnicas propostas por Blanchard e Kahn (1980) e King e Watson (1998) ou Klein (2000).[17]

De [1] e [2]:

$$\hat{C}_t^c = \hat{w}_t^{min} \quad [37]$$

$$\hat{C}_t^{tot} = \frac{\bar{C}}{\bar{C}^{tot}}\hat{C}_t + \zeta\frac{\bar{C}^c}{\bar{C}^{tot}}\hat{C}_t^c \quad [38]$$

onde $1 = \frac{\bar{C}}{\bar{C}^{tot}} + \zeta\frac{\bar{C}^c}{\bar{C}^{tot}}$.

De [13]:

$$\hat{w}_t = \hat{\varepsilon}_t^L + \sigma_L\hat{L}_t + \frac{\sigma_C}{1-h}\hat{C}_t - \sigma_C\frac{h}{1-h}\hat{C}_{t-1} \quad [39]$$

Essa equação define o salário real de equilíbrio quando preços e salários são flexíveis.

De [31] chega-se a três equações que definem os preços relativos de equilíbrio dos bens fabricados pelas firmas "produtoras" quando os preços são flexíveis. Elas são:

$$\hat{p}_{A,t} = \eta_K^A\hat{r}_t^k + \eta_L^A\hat{w}_t + \left(1-\left(\eta_K^A + \eta_L^A\right)\right)\hat{p}_{T,t}^{\times} - \hat{A}_t^A \quad \text{(para administrados)} \quad [40]$$

$$\hat{p}_{T,t} = \eta_K^T\hat{r}_t^k + \eta_L^T\hat{w}_t + \left(1-\left(\eta_K^T + \eta_L^T\right)\right)\hat{p}_{T,t}^{\times} - \hat{A}_t^T \quad \text{(para } \textit{tradables}\text{)} \quad [41]$$

$$\hat{p}_{NT,t} = \eta_K^{NT}\hat{r}_t^k + \eta_L^{NT}\hat{w}_t + \left(1-\left(\eta_K^{NT} + \eta_L^{NT}\right)\right)\hat{p}_{T,t}^{\times} - \hat{A}_t^{NT} \quad \text{(para } \textit{non-tradables}\text{)} \quad [42]$$

De [17] e [18]:

$$0 = \phi\hat{p}_{L,t} + \left(1-\phi\right)\hat{p}_{A,t} \quad [43]$$

$$\hat{p}_{L,t} = \gamma\hat{p}_{T,t} + \left(1-\gamma\right)\hat{p}_{NT,t} \quad [44]$$

A lei de movimento do estoque de capital disponível na firma acumuladora (equação [20]) e a equação que define a quantidade que esta firma disponibiliza para as firmas "produtoras" ([34]) dão origem a:

$$\hat{K}_t^{tot} = \left(1-\delta\right)\hat{K}_{t-1}^{tot} + \delta\hat{I}_t \quad [45]$$

$$\hat{u}_t + \hat{K}_{t-1}^{tot} = \hat{K}_t \quad [46]$$

Já as condições de primeira ordem que caracterizam as trajetórias ótimas de u_t, K_t^{tot} e I_t escolhidas por ela dão origem a:

17. A metodologia adotada pelo Dynare é a de Klein (2000).

$$\hat{r}_t^k = \left(\left. \frac{d^2\Psi}{du_t^2} \right|_{SS} \Big/ \left. \frac{d\Psi}{du_t} \right|_{SS} \right) \hat{u}_t \qquad [47]$$

$$\hat{\varphi}_t^r - \beta(1-\delta) E_t\left[\hat{\varphi}_{t+1}^r\right] = -\hat{r}_t + \left(1-\beta(1-\delta)\right) E_t\left[\hat{r}_{t+1}^k\right] \qquad [48]$$

$$\hat{I}_t = \frac{1}{1+\beta}\hat{I}_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta} E_t\left[\hat{I}_{t+1}\right] + \frac{\Diamond}{1+\beta}\hat{\varphi}_t^r - \hat{\varepsilon}_t^I + \beta E_t\left[\hat{\varepsilon}_{t+1}^I\right] \qquad [49]$$

onde $\Diamond = \dfrac{1}{\left. \dfrac{\partial^2 S}{\partial(\arg S)^2} \right|_{SS}}$. Também define-se e substitui-se $\hat{r}_t = \hat{R}_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right]$, que representa a taxa de juros real *ex-ante* de um período vigente na economia doméstica. Sob preços e salários flexíveis, a taxa é determinada endogenamente como função das condições da economia doméstica e do valor assumido pelos choques domésticos e externos.

As condições de primeira ordem que caracterizam as trajetórias ótimas de C_t, B_t e B_t^* escolhidas pelos indivíduos do tipo *RP* dão origem a[18]:

$$\hat{C}_t = \frac{1}{1+h} E_t\left[\hat{C}_{t+1}\right] + \frac{h}{1+h}\hat{C}_{t-1} - \frac{1}{\sigma_C}\frac{1-h}{1+h}\hat{r}_t + \frac{1}{\sigma_C}\frac{1-h}{1+h}\hat{\varepsilon}_t^B - \frac{1}{\sigma_C}\frac{1-h}{1+h} E_t\left[\hat{\varepsilon}_{t+1}^B\right] \qquad [50]$$

$$\hat{r}_t = \hat{\theta}_t + \hat{R}_t^* - E_t\left[\pi_{t+1}^*\right] + E_t\left[\hat{e}_{t+1}^r\right] - \hat{e}_t^r \qquad [51]$$

onde já foi substituído $\hat{r}_t$ no lugar de $\hat{R}_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right]$ e usou-se a variável $\hat{e}_t^r$, que é o desvio da taxa de câmbio real (definida como $e_t^r = \dfrac{e_t P_t^*}{P_t}$) com relação ao seu valor em *steady-state*.

A equação [5], que define o comportamento do prêmio de risco em resposta a variações na quantidade de ativos externos que a economia doméstica detém como função do produto, se transforma em:

$$\hat{\theta}_t = \hat{\varepsilon}_t^\theta - \theta\left(\hat{e}_t^r + \hat{b}_t^* - \hat{Y}_t\right) \qquad [52]$$

onde a variável $\hat{b}_t^*$ é igual ao desvio da variável b_t^* (definida como $b_t^* = \dfrac{B_t^*}{P_t^*}$) com relação ao valor que ela assume em *steady-state*.

Eis a linearização das equações [14], [15] e [16]:

18. Note-se que as condições que definem as trajetórias ótimas do consumo, dos investimentos em títulos de renda fixa de um período e do salário dos indivíduos não dependem dos seus saldos monetários reais, de maneira que a equação que define a escolha ótima dessa variável não é necessária e só deve ser examinada caso haja algum interesse específico em acompanhar a sua trajetória.

$$\hat{Y}_{A,t} = \hat{Y}_t - \frac{1+\psi}{\psi}\hat{p}_{A,t}$$ [53]

$$\hat{Y}_{T,t} = \hat{Y}_t - \frac{1+\psi}{\psi}\hat{p}_{L,t} - \frac{1+\eta}{\eta}\left(\hat{p}_{T,t} - \hat{p}_{L,t}\right)$$ [54]

$$\hat{Y}_{NT,t} = \hat{Y}_t - \frac{1+\psi}{\psi}\hat{p}_{L,t} - \frac{1+\eta}{\eta}\left(\hat{p}_{NT,t} - \hat{p}_{L,t}\right)$$ [55]

A linearização das condições de equilíbrio aplicadas aos fatores e insumos utilizados pelas firmas "produtoras" gera:

$$\hat{K}_t = \frac{\overline{K}_T}{\overline{K}}\hat{K}_{T,t} + \frac{\overline{K}_{NT}}{\overline{K}}\hat{K}_{NT,t} + \frac{\overline{K}_A}{\overline{K}}\hat{K}_{A,t}$$ [56]

$$\hat{L}_t = \frac{\overline{L}_T}{\overline{L}}\hat{L}_{T,t} + \frac{\overline{L}_{NT}}{\overline{L}}\hat{L}_{NT,t} + \frac{\overline{L}_A}{\overline{L}}\hat{L}_{A,t}$$ [57]

$$\hat{Q}_t = \frac{\overline{Q}_T}{\overline{Q}}\hat{Q}_{T,t} + \frac{\overline{Q}_{NT}}{\overline{Q}}\hat{Q}_{NT,t} + \frac{\overline{Q}_A}{\overline{Q}}\hat{Q}_{A,t}$$ [58]

onde $\frac{\overline{K}_T}{\overline{K}}$ é a razão entre a quantidade de capital utilizada pelas firmas "produtoras" pertencentes ao subsetor de *tradables* e a quantidade total de capital utilizada pelas firmas "produtoras" em *steady-state*, $\frac{\overline{L}_T}{\overline{L}}$ é a razão entre a quantidade de trabalho utilizada pelas firmas "produtoras" pertencentes ao subsetor de *tradables* e a quantidade total de trabalho utilizada pelas firmas produtoras em *steady-state*, e assim por diante. Os valores são obtidos após calcular o *steady-state* desta economia resolvendo o sistema de equações descrito na seção 4.

Por seu turno, as quantidades ótimas de capital, trabalho e insumos importados obedecem às seguintes equações linearizadas, que vêm de suas correspondentes exatas [24], [25] e [26] calculadas para $s = A, T, NT$:

$$\hat{K}_{T,t} = \eta_L^T \hat{w}_t + \left(1-\left(\eta_K^T + \eta_L^T\right)\right)\hat{p}_{T,t}^{\times} - \left(1-\eta_K^T\right)\hat{r}_t^k + \hat{Y}_{T,t}^{tot} - \hat{A}_t^T$$ [59]

$$\hat{K}_{NT,t} = \eta_L^{NT} \hat{w}_t + \left(1-\left(\eta_K^{NT} + \eta_L^{NT}\right)\right)\hat{p}_{T,t}^{\times} - \left(1-\eta_K^{NT}\right)\hat{r}_t^k + \hat{Y}_{NT,t}^{tot} - \hat{A}_t^{NT}$$ [60]

$$\hat{K}_{A,t} = \eta_L^A \hat{w}_t + \left(1-\left(\eta_K^A + \eta_L^A\right)\right)\hat{p}_{T,t}^{\times} - \left(1-\eta_K^A\right)\hat{r}_t^k + \hat{Y}_{A,t}^{tot} - \hat{A}_t^A$$ [61]

$$\hat{L}_{T,t} = \eta_K^T \hat{r}_t^k + \left(1-\left(\eta_K^T + \eta_L^T\right)\right)\hat{p}_{T,t}^{\times} - \left(1-\eta_L^T\right)\hat{w}_t + \hat{Y}_{T,t}^{tot} - \hat{A}_t^T$$ [62]

$$\hat{L}_{NT,t} = \eta_K^{NT} \hat{r}_t^k + \left(1-\left(\eta_K^{NT} + \eta_L^{NT}\right)\right)\hat{p}_{T,t}^{\times} - \left(1-\eta_L^{NT}\right)\hat{w}_t + \hat{Y}_{NT,t}^{tot} - \hat{A}_t^{NT}$$ [63]

$$\hat{L}_{A,t} = \eta_K^A \hat{r}_t^k + \left(1 - \left(\eta_K^A + \eta_L^A\right)\right) \hat{p}_{T,t}^{\times} - \left(1 - \eta_L^A\right) \hat{w}_t + \hat{Y}_{A,t}^{tot} - \hat{A}_t^A \qquad [64]$$

$$\hat{Q}_{T,t} = \eta_K^T \hat{r}_t^k + \eta_L^T \hat{w}_t - \left(\eta_K^T + \eta_L^T\right) \hat{p}_{T,t}^{\times} + \hat{Y}_{T,t}^{tot} - \hat{A}_t^T \qquad [65]$$

$$\hat{Q}_{NT,t} = \eta_K^{NT} \hat{r}_t^k + \eta_L^{NT} \hat{w}_t - \left(\eta_K^{NT} + \eta_L^{NT}\right) \hat{p}_{T,t}^{\times} + \hat{Y}_{NT,t}^{tot} - \hat{A}_t^{NT} \qquad [66]$$

$$\hat{Q}_{A,t} = \eta_K^A \hat{r}_t^k + \eta_L^A \hat{w}_t - \left(\eta_K^A + \eta_L^A\right) \hat{p}_{T,t}^{\times} + \hat{Y}_{A,t}^{tot} - \hat{A}_t^A \qquad [67]$$

Nessas expressões deve-se substituir:

$$\hat{p}_{T,t}^{\times} = \hat{e}_t^r + \hat{p}_{T,t}^* \qquad [68]$$

que vem da equação [33]. Também se devem substituir:

$$\hat{Y}_{T,t}^{tot} = \left(1 - \frac{\overline{Y}_T^*}{\overline{Y}_T^{tot}}\right) \hat{Y}_{T,t} + \frac{\overline{Y}_T^*}{\overline{Y}_T^{tot}} \hat{Y}_{T,t}^* \qquad [69]$$

$$\hat{Y}_{NT,t}^{tot} = \hat{Y}_{NT,t} \qquad [70]$$

$$\hat{Y}_{A,t}^{tot} = \hat{Y}_{A,t} \qquad [71]$$

que levam em conta que uma parte das cestas de bens *tradables* é exportada, enquanto as cestas de bens *non-tradables* e administrados são totalmente absorvidas pela economia doméstica. O sistema é "fechado" com as equações relacionadas:

$$\hat{Y}_{T,t}^* = \hat{Y}_t^* - \frac{1+\tau^*}{\tau^*} \left(\hat{p}_{T,t} - \hat{e}_t^r\right) \qquad [72]$$

$$\hat{Y}_t - \frac{\overline{C}^{tot}}{\overline{Y}} \hat{C}_t^{tot} - \frac{\overline{G}}{\overline{Y}} \hat{G}_t - \overline{r}^k \frac{\overline{K}}{\overline{Y}} \hat{u}_t - \frac{\overline{K}}{\overline{Y}} \delta \hat{I}_t = 0 \qquad [73]$$

$$\beta\left(\hat{b}_t^* - \hat{\theta}_t - \hat{R}_t^*\right) - \left(\hat{b}_{t-1}^* - \pi_t^*\right) = \overline{p}_T \frac{\overline{Y}_T^*}{\overline{Y}} \left(\hat{p}_{T,t} + \hat{Y}_{T,t}^* - \hat{e}_t^r\right) - \overline{e}^r \overline{p}_T^* \frac{\overline{Q}}{\overline{Y}} \left(\hat{p}_{T,t}^* + \hat{Q}_t\right) \qquad [74]$$

as quais vêm das aproximações de primeira ordem das expressões para a demanda externa por cestas de bens *tradables* produzidos domesticamente, da condição de usos e recursos descrita na subseção 3.4 e da condição $\chi_t = 0$, a qual determina que a balança de pagamentos deve estar equilibrada a todo momento. Observe-se que as equações envolvem alguns parâmetros adicionais como, por exemplo, a razão consumo dos indivíduos do tipo RP/consumo total $\frac{\overline{C}}{\overline{C}^{tot}}$, a razão consumo/produto $\frac{\overline{C}^{tot}}{\overline{Y}}$ e a razão capital/produto $\frac{\overline{K}}{\overline{Y}}$ em *steady-state*. Os parâmetros são obtidos como

$\frac{\bar{K}_T}{\bar{K}}$, $\frac{\bar{L}_T}{\bar{L}}$ e seus semelhantes, ou seja, eles são determinados calculando-se o *steady-state* desta economia por intermédio da resolução do sistema de equações descrito na seção 4.

O sistema composto por [37] a [74] contém 38 variáveis endógenas (quais sejam, $\hat{w}_t$, $\hat{L}_t$, $\hat{C}_t$, $\hat{C}_t^{tot}$, $\hat{C}_t^c$, $\hat{p}_{A,t}$, $\hat{r}_t^k$, $\hat{p}_{T,t}^{\times}$, $\hat{p}_{T,t}$, $\hat{p}_{NT,t}$, $\hat{p}_{L,t}$, $\hat{K}_t^{tot}$, $\hat{I}_t$, $\hat{u}_t$, $\hat{\varphi}_t^r$, $\hat{Y}_{A,t}$, $\hat{Y}_{T,t}$, $\hat{Y}_{NT,t}$, $\hat{Y}_t$, $\hat{K}_t$, $\hat{K}_{T,t}$, $\hat{K}_{NT,t}$, $\hat{K}_{A,t}$, $\hat{L}_{T,t}$, $\hat{L}_{NT,t}$, $\hat{L}_{A,t}$, $\hat{Q}_{T,t}$, $\hat{Q}_{NT,t}$, $\hat{Q}_{A,t}$, $\hat{Q}_t$, $\hat{Y}_{T,t}^{tot}$, $\hat{Y}_{T,t}^{*}$, $\hat{Y}_{NT,t}^{tot}$, $\hat{Y}_{A,t}^{tot}$, $\hat{e}_t^r$, $\hat{r}_t$, $\hat{\theta}_t$ e $\hat{b}_t^*$), 12 choques ou variáveis exógenas (que são $\hat{w}_t^{min}$, $\hat{R}_t^*$, π_t^*, $\hat{\varepsilon}_t^L$, $\hat{\varepsilon}_t^{\theta}$, $\hat{A}_t^T$, $\hat{A}_t^{NT}$, $\hat{A}_t^A$, $\hat{p}_{T,t}^*$, $\hat{\varepsilon}_t^B$, $\hat{\varepsilon}_t^I$, Y_t^*, $\hat{G}_t$), 38 equações e dezenas de parâmetros. Sua solução numérica é obtida através da plataforma Dynare.

5.2 TRAJETÓRIAS DE EQUILÍBRIO COM RIGIDEZ NOMINAL DE PREÇOS E SALÁRIOS

O conjunto de aproximações de primeira ordem das equações que descrevem as trajetórias de equilíbrio das variáveis endógenas na presença de rigidez nominal de preços e salários é formado por [37], [38], [43] a [47], [49], [52] a [74] e pelas equações apresentadas a seguir:

$$\hat{C}_t = \frac{1}{1+h}E_t\left[\hat{C}_{t+1}\right] + \frac{h}{1+h}\hat{C}_{t-1} - \frac{1}{\sigma_C}\frac{1-h}{1+h}\left(\hat{R}_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right] - \hat{\varepsilon}_t^B + E_t\left[\hat{\varepsilon}_{t+1}^B\right]\right) \quad [75]$$

$$\hat{R}_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right] = \hat{\theta}_t + \hat{R}_t^* - E_t\left[\pi_{t+1}^*\right] + E_t\left[\hat{e}_{t+1}^r\right] - \hat{e}_t^r \quad [76]$$

$$\hat{\varphi}_t^r - \beta(1-\delta)E_t\left[\hat{\varphi}_{t+1}^r\right] = -\hat{R}_t + E_t\left[\pi_{t+1}\right] + \left(1-\beta(1-\delta)\right)E_t\left[\hat{r}_{t+1}^k\right] \quad [77]$$

As equações [75] e [76] vêm da equação de Euler [6] e de [7], que gera uma condição análoga à condição de *paridade descoberta de juros*. A equação [77] é análoga à equação [48], porém sem fazer a substituição de $\hat{R}_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right]$ por $\hat{r}_t$.

A equação [78],

$$\pi_t^w - \left(\gamma_w \pi_{t-1} + (1-\gamma_w)\bar{\pi}_{t-1}\right) = \kappa_w \frac{1}{1+\sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}}\left(\hat{w}_t^{flex} - \hat{w}_t\right) + \beta\left(E_t\left[\pi_{t+1}^w\right] - \left(\gamma_w \pi_t + (1-\gamma_w)\bar{\pi}_t\right)\right) \quad [78]$$

na qual $\kappa_w = \frac{(1-\alpha_w\beta)(1-\alpha_w)}{\alpha_w}$, pode ser interpretada como uma curva de Phillips para salários, ou seja, ela associa a taxa de crescimento do nível geral de salários ($\pi_t^w = \frac{W_t}{W_{t-1}} - 1$) com as expectativas acerca do seu comportamento no futuro

($E_t\left[\pi^w_{t+1}\right]$), com os valores assumidos pelo fator de correção aplicado nos reajustes automáticos dos salários nos períodos t e $t-1$ (respectivamente, $\gamma_w\pi_t + \left(1-\gamma_w\right)\overline{\pi}_t$ e $\gamma_w\pi_{t-1} + \left(1-\gamma_w\right)\overline{\pi}_{t-1}$) e com a distância entre o salário real praticado (na verdade o desvio deste salário com relação ao seu valor em *steady-state*) e o valor que seria observado caso não houvesse rigidez nominal ($\hat{w}^{flex}_t - \hat{w}_t$). O salário real na ausência de rigidez nominal, por sua vez, é dado por [39]. O conjunto de equações relacionado aos salários é "fechado" com:

$$\pi^w_t = \hat{w}_t - \hat{w}_{t-1} + \pi_t \qquad [79]$$

que estabelece uma relação entre as taxas de inflação de salários e preços. O procedimento adotado para se chegar a [78] e [79] parte de [9] e [30] e é descrito em detalhe no anexo 8.

Há também os conjuntos relacionados com as taxas de inflação de bens *tradables*, *non-tradables* e administrados ($\pi_{T,t} = \frac{P_{T,t}}{P_{T,t-1}} - 1$, $\pi_{NT,t} = \frac{P_{NT,t}}{P_{NT,t-1}} - 1$ e $\pi_{A,t} = \frac{P_{A,t}}{P_{A,t-1}} - 1$, respectivamente), que admitem comentários e interpretações análogas. Para bens *tradables,* tem-se:

$$\pi_{T,t} - \left(\gamma_T\pi_{t-1} + \left(1-\gamma_T\right)\overline{\pi}_{t-1}\right) = \beta E_t\left[\pi_{T,t+1} - \left(\gamma_T\pi_t + \left(1-\gamma_T\right)\overline{\pi}_t\right)\right] + \kappa^T_p\left(\hat{p}^{flex}_{T,t} - \hat{p}_{T,t}\right) \qquad [80]$$

que é uma curva de Phillips para os preços deste tipo de bem (sendo $\kappa^T_p = \frac{\left(1-\alpha^T_p\beta\right)\left(1-\alpha^T_p\right)}{\alpha^T_p}$). A variável $\hat{p}^{flex}_{T,t}$, que representa o preço relativo de equilíbrio dos bens *tradables* quando os preços são flexíveis, é dada por [41], enquanto a equação

$$\pi_{T,t} = \hat{p}_{T,t} - \hat{p}_{T,t-1} + \pi_t \qquad [81]$$

estabelece uma relação entre as taxas de inflação dos bens *tradables* e dos bens finais. O procedimento adotado para se chegar a [80] e [81] parte de [11] e [32] (com $s = T$) e é descrito em detalhe no anexo 8.

Para bens *non-tradables,* tem-se:

$$\pi_{NT,t} - \left(\gamma_{NT}\pi_{t-1} + \left(1-\gamma_{NT}\right)\overline{\pi}_{t-1}\right) = \beta E_t\left[\pi_{NT,t+1} - \left(\gamma_{NT}\pi_t + \left(1-\gamma_{NT}\right)\overline{\pi}_t\right)\right] + \kappa^{NT}_p\left(\hat{p}^{flex}_{NT,t} - \hat{p}_{NT,t}\right) \qquad [82]$$

que é uma curva de Phillips para os preços desta espécie de bem (onde $\kappa_p^{NT} = \frac{\left(1-\alpha_p^{NT}\beta\right)\left(1-\alpha_p^{NT}\right)}{\alpha_p^{NT}}$). A variável $\hat{p}_{NT,t}^{flex}$, que representa o preço relativo de equilíbrio dos bens *non-tradables* quando os preços são flexíveis, é dada por [42], enquanto a equação

$$\pi_{NT,t} = \hat{p}_{NT,t} - \hat{p}_{NT,t-1} + \pi_t \qquad [83]$$

estabelece uma relação entre as taxas de inflação dos bens *non-tradables* e dos bens finais. O procedimento adotado para se chegar a [82] e [83] parte de [11] e [32] (com $s = NT$) e é descrito em detalhe no anexo 8.

Para bens administrados, tem-se:

$$\pi_{A,t} - \left(\gamma_A \pi_{t-1} + (1-\gamma_A)\bar{\pi}_{t-1}\right) = \beta E_t\left[\pi_{A,t+1} - \left(\gamma_A \pi_t + (1-\gamma_A)\bar{\pi}_t\right)\right] + \kappa_p^A\left(\hat{p}_{A,t}^{flex} - \hat{p}_{A,t}\right) \qquad [84]$$

que é uma curva de Phillips para os preços deste tipo de bem (com $\kappa_p^{A} = \frac{\left(1-\alpha_p^{A}\beta\right)\left(1-\alpha_p^{A}\right)}{\alpha_p^{A}}$). A variável $\hat{p}_{A,t}^{flex}$, que representa o preço relativo de equilíbrio dos bens administrados quando os preços são flexíveis, é dada por [40], enquanto a equação:

$$\pi_{A,t} = \hat{p}_{A,t} - \hat{p}_{A,t-1} + \pi_t \qquad [85]$$

estabelece uma relação entre as taxas de inflação dos bens administrados e dos bens finais. O procedimento adotado para se chegar a [84] e [85] parte de [11] e [32] (com $s = A$) e é descrito em detalhe no anexo 8.

A última equação do conjunto completo é uma regra de Taylor, que descreve como o Banco Central ajusta a taxa de juros básica ($\hat{R}_t$) em resposta às perturbações que atingem a economia. Pressupõe-se que o Banco Central do Brasil (BCB) segue a regra:

$$\hat{R}_t = \phi_R \hat{R}_{t-1} + (1-\phi_R)\left[\phi_\pi\left(E_t\left[\pi_{t+1}\right] - \bar{\pi}_t\right)\right] + \hat{\varepsilon}_t^m \qquad [86]$$

Regras semelhantes foram testadas em diversos artigos publicados na série de textos para discussão do BCB, como, por exemplo, Minella, Freitas, Goldfajn e Muinhos (2003a, 2003b), e em outros tantos trabalhos da instituição, entre os quais Araújo, Bugarin, Muinhos e Silva (2006). Nesta regra, a taxa básica de juros aumenta quando a expectativa acerca da taxa de inflação dos bens finais se afasta de uma meta previamente estabelecida (pois supõe-se que $\phi_\pi > 0$). Trata-se, portanto, de uma tentativa de incorporar o comportamento *forward-looking* dos banqueiros centrais, que foi defendida na literatura em trabalhos como Clarida, Gali e Gertler (1998). Há também o termo $\phi_R \hat{R}_{t-1}$ (no qual $\phi_R > 0$), que reflete as evidências empíricas (nacionais e internacionais) em favor da suavização da trajetória da taxa básica de juros. Não há nenhum termo relacionado com o hiato do produto porque as evidências empíricas a favor de sua presença são algo fracas no caso brasileiro (MINELLA, FREITAS, GOLDFAJN e MUINHOS, 2003b).

O sistema composto por [37] a [47], [49] e [52] a [86] contém 47 variáveis endógenas (que são $\hat{C}_t$, $\hat{C}_t^{tot}$, $\hat{C}_t^c$, $\hat{R}_t$, π_t, $\hat{\theta}_t$, $\hat{e}_t^r$, $\hat{b}_t^*$, $\hat{Y}_t$, π_t^w, $\hat{w}_t^{flex}$, $\hat{w}_t$, $\hat{L}_t$, $\pi_{T,t}$, $\hat{p}_{T,t}^{flex}$, $\hat{p}_{T,t}$, $\pi_{NT,t}$, $\hat{p}_{NT,t}^{flex}$, $\hat{p}_{NT,t}$, $\pi_{A,t}$, $\hat{p}_{A,t}^{flex}$, $\hat{p}_{A,t}$, $\hat{p}_{T,t}^{\times}$, $\hat{r}_t^k$, $\hat{K}_t^{tot}$, $\hat{I}_t$, $\hat{u}_t$, $\hat{\varphi}_t^r$, $\hat{K}_t$, $\hat{K}_{T,t}$, $\hat{L}_{T,t}$, $\hat{Q}_{T,t}$, $\hat{K}_{NT,t}$, $\hat{L}_{NT,t}$, $\hat{Q}_{NT,t}$, $\hat{K}_{A,t}$, $\hat{L}_{A,t}$, $\hat{Q}_{A,t}$, $\hat{Y}_{T,t}^{tot}$, $\hat{Q}_t$, $\hat{Y}_{T,t}$, $\hat{Y}_{T,t}^*$, $\hat{Y}_{A,t}$, $\hat{p}_{L,t}$, $\hat{Y}_{NT,t}$, $\hat{Y}_{NT,t}^{tot}$ e $\hat{Y}_{A,t}^{tot}$), 15 choques ou variáveis exógenas (que são $\hat{w}_t^{min}$, $\hat{R}_t^*$, π_t^*, $\overline{\pi}_t$, $\hat{\varepsilon}_t^L$, $\hat{\varepsilon}_t^\theta$, $\hat{A}_t^T$, $\hat{A}_t^{NT}$, $\hat{A}_t^A$, $\hat{p}_{T,t}^*$, $\hat{\varepsilon}_t^B$, $\hat{\varepsilon}_t^I$, Y_t^*, $\hat{G}_t$ e $\hat{\varepsilon}_t^m$), 47 equações e dezenas de parâmetros. Sua solução numérica é obtida através da plataforma Dynare.

6 SIMULAÇÕES DO MODELO

Esta seção apresenta os resultados de algumas simulações do modelo, com o objetivo de investigar preliminarmente as propriedades dinâmicas do modelo e sua capacidade de representar alguns fatos estilizados das flutuações macroeconômicas. Cabe ressaltar que a discussão é informal, não havendo, ainda, preocupação de verificar formalmente a capacidade do modelo de se ajustar aos dados brasileiros, o que será feito em etapa posterior do projeto.

6.1 PARAMETRIZAÇÃO

A fim de simular e resolver numericamente o modelo é necessário atribuir valores a seus parâmetros. A tabela 1 apresenta a parametrização utilizada nos exercícios de simulação, escolhida a partir da análise da literatura nacional e internacional relevante. Para cada parâmetro, identificou-se uma "faixa admissível" de valores possíveis com base nos trabalhos existentes e, então, adotou-se um valor "médio" dentro deste intervalo. Entre os trabalhos analisados para este fim, podem-se destacar Woodford (2003), Rotemberg e Woodford (1997), Christiano *et al.* (2005), Juillard *et al.* (2006), Smets e Wouters (2003), Kanczuk (2002), Ellery *et al.*(2002), Duarte e Carneiro (2001), Araújo *et al.* (2006), Areosa e Medeiros (2007), Silveira (2008) e Minella *et al.* (2003b).

TABELA 1

Parâmetros do modelo

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
σ_C	2	ψ	8.5
σ_L	1.5	γ	0.48
β	0.985	ϕ	0.69
μ_s	0.175	ζ	1.5
μ_w	0.175	τ^*	-10
H	0.825	α_p^s	0.85
δ	0.025	γ_s	0.45
η_K^s	0.425	α_w	0.7
η_L^s	0.425	γ_w	0.65
$\Diamond$	0.25	θ	1.0
$\left.\frac{d\Psi}{du_t}\right\|_{SS} \Big/ \left.\frac{d^2\Psi}{du_t^2}\right\|_{SS}$	0.175	ϕ_R	0.8
η	50	ϕ_π	4

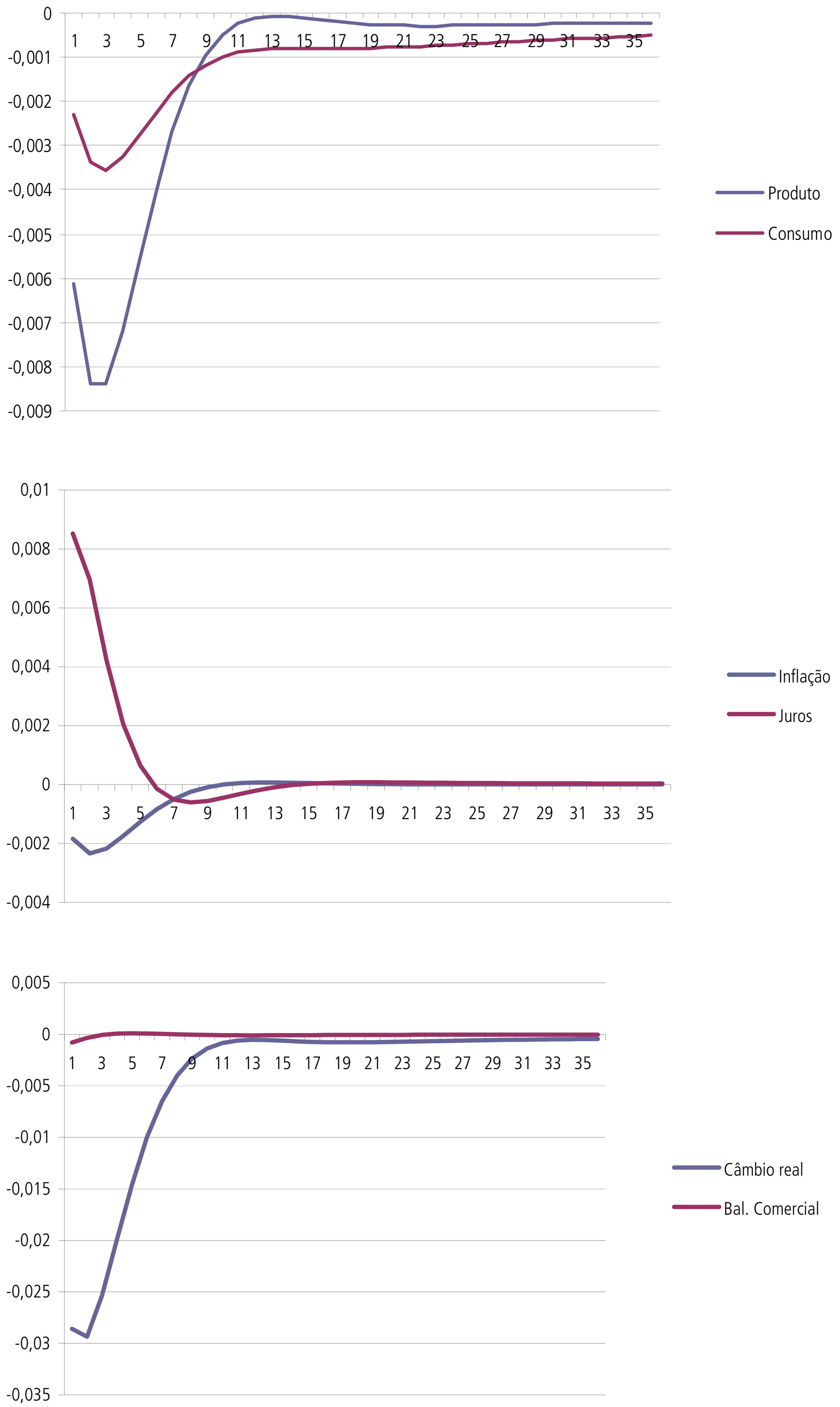
Tendo em vista que o objetivo das simulações a seguir é apenas verificar informalmente as propriedades dinâmicas do modelo, não há preocupação em justificar a escolha de cada um dos parâmetros. Uma discussão mais detalhada da literatura citada, bem como da sensibilidade dos resultados à parametrização adotada, será apresentada em estudo posterior.

6.2 FUNÇÕES DE RESPOSTA A IMPULSO

Esta subseção apresenta as funções de resposta a impulso (FRI) de algumas das principais variáveis macroeconômicas (produto, consumo dos indivíduos do tipo *RP* e *RC*, inflação de bens finais, taxa básica de juros, taxa de câmbio real e saldo comercial) quando a economia é perturbada por choques monetários, fiscais e de prêmio de risco. Este exercício é executado sob a parametrização discutida. O modelo composto pelas equações citadas na subseção 5.2 é resolvido com uso do *software* Dynare, que também computa as FRI desejadas. Os resultados estão nas figuras 2 a 5.

FIGURA 2

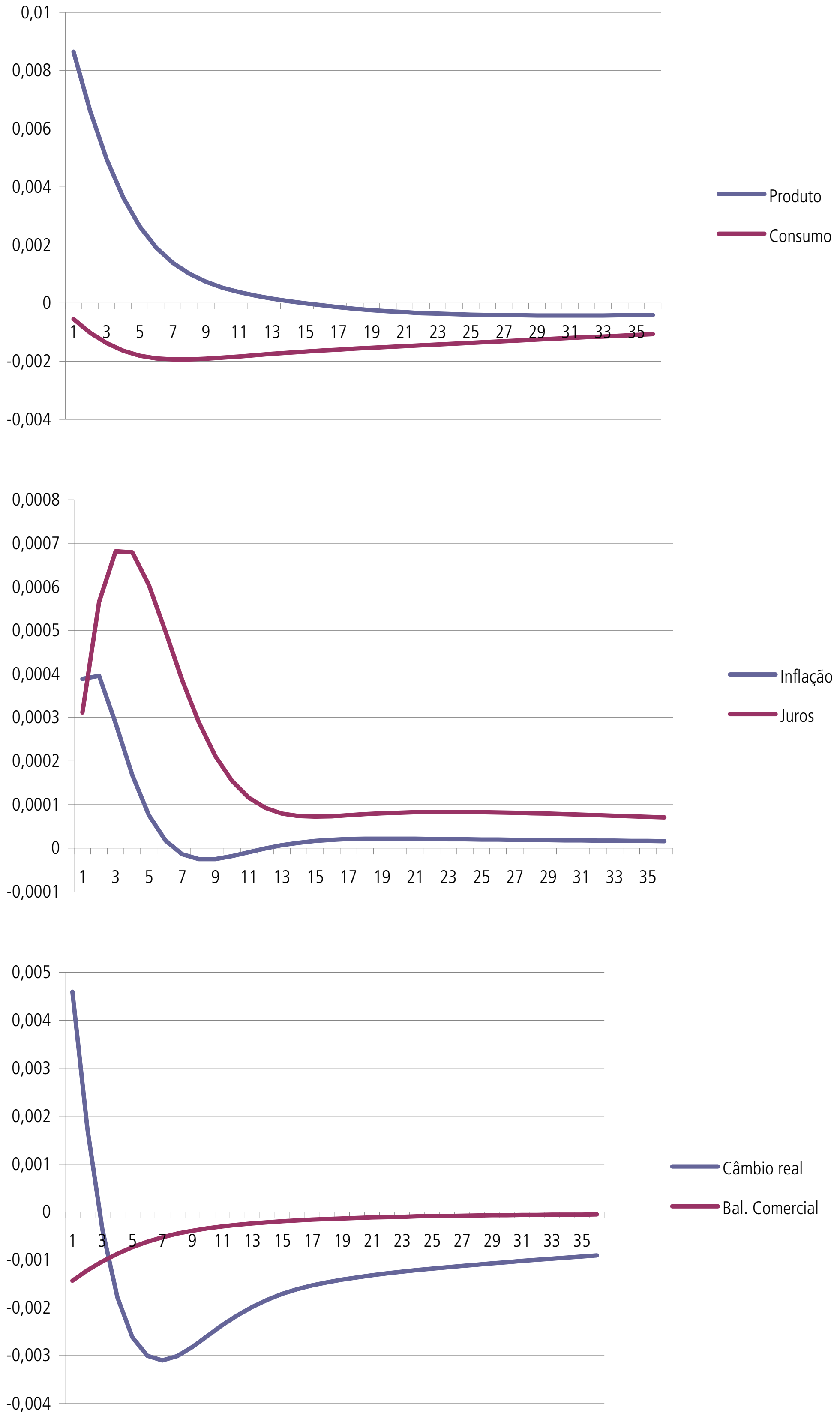
Efeitos de um choque monetário (aumento de 1 d.p. em $\hat{\varepsilon}_t^m$)



Elaboração dos autores.

FIGURA 3

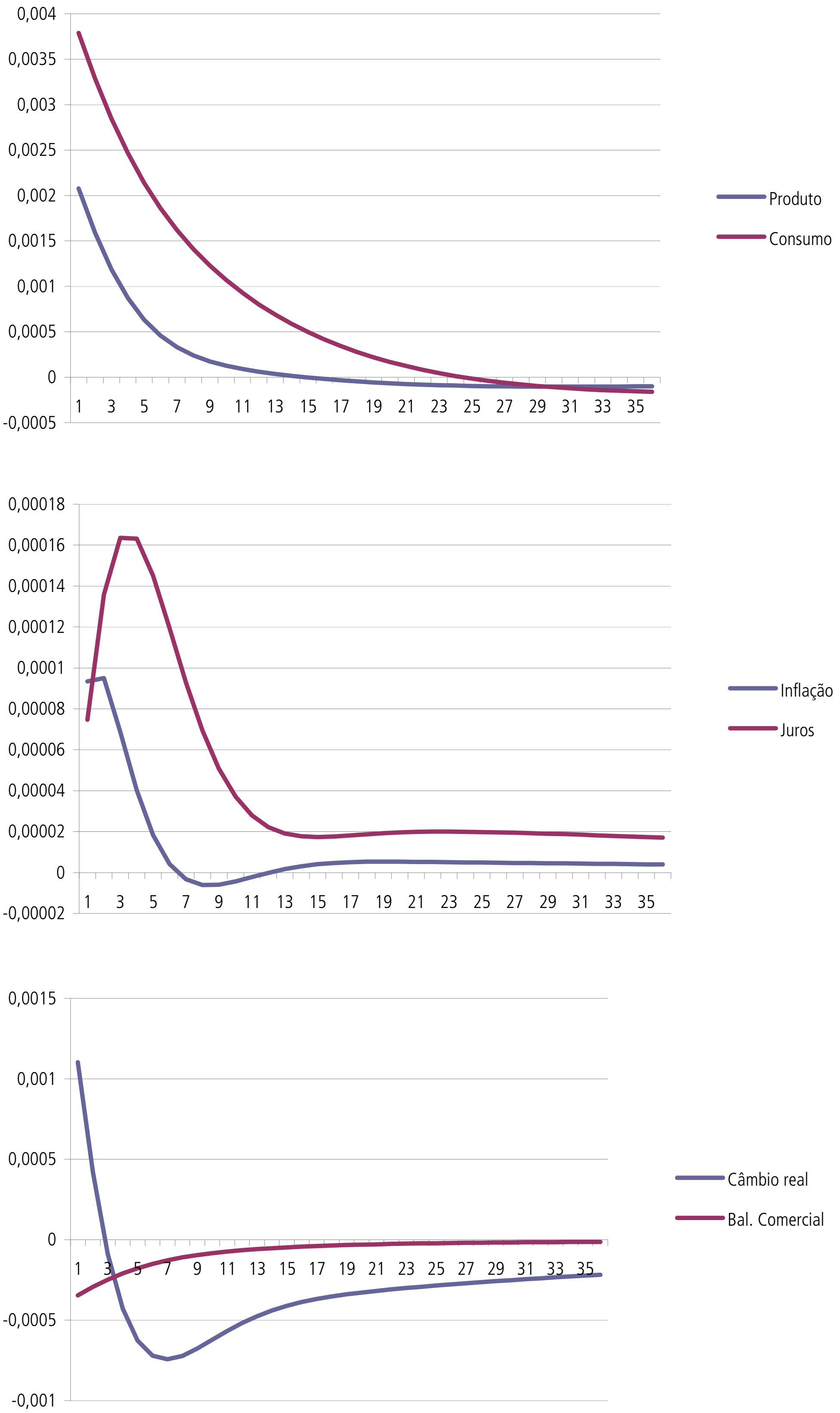
Efeitos de um choque de gasto público (aumento de 1 d.p. em)



Elaboração dos autores.

FIGURA 4

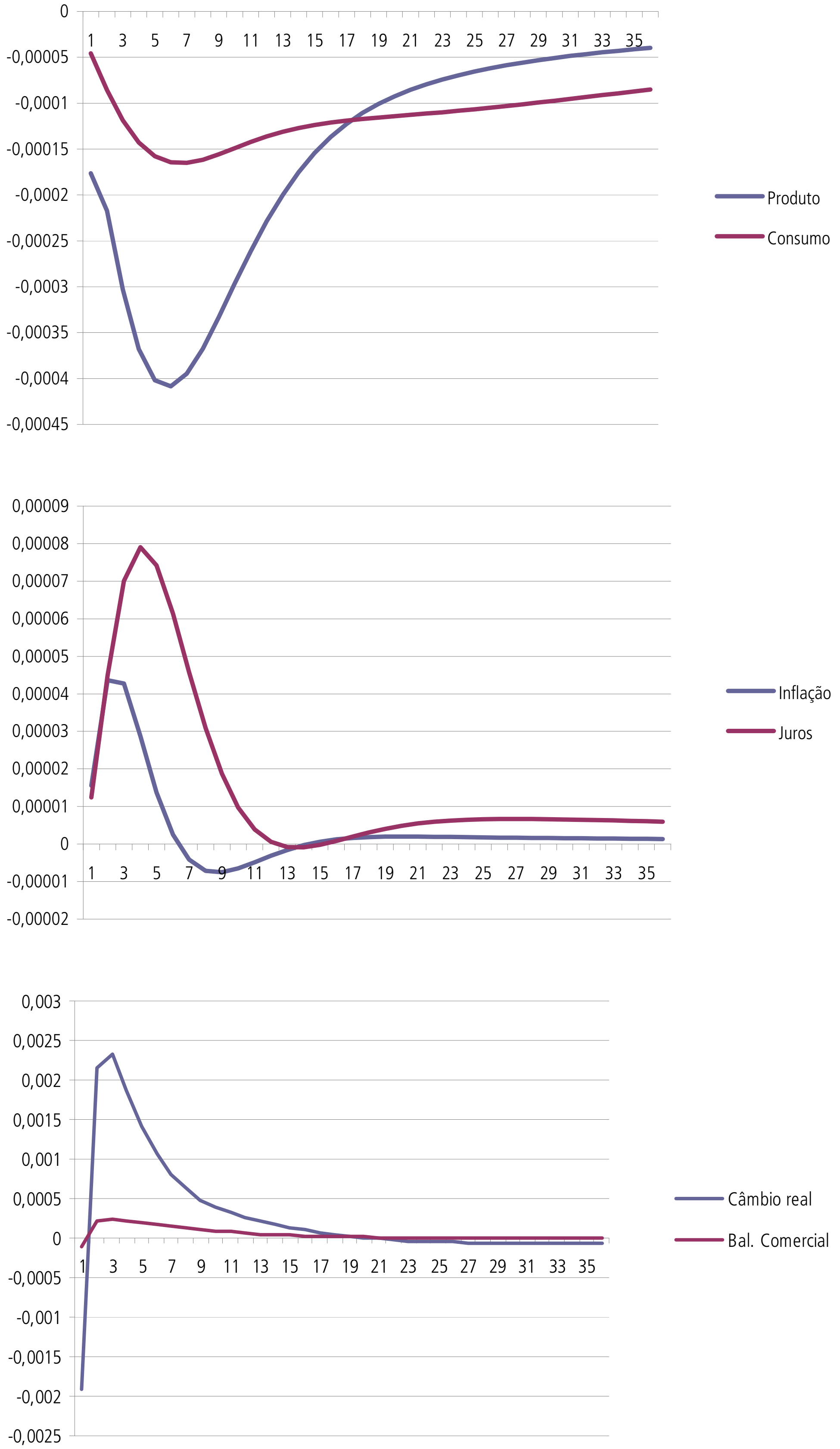
Efeitos de um choque de transferência (aumento de 1 d.p. em $\hat{w}_t^{\min}$)



Elaboração dos autores.

FIGURA 5

Efeitos de um choque no prêmio de risco (aumento de 1 d.p. em $\hat{\varepsilon}_t^{\theta}$)



Elaboração dos autores.

As FRI dessas figuras parecem compatíveis com algumas evidências empíricas acerca dos efeitos de choques na economia brasileira. No que se refere ao choque monetário, por exemplo, tanto o produto quanto a inflação respondem negativamente, atingindo um ponto de mínimo cerca de 2 a 3 trimestres após o choque e permanecendo abaixo do seu nível de *steady-state* por um intervalo de tempo considerável. Este resultado parece estar de acordo com o padrão identificado em vários trabalhos empíricos – ver, por exemplo, Minella (2003), Fernandes e Toro (2005), Cespedes *et al.* (2008) e Catão *et al.* (2008). Vale notar que a valorização da taxa de câmbio real compensa a queda do produto, mantendo a balança comercial relativamente estável diante do choque monetário. Os demais choques também apresentam resultados condizentes com argumentos teóricos e estudos empíricos para o Brasil: a sensibilidade das variáveis macroeconômicas a um choque de prêmio de risco é compatível com os resultados, entre outros, de Minella (2003), e a resposta do produto ao choque de gasto público é condizente com os resultados de Peres e Ellery (2009). Não há estudos que estimem diretamente o efeito de um aumento nas transferências governamentais sobre o produto agregado, mas os resultados da figura 4 parecem razoáveis à luz da teoria e de resultados empíricos obtidos para amostras de indivíduos.

7 CONCLUSÃO

Modelos DSGE são instrumentos potencialmente úteis na discussão de diversas questões macroeconômicas. Nas palavras de Tovar (2008, p.1; tradução livre):

> Os modelos DSGE são instrumentos poderosos que propiciam uma estrutura coerente para análises e discussões de política. Em princípio, eles podem ajudar a identificar fontes de flutuações econômicas; a responder questões relativas a quebras estruturais; a prever os efeitos de mudanças de política; e a realizar experimentos contrafatuais. Eles também permitem relacionar as características estruturais da economia aos parâmetros na forma reduzida – algo que não era necessariamente possível com os modelos macroeconômicos de grande porte anteriores.

Evidentemente, como em qualquer metodologia analítica, a aplicação da abordagem DSGE não deve extrapolar os limites das técnicas de modelagem, nem o escopo dos modelos específicos utilizados. Nesse sentido, é importante ressaltar algumas limitações desta abordagem. Primeiro, ainda que técnicas de estimação usadas em trabalhos recentes permitam a construção de modelos DSGE com bom ajuste aos dados e boa capacidade preditiva, é provável que, para horizontes de previsão relativamente curtos, modelos baseados mais fortemente em métodos de séries temporais gerem previsões mais precisas. Logo, caso o foco da análise seja a maximização da capacidade de prever certas variáveis no curto prazo, modelos DSGE não devem ser os instrumentos mais adequados.

Segundo, a abordagem baseia-se, em nome da tratabilidade analítica, em hipóteses simplificadoras que podem ter impactos relevantes na determinação das propriedades dinâmicas do modelo – em particular, nas hipóteses de expectativas racionais e de agentes "representativos". No que tange ao processo de formação de expectativas, a literatura recente apresenta esforços promissores no sentido de incorporar processos que envolvam aprendizado, como em Slobodyan e Wouters (2009), mas estas opções ainda não parecem operacionalmente viáveis – de modo que, por enquanto, a hipótese de expectativas racionais parece continuar sendo a melhor opção. Quanto à possível inadequação da hipótese de agentes representativos, sugerida, por exemplo, por Carroll (2000), cabe ressaltar que a incorporação de múltiplos setores produtivos e diferentes classes de consumidores – em particular, indivíduos que otimizam intertemporalmente e indivíduos "restritos" – pode ser vista como uma resposta parcial ao problema. É claro que a interação entre agentes heterogêneos dentro de cada classe ou setor ainda poderia gerar diferentes trajetórias dinâmicas para as variáveis macroeconômicas; neste caso, mesmo a análise baseada em modelos DSGE com múltiplos setores ou classes de consumidores seria inadequada.

Terceiro, apesar de os modelos DSGE representarem claramente um avanço em relação aos modelos macroeconométricos antigos, aos moldes dos desenvolvidos pela Cowles Commission, é importante frisar que os microfundamentos destes modelos não os livram necessariamente da "crítica de Lucas". De fato, a maioria dos modelos DSGE apresenta aspectos, como a probabilidade exógena de reajuste de preços à Calvo (1983) e a persistência intrínseca dos choques estruturais, que efetivamente carecem de microfundamentos – não podendo, assim, ser considerados "estruturais". Consequentemente, ainda que os modelos DSGE pareçam mais adequados que modelos concorrentes, seu uso na análise de políticas econômicas também deve ser encarado com a devida cautela (ALVAREZ-LOIS *et al.*, 2008).

Quarto, a maioria dos modelos DSGE é resolvida e analisada em sua versão linearizada (em torno do equilíbrio de longo prazo). Isto significa que as simulações baseadas nestes modelos são válidas apenas para choques de magnitude moderada, que não causem desvios muito significativos em relação ao ponto de aproximação.

Este texto apresentou os resultados de um primeiro esforço visando construir um modelo DSGE adequado para a realização de projeções e simulações para a economia brasileira. A versão atual do modelo ainda omite diversas características importantes da economia do país, mas já permite entender alguns dos mecanismos de transmissão de choques que podem ser relevantes para o país. Nas próximas etapas do projeto, pretende-se avançar na estimação econométrica do modelo e na incorporação de novas características à modelagem teórica, de modo a obter uma representação mais próxima da realidade econômica brasileira. Não obstante as ressalvas referidas nos parágrafos anteriores, espera-se dispor, ao final do projeto, de um modelo que represente adequadamente as principais características da economia brasileira no contexto de uma abordagem dinâmica de equilíbrio geral, e que permita identificar adequadamente os impactos macroeconômicos de diversos "choques" externos e de política econômica no médio prazo.

ANEXO 1

O problema resolvido pelo indivíduo i do tipo RP origina o seguinte lagrangeano:

$$L = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_t^B \left[\dfrac{\left(C_{i,t} - hC_{t-1}\right)^{1-\sigma_C}}{1-\sigma_C} - \varepsilon_t^L \dfrac{L_{i,t}^{1+\sigma_L}}{1+\sigma_L} + \dfrac{\varepsilon_t^M}{1-\sigma_M} \left(\dfrac{M_{i,t}}{P_t} \right)^{1-\sigma_M} \right] + \ldots \\ \ldots + \lambda_t \left[\begin{array}{l} M_{i,t} + P_{B,t} B_{i,t} + e_t P_{B,t}^* B_{i,t}^* - M_{i,t-1} - B_{i,t-1} - e_t B_{i,t-1}^* - \ldots \\ \ldots - W_{i,t} L_{i,t} + P_t C_{i,t} - A_{i,t} - Transf_{i,t} - Div_{i,t} \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

cujas condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial L}{\partial C_{i,t}} = \beta^t \varepsilon_t^B \left(C_{i,t} - hC_{t-1} \right)^{-\sigma_C} + \beta^t \lambda_t P_t = 0 \qquad [1.1]$$

$$\frac{\partial L}{\partial B_{i,t}} = \beta^t \lambda_t P_{B,t} - \beta^{t+1} E_t \left[\lambda_{t+1} \right] = 0 \qquad [1.2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial B_{i,t}^*} = \beta^t \lambda_t e_t P_{B,t}^* - \beta^{t+1} E_t \left[\lambda_{t+1} e_{t+1} \right] = 0 \qquad [1.3]$$

$$\frac{\partial L}{\partial M_{i,t}} = \beta^t \varepsilon_t^B \varepsilon_t^M \left(\frac{M_{i,t}}{P_t} \right)^{-\sigma_M} \frac{1}{P_t} + \beta^t \lambda_t - \beta^{t+1} E_t \left[\lambda_{t+1} \right] = 0 \qquad [1.4]$$

De $[1.1] \Rightarrow \lambda_t = -\dfrac{\varepsilon_t^B \left(C_{i,t} - hC_{t-1} \right)^{-\sigma_C}}{P_t}$, o que torna clara a interpretação de λ_t como o negativo da utilidade marginal da renda, pois um real a mais proporciona $1/P_t$ unidades a mais de bens finais, que por sua vez proporcionam uma satisfação adicional igual a $UMg \times 1/P_t$, onde $UMg = \varepsilon_t^B \left(C_{i,t} - hC_{t-1} \right)^{-\sigma_C}$ (UMg: utilidade marginal do consumo). Logo [1.2] pode ser escrita como:

$$\frac{-\varepsilon_t^B \left(C_{i,t} - hC_{t-1} \right)^{-\sigma_C} P_{B,t}}{P_t} + \beta E_t \left[\frac{\varepsilon_{t+1}^B \left(C_{i,t+1} - hC_t \right)^{-\sigma_C}}{P_{t+1}} \right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_t^B \left(C_{i,t} - hC_{t-1} \right)^{-\sigma_C} = \beta E_t \left[\varepsilon_{t+1}^B \left(C_{i,t+1} - hC_t \right)^{-\sigma_C} \frac{R_t}{\pi_{t+1}^{\circ}} \right] \qquad [1.5]$$

onde $R_t = \frac{1}{P_{B,t}}$ é a taxa de juros bruta de um período praticada na economia doméstica e $\pi^{\circ}_{t+1} = \frac{P_{t+1}}{P_t}$ é a taxa de inflação bruta referente aos bens e serviços finais e medida entre os instantes t e $t+1$.

$[1.2] \Rightarrow P_{B,t} = \frac{1}{R_t} = \beta E_t\left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\right]$, logo a equação [1.4] pode ser escrita assim:

$$\varepsilon_t^B \varepsilon_t^M \left(\frac{M_{i,t}}{P_t}\right)^{-\sigma_M} \frac{1}{P_t} + \lambda_t - \beta E_t\left[\lambda_{t+1}\right] = 0 \Rightarrow \left(\frac{M_{i,t}}{P_t}\right)^{-\sigma_M} = \frac{P_t}{\varepsilon_t^B \varepsilon_t^M} \lambda_t \left(\beta E_t\left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\right] - 1\right) \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \left(\frac{M_{i,t}}{P_t}\right)^{-\sigma_M} = \frac{\left(C_{i,t} - hC_{t-1}\right)^{-\sigma_C}}{\varepsilon_t^M}\left(1 - \frac{1}{R_t}\right) \Rightarrow \frac{M_{i,t}}{P_t} = \left[\varepsilon_t^M \left(C_{i,t} - hC_{t-1}\right)^{\sigma_C} \frac{R_t}{R_t - 1}\right]^{\frac{1}{\sigma_M}}$$

O resultado corresponde a uma curva LM porque $\frac{M_{i,t}}{P_t} \uparrow$ quando $C_{i,t} \uparrow$ e $\frac{M_{i,t}}{P_t} \uparrow$ quando $R_t \downarrow$ (porque $\frac{R_t}{R_t - 1} \uparrow$ ao se restringir a análise à faixa $R_t \geq 1$). Repare-se que as trajetórias das demais variáveis não dependem de $\frac{M_{i,t}}{P_t}$, de maneira que esta equação só deve ser examinada caso haja algum interesse específico nos saldos monetários reais.

De [1.2]: $\lambda_t P_{B,t} - \beta E_t\left[\lambda_{t+1}\right] = 0 \Rightarrow \lambda_t = \frac{1}{P_{B,t}} \beta E_t\left[\lambda_{t+1}\right] \Rightarrow \lambda_t = \beta R_t E_t\left[\lambda_{t+1}\right]$

De [1.3]:

$$\lambda_t e_t P^*_{B,t} - \beta E_t\left[\lambda_{t+1} e_{t+1}\right] = 0 \Rightarrow \lambda_t e_t \frac{1}{\theta_t R^*_t} - \beta E_t\left[\lambda_{t+1} e_{t+1}\right] = 0 \Rightarrow \lambda_t = \beta \theta_t R^*_t E_t\left[\frac{e_{t+1}}{e_t} \lambda_{t+1}\right]$$

Igualando os dois resultados:

$$R_t E_t\left[\lambda_{t+1}\right] = \theta_t R^*_t E_t\left[\frac{e_{t+1}}{e_t} \lambda_{t+1}\right] \qquad [1.6]$$

Esse resultado dá origem à UIP ajustada para a presença do prêmio de risco.

O problema de escolha de salários admite dois tipos de solução. Sob salários flexíveis, o salário ótimo pode ser escolhido a todo instante.

$$\frac{\partial L}{\partial W_{i,t}} = -\beta^t \varepsilon_t^B \varepsilon_t^L L_{i,t}^{\sigma_L} \frac{\partial L_{i,t}}{\partial W_{i,t}} - \beta^t \lambda_t \frac{\partial}{\partial W_{i,t}} \left(W_{i,t} L_{i,t} \right) = 0 \Rightarrow -\varepsilon_t^B \varepsilon_t^L L_{i,t}^{\sigma_L} \frac{\partial L_{i,t}}{\partial W_{i,t}} = \lambda_t \left(L_{i,t} + W_{i,t} \frac{\partial L_{i,t}}{\partial W_{i,t}} \right)$$

Observa-se que $L_{i,t} = L_t \left(\frac{W_t}{W_{i,t}} \right)^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}$, logo:

$$\frac{\partial L_{i,t}}{\partial W_{i,t}} = -\frac{1+\mu_w}{\mu_w} L_t \left(\frac{W_t}{W_{i,t}} \right)^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}-1} \frac{W_t}{\left(W_{i,t} \right)^2} = -\frac{1+\mu_w}{\mu_w} L_t \left(\frac{W_t}{W_{i,t}} \right)^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} \frac{1}{W_{i,t}}$$

e a condição para o salário ótimo a ser cobrado em caso de flexibilidade passa a ser:

$$\ldots \Rightarrow \varepsilon_t^B \varepsilon_t^L L_{i,t}^{\sigma_L} \frac{1+\mu_w}{\mu_w} L_t \left(\frac{W_t}{W_{i,t}} \right)^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} \frac{1}{W_{i,t}} = \lambda_t \left(L_t \left(\frac{W_t}{W_{i,t}} \right)^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} - \frac{1+\mu_w}{\mu_w} W_{i,t} L_t \left(\frac{W_t}{W_{i,t}} \right)^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} \frac{1}{W_{i,t}} \right) \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow W_{i,t} = -\varepsilon_t^B \varepsilon_t^L \frac{L_{i,t}^{\sigma_L}}{\lambda_t} \left(1+\mu_w \right) \qquad [1.7]$$

Continuando...

$$W_{i,t} = -\varepsilon_t^B \varepsilon_t^L \frac{L_{i,t}^{\sigma_L}}{\lambda_t} \left(1+\mu_w \right) \qquad L_{i,t} = L_t \left(\frac{W_t}{W_{i,t}} \right)^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}$$

$$W_{i,t} = -\varepsilon_t^B \varepsilon_t^L \frac{\left(L_t \right)^{\sigma_L} \left(W_t \right)^{\sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}} \left(W_{i,t} \right)^{-\sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}}}{\lambda_t} \left(1+\mu_w \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(W_{i,t} \right)^{1+\sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}} = -\varepsilon_t^B \varepsilon_t^L \frac{\left(L_t \right)^{\sigma_L} \left(W_t \right)^{\sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}}}{\lambda_t} \left(1+\mu_w \right) \qquad [1.8]$$

A expressão [1.8] indica que o salário flexível cobrado pelos indivíduos do tipo *RP* é o mesmo, pois ele só depende de variáveis "agregadas" (ou seja, variáveis que todos os indivíduos "enxergam" igual). Desta maneira, $W_{i,t} = W_t$ para todo *i*. Relembrando-se que $\lambda_t = -\frac{\varepsilon_t^B \left(C_{i,t} - hC_{t-1} \right)^{-\sigma_C}}{P_t}$ e substituindo-se em [1.8] chega-se a:

$$\frac{W_t}{P_t} = \left(1+\mu_w \right) \varepsilon_t^L \left(L_t \right)^{\sigma_L} \left(C_t - hC_{t-1} \right)^{\sigma_C} \qquad [1.9]$$

onde se retira o subscrito *i* do consumo em *t* porque todos os indivíduos do tipo *RP* escolhem a mesma trajetória de consumo ao longo do tempo. A expressão [1.9] define o salário real de equilíbrio sob a hipótese de flexibilidade completa.

Sob rigidez de salários, pode-se fazer como em Calvo (1983) e supor que o salário ótimo escolhido em um dado período (por exemplo, $t=0$) permaneça inalterado por um período com probabilidade α_w, por dois períodos com probabilidade α_w^2 e assim por diante. Logo,

$$\frac{\partial L}{\partial W_{i,0}}=\frac{\partial}{\partial W_{i,0}}E_0\sum_{t=0}^{\infty}\left(\alpha_w\beta\right)^t\left\{\varepsilon_t^B\left[\ldots-\varepsilon_t^L\frac{L_{i,t}^{1+\sigma_L}}{1+\sigma_L}+\ldots\right]+\lambda_t\left[\ldots-W_{i,0}L_{i,t}-\ldots\right]+\ldots\right\}=\ldots$$

$$\ldots=E_0\sum_{t=0}^{\infty}\left(\alpha_w\beta\right)^t\left\{-\varepsilon_t^B\varepsilon_t^L L_{i,t}^{\sigma_L}\frac{\partial L_{i,t}}{\partial W_{i,0}}-\lambda_t\left[L_{i,t}+W_{i,0}\frac{\partial L_{i,t}}{\partial W_{i,0}}\right]\right\}=0$$

Pode-se também supor que o salário não otimizado seja corrigido pela inflação em vez de permanecer inalterado. Neste caso, o salário praticado no período *t* se relaciona com o salário recebido no período imediatamente anterior de acordo com a fórmula $W_{i,t}=\left(\pi_{t-1}^{\circ}\right)^{\gamma_w}\left(\overline{\pi}_{t-1}^{\circ}\right)^{1-\gamma_w}W_{i,t-1}$, na qual $\pi_{t-1}^{\circ}=\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}$, $\overline{\pi}_{t-1}$ é a última meta de inflação fixada pelo BC e conhecida pelos agentes, e γ_w e $(1-\gamma_w)$ são os pesos atribuídos à inflação passada e à meta de inflação no fator de correção. Sendo assim...

$$\frac{\partial L}{\partial W_{i,0}}=E_0\sum_{t=0}^{\infty}\left(\alpha_w\beta\right)^t\left\{-\varepsilon_t^B\varepsilon_t^L L_{i,t}^{\sigma_L}\frac{\partial L_{i,t}}{\partial W_{i,t}}\frac{\partial W_{i,t}}{\partial W_{i,0}}-\lambda_t\Upsilon_{0,t-1}^{w}\left[L_{i,t}+W_{i,0}\frac{\partial L_{i,t}}{\partial W_{i,t}}\frac{\partial W_{i,t}}{\partial W_{i,0}}\right]\right\}=0$$

[1.10]

onde $\frac{\partial L_{i,t}}{\partial W_{i,t}}$ reflete o formato da demanda por trabalho do tipo *i* e $\frac{\partial W_{i,t}}{\partial W_{i,0}}=\Upsilon_{0,t-1}^{w}$.

Observação:

$W_{i,1}=\left(\pi_0^{\circ}\right)^{\gamma_w}\left(\overline{\pi}_0^{\circ}\right)^{1-\gamma_w}W_{i,0}$, $W_{i,2}=\left(\pi_1^{\circ}\right)^{\gamma_w}\left(\overline{\pi}_1^{\circ}\right)^{1-\gamma_w}W_{i,1}$, $W_{i,3}=\left(\pi_2^{\circ}\right)^{\gamma_w}\left(\overline{\pi}_2^{\circ}\right)^{1-\gamma_w}W_{i,2}$, etc... Logo $W_{i,t}=\left(\pi_0^{\circ}\times\pi_1^{\circ}\times\pi_2^{\circ}\times\ldots\times\pi_{t-1}^{\circ}\right)^{\gamma_w}\left(\overline{\pi}_0^{\circ}\times\overline{\pi}_1^{\circ}\times\overline{\pi}_2^{\circ}\times\ldots\times\overline{\pi}_{t-1}^{\circ}\right)^{1-\gamma_w}W_{i,0}$. Somente para escrever o resultado de forma mais compacta, defina-se $\Upsilon_{0,t-1}^{w}=\left(\pi_0^{\circ}\times\pi_1^{\circ}\times\pi_2^{\circ}\times\ldots\times\pi_{t-1}^{\circ}\right)^{\gamma_w}\left(\overline{\pi}_0^{\circ}\times\overline{\pi}_1^{\circ}\times\overline{\pi}_2^{\circ}\times\ldots\times\overline{\pi}_{t-1}^{\circ}\right)^{1-\gamma_w}$; logo $W_{i,t}=\Upsilon_{0,t-1}^{w}\times W_{i,0}$ e $\frac{\partial W_{i,t}}{\partial W_{i,0}}=\Upsilon_{0,t-1}^{w}$.

Como $L_{i,t} = L_t \left(\frac{W_t}{W_{i,t}} \right)^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}$, então

$$L_{i,t} = L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w \times W_{i,0}}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} \Rightarrow \frac{\partial L_{i,t}}{\partial W_{i,0}} = -\frac{1+\mu_w}{\mu_w} L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w \times W_{i,0}}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}-1} \frac{\Upsilon_{0,t-1}^w}{W_t}$$ e

portanto:

$$\frac{\partial L}{\partial W_{i,0}} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha_w \beta)^t \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_t^B \varepsilon_t^L \left(L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w \times W_{i,0}}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} \right)^{\sigma_L} \frac{1+\mu_w}{\mu_w} L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w \times W_{i,0}}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}-1} \frac{\Upsilon_{0,t-1}^w}{W_t} - \ldots \\ \ldots - \lambda_t \Upsilon_{0,t-1}^w \left[L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w \times W_{i,0}}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} - W_{i,0} \frac{1+\mu_w}{\mu_w} L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w \times W_{i,0}}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}-1} \frac{\Upsilon_{0,t-1}^w}{W_t} \right] \end{array} \right\} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha_w \beta)^t \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_t^B \varepsilon_t^L \left(L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w \times W_{i,0}}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} \right)^{\sigma_L} \frac{1+\mu_w}{\mu_w} L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} \left(W_{i,0} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}-1} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{\mu_w} \lambda_t \Upsilon_{0,t-1}^w L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w \times W_{i,0}}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} \end{array} \right\} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha_w \beta)^t \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_t^B \varepsilon_t^L \left(L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w \times W_{i,0}}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} \right)^{\sigma_L} (1+\mu_w) L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} + \ldots \\ \ldots + \lambda_t \Upsilon_{0,t-1}^w L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} W_{i,0} \end{array} \right\} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$W_{i,0} = -(1+\mu_w) \frac{E_0 \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha_w \beta)^t \varepsilon_t^B \varepsilon_t^L \left(L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w \times W_{i,0}}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} \right)^{\sigma_L} L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}}{E_0 \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha_w \beta)^t \lambda_t \Upsilon_{0,t-1}^w L_t \left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w}{W_t} \right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}}$$

[1.11]

ANEXO 2

As firmas "empacotadoras" transformam bens diferenciados em cestas que são combinadas na segunda etapa do processo produtivo a fim de obterem as cestas de bens finais. As funções de produção são:

$$Y_{s,t}^{tot} = \left[\int_0^1 Y_{j,s,t}^{\frac{1}{1+\mu_s}} dj \right]^{1+\mu_s} \quad , \; s = T, NT, A \qquad [2.1]$$

onde $Y_{s,t}^{tot}$ é a quantidade de cestas de bens do tipo *s* que são obtidas no instante *t* e $Y_{j,s,t}$ é a quantidade utilizada da *j*-ésima variedade do tipo *s*. O problema de minimização do custo de produção das cestas é:

$$\min_{\{Y_{j,s,t}\}} \int_0^1 P_{j,s,t} Y_{j,s,t} dj$$

$$sa \quad \left(Y_{s,t}^{tot}\right)^{\frac{1}{1+\mu_s}} = \int_0^1 Y_{j,s,t}^{\frac{1}{1+\mu_s}} dj$$

O resultado final do problema é:

$$Y_{j,s,t} = Y_{s,t}^{tot} \left(\frac{P_{j,s,t}}{P_{s,t}} \right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} \qquad [2.2]$$

onde:

$$P_{s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}} = \int_0^1 P_{j,s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}} dj \qquad [2.3]$$

Note-se que o custo mínimo de produção da cesta de bens finais é:

$$\int_0^1 P_{j,s,t} Y_{j,s,t} dj = \int_0^1 P_{j,s,t} Y_{s,t}^{tot} \left(\frac{P_{j,s,t}}{P_{s,t}} \right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} dj = Y_{s,t}^{tot} \left(P_{s,t}\right)^{\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} \int_0^1 \left(P_{j,s,t}\right)^{1-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} dj = \ldots$$

$$\ldots = Y_{s,t}^{tot} \left(P_{s,t}\right)^{\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} \int_0^1 \left(P_{j,s,t}\right)^{-\frac{1}{\mu_s}} dj = Y_{s,t}^{tot} \left(P_{s,t}\right)^{\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} P_{s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}} = P_{s,t} Y_{s,t}^{tot}$$

Ver-se-á adiante que $Y_{T,t}^{tot} = Y_{T,t} + Y_{T,t}^{*}$, $Y_{NT,t}^{tot} = Y_{NT,t}$ e $Y_{A,t}^{tot} = Y_{A,t}$. Isto faz com que essa expressão esteja em conformidade com a formulação do problema de minimização de custos que caracteriza a etapa posterior do processo produtivo, pois os gastos incorridos com cada item são iguais a $P_{s,t} Y_{s,t}$.

Na segunda etapa do processo, as "empacotadoras" combinam cestas de bens livres *L* (*tradables* e *non-tradables*) e administrados *A* para obter a cesta de bens finais de acordo com a seguinte função de produção:

$$Y_t = \left(\left(\phi\right)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{L,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}} + \left(1-\phi\right)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{A,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}} \right)^{1+\psi} \qquad [2.4]$$

onde $Y_{L,t}$ e $Y_{A,t}$ denotam as cestas de bens livres e administrados, respectivamente. A cesta de bens livres é obtida combinando bens *tradables* (T) e *non-tradables* (NT):

$$Y_{L,t} = \left((\gamma)^{\frac{\eta}{1+\eta}} \left(Y_{T,t}\right)^{\frac{1}{1+\eta}} + (1-\gamma)^{\frac{\eta}{1+\eta}} \left(Y_{NT,t}\right)^{\frac{1}{1+\eta}} \right)^{1+\eta} \qquad [2.5]$$

onde $Y_{T,t}$ ($Y_{NT,t}$) é a quantidade de cestas de bens *tradables* (*non-tradables*) utilizada pelas firmas produtoras de bens finais.

• Problema de minimização do custo de se produzir uma unidade do bem final:

$$\min_{\{Y_{L,t},Y_{A,t}\}} P_{L,t}Y_{L,t} + P_{A,t}Y_{A,t}$$

$$sa \quad (Y_t)^{\frac{1}{1+\psi}} = (\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{L,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}} + (1-\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{A,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}}$$

• Lagrangeano:

$$P_{L,t}Y_{L,t} + P_{A,t}Y_{A,t} + \vartheta_t \left((Y_t)^{\frac{1}{1+\psi}} - (\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{L,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}} - (1-\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{A,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}} \right)$$

• CPOs:

$$\frac{\partial L}{\partial Y_{L,t}} = P_{L,t} - \vartheta_t \frac{1}{1+\psi} (\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{L,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}-1} = 0 \qquad [2.6]$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_{A,t}} = P_{A,t} - \vartheta_t \frac{1}{1+\psi} (1-\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{A,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}-1} = 0 \qquad [2.7]$$

De [2.6]: $\dfrac{P_{L,t}}{(\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{L,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}-1}} = \vartheta_t \dfrac{1}{1+\psi}$

De [2.7]: $\dfrac{P_{A,t}}{(1-\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{A,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}-1}} = \vartheta_t \dfrac{1}{1+\psi}$

Logo:

$$\frac{P_{L,t}}{(\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{L,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}-1}} = \frac{P_{A,t}}{(1-\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{A,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}-1}} \Rightarrow \frac{P_{L,t}}{P_{A,t}} = \frac{(\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{L,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}-1}}{(1-\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{A,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}-1}} \Rightarrow \dots$$

$$\dots \Rightarrow \frac{P_{L,t}(1-\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}}}{P_{A,t}(\phi)^{\frac{\psi}{1+\psi}}} = \left(\frac{Y_{L,t}}{Y_{A,t}}\right)^{-\frac{\psi}{1+\psi}} \Rightarrow \left(\frac{P_{L,t}}{P_{A,t}}\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} \frac{\phi}{1-\phi} = \frac{Y_{L,t}}{Y_{A,t}} \Rightarrow Y_{L,t} = \frac{\phi}{1-\phi}\left(\frac{P_{L,t}}{P_{A,t}}\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} Y_{A,t}$$

Substituindo de volta na função de produção:

$$\left(Y_t\right)^{\frac{1}{1+\psi}} = \left(\phi\right)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{L,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}} + \left(1-\phi\right)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{A,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}} \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \left(Y_t\right)^{\frac{1}{1+\psi}} = \left(\phi\right)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(\frac{\phi}{1-\phi} \left(\frac{P_{L,t}}{P_{A,t}} \right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} Y_{A,t} \right)^{\frac{1}{1+\psi}} + \left(1-\phi\right)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \left(Y_{A,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}} \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \left(Y_t\right)^{\frac{1}{1+\psi}} = \left(Y_{A,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}} \left[\left(\phi\right)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \frac{\left(\phi\right)^{\frac{1}{1+\psi}}}{\left(1-\phi\right)^{\frac{1}{1+\psi}}} \frac{\left(P_{L,t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}}{\left(P_{A,t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}} + \left(1-\phi\right)^{\frac{\psi}{1+\psi}} \right] \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \left(Y_t\right)^{\frac{1}{1+\psi}} = \left(Y_{A,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}} \left[\frac{\phi\left(P_{L,t}\right)^{-\frac{1}{\psi}} + \left(1-\phi\right)\left(P_{A,t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}}{\left(1-\phi\right)^{\frac{1}{1+\psi}} \left(P_{A,t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}} \right] \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \left(Y_t\right)^{\frac{1}{1+\psi}} = \left(Y_{A,t}\right)^{\frac{1}{1+\psi}} \left[\frac{\left(P_t\right)^{-\frac{1}{\psi}}}{\left(1-\phi\right)^{\frac{1}{1+\psi}} \left(P_{A,t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}} \right] \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow Y_{A,t} = \left(1-\phi\right) Y_t \left(\frac{P_{A,t}}{P_t} \right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} \qquad [2.8]$$

onde se define:

$$\left(P_t\right)^{-\frac{1}{\psi}} = \phi\left(P_{L,t}\right)^{-\frac{1}{\psi}} + \left(1-\phi\right)\left(P_{A,t}\right)^{-\frac{1}{\psi}} \qquad [2.9]$$

Mas viu-se que $Y_{L,t} = \frac{\phi}{1-\phi} \left(\frac{P_{L,t}}{P_{A,t}} \right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} Y_{A,t}$. Substituindo:

$$Y_{L,t} = \frac{\phi}{1-\phi} \left(\frac{P_{L,t}}{P_{A,t}} \right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} Y_{A,t} \Rightarrow Y_{L,t} = \frac{\phi}{1-\phi} \left(\frac{P_{L,t}}{P_{A,t}} \right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} \left(1-\phi\right) Y_t \left(\frac{P_{A,t}}{P_t} \right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} \Rightarrow Y_{L,t} = \phi Y_t \left(\frac{P_{L,t}}{P_t} \right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}}$$

A firma representativa montadora de bens finais também resolve:

$$\min_{\{Y_{T,t}, Y_{NT,t}\}} P_{T,t} Y_{T,t} + P_{NT,t} Y_{NT,t}$$

$$sa \quad \left(Y_{L,t}\right)^{\frac{1}{1+\eta}} = \left(\gamma\right)^{\frac{\eta}{1+\eta}} \left(Y_{T,t}\right)^{\frac{1}{1+\eta}} + \left(1-\gamma\right)^{\frac{\eta}{1+\eta}} \left(Y_{NT,t}\right)^{\frac{1}{1+\eta}}$$

Uma sequência de manipulações análoga à executada acima leva a:

$$\left(P_{L,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}} = \gamma\left(P_{T,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}} + \left(1-\gamma\right)\left(P_{NT,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}} \qquad [2.10]$$

$$Y_{T,t} = \gamma Y_{L,t}\left(\frac{P_{T,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} \Rightarrow Y_{T,t} = \gamma\phi Y_t\left(\frac{P_{L,t}}{P_t}\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}}\left(\frac{P_{T,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} \qquad [2.11]$$

$$Y_{NT,t} = \left(1-\gamma\right)Y_{L,t}\left(\frac{P_{NT,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} \Rightarrow Y_{NT,t} = \left(1-\gamma\right)\phi Y_t\left(\frac{P_{L,t}}{P_t}\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}}\left(\frac{P_{NT,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} \qquad [2.12]$$

ANEXO 3

O problema de maximização de lucro da firma detentora de capital é:

$$\max_{\{u_t, K_t^s, I_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \Theta_{0,t} \left(R_t^k u_t K_{t-1}^{tot} - P_t \Psi(u_t) K_{t-1}^{tot} - P_t I_t \right)$$

$$sa\ K_t^{tot} = (1-\delta) K_{t-1}^{tot} + I_t \left(1 - S\left(\varepsilon_t^I \frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right)$$

O lagrangeano é:

$$L = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \Theta_{0,t} \left\{ \left(R_t^k u_t K_{t-1}^{tot} - P_t \Psi(u_t) K_{t-1}^{tot} - P_t I_t \right) + \varphi_t \left(K_t^{tot} - (1-\delta) K_{t-1}^{tot} - I_t \left(1 - S\left(\varepsilon_t^I \frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right) \right) \right\}$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial L}{\partial I_t} = -\Theta_{0,t} P_t - \Theta_{0,t} \varphi_t \frac{\partial}{\partial I_t} \left(I_t \left(1 - S\left(\varepsilon_t^I \frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right) \right) - \dots$$

$$\dots - E_t \left[\Theta_{0,t+1} \varphi_{t+1} \frac{\partial}{\partial I_t} \left(I_{t+1} \left(1 - S\left(\varepsilon_{t+1}^I \frac{I_{t+1}}{I_t} \right) \right) \right) \right] = 0 \qquad [3.1]$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_t^{tot}} = E_t \left[\Theta_{0,t+1} R_{t+1}^k u_{t+1} \right] - E_t \left[\Theta_{0,t+1} P_{t+1} \Psi(u_{t+1}) \right] + \Theta_{0,t} \varphi_t - \dots$$

$$\dots - E_t \left[\Theta_{0,t+1} \varphi_{t+1} (1-\delta) \right] = 0 \qquad [3.2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = \Theta_{0,t} R_t^k K_t^{tot} - \Theta_{0,t} P_t \frac{d\Psi}{du_t} K_t^{tot} = 0 \qquad [3.3]$$

De [3.3]: $R_t^k - P_t \dfrac{d\Psi}{du_t} = 0$ [3.4]

De [3.2]: $\varphi_t = E_t \left[\dfrac{\Theta_{0,t+1}}{\Theta_{0,t}} \varphi_{t+1} (1-\delta) \right] - E_t \left[\dfrac{\Theta_{0,t+1}}{\Theta_{0,t}} \left(R_{t+1}^K u_{t+1} - P_{t+1} \Psi(u_{t+1}) \right) \right] \Rightarrow \dots$

$$\dots \Rightarrow \varphi_t = E_t \left[\Theta_{t,t+1} \left(\varphi_{t+1} (1-\delta) - \left(R_{t+1}^k u_{t+1} - P_{t+1} \Psi(u_{t+1}) \right) \right) \right] \qquad [3.5]$$

De [3.1]:

$$P_t = -\varphi_t \frac{\partial}{\partial I_t} \left(I_t \left(1 - S\left(\varepsilon_t^I \frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right) \right) - E_t \left[\frac{\Theta_{0,t+1}}{\Theta_{0,t}} \varphi_{t+1} \frac{\partial}{\partial I_t} \left(I_{t+1} \left(1 - S\left(\varepsilon_{t+1}^I \frac{I_{t+1}}{I_t} \right) \right) \right) \right]$$

Desenvolvendo um pouco mais a expressão...

$$\frac{\partial}{\partial I_t}\left(I_t\left(1-S\left(\varepsilon_t^I\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right)\right)=\left(1-S\left(\varepsilon_t^I\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right)+I_t\frac{\partial}{\partial I_t}\left(1-S\left(\varepsilon_t^I\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right)=\ldots$$

$$\ldots=\left(1-S\left(\varepsilon_t^I\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right)-I_t\frac{\partial S}{\partial(\arg S)}\frac{\varepsilon_t^I}{I_{t-1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial I_t}\left(I_{t+1}\left(1-S\left(\varepsilon_{t+1}^I\frac{I_{t+1}}{I_t}\right)\right)\right)=I_{t+1}\frac{\partial}{\partial I_t}\left(1-S\left(\varepsilon_{t+1}^I\frac{I_{t+1}}{I_t}\right)\right)=\ldots$$

$$\ldots=-I_{t+1}\frac{\partial S}{\partial(\arg S)}\frac{\partial}{\partial I_t}\left(\varepsilon_{t+1}^I\frac{I_{t+1}}{I_t}\right)=I_{t+1}\frac{\partial S}{\partial(\arg S)}\frac{\varepsilon_{t+1}^I I_{t+1}}{(I_t)^2}$$

onde $\arg S$ denota o argumento da função *S*. Logo:

$$P_t=-\varphi_t\left(1-S\left(\varepsilon_t^I\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right)+\varphi_t I_t\frac{\partial S}{\partial(\arg S)}\frac{\varepsilon_t^I}{I_{t-1}}-E_t\left[\Theta_{t,t+1}\varphi_{t+1}\frac{\partial S}{\partial(\arg S)}\frac{\varepsilon_{t+1}^I(I_{t+1})^2}{(I_t)^2}\right]$$

[3.6]

Obs: $\Theta_{t,t+1}$ é o fator de desconto necessário para calcular o valor em *t* de um recebimento em $t+1$. É possível demonstrar que $\Theta_{t,t+1}=\beta\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}$.

ANEXO 4

O problema de minimização de custos da firma *j* do subsetor *s* é:

$$\min_{\{K_{j,s,t},L_{j,s,t},Q_{j,s,t}\}} R_t^k K_{j,s,t} + W_t L_{j,s,t} + P_{T,t}^{\times} Q_{j,s,t}$$

$$sa \quad Y_{j,s,t} = A_t^s \left(K_{j,s,t}\right)^{\eta_K^s} \left(L_{j,s,t}\right)^{\eta_L^s} \left(Q_{j,s,t}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}$$

onde $P_{T,t}^{\times}$ é o preço da cesta de insumos importados expresso na moeda doméstica. O lagrangeano associado a esse problema é:

$$L = R_t^k K_{j,s,t} + W_t L_{j,s,t} + P_{T,t}^{\times} Q_{j,s,t} + \dots$$

$$\dots + \vartheta_t \left[Y_{j,s,t}(\dots) - A_t^s \left(K_{j,s,t}\right)^{\eta_K^s} \left(L_{j,s,t}\right)^{\eta_L^s} \left(Q_{j,s,t}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)} \right]$$

de maneira que as CPOs são:

$$\frac{\partial L}{\partial K_{j,s,t}} = R_t^k - \vartheta_t A_t^s \eta_K^s \left(K_{j,s,t}\right)^{\eta_K^s-1} \left(L_{j,s,t}\right)^{\eta_L^s} \left(Q_{j,s,t}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)} = 0 \qquad [4.1]$$

$$\frac{\partial L}{\partial L_{j,s,t}} = W_t - \vartheta_t A_t^s \eta_L^s \left(K_{j,s,t}\right)^{\eta_K^s} \left(L_{j,s,t}\right)^{\eta_L^s-1} \left(Q_{j,s,t}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)} = 0 \qquad [4.2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial I_{j,s,t}} = P_{T,t}^{\times} - \vartheta_t A_t^s \left(1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)\right) \left(K_{j,s,t}\right)^{\eta_K^s} \left(L_{j,s,t}\right)^{\eta_L^s} \left(Q_{j,s,t}\right)^{-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)} = 0 \qquad [4.3]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta_t} = 0 \Rightarrow Y_{j,s,t}(\dots) = A_t^s \left(K_{j,s,t}\right)^{\eta_K^s} \left(L_{j,s,t}\right)^{\eta_L^s} \left(Q_{j,s,t}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)} \qquad [4.4]$$

De [4.1]: $\dfrac{R_t^k}{\eta_K^s \left(K_{j,s,t}\right)^{\eta_K^s-1} \left(L_{j,s,t}\right)^{\eta_L^s} \left(Q_{j,s,t}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}} = \vartheta_t A_t^s$.

De [4.2]: $\dfrac{W_t}{\eta_L^s \left(K_{j,s,t}\right)^{\eta_K^s} \left(L_{j,s,t}\right)^{\eta_L^s-1} \left(Q_{j,s,t}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}} = \vartheta_t A_t^s$.

Os dois resultados levam a $\dfrac{R_t^k}{W_t} = \dfrac{\eta_K^s}{\eta_L^s} \dfrac{L_{j,s,t}}{K_{j,s,t}}$, ou seja:

$$\frac{W_t L_{j,s,t}}{R_t^k K_{j,s,t}} = \frac{\eta_L^s}{\eta_K^s} \qquad [4.5]$$

O resultado [4.5] indica que a razão entre as remunerações do trabalho e do capital na firma *j* do setor *s* é constante e depende dos parâmetros η_K^s e η_L^s da função de produção. Isto quer dizer que a razão é a mesma para todas as firmas do setor.

De [4.3]: $\dfrac{P_{T,t}^{\times}}{\left(1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)\right)\left(K_{j,s,t}\right)^{\eta_K^s}\left(L_{j,s,t}\right)^{\eta_L^s}\left(Q_{j,s,t}\right)^{-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}=\vartheta_t A_t^s$

Logo $\dfrac{R_t^k}{P_{T,t}^{\times}}=\dfrac{\eta_K^s}{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}\dfrac{Q_{j,s,t}}{K_{j,s,t}}$, ou seja:

$$\frac{R_t^k K_{j,s,t}}{P_{T,t}^{\times} Q_{j,s,t}}=\frac{\eta_K^s}{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)} \qquad [4.6]$$

Prosseguindo...

$$L_{j,s,t}=\frac{\eta_L^s}{\eta_K^s}\frac{R_t^k}{W_t}K_{j,s,t} \qquad\qquad Q_{j,s,t}=\frac{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}{\eta_K^s}\frac{R_t^k}{P_{T,t}^{\times}}K_{j,s,t}$$

Substituindo em [4.4]...

$$Y_{j,s,t}\left(\ldots\right)=A_t^s K_{j,s,t}\left(\frac{\eta_L^s}{\eta_K^s}\frac{R_t^k}{W_t}\right)^{\eta_L^s}\left(\frac{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}{\eta_K^s}\frac{R_t^k}{P_{T,t}^{\times}}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}\Rightarrow\ldots$$

$$\ldots\Rightarrow K_{j,s,t}=\frac{Y_{j,s,t}\left(\ldots\right)}{A_t^s}\frac{\left(W_t\right)^{\eta_L^s}\left(P_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{\left(R_t^k\right)^{1-\eta_K^s}}\frac{1}{\left(\dfrac{\eta_L^s}{\eta_K^s}\right)^{\eta_L^s}\left(\dfrac{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}{\eta_K^s}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}} \qquad [4.7]$$

E portanto...

$$L_{j,s,t}=\frac{Y_{j,s,t}\left(\ldots\right)}{A_t^s}\frac{\left(R_t^k\right)^{\eta_K^s}\left(P_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{\left(W_t\right)^{1-\eta_L^s}}\frac{1}{\left(\dfrac{\eta_L^s}{\eta_K^s}\right)^{\eta_L^s-1}\left(\dfrac{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}{\eta_K^s}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}} \qquad [4.8]$$

$$Q_{j,s,t}=\frac{Y_{j,s,t}\left(\ldots\right)}{A_t^s}\frac{\left(R_t^k\right)^{\eta_K^s}\left(W_t\right)^{\eta_L^s}}{\left(P_{T,t}^{\times}\right)^{\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}\frac{1}{\left(\dfrac{\eta_L^s}{\eta_K^s}\right)^{\eta_L^s}\left(\dfrac{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}{\eta_K^s}\right)^{-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}} \qquad [4.9]$$

Por sua vez, o custo mínimo de produção de $Y_{j,s,t}(\ldots)$ unidades do item em questão é dado por:

$$R_t^k K_{j,s,t} + W_t L_{j,s,t} + P_{T,t}^{\times} Q_{j,s,t} = \frac{Y_{j,s,t}(\ldots)}{A_t^s}\left(R_t^k\right)^{\eta_K^s}\left(W_t\right)^{\eta_L^s}\left(P_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}\Gamma\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)$$

[4.10]

onde...

$$\Gamma\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)=\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\left(\dfrac{\eta_L^s}{\eta_K^s}\right)^{\eta_L^s}\left(\dfrac{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}{\eta_K^s}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}+\ldots\\ \ldots+\dfrac{1}{\left(\dfrac{\eta_L^s}{\eta_K^s}\right)^{\eta_L^s-1}\left(\dfrac{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}{\eta_K^s}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}+\ldots\\ \ldots+\dfrac{1}{\left(\dfrac{\eta_L^s}{\eta_K^s}\right)^{\eta_L^s}\left(\dfrac{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}{\eta_K^s}\right)^{-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}\end{array}\right]$$

Definindo:

$$\Gamma^K\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)=\frac{1}{\left(\dfrac{\eta_L^s}{\eta_K^s}\right)^{\eta_L^s}\left(\dfrac{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}{\eta_K^s}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}$$

$$\Gamma^L\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)=\frac{1}{\left(\dfrac{\eta_L^s}{\eta_K^s}\right)^{\eta_L^s-1}\left(\dfrac{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}{\eta_K^s}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}$$

$$\Gamma^Q\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)=\frac{1}{\left(\dfrac{\eta_L^s}{\eta_K^s}\right)^{\eta_L^s}\left(\dfrac{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}{\eta_K^s}\right)^{-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}$$

segue que $\Gamma\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)=\Gamma^K\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)+\Gamma^L\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)+\Gamma^Q\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)$.

O custo marginal é simplesmente a derivada parcial dessa expressão como função de Y:

$$CMg_t = \frac{\left(R_t^k\right)^{\eta_K^s}\left(W_t\right)^{\eta_L^s}\left(P_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{A_t^s}\Gamma\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right) \qquad [4.11]$$

Repare-se que o custo marginal é igual para todas as firmas pertencentes ao setor *s* porque ele só depende de variáveis que todas consideram da mesma maneira. Isto terá implicações a seguir.

O formato Cobb-Douglas adotado para a função de produção permite que se calcule facilmente a razão entre os pagamentos efetuados a um insumo produtivo específico (trabalho, capital ou importações) e os pagamentos totais destinados aos fatores de produção. No caso do fator trabalho:

$$\frac{W_t L_{j,s,t}}{R_t^k K_{j,s,t}+W_t L_{j,s,t}+P_{T,t}^{\times}Q_{j,s,t}} = \frac{W_t\dfrac{Y_{j,s,t}(\ldots)}{A_t^s}\dfrac{\left(R_t^k\right)^{\eta_K^s}\left(P_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{\left(W_t\right)^{1-\eta_L^s}}\dfrac{1}{\left(\dfrac{\eta_L^s}{\eta_K^s}\right)^{\eta_L^s-1}\left(\dfrac{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}{\eta_K^s}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}}{\dfrac{Y_{j,s,t}(\ldots)}{A_t^s}\left(R_t^k\right)^{\eta_K^s}\left(W_t\right)^{\eta_L^s}\left(P_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}\Gamma\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)}$$

Logo:

$$\frac{W_t L_{j,s,t}}{R_t^k K_{j,s,t}+W_t L_{j,s,t}+P_{T,t}^{\times}Q_{j,s,t}} = \frac{\dfrac{1}{\left(\dfrac{\eta_L^s}{\eta_K^s}\right)^{\eta_L^s-1}\left(\dfrac{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}{\eta_K^s}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}}{\Gamma\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)} = \frac{\Gamma^L\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)}{\Gamma\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)}$$

Analogamente:

$$\frac{R_t^k K_{j,s,t}}{R_t^k K_{j,s,t}+W_t L_{j,s,t}+P_{T,t}^{\times}Q_{j,s,t}} = \frac{\Gamma^K\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)}{\Gamma\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)}$$

$$\frac{P_{T,t}^{\times}Q_{j,s,t}}{R_t^k K_{j,s,t}+W_t L_{j,s,t}+P_{T,t}^{\times}Q_{j,s,t}} = \frac{\Gamma^Q\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)}{\Gamma\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)}$$

ANEXO 5

Se não houvesse rigidez de preços, o preço ótimo cobrado pela *j*-ésima firma representativa do subsetor *s* no instante *t* resultaria do seguinte problema de maximização de lucros:

$$\max_{\{P_{j,s,t}\}} P_{j,s,t} Y_{s,t}^{tot} \left(\frac{P_{j,s,t}}{P_{s,t}} \right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} - CT\left(Y_{j,s,t}\right)$$

A CPO é:

$$\frac{\partial(\ldots)}{\partial P_{j,s,t}} = 0 \Rightarrow Y_{s,t}^{tot} \left(\frac{P_{j,s,t}}{P_{s,t}} \right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} - \frac{1+\mu_s}{\mu_s} P_{j,s,t} Y_{s,t}^{tot} \left(\frac{P_{j,s,t}}{P_{s,t}} \right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}-1} \frac{1}{P_{s,t}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1+\mu_s}{\mu_s} CMg\left(Y_{j,s,t}\right) Y_{s,t}^{tot} \left(\frac{P_{j,s,t}}{P_{s,t}} \right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}-1} \frac{1}{P_{s,t}} = 0 \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow -\frac{1}{\mu_s} Y_{s,t}^{tot} \left(\frac{P_{j,s,t}}{P_{s,t}} \right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} + \frac{1+\mu_s}{\mu_s} CMg\left(Y_{j,s,t}\right) Y_{s,t}^{tot} \left(\frac{P_{j,s,t}}{P_{s,t}} \right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}-1} \frac{1}{P_{s,t}} = 0 \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow P_{j,s,t} = \left(1+\mu_s\right) CMg\left(Y_{j,s,t}\right) \qquad [54]$$

A expressão [47] para o custo marginal das firmas "produtoras" mostra que: *i)* ele não depende da quantidade produzida pela firma *j*; e *ii)* ele não depende do próprio *j*, pois somente variáveis "agregadas" constam do lado direito de [47]. Dessa maneira, pode-se escrever [54] sem o subscrito *j*:

$$\frac{P_{j,s,t}}{P_t} = \frac{P_{s,t}}{P_t} = p_{s,t} = \left(1+\mu_s\right) \frac{\left(r_t^k\right)^{\eta_K^s} \left(w_t\right)^{\eta_L^s} \left(p_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{A_t^s} \Gamma\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right) \qquad [55]$$

e concluir que o preço relativo ótimo cobrado pelas firmas pertencentes ao setor *s* é o mesmo e vem da imposição de um *mark-up* sobre o custo marginal real.

Com rigidez de preços, a cada instante *t* a firma representativa desses setores pode escolher novos preços com probabilidade $1-\alpha_p^s$; se ela não for "sorteada" para reajustar preços, então ela simplesmente "corrige" o preço do instante $t-1$. A correção é tal que o preço praticado em *t* se relaciona com o preço cobrado em $t-1$ de acordo com a fórmula $P_{j,s,t} = \left(\pi_{t-1}^{\circ}\right)^{\gamma_s} \left(\overline{\pi}_{t-1}^{\circ}\right)^{1-\gamma_s} P_{j,s,t-1}$, na qual $\pi_{t-1}^{\circ} = \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}$, $\overline{\pi}_{t-1}^{\circ}$ é a última meta de inflação fixada pelo BC e conhecida pelos agentes, e γ_s e $(1-\gamma_s)$ medem a importância relativa da indexação à inflação passada e da meta de inflação, respectivamente.

Observação:

$P_{j,s,1} = \left(\pi_0^\circ\right)^{\gamma_s} \left(\overline{\pi}_0^\circ\right)^{1-\gamma_s} P_{j,s,0}$, , $P_{j,s,3} = \left(\pi_2^\circ\right)^{\gamma_s} \left(\overline{\pi}_2^\circ\right)^{1-\gamma_s} P_{j,s,2}$, etc. Logo,

$P_{j,s,t} = \left(\pi_0^\circ \times \pi_1^\circ \times \pi_2^\circ \times \ldots \times \pi_{t-1}^\circ\right)^{\gamma_s} \left(\overline{\pi}_0^\circ \times \overline{\pi}_1^\circ \times \overline{\pi}_2^\circ \times \ldots \times \overline{\pi}_{t-1}^\circ\right)^{1-\gamma_s} P_{j,s,0}$. Somente para escrever o resultado de forma mais compacta, defina-se

$\Upsilon_{0,t}^s = \left(\pi_0^\circ \times \pi_1^\circ \times \pi_2^\circ \times \ldots \times \pi_{t-1}^\circ\right)^{\gamma_s} \left(\overline{\pi}_0^\circ \times \overline{\pi}_1^\circ \times \overline{\pi}_2^\circ \times \ldots \times \overline{\pi}_{t-1}^\circ\right)^{1-\gamma_s}$; logo $P_{j,s,t} = \Upsilon_{0,t}^s P_{j,s,0}$ e

$\dfrac{\partial P_{j,s,t}}{\partial P_{j,s,0}} = \Upsilon_{0,t}^s$. Tais definições serão úteis no que se segue.

O problema de maximização de lucros é:

$$\max_{\{P_{j,s,0}\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\alpha_p^s\right)^t \Theta_{0,t} \left\{ P_{j,s,0} \Upsilon_{0,t}^s Y_{s,t}^{tot} \left(\frac{P_{j,s,0}\Upsilon_{0,t}^s}{P_{s,t}}\right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} - CT\left(Y_{j,s,t}\right) \right\}$$

onde $\Theta_{0,t} = \beta^t \dfrac{\lambda_t}{\lambda_0}$. A CPO é:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\alpha_p^s\right)^t \Theta_{0,t} \left\{ \begin{array}{l} \Upsilon_{0,t}^s Y_{s,t}^{tot} \left(\dfrac{P_{j,s,0}\Upsilon_{0,t}^s}{P_{s,t}}\right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} - \ldots \\ \ldots - \dfrac{1+\mu_s}{\mu_s} P_{j,s,0} \Upsilon_{0,t}^s Y_{s,t}^{tot} \left(\dfrac{P_{j,s,0}\Upsilon_{0,t}^s}{P_{s,t}}\right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}-1} \dfrac{\Upsilon_{0,t}^s}{P_{s,t}} + \ldots \\ \ldots + \dfrac{1+\mu_s}{\mu_s} CMg\left(Y_{j,s,t}\right) Y_{s,t}^{tot} \left(\dfrac{P_{j,s,0}\Upsilon_{0,t}^s}{P_{s,t}}\right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}-1} \dfrac{\Upsilon_{0,t}^s}{P_{s,t}} \end{array} \right\} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\alpha_p^s\right)^t \Theta_{0,t} \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{1}{\mu_s} \Upsilon_{0,t}^s Y_{s,t}^{tot} \left(\dfrac{P_{j,s,0} \Upsilon_{0,t}^s}{P_{s,t}} \right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} + \ldots \\ \ldots + \dfrac{1+\mu_s}{\mu_s} Y_{s,t}^{tot} \left(\dfrac{P_{j,s,0} \Upsilon_{0,t}^s}{P_{s,t}} \right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} \dfrac{1}{P_{j,s,0}} CMg\left(Y_{j,s,t}\right) \end{array} \right\} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_{j,s,0} = \left(1+\mu_s\right) \frac{E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\alpha_p^s\right)^t \Theta_{0,t} Y_{s,t}^{tot} \left(\dfrac{\Upsilon_{0,t}^s}{P_{s,t}} \right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} CMg\left(Y_{j,s,t}\right)}{E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\alpha_p^s\right)^t \Theta_{0,t} \Upsilon_{0,t}^s Y_{s,t}^{tot} \left(\dfrac{\Upsilon_{0,t}^s}{P_{s,t}} \right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}}} \qquad [56]$$

ANEXO 6

A restrição usos = recursos parte da soma das restrições orçamentárias dos indivíduos pertencentes às duas populações (*RP* e *RC*). A restrição orçamentária dos indivíduos do tipo *RP* é dada por:

$$\frac{M_{i,t}}{P_t}+P_{B,t}\frac{B_{i,t}}{P_t}+e_tP_{B,t}^*\frac{B_{i,t}^*}{P_t}=\frac{M_{i,t-1}}{P_t}+\frac{B_{i,t-1}}{P_t}+e_t\frac{B_{i,t-1}^*}{P_t}+\left(w_{i,t}L_{i,t}+A_{i,t}\right)+Div_{i,t}-Tax_{i,t}-C_{i,t}$$

Levando-se em conta que as escolhas independem de *i* e "somando-se" tudo:

$$\frac{M_t}{P_t}+P_{B,t}\frac{B_t}{P_t}+e_tP_{B,t}^*\frac{B_t^*}{P_t}=\frac{M_{t-1}}{P_t}+\frac{B_{t-1}}{P_t}+e_t\frac{B_{t-1}^*}{P_t}+w_tL_t+Div_t-Tax_t-C_t$$

Observação:

$$\int_0^1 w_{i,t}L_{i,t}di=\frac{1}{P_t}\int_0^1 W_{i,t}L_{i,t}di=\frac{1}{P_t}L_tW_t^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}\int_0^1 W_{i,t}W_{i,t}^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}di=\frac{1}{P_t}L_tW_t^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}\int_0^1 W_{i,t}^{-\frac{1}{\mu_w}}di=\ldots$$

$$\ldots=\frac{1}{P_t}L_tW_t^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}W_t^{-\frac{1}{\mu_w}}=w_tL_t$$

pois $L_{i,t}=L_t\left(\frac{W_{i,t}}{W_t}\right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}$ e $W_t^{-\frac{1}{\mu_w}}=\int_0^1 W_{i,t}^{-\frac{1}{\mu_w}}di$.

A restrição orçamentária dos indivíduos do tipo *RC* é dada por:

$$P_tC_{i,t}^c=W_t^{min}$$

Levando-se em conta que as escolhas independem de *i* e "somando-se" tudo:

$$\zeta C_t^c=w_t^{min}$$

A expressão para o consumo agregado (soma do consumo das duas populações) determina que:

$$C_t^{tot}=\int_0^1 C_{i,t}di+\int_0^{\zeta} C_{i,t}^c di$$

Como os indivíduos pertencentes às duas populações escolhem o mesmo fluxo de consumo:

$$P_tC_t^{tot}=P_tC_t+\zeta P_tC_t^c\Rightarrow C_t^{tot}=C_t+\zeta C_t^c$$

Logo:

$$\frac{M_t}{P_t}+P_{B,t}\frac{B_t}{P_t}+e_tP_{B,t}^*\frac{B_t^*}{P_t}=\frac{M_{t-1}}{P_t}+\frac{B_{t-1}}{P_t}+e_t\frac{B_{t-1}^*}{P_t}+w_tL_t+Div_t-Tax_t-\left(C_t^{tot}-\zeta C_t^c\right)$$

A restrição orçamentária governamental é dada por:

$$\frac{M_t}{P_t}+P_{B,t}\frac{B_t}{P_t}+Tax_t=\frac{M_{t-1}}{P_t}+\frac{B_{t-1}}{P_t}+G_t+\zeta C_t^c \Rightarrow \frac{M_t}{P_t}+P_{B,t}\frac{B_t}{P_t}-\frac{M_{t-1}}{P_t}-\frac{B_{t-1}}{P_t}+Tax_t=G_t+\zeta C_t^c$$

Substituição $\Rightarrow$ $G_t+e_tP_{B,t}^*\frac{B_t^*}{P_t}=e_t\frac{B_{t-1}^*}{P_t}+w_tL_t+Div_t-C_t^{tot}$ [59]

• Apuração do lucro da firma acumuladora de capital (medido em termos reais):

$$\Pi_t^r=r_t^ku_tK_{t-1}^{tot}-\Psi\left(u_t\right)K_{t-1}^{tot}-I_t$$

• Apuração do lucro da *j*-ésima firma produtora de bens intermediários:

receita: $P_{j,s,t}Y_{j,s,t}$; despesa: $R_t^kK_{j,s,t}+W_tL_{j,s,t}+P_{T,t}^{\times}Q_{j,s,t}$; lucro: $P_{j,s,t}Y_{j,s,t}-R_t^kK_{j,s,t}-W_tL_{j,s,t}-P_{T,t}^{\times}Q_{j,s,t}$.

O total de lucros gerado no setor *s* é igual aos dividendos distribuídos aos indivíduos (medição feita em termos nominais):

$$P_tDiv_{s,t}=\int_0^1P_{j,s,t}Y_{j,s,t}dj-R_t^k\int_0^1K_{j,s,t}dj-W_t\int_0^1L_{j,s,t}dj-P_{T,t}^{\times}\int_0^1Q_{j,s,t}dj$$

$$\Downarrow$$

$$P_tDiv_{s,t}=P_{s,t}Y_{s,t}^{tot}-R_t^kK_{s,t}-W_tL_{s,t}-P_{T,t}^{\times}Q_{s,t}$$

$$\Downarrow$$

$$Div_{s,t}=\frac{P_{s,t}}{P_t}Y_{s,t}^{tot}-r_t^kK_{s,t}-w_tL_{s,t}-\frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t}Q_{s,t}$$

Observação:

$$\int_0^1P_{j,s,t}Y_{j,s,t}dj=\int_0^1P_{j,s,t}Y_{s,t}^{tot}\left(\frac{P_{j,s,t}}{P_{s,t}}\right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}}dj=Y_{s,t}^{tot}\left(P_{s,t}\right)^{\frac{1+\mu_s}{\mu_s}}\int_0^1\left(P_{j,s,t}\right)^{-\frac{1}{\mu_s}}dj=Y_{s,t}^{tot}\left(P_{s,t}\right)^{\frac{1+\mu_s}{\mu_s}}\left(P_{s,t}\right)^{-\frac{1}{\mu_s}}=P_{s,t}Y_{s,t}^{tot}$$

porque $P_{s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}}=\int_0^1P_{j,s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}}dj$.

Aplicando o resultado obtido para cada setor...

$$Div_{T,t}=\frac{P_{T,t}}{P_t}\left(Y_{T,t}+Y_{T,t}^*\right)-r_t^kK_{T,t}-w_tL_{T,t}-\frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t}Q_{T,t}$$

$$Div_{NT,t} = \frac{P_{NT,t}}{P_t} Y_{NT,t} - r_t^k K_{NT,t} - w_t L_{NT,t} - \frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t} Q_{NT,t}$$

$$Div_{A,t} = \frac{P_{A,t}}{P_t} Y_{A,t} - r_t^k K_{A,t} - w_t L_{A,t} - \frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t} Q_{A,t}$$

Juntando tudo...

$$Div_t = Div_{T,t} + Div_{NT,t} + Div_{A,t} + \Pi_t^r$$

$$\begin{aligned}
Div_t = {} & \frac{P_{T,t}}{P_t}\left(Y_{T,t} + Y_{T,t}^*\right) - r_t^k K_{T,t} - w_t L_{T,t} - \frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t} Q_{T,t} + \dots \\
& \dots + \frac{P_{NT,t}}{P_t} Y_{NT,t} - r_t^k K_{NT,t} - w_t L_{NT,t} - \frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t} Q_{NT,t} + \dots \\
& \dots + \frac{P_{A,t}}{P_t} Y_{A,t} - r_t^k K_{A,t} - w_t L_{A,t} - \frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t} Q_{A,t} + \dots \\
& \dots + r_t^k u_t K_{t-1}^{tot} - \Psi\left(u_t\right) K_{t-1}^{tot} - I_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Div_t = {} & \frac{P_{T,t}}{P_t}\left(Y_{T,t} + Y_{T,t}^*\right) + \frac{P_{NT,t}}{P_t} Y_{NT,t} + \frac{P_{A,t}}{P_t} Y_{A,t} - \dots \\
& \dots - r_t^k K_{T,t} - r_t^k K_{NT,t} - r_t^k K_{A,t} - w_t L_{T,t} - w_t L_{NT,t} - w_t L_{A,t} - \dots \\
& \dots - \frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t} Q_{T,t} - \frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t} Q_{NT,t} - \frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t} Q_{A,t} + \dots \\
& \dots + r_t^k u_t K_{t-1}^{tot} - \Psi\left(u_t\right) K_{t-1}^{tot} - I_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Div_t = {} & \frac{P_{T,t}}{P_t}\left(Y_{T,t} + Y_{T,t}^*\right) + \frac{P_{NT,t}}{P_t} Y_{NT,t} + \frac{P_{A,t}}{P_t} Y_{A,t} - \dots \\
& \dots - r_t^k \left(K_{T,t} + K_{NT,t} + K_{A,t}\right) - w_t \left(L_{T,t} + L_{NT,t} + L_{A,t}\right) - \dots \\
& \dots - \frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t}\left(Q_{T,t} + Q_{NT,t} + Q_{A,t}\right) + r_t^k u_t K_{t-1}^{tot} - \Psi\left(u_t\right) K_{t-1}^{tot} - I_t
\end{aligned}$$

$$Div_t = \frac{P_{T,t}}{P_t}\left(Y_{T,t} + Y^*_{T,t}\right) + \frac{P_{NT,t}}{P_t} Y_{NT,t} + \frac{P_{A,t}}{P_t} Y_{A,t} - \dots$$

$$\dots - r^k_t K_t - w_t L_t - \frac{P^{\times}_{T,t}}{P_t} Q_t + r^k_t u_t K^{tot}_{t-1} - \Psi\left(u_t\right) K^{tot}_{t-1} - I_t$$

Mas $u_t K^{tot}_{t-1} = K_t$, logo:

$$Div_t = \frac{P_{T,t}}{P_t}\left(Y_{T,t} + Y^*_{T,t}\right) + \frac{P_{NT,t}}{P_t} Y_{NT,t} + \frac{P_{A,t}}{P_t} Y_{A,t} - w_t L_t - \frac{P^{\times}_{T,t}}{P_t} Q_t - \Psi\left(u_t\right) K^{tot}_{t-1} - I_t$$

Substituindo em [59] ...

$$G_t + e_t P^*_{B,t} \frac{B^*_t}{P_t} = e_t \frac{B^*_{t-1}}{P_t} + \frac{P_{T,t}}{P_t}\left(Y_{T,t} + Y^*_{T,t}\right) + \frac{P_{NT,t}}{P_t} Y_{NT,t} + \frac{P_{A,t}}{P_t} Y_{A,t} - \frac{P^{\times}_{T,t}}{P_t} Q_t - \Psi\left(u_t\right) K^{tot}_{t-1} - I_t - C^{tot}_t$$

[60]

Calculando $\frac{P_{T,t}}{P_t} Y_{T,t} + \frac{P_{NT,t}}{P_t} Y_{NT,t}$:

$$\frac{P_{T,t}}{P_t} Y_{T,t} + \frac{P_{NT,t}}{P_t} Y_{NT,t} = \frac{P_{NT,t}}{P_t}(1-\gamma)\phi Y_t \left(\frac{P_{L,t}}{P_t}\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} \left(\frac{P_{NT,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} + \frac{P_{T,t}}{P_t}\gamma\phi Y_t \left(\frac{P_{L,t}}{P_t}\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} \left(\frac{P_{T,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} = \dots$$

$$\dots = \phi Y_t \left(\frac{P_{L,t}}{P_t}\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} \left[\frac{P_{NT,t}}{P_t}(1-\gamma)\left(\frac{P_{NT,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} + \frac{P_{T,t}}{P_t}\gamma\left(\frac{P_{T,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}}\right] = \dots$$

Mas:

$$\frac{P_{NT,t}}{P_t}(1-\gamma)\left(\frac{P_{NT,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} + \frac{P_{T,t}}{P_t}\gamma\left(\frac{P_{T,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} = \frac{1}{P_t}\left(\frac{1}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} \left((1-\gamma)\left(P_{NT,t}\right)^{1-\frac{1+\eta}{\eta}} + \gamma\left(P_{T,t}\right)^{1-\frac{1+\eta}{\eta}}\right) = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{P_t}\left(\frac{1}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} \left((1-\gamma)\left(P_{NT,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}} + \gamma\left(P_{T,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}}\right) = \frac{1}{P_t}\left(P_{L,t}\right)^{\frac{1+\eta}{\eta}} \left(P_{L,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}} = \frac{P_{L,t}}{P_t}$$

pois $\left(P_{L,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}} = \gamma\left(P_{T,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}} + (1-\gamma)\left(P_{NT,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}}$. Logo:

$$\frac{P_{T,t}}{P_t} Y_{T,t} + \frac{P_{NT,t}}{P_t} Y_{NT,t} = \phi Y_t \left(\frac{P_{L,t}}{P_t}\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} \frac{P_{L,t}}{P_t} = \phi Y_t \left(\frac{P_{L,t}}{P_t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}$$

De [22]: $Y_{A,t} = (1-\phi) Y_t \left(\frac{P_{A,t}}{P_t} \right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}}$. Logo $\frac{P_{A,t}}{P_t} Y_{A,t} = (1-\phi) Y_t \left(\frac{P_{A,t}}{P_t} \right)^{-\frac{1}{\psi}}$ e portanto ...

$$\frac{P_{T,t}}{P_t} Y_{T,t} + \frac{P_{NT,t}}{P_t} Y_{NT,t} + \frac{P_{A,t}}{P_t} Y_{A,t} = \phi Y_t \left(\frac{P_{L,t}}{P_t} \right)^{-\frac{1}{\psi}} + (1-\phi) Y_t \left(\frac{P_{A,t}}{P_t} \right)^{-\frac{1}{\psi}} = \ldots$$

$$\ldots = Y_t \left(\frac{1}{P_t} \right)^{-\frac{1}{\psi}} \left(\phi \left(P_{L,t} \right)^{-\frac{1}{\psi}} + (1-\phi) \left(P_{A,t} \right)^{-\frac{1}{\psi}} \right) = Y_t \left(P_t \right)^{\frac{1}{\psi}} \left(P_t \right)^{-\frac{1}{\psi}} = Y_t$$

pois, de [23], $(P_t)^{-\frac{1}{\psi}} = \phi \left(P_{L,t} \right)^{-\frac{1}{\psi}} + (1-\phi) \left(P_{A,t} \right)^{-\frac{1}{\psi}}$. Substituindo em [60]:

$$G_t + e_t P_{B,t}^* \frac{B_t^*}{P_t} = e_t \frac{B_{t-1}^*}{P_t} + Y_t + \frac{P_{T,t}}{P_t} Y_{T,t}^* - \frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t} Q_t - \Psi(u_t) K_{t-1}^{tot} - I_t - C_t^{tot}$$

Reordenando:

$$Y_t = C_t^{tot} + I_t + G_t + \left(e_t P_{B,t}^* \frac{B_t^*}{P_t} - e_t \frac{B_{t-1}^*}{P_t} \right) + \left(\frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t} Q_t - \frac{P_{T,t}}{P_t} Y_{T,t}^* \right) + \Psi(u_t) K_{t-1}^{tot} \quad [61]$$

ou...

$$Y_t = C_t^{tot} + I_t + G_t + \Psi(u_t) K_{t-1}^{tot} + e_t \frac{P_t^*}{P_t} \left[\left(\frac{P_{B,t}^*}{P_t^*} B_t^* - \frac{B_{t-1}^*}{P_t^*} \right) + \left(\frac{P_{T,t}^*}{P_t^*} Q_t - \frac{P_{T,t}}{e_t P_t^*} Y_{T,t}^* \right) \right]$$

ANEXO 7

A caracterização do equilíbrio da economia na ausência de choques e com inflação zero (o *steady-state*) é descrita a seguir.

De [1]: $P_t\, C_{i,t}^{c} = W_t^{min} \Rightarrow \; C_{i,t}^{c} = w_t^{min} \Rightarrow \; \overline{C}_t^{c} = \overline{w}^{min}$

De [2]: $C_t^{tot} = C_t + \zeta C_t^{c} \Rightarrow \overline{C}^{tot} = \overline{C} + \zeta \overline{C}^{c}$

De [1.2]:

$$\frac{\partial L}{\partial B_{i,t}} = \beta^{t}\lambda_t P_{B,t} - \beta^{t+1}E_t\left[\lambda_{t+1}\right] = 0 \Rightarrow \overline{\lambda}\,\overline{P}_B - \beta\overline{\lambda} = 0 \Rightarrow \overline{P}_B = \beta \Rightarrow \frac{1}{\overline{R}} = \beta \Rightarrow \overline{R} = \frac{1}{\beta}$$

De [8]:

$$\frac{W_t}{P_t} = \left(1+\mu_w\right)\varepsilon_t^{L}\left(L_t\right)^{\sigma_L}\left(C_t - hC_{t-1}\right)^{\sigma_C} \Rightarrow \overline{w} = \left(1+\mu_w\right)\left(\overline{L}\right)^{\sigma_L}\left(\left(1-h\right)\overline{C}\right)^{\sigma_C}$$

De [14]: $Y_{A,t} = \left(1-\phi\right)Y_t\left(\dfrac{P_{A,t}}{P_t}\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}} \Rightarrow \overline{Y}_A = \left(1-\phi\right)\overline{Y}\left(\overline{p}_A\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}}$

De [17]: $\left(P_t\right)^{-\frac{1}{\psi}} = \phi\left(P_{L,t}\right)^{-\frac{1}{\psi}} + \left(1-\phi\right)\left(P_{A,t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}$

$$\Rightarrow \left(\overline{P}\right)^{-\frac{1}{\psi}} = \phi\left(\overline{P}_L\right)^{-\frac{1}{\psi}} + \left(1-\phi\right)\left(\overline{P}_A\right)^{-\frac{1}{\psi}} \Rightarrow 1 = \phi\left(\overline{p}_L\right)^{-\frac{1}{\psi}} + \left(1-\phi\right)\left(\overline{p}_A\right)^{-\frac{1}{\psi}}$$

De [15]: $Y_{T,t} = \gamma\phi Y_t\left(\dfrac{P_{L,t}}{P_t}\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}}\left(\dfrac{P_{T,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} \Rightarrow \overline{Y}_T = \gamma\phi\overline{Y}\left(\overline{p}_L\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}}\left(\dfrac{\overline{p}_T}{\overline{p}_L}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}}$

De [16]:

$$Y_{NT,t} = \left(1-\gamma\right)\phi Y_t\left(\frac{P_{L,t}}{P_t}\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}}\left(\frac{P_{NT,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} \Rightarrow \overline{Y}_{NT} = \left(1-\gamma\right)\phi\overline{Y}\left(\overline{p}_L\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}}\left(\frac{\overline{p}_{NT}}{\overline{p}_L}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}}$$

De [18]: $\left(P_{L,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}} = \gamma\left(P_{T,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}} + \left(1-\gamma\right)\left(P_{NT,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}}$

$$\Rightarrow 1 = \gamma\left(\frac{P_{T,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1}{\eta}} + \left(1-\gamma\right)\left(\frac{P_{NT,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1}{\eta}} \Rightarrow 1 = \gamma\left(\frac{\overline{p}_T}{\overline{p}_L}\right)^{-\frac{1}{\eta}} + \left(1-\gamma\right)\left(\frac{\overline{p}_{NT}}{\overline{p}_L}\right)^{-\frac{1}{\eta}}$$

De [20]: $K_t^{tot} = (1-\delta)K_{t-1}^{tot} + I_t\left(1 - S\left(\varepsilon_t^I \frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right)$

$$\Rightarrow \bar{K}^{tot} = (1-\delta)\bar{K}^{tot} + \bar{I} \Rightarrow \delta\bar{K}^{tot} = \bar{I} \Rightarrow \frac{\bar{I}}{\bar{K}^{tot}} = \delta$$

De [34]: $u_t K_{t-1}^{tot} = K_t \Rightarrow \bar{u}\bar{K}^{tot} = \bar{K} \Rightarrow \bar{K}^{tot} = \bar{K} \Rightarrow \frac{\bar{I}}{\bar{K}} = \delta$

De [21]: $R_t^k - P_t \frac{d\Psi}{du_t} = 0 \Rightarrow \bar{r}^k = \left.\frac{d\Psi}{du_t}\right|_{SS}$

De [23]:

$$P_t = -\varphi_t\left(1 - S\left(\varepsilon_t^I \frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right) + \varphi_t I_t \frac{\partial S}{\partial(\arg S)} \frac{\varepsilon_t^I}{I_{t-1}} - E_t\left[\Theta_{t,t+1}\varphi_{t+1} \frac{\partial S}{\partial(\arg S)} \frac{\varepsilon_{t+1}^I (I_{t+1})^2}{(I_t)^2}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$1 = -\varphi_t^r\left(1 - S\left(\varepsilon_t^I \frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right) + \varphi_t^r I_t \frac{\partial S}{\partial(\arg S)} \frac{\varepsilon_t^I}{I_{t-1}} - E_t\left[\Theta_{t,t+1} \frac{P_{t+1}}{P_t} \varphi_{t+1}^r \frac{\partial S}{\partial(\arg S)} \frac{\varepsilon_{t+1}^I (I_{t+1})^2}{(I_t)^2}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$1 = -\bar{\varphi}^r + \varphi_t^r \left.\frac{\partial S}{\partial(\arg S)}\right|_{SS} - \beta\bar{\varphi}^r \left.\frac{\partial S}{\partial(\arg S)}\right|_{SS}$$

$$\Downarrow \left.\frac{\partial S(\ldots)}{\partial I_t}\right|_{SS} = 0 \text{ por hipótese}$$

$$\bar{\varphi}^r = -1$$

[22]: $\varphi_t = E_t\left[\Theta_{t,t+1}\left(\varphi_{t+1}(1-\delta) - \left(R_{t+1}^k u_{t+1} - P_{t+1}\Psi(u_{t+1})\right)\right)\right]$

$$\Downarrow \text{ Obs.: } \Theta_{t,t+1} = \beta\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \Rightarrow \bar{\Theta} = \beta$$

$$\bar{\varphi} = \beta\left(\bar{\varphi}(1-\delta) - \left(\bar{R}^k\bar{u} - \bar{P}\Psi(\bar{u})\right)\right)$$

$$\Downarrow \overline{\varphi}^r = \frac{\overline{\varphi}}{\overline{P}}$$

$$\overline{\varphi}^r = \beta\left(\overline{\varphi}^r(1-\delta) - \overline{r}^k\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{\varphi}^r = \beta\overline{\varphi}^r - \beta\delta\overline{\varphi}^r - \beta\overline{r}^k$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{r}^k = \left(1-\delta-\frac{1}{\beta}\right)\overline{\varphi}^r \Rightarrow \overline{r}^k = \frac{1}{\beta} - (1-\delta)$$

pois viu-se que $\overline{\varphi}^r = -1$.

De [31]: $p_{s,t} = (1+\mu_s)\dfrac{\left(r_t^k\right)^{\eta_K^s}(w_t)^{\eta_L^s}\left(p_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{A_t^s}\Gamma\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)$

$$\Downarrow$$

$$\overline{p}_s = (1+\mu_s)\left(\overline{r}^k\right)^{\eta_K^s}(\overline{w})^{\eta_L^s}\left(\overline{p}_T^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}\Gamma\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right) \; (s = A, T, NT)$$

De [33]: $P_{T,t}^{\times} = e_t P_{T,t}^{*} \Rightarrow \dfrac{P_{T,t}^{\times}}{P_t} = e_t \dfrac{P_t^{*}}{P_t}\dfrac{P_{T,t}^{*}}{P_t^{*}} \Rightarrow p_{T,t}^{\times} = e_t^r p_{T,t}^{*} \Rightarrow \overline{p}_T^{\times} = \overline{e}^r \overline{p}_T^{*}$

De [12]:

$$Y_{T,t}^{*} = \left(\frac{P_{T,t}}{e_t P_t^{*}}\right)^{-\frac{1+\tau^*}{\tau^*}} Y_t^{*} \Rightarrow Y_{T,t}^{*} = \left(\frac{P_{T,t}}{P_t}\frac{P_t}{e_t P_t^{*}}\right)^{-\frac{1+\tau^*}{\tau^*}} Y_t^{*} \Rightarrow Y_{T,t}^{*} = \left(\frac{p_{T,t}}{e_t^r}\right)^{-\frac{1+\tau^*}{\tau^*}} Y_t^{*} \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \overline{Y}_T^{*} = \left(\frac{\overline{p}_T}{\overline{e}^r}\right)^{-\frac{1+\tau^*}{\tau^*}} \overline{Y}^{*}$$

De [24]:

$$K_{s,t} = \frac{Y_{s,t}^{tot}}{A_t^s}\frac{(W_t)^{\eta_L^s}\left(P_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{\left(R_t^k\right)^{1-\eta_K^s}}\frac{1}{\Gamma^K\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)} \Rightarrow$$

$$\overline{K}_s = \overline{Y}_s^{tot}\frac{(\overline{w})^{\eta_L^s}\left(\overline{p}_T^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{\left(\overline{r}^k\right)^{1-\eta_K^s}}\frac{1}{\Gamma^K\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)}$$

De [25]:

$$L_{s,t} = \frac{Y_{s,t}^{tot}}{A_t^s} \frac{\left(R_t^k\right)^{\eta_K^s} \left(P_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{\left(W_t\right)^{1-\eta_L^s}} \frac{1}{\Gamma^L\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right)} \Rightarrow$$

$$\overline{L}_s = \overline{Y}_s^{tot} \frac{\left(\overline{r}^k\right)^{\eta_K^s} \left(\overline{p}_T^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{\left(\overline{w}\right)^{1-\eta_L^s}} \frac{1}{\Gamma^L\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right)}$$

De [26]:

$$Q_{s,t} = \frac{Y_{s,t}^{tot}}{A_t^s} \frac{\left(R_t^k\right)^{\eta_K^s} \left(W_t\right)^{\eta_L^s}}{\left(P_{T,t}^{\times}\right)^{\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}} \frac{1}{\Gamma^Q\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right)} \Rightarrow \overline{Q}_s = \overline{Y}_s^{tot} \frac{\left(\overline{r}^k\right)^{\eta_K^s} \left(\overline{w}\right)^{\eta_L^s}}{\left(\overline{p}_T^{\times}\right)^{\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}} \frac{1}{\Gamma^Q\left(\eta_K^s, \eta_L^s\right)}$$

Se $s = A, NT$, então $Y_{s,t}^{tot} = Y_{s,t}$; se $s = T$, então $Y_{T,t}^{tot} = Y_{T,t} + Y_{T,t}^{*}$.

Das condições de *market-clearing*:

$Y_{T,t}^{tot} = Y_{T,t} + Y_{T,t}^{*} \Rightarrow \overline{Y}_T^{tot} = \overline{Y}_T + \overline{Y}_T^{*}$, $Y_{NT,t}^{tot} = Y_{NT,t} \Rightarrow \overline{Y}_{NT}^{tot} = \overline{Y}_{NT}$ e $Y_{A,t}^{tot} = Y_{A,t} \Rightarrow \overline{Y}_A^{tot} = \overline{Y}_A$.

$K_t = K_{T,t} + K_{NT,t} + K_{A,t}$, com $K_{T,t} = \int_0^1 K_{j,T,t}dj$, $K_{NT,t} = \int_0^1 K_{j,NT,t}dj$ e $K_{A,t} = \int_0^1 K_{j,A,t}dj$

$$\Downarrow$$

$$\overline{K} = \overline{K}_T + \overline{K}_{NT} + \overline{K}_A$$

$$L_t = L_{T,t} + L_{NT,t} + L_{A,t}, \text{ com } L_{T,t} = \int_0^1 L_{j,T,t}dj,\ L_{NT,t} = \int_0^1 L_{j,NT,t}dj \text{ e } L_{A,t} = \int_0^1 L_{j,A,t}dj$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{L} = \overline{L}_T + \overline{L}_{NT} + \overline{L}_A$$

$Q_t = Q_{T,t} + Q_{NT,t} + Q_{A,t}$, com $Q_{T,t} = \int_0^1 Q_{j,T,t}dj$, $Q_{NT,t} = \int_0^1 Q_{j,NT,t}dj$ e $Q_{A,t} = \int_0^1 Q_{j,A,t}dj$

$$\Downarrow$$

$$\bar{Q} = \bar{Q}_T + \bar{Q}_{NT} + \bar{Q}_A$$

De [35]:

$$Y_t = C_t^{tot} + I_t + G_t + \Psi(u_t) K_{t-1}^{tot} + e_t^r \left[\underbrace{\left(\frac{P_{B,t}^*}{P_t^*} B_t^* - \frac{B_{t-1}^*}{P_t^*} \right) + \left(\frac{P_{T,t}^*}{P_t^*} Q_t - \frac{P_{T,t}}{e_t P_t^*} Y_{T,t}^* \right)}_{\chi_t} \right]$$

Como $\bar{\chi} = 0 \ldots$

$$Y_t = C_t^{tot} + G_t + I_t + \Psi(u_t) K_t^s + e_t^r \chi_t \Rightarrow \bar{Y} = \bar{C}^{tot} + \bar{G} + \bar{I} \Rightarrow \bar{Y} = \bar{C}^{tot} + \bar{G} + \delta \bar{K}$$

De [5]:

$$\theta_t = \varepsilon_t^\theta \left(\frac{e_t B_t^*}{P_t Y_t} \right)^{-\theta} \Rightarrow \theta_t = \varepsilon_t^\theta \left(\frac{e_t P_t^*}{P_t} \frac{B_t^*}{P_t^* Y_t} \right)^{-\theta} \Rightarrow \bar{\theta} = 1 = \frac{\bar{e}^r \bar{b}^*}{\bar{Y}} \Rightarrow \bar{Y} = \bar{e}^r \bar{b}^*$$

onde se supõe que o prêmio de risco é zero (ou seja, $\bar{\theta} = 1$) em *steady-state*.

De [7]: $R_t E_t[\lambda_{t+1}] = \theta_t R_t^* E_t \left[\frac{e_{t+1}}{e_t} \lambda_{t+1} \right] \Rightarrow \bar{R} = \bar{R}^*$

Da definição de χ_t:

$$\chi_t = \left(e_t P_{B,t}^* \frac{B_t^*}{P_t} - e_t \frac{B_{t-1}^*}{P_t} \right) + \left(\frac{P_{T,t}^\times}{P_t} Q_t - \frac{P_{T,t}}{P_t} Y_{T,t}^* \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\chi_t = \left(\frac{e_t P_t^*}{P_t} P_{B,t}^* \frac{B_t^*}{P_t^*} - \frac{e_t P_t^*}{P_t} \frac{P_{t-1}^*}{P_t^*} \frac{B_{t-1}^*}{P_{t-1}^*} \right) + \left(\frac{e_t P_t^*}{P_t} \frac{P_{T,t}^*}{P_t^*} Q_t - \frac{P_{T,t}}{P_t} Y_{T,t}^* \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\chi_t = \left(\frac{e_t^r b_t^*}{\theta_t R_t^*} - \frac{e_t^r b_{t-1}^*}{\pi_{t-1}^{*,\circ}} \right) + \left(e_t^r p_{T,t}^* Q_t - p_{T,t} Y_{T,t}^* \right)$$

$$\Downarrow$$

$$0 = \left(\frac{\bar{e}^r \bar{b}^*}{\bar{R}^*} - \bar{e}^r \bar{b}^* \right) + \left(\bar{e}^r \bar{p}_T^* \bar{Q} - \bar{p}_T \bar{Y}_T^* \right) \Rightarrow 0 = \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{R}^*} - \bar{Y} \right) + \left(\bar{e}^r \bar{p}_T^* \bar{Q} - \bar{p}_T \bar{Y}_T^* \right)$$

$$\Downarrow$$

$$(1 - \beta) \bar{Y} = \bar{e}^r \bar{p}_T^* \bar{Q} - \bar{p}_T \bar{Y}_T^*$$

ANEXO 8

Em primeiro lugar, vão-se derivar alguns resultados intermediários necessários para efetuar as linearizações. Lembrando [10] e [11]:

$$Y_{j,s,t} = Y_{s,t}^{tot}\left(\frac{P_{j,s,t}}{P_{s,t}}\right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}}$$

$$P_{s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}} = \int_0^1 P_{j,s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}} dj$$

onde $s = T, NT, A$.

Calcule-se a demanda doméstica total pelo *j*-ésimo bem produzido no subsetor *s*. De [10]:

$$Y_{j,s,t} = Y_{s,t}^{tot}\left(\frac{P_{s,t}}{P_{j,s,t}}\right)^{\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} \Rightarrow \int_0^1 Y_{j,s,t}dj = \int_0^1 Y_{s,t}^{tot}\left(\frac{P_{s,t}}{P_{j,s,t}}\right)^{\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} dj \Rightarrow \int_0^1 Y_{j,s,t}dj = Y_{s,t}^{tot}\int_0^1 \tilde{p}_{j,s,t}^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} dj \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \int_0^1 Y_{j,s,t}dj = Y_{s,t}^{tot} \qquad [8.1]$$

onde se define $\tilde{p}_{j,s,t} = \dfrac{P_{j,s,t}}{P_{s,t}}$. O resultado [8.1] vale como uma aproximação de primeira ordem pois, também em uma aproximação de primeira ordem, a integral $\int_0^1 \tilde{p}_{j,s,t}^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} dj$ vale um. A prova é a seguinte:

$$\int_0^1 \tilde{p}_{j,s,t}^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}} dj = \int_0^1 \left(1 - \frac{1+\mu_s}{\mu_s}\tilde{p}_{j,s,t}^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}-1}\Big|_{SS}\left(\tilde{p}_{j,s,t}-1\right)\right)dj = 1 - \frac{1+\mu_s}{\mu_s}\boxed{\int_0^1 \hat{\tilde{p}}_{j,s,t}dj} = 1$$

Da relação entre $P_{s,t}$ e os preços dos *j* produtos fabricados no subsetor *s*:

$$P_{s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}} = \int_0^1 P_{j,s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}} dj \Rightarrow 1 = \int_0^1 \tilde{p}_{j,s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}} dj \Rightarrow 1 = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\mu_s}\tilde{p}_{j,s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}-1}\Big|_{SS}\left(\tilde{p}_{j,s,t}-1\right)\right)dj \Rightarrow \boxed{0 = \int_0^1 \hat{\tilde{p}}_{j,s,t}dj}$$

Repare que se utiliza o fato dos preços cobrados pelas firmas pertencentes ao subsetor *s* serem iguais em *steady-state* (e portanto iguais ao nível geral de preços setorial).

Pode-se concluir do exposto que:

$$\int_0^1 Y_{j,T,t}dj = Y_{T,t}^{tot} = Y_{T,t} + Y_{T,t}^{*} \qquad \int_0^1 Y_{j,NT,t}dj = Y_{NT,t}^{tot} = Y_{NT,t}$$

$$\int_0^1 Y_{j,A,t}dj = Y_{A,t}^{tot} = Y_{A,t}$$

que são todas válidas como aproximações de primeira ordem. As consequências desses resultados são as seguintes:

$$K_{s,t} = \int_0^1 K_{j,s,t}dj = \frac{\left(W_t\right)^{\eta_L^s}\left(P_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{\left(R_t^k\right)^{1-\eta_K^s}}\Gamma^K\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)\frac{\int_0^1 Y_{j,s,t}dj}{A_t^s}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{K}_{s,t} = \eta_L^s\hat{W}_t + \left(1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)\right)\hat{P}_{T,t}^{\times} - \left(1-\eta_K^s\right)\hat{R}_t^k + \hat{Y}_{s,t}^{tot} - \hat{A}_t^s \qquad [8.2]$$

$$L_{s,t} = \int_0^1 L_{j,s,t}dj = \frac{\left(R_t^k\right)^{\eta_K^s}\left(P_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{\left(W_t\right)^{1-\eta_L^s}}\Gamma^L\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)\frac{\int_0^1 Y_{j,s,t}dj}{A_t^s}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{L}_{s,t} = \eta_K^s\hat{R}_t^k + \left(1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)\right)\hat{P}_{T,t}^{\times} - \left(1-\eta_L^s\right)\hat{W}_t + \hat{Y}_{s,t}^{tot} - \hat{A}_t^s \qquad [8.3]$$

$$Q_{s,t} = \int_0^1 Q_{j,s,t}dj = \frac{\left(R_t^k\right)^{\eta_K^s}\left(W_t\right)^{\eta_L^s}}{\left(P_{O,t}\right)^{\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}\Gamma^O\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)\frac{\int_0^1 Y_{j,s,t}dj}{A_t^s}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{Q}_{s,t} = \eta_K^s\hat{R}_t^k + \eta_L^s\hat{W}_t - \left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)\hat{P}_{T,t}^{\times} + \hat{Y}_{s,t}^{tot} - \hat{A}_t^s \qquad [8.4]$$

Adicionalmente: $u_t K_{t-1}^{tot} = K_t \Rightarrow \hat{u}_t + \hat{K}_{t-1}^{tot} = \hat{K}_t$ [8.5]

Lembrando [29] e [30]:

$$L_{i,j,s,t} = L_{j,s,t}\left(\frac{W_t}{W_{i,t}}\right)^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}} \qquad W_t^{-\frac{1}{\mu_w}} = \int_0^1 W_{i,t}^{-\frac{1}{\mu_w}}di$$

A demanda total do contínuo de firmas do setor s por trabalho do tipo i é:

$$\int_0^1 L_{i,j,s,t}dj = \left(\frac{W_t}{W_{i,t}}\right)^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}\int_0^1 L_{j,s,t}dj = L_{s,t}\left(\frac{W_t}{W_{i,t}}\right)^{\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}$$

onde $L_{s,t} = \int_0^1 L_{j,s,t} dj$. Somando a demanda dos três setores tem-se a demanda total por trabalho do tipo *i*. Isto significa que, pelo menos em uma aproximação de primeira ordem, a quantidade de trabalho do tipo *i* demandada por firmas diferentes do mesmo setor é a mesma.

Agora estão presentes todos os subsídios necessários para fazer as linearizações, que estão explicitadas a seguir.

• Cálculo da aproximação de primeira ordem de [6] (equação de Euler):

$$\varepsilon_t^B \left(C_{i,t} - hC_{t-1}\right)^{-\sigma_C} = \beta E_t \left[\varepsilon_{t+1}^B \left(C_{i,t+1} - hC_t\right)^{-\sigma_C} \frac{R_t}{\pi_{t+1}^{\circ}} \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_t &= \frac{1}{1+h} E_t\left[\hat{C}_{t+1}\right] + \frac{h}{1+h}\hat{C}_{t-1} - \frac{1}{\sigma_C}\frac{1-h}{1+h}\left(\hat{R}_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right]\right) + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{\sigma_C}\frac{1-h}{1+h}\hat{\varepsilon}_t^B - \frac{1}{\sigma_C}\frac{1-h}{1+h}E_t\left[\hat{\varepsilon}_{t+1}^B\right] \end{aligned} \qquad [8.6]$$

• Cálculo da aproximação de primeira ordem de [7] (UIP):

$$E_t\left[R_t \lambda_{t+1}\right] = E_t\left[\theta_t R_t^* \frac{e_{t+1}}{e_t} \lambda_{t+1}\right]$$

$$R_t \lambda_{t+1} = \overline{R}\overline{\lambda} + \overline{\lambda}\left(R_t - \overline{R}\right) + \overline{R}\left(\lambda_{t+1} - \overline{\lambda}\right)$$

$$\begin{aligned} \theta_t R_t^* \frac{e_{t+1}}{e_t}\lambda_{t+1} &= \overline{\theta}\,\overline{R}^*\overline{\lambda} + \overline{R}^*\overline{\lambda}\left(\theta_t - \overline{\theta}\right) + \overline{\theta\lambda}\left(R_t^* - \overline{R}^*\right) + \ldots \\ &\ldots + \overline{\theta}\,\overline{R}^*\left(\lambda_{t+1} - \overline{\lambda}\right) + \overline{\theta}\,\frac{\overline{R}^*\overline{\lambda}}{\overline{e}}\left(e_{t+1} - \overline{e}\right) - \overline{\theta}\,\frac{\overline{R}^*\overline{\lambda}}{\overline{e}}\left(e_t - \overline{e}\right) \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \cancel{\overline{R}\overline{\lambda}} + \overline{R}\overline{\lambda}\hat{R}_t + \overline{R}\overline{\lambda}E_t\left[\hat{\lambda}_{t+1}\right] &= \cancel{\overline{\theta}\,\overline{R}^*\overline{\lambda}} + \overline{\theta}\,\overline{R}^*\overline{\lambda}\,\hat{\theta}_t + \ldots \\ \ldots + \overline{\theta}\,\overline{R}^*\overline{\lambda}\hat{R}_t^* &+ \overline{\theta}\,\overline{R}^*\overline{\lambda}E_t\left[\hat{\lambda}_{t+1}\right] + \overline{\theta}\,\overline{R}^*\overline{\lambda}E_t\left[\left(\hat{e}_{t+1} - \hat{e}_t\right)\right] \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{R}_t = \hat{\theta}_t + \hat{R}_t^* + E_t\left[\left(\hat{e}_{t+1} - \hat{e}_t\right)\right]$$

pois $\overline{R}\overline{\lambda} = \overline{\theta}\,\overline{R}^*\overline{\lambda}$.

Repare-se que se pode reescrever o resultado assim:

$$\hat{R}_t = \hat{\theta}_t + \hat{R}_t^* + E_t\left[\left(\hat{e}_{t+1} - \hat{e}_t\right)\right] \Rightarrow \ldots \qquad [X]$$

$$\ldots \Rightarrow \hat{R}_t = \hat{\theta}_t + \hat{R}_t^* + E_t\left[\left(\hat{e}_{t+1} + \hat{P}_{t+1}^* - \hat{P}_{t+1} - \hat{e}_t - \hat{P}_t^* + \hat{P}_t - \hat{P}_{t+1}^* + \hat{P}_{t+1} + \hat{P}_t^* - \hat{P}_t\right)\right] \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \hat{R}_t = \hat{\theta}_t + \hat{R}_t^* + E_t\left[\left(\boxed{\hat{e}_{t+1} + \hat{P}_{t+1}^* - \hat{P}_{t+1}} - \boxed{\left(\hat{e}_t + \hat{P}_t^* - \hat{P}_t\right)} + \pi_{t+1} - \pi_{t+1}^*\right)\right] \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow$$

$$\hat{R}_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right] = \hat{\theta}_t + \hat{R}_t^* - E_t\left[\pi_{t+1}^*\right] + E_t\left[\left(\boxed{\hat{e}_{t+1} + \hat{P}_{t+1}^* - \hat{P}_{t+1}} - \boxed{\left(\hat{e}_t + \hat{P}_t^* - \hat{P}_t\right)}\right)\right] \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \hat{R}_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right] = \hat{\theta}_t + \hat{R}_t^* - E_t\left[\pi_{t+1}^*\right] + E_t\left[\hat{e}_{t+1}^r\right] - \hat{e}_t^r \qquad [8.7]$$

onde se usam variáveis reais (taxas de juros e de câmbio) ao invés de nominais. Como

$\theta_t = \varepsilon_t^{\theta}\left(\dfrac{e_t B_t^*}{P_t Y_t}\right)^{-\theta}$ (ver [5]), segue que

$$\theta_t = \varepsilon_t^{\theta}\left(\frac{e_t P_t^*}{P_t}\frac{B_t^*}{P_t^* Y_t}\right)^{-\theta} \Rightarrow \hat{\theta}_t = \hat{\varepsilon}_t^{\theta} - \theta\left(\hat{e}_t^r + \hat{b}_t^* - \hat{Y}_t\right), \text{ onde } b_t^* = \frac{B_t^*}{P_t^*}.$$

• Cálculo da aproximação de primeira ordem de [8] (expressão para o salário real ótimo cobrado pelo indivíduo i quando os salários são flexíveis):

$$\frac{W_t}{P_t} = w_t = \left(1 + \mu_w\right)\varepsilon_t^L \left(L_t\right)^{\sigma_L}\left(C_t - hC_{t-1}\right)^{\sigma_C}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{w}_t = \hat{\varepsilon}_t^L + \sigma_L \hat{L}_t + \frac{\sigma_C}{1-h}\hat{C}_t - \sigma_C\frac{h}{1-h}\hat{C}_{t-1} \qquad [8.8]$$

pois...

$$\left(C_t - hC_{t-1}\right)^{\sigma_C} = \left(\left(1-h\right)\bar{C}\right)^{\sigma_C} + \sigma_C\left(\left(1-h\right)\bar{C}\right)^{\sigma_C - 1}\left(C_t - \bar{C}\right) - h\sigma_C\left(\left(1-h\right)\bar{C}\right)^{\sigma_C - 1}\left(C_{t-1} - \bar{C}\right) \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \frac{\left(C_t - hC_{t-1}\right)^{\sigma_C} - \left(\left(1-h\right)\bar{C}\right)^{\sigma_C}}{\left(\left(1-h\right)\bar{C}\right)^{\sigma_C}} = \frac{\sigma_C}{1-h}\hat{C}_t - \sigma_C\frac{h}{1-h}\hat{C}_{t-1}$$

• Cálculo da aproximação de primeira ordem de [9] (expressão para o salário real ótimo cobrado pelo indivíduo i quando os salários são rígidos):

$$\left(W_{i,0}\right)^{1+\sigma_L\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}=-\left(1+\mu_w\right)\frac{E_0\sum_{t=0}^{\infty}\left(\alpha_w\beta\right)^t\varepsilon_t^B\varepsilon_t^L\left(L_t\right)^{\sigma_L}\left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w}{W_t}\right)^{-\sigma_L\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}L_t\left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w}{W_t}\right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}}{E_0\sum_{t=0}^{\infty}\left(\alpha_w\beta\right)^t\lambda_t\Upsilon_{0,t-1}^wL_t\left(\frac{\Upsilon_{0,t-1}^w}{W_t}\right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}}$$

$\Downarrow$ (somente mudando a referência de tempo

$\Downarrow$ e levando em conta que todas as firmas

$\Downarrow$ sorteadas para reajustar escolhem o mesmo

$\Downarrow$ salário ótimo)

$$\left(W_t^{\bullet}\right)^{1+\sigma_L\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}=-\left(1+\mu_w\right)\frac{E_t\sum_{j=0}^{\infty}\left(\alpha_w\beta\right)^j\varepsilon_{t+j}^B\varepsilon_{t+j}^L\left(L_{t+j}\right)^{\sigma_L}\left(\frac{\Upsilon_{t,t+j-1}^w}{W_{t+j}}\right)^{-\sigma_L\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}L_{t+j}\left(\frac{\Upsilon_{t,t+j-1}^w}{W_{t+j}}\right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}}{E_t\sum_{j=0}^{\infty}\left(\alpha_w\beta\right)^j\lambda_{t+j}\Upsilon_{t,t+j-1}^wL_{t+j}\left(\frac{\Upsilon_{t,t+j-1}^w}{W_{t+j}}\right)^{-\frac{1+\mu_w}{\mu_w}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(1+\sigma_L\frac{1+\mu_w}{\mu_w}\right)\hat{W}_t^{\bullet}=\left(1-\alpha_w\beta\right)E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\alpha_w\beta\right)^j\left(\begin{array}{l}\hat{\varepsilon}_{t+j}^B+\hat{\varepsilon}_{t+j}^L+\sigma_L\hat{L}_{t+j}+\sigma_L\frac{1+\mu_w}{\mu_w}\hat{W}_{t+j}-\ldots\\ \ldots-\left(1+\sigma_L\frac{1+\mu_w}{\mu_w}\right)\hat{\Upsilon}_{t,t+j-1}^w-\hat{\lambda}_{t+j}\end{array}\right)\right\}$$

Observação:

$$\Upsilon_{0,t-1}^w=\left(\pi_0^{\circ}\times\pi_1^{\circ}\times\pi_2^{\circ}\times\ldots\times\pi_{t-1}^{\circ}\right)^{\gamma_w}\left(\overline{\pi}_0^{\circ}\times\overline{\pi}_1^{\circ}\times\overline{\pi}_2^{\circ}\times\ldots\times\overline{\pi}_{t-1}^{\circ}\right)^{1-\gamma_w}$$

$$\Downarrow$$

$$\Upsilon_{t,t+j-1}^w=\left(\pi_t^{\circ}\times\pi_{t+1}^{\circ}\times\pi_{t+2}^{\circ}\times\ldots\times\pi_{t+j-1}^{\circ}\right)^{\gamma_w}\left(\overline{\pi}_t^{\circ}\times\overline{\pi}_{t+1}^{\circ}\times\overline{\pi}_{t+2}^{\circ}\times\ldots\times\overline{\pi}_{t+j-1}^{\circ}\right)^{1-\gamma_w}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\Upsilon}_{t,t+j-1}^w=\gamma_w\sum_{i=0}^{j-1}\pi_{t+i}+\left(1-\gamma_w\right)\sum_{i=0}^{j-1}\overline{\pi}_{t+i}$$

Continue-se o procedimento definindo $\hat{x}_{t+j}=\hat{\varepsilon}_{t+j}^B+\hat{\varepsilon}_{t+j}^L+\sigma_L\hat{L}_{t+j}-\hat{\lambda}_{t+j}$ e substituindo no resultado alcançado até agora:

$$\left(1+\sigma_L\frac{1+\mu_w}{\mu_w}\right)\hat{W}_t^{\bullet}=\left(1-\alpha_w\beta\right)E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\alpha_w\beta\right)^j\left(\hat{x}_{t+j}+\sigma_L\frac{1+\mu_w}{\mu_w}\hat{W}_{t+j}-\left(1+\sigma_L\frac{1+\mu_w}{\mu_w}\right)\hat{\Upsilon}_{t,t+j-1}^w\right)\right\}$$

Dividindo em duas partes...

$$\left(1+\sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}\right)\hat{W}_t^{\bullet} = (1-\alpha_w\beta) E_t \left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_w\beta)^j \left(\hat{x}_{t+j} + \sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}\hat{W}_{t+j}\right)\right\} - \ldots$$

$$\ldots - (1-\alpha_w\beta)\left(1+\sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}\right) E_t \left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_w\beta)^j \,\hat{\Upsilon}_{t,t+j-1}^{w}\right\}$$

Mas $E_t \left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_w\beta)^j \,\hat{\Upsilon}_{t,t+j-1}^{w}\right\} = E_t \left\{\sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_w\beta)^j \,\hat{\Upsilon}_{t,t+j-1}^{w}\right\}$ porque $\Upsilon_{t,t-1}^{w} = 1$ (pois, obviamente, não há correção nenhuma entre $t=0$ e $t=0$) e $\hat{\Upsilon}_{t,t-1}^{w} = 0$.

$$E_t \left\{\sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_w\beta)^j \,\hat{\Upsilon}_{t,t+j-1}^{w}\right\} = \gamma_w E_t \left\{\sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_w\beta)^j \sum_{i=0}^{j-1}\pi_{t+i}\right\} + (1-\gamma_w) E_t \left\{\sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_w\beta)^j \sum_{i=0}^{j-1}\overline{\pi}_{t+i}\right\}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_w\beta)^j \sum_{i=1}^{j}\pi_{t+i-1} = (\alpha_w\beta)\pi_t + (\alpha_w\beta)^2(\pi_t + \pi_{t+1}) + (\alpha_w\beta)^3(\pi_t + \pi_{t+1} + \pi_{t+2}) + \ldots = \ldots$$

$$\ldots = (\alpha_w\beta)\pi_t\left(1+(\alpha_w\beta)+(\alpha_w\beta)^2+\ldots\right) + (\alpha_w\beta)^2\pi_{t+1}\left(1+(\alpha_w\beta)+(\alpha_w\beta)^2+\ldots\right) + \ldots$$

$$\ldots + (\alpha_w\beta)^3\pi_{t+2}\left(1+(\alpha_w\beta)+(\alpha_w\beta)^2+\ldots\right) + \ldots = \frac{\alpha_w\beta}{1-\alpha_w\beta}\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_w\beta)^j \pi_{t+j}$$

Logo:

$$E_t \left\{\sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_w\beta)^j \,\hat{\Upsilon}_{t,t+j-1}^{w}\right\} = \gamma_w \frac{\alpha_w\beta}{1-\alpha_w\beta} E_t \left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_w\beta)^j \pi_{t+j}\right\} + (1-\gamma_w)\frac{\alpha_w\beta}{1-\alpha_w\beta} E_t \left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_w\beta)^j \overline{\pi}_{t+j}\right\}$$

e portanto:

$$\left(1+\sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}\right)\hat{W}_t^{\bullet} = (1-\alpha_w\beta) E_t \left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_w\beta)^j \left(\hat{x}_{t+j} + \sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}\hat{W}_{t+j}\right)\right\} - \ldots$$

$$\ldots - \left(1+\sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}\right)\alpha_w\beta E_t \left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_w\beta)^j \left(\gamma_w\pi_{t+j} + (1-\gamma_w)\overline{\pi}_{t+j}\right)\right\}$$

Usando-se a definição do nível geral de salários, a lei dos grandes números e o fato de todos os indivíduos autorizados a reajustar escolherem o mesmo salário ótimo, pode-se escrever:

De [30]:

$$W_t^{-\frac{1}{\mu_w}} = \int_0^1 W_{i,t}^{-\frac{1}{\mu_w}} di \Rightarrow W_t^{-\frac{1}{\mu_w}} = (1-\alpha_W) W_t^{\bullet} + \alpha_W \int_0^{1-\alpha_W}\left(W_{i,t-1}\left(\pi_{t-1}^{\circ}\right)^{\gamma_W}\left(\overline{\pi}_{t-1}^{\circ}\right)^{1-\gamma_W}\right)^{-\frac{1}{\mu_w}} di \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \hat{W}_t = (1-\alpha_W)\hat{W}_t^{\bullet} + \alpha_W\left(\hat{W}_{t-1} + \gamma_W\pi_{t-1} + (1-\gamma_W)\overline{\pi}_{t-1}\right) \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow 0 = (1-\alpha_W)\left(\hat{W}_t^{\bullet} - \hat{W}_t\right) + \alpha_W\left(\hat{W}_{t-1} - \hat{W}_t + \gamma_W\pi_{t-1} + (1-\gamma_W)\overline{\pi}_{t-1}\right) \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \hat{W}_t^{\bullet} - \hat{W}_t = \frac{\alpha_W}{1-\alpha_W}\left(\pi_t^w - \left(\gamma_W \pi_{t-1} + (1-\gamma_W)\overline{\pi}_{t-1}\right)\right)$$

Continuando a derivação:

$$\left(1+\sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}\right)\left(\hat{W}_t^{\bullet} - \hat{W}_t\right) = (1-\alpha_W\beta) E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_W\beta)^j\left(\hat{x}_{t+j} - \hat{W}_{t+j}\right)\right\} + \ldots$$

$$\ldots + (1-\alpha_W\beta)\left(1+\sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}\right) E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_W\beta)^j\left(\hat{W}_{t+j} - \hat{W}_t\right)\right\} - \ldots$$

$$\ldots - \left(1+\sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}\right)\alpha_W\beta E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_W\beta)^j\left(\gamma_W\pi_{t+j} + (1-\gamma_W)\overline{\pi}_{t+j}\right)\right\}$$

$$\left(1+\sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}\right)\left(\hat{W}_t^{\bullet} - \hat{W}_t\right) = (1-\alpha_W\beta) E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_W\beta)^j\left(\hat{x}_{t+j} - \hat{W}_{t+j}\right)\right\} + \ldots$$

$$\ldots + \left(1+\sigma_L \frac{1+\overline{\mu}_w}{\overline{\mu}_w}\right) E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_W\beta)^{j+1}\pi_{t+j+1}^w\right\} - \ldots$$

$$\ldots - \left(1+\sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}\right)\alpha_W\beta E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_W\beta)^j\left(\gamma_W\pi_{t+j} + (1-\gamma_W)\overline{\pi}_{t+j}\right)\right\}$$

$$\frac{\alpha_W}{1-\alpha_W}\left(\pi_t^w - \left(\gamma_W\pi_{t-1} + (1-\gamma_W)\overline{\pi}_{t-1}\right)\right) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1-\alpha_W\beta}{1+\sigma_L \frac{1+\mu_w}{\mu_w}} E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_W\beta)^j\left(\hat{x}_{t+j} - \hat{W}_{t+j}\right)\right\} + E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_W\beta)^{j+1}\pi_{t+j+1}^w\right\} - \ldots$$

$$\ldots - \alpha_W\beta E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_W\beta)^j\left(\gamma_W\pi_{t+j} + (1-\gamma_W)\overline{\pi}_{t+j}\right)\right\} \qquad [\bullet]$$

A derivação continua com os passos:

(1) separam-se os termos associados a $j=0$; (2) avalia-se [•] no período $t+1$; (3) escreve-se a expressão resultante em termos de $k=j+1$; (4) multiplica-se o resultado anterior por $\alpha_W\beta$; (5) calcula-se, pela Lei das Expectativas Iteradas, o valor esperado no período-t da expressão resultante do passo (4); e (6) usa-se o resultado do passo anterior na expressão obtida no passo (1).

(1)

$$\frac{\alpha_W}{1-\alpha_W}\left(\pi_t^w-\left(\gamma_W\pi_{t-1}+\left(1-\gamma_W\right)\overline{\pi}_{t-1}\right)\right)=\ldots$$

$$\ldots=\frac{1-\alpha_W\beta}{1+\sigma_L\dfrac{1+\mu_w}{\mu_w}}\left(\hat{x}_t-\hat{W}_t\right)+\alpha_W\beta\left(E_t\left[\pi_{t+1}^w\right]-\left(\gamma_W\pi_t-\left(1-\gamma_W\right)\overline{\pi}_t\right)\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1-\alpha_W\beta}{1+\sigma_L\dfrac{1+\mu_w}{\mu_w}}E_t\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(\alpha_W\beta\right)^j\left(\hat{x}_{t+j}-\hat{W}_{t+j}\right)\right\}+E_t\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(\alpha_W\beta\right)^{j+1}\pi_{t+j+1}^w\right\}-\ldots$$

$$\ldots-\alpha_W\beta E_t\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(\alpha_W\beta\right)^j\left(\gamma_W\pi_{t+j}+\left(1-\gamma_W\right)\overline{\pi}_{t+j}\right)\right\}$$

(2), (3), (4) e (5)

$$\frac{\alpha_W^2\beta}{1-\alpha_W}\left(E_t\left[\pi_{t+1}^w\right]-\left(\gamma_W\pi_t+\left(1-\gamma_W\right)\overline{\pi}_t\right)\right)=\ldots$$

$$\ldots=\frac{1-\alpha_W\beta}{1+\sigma_L\dfrac{1+\mu_w}{\mu_w}}E_t\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_W\beta\right)^k\left(\hat{x}_{t+k}-\hat{W}_{t+k}\right)\right\}+E_t\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_W\beta\right)^{k+1}\pi_{t+k+1}^w\right\}-\ldots$$

$$\ldots-\alpha_W\beta E_t\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_W\beta\right)^k\left(\gamma_W\pi_{t+k}+\left(1-\gamma_W\right)\overline{\pi}_{t+k}\right)\right\}$$

(6)

$$\pi_t^w-\left(\gamma_W\pi_{t-1}+\left(1-\gamma_W\right)\overline{\pi}_{t-1}\right)=\kappa_W\frac{1}{1+\sigma_L\dfrac{1+\mu_w}{\mu_w}}\left(\hat{x}_t-\hat{W}_t\right)+\beta\left(E_t\left[\pi_{t+1}^w\right]-\left(\gamma_W\pi_t+\left(1-\gamma_W\right)\overline{\pi}_t\right)\right)$$

onde $\kappa_W=\dfrac{\left(1-\alpha_W\beta\right)\left(1-\alpha_W\right)}{\alpha_W}$. Repare-se que:

$$\hat{x}_t-\hat{W}_t=\hat{\varepsilon}_t^B+\hat{\varepsilon}_t^L+\sigma_L\hat{L}_t-\hat{\lambda}_t-\hat{W}_t=\hat{\varepsilon}_t^B+\hat{\varepsilon}_t^L+\sigma_L\hat{L}_t-\hat{\lambda}_t-\hat{W}_t=\ldots$$

$$\ldots=\hat{\varepsilon}_t^B+\hat{\varepsilon}_t^L+\sigma_L\hat{L}_t-\hat{\varepsilon}_t^B+\hat{P}_t+\frac{\sigma_C}{1-h}\hat{C}_t-\sigma_C\frac{h}{1-h}\hat{C}_{t-1}-\hat{W}_t=\left(\hat{\varepsilon}_t^L+\sigma_L\hat{L}_t+\frac{\sigma_C}{1-h}\left(\hat{C}_t-h\hat{C}_{t-1}\right)\right)-\hat{w}_t$$

onde a expressão entre parênteses é o salário real de equilíbrio para o caso de preços flexíveis. Logo a curva de Phillips para salários pode ser escrita como:

$$\pi_t^w-\left(\gamma_W\pi_{t-1}+\left(1-\gamma_W\right)\overline{\pi}_{t-1}\right)=\kappa_W\frac{1}{1+\sigma_L\dfrac{1+\mu_w}{\mu_w}}\left(\hat{w}_t^{flex}-\hat{w}_t\right)+\beta\left(E_t\left[\pi_{t+1}^w\right]-\left(\gamma_W\pi_t+\left(1-\gamma_W\right)\overline{\pi}_t\right)\right) \quad [8.9]$$

Observação:

$$\lambda_t+\frac{\varepsilon_t^B\left(C_{i,t}-hC_{t-1}\right)^{-\sigma_C}}{P_t}=0\Rightarrow\overline{\lambda}+\frac{\left(\left(1-h\right)\overline{C}\right)^{-\sigma_C}}{\overline{P}}+\left(\lambda_t-\overline{\lambda}\right)+\frac{\left(\left(1-h\right)\overline{C}\right)^{-\sigma_C}}{\overline{P}}\left(\varepsilon_t^B-1\right)-\ldots$$

$$\ldots-\frac{\left((1-h)\bar{C}\right)^{-\sigma_C}}{\bar{P}^2}\left(P_t-\bar{P}\right)-\sigma_C\frac{\left((1-h)\bar{C}\right)^{-\sigma_C-1}}{\bar{P}}\left(C_t-\bar{C}\right)+h\sigma_C\frac{\left((1-h)\bar{C}\right)^{-\sigma_C-1}}{\bar{P}}\left(C_{t-1}-\bar{C}\right)=0\Rightarrow\ldots$$

$$\ldots\Rightarrow\hat{\lambda}_t-\hat{\varepsilon}_t^B+\hat{P}_t+\frac{\sigma_C}{1-h}\hat{C}_t-\sigma_C\frac{h}{1-h}\hat{C}_{t-1}=0\Rightarrow\hat{\lambda}_t=\hat{\varepsilon}_t^B-\hat{P}_t-\frac{\sigma_C}{1-h}\hat{C}_t+\sigma_C\frac{h}{1-h}\hat{C}_{t-1}$$

• Cálculo da aproximação de primeira ordem de [31] (expressão para o preço relativo ótimo cobrado pelas firmas domésticas "produtoras" quando os preços são flexíveis):

$$p_{s,t}=\left(1+\mu_s\right)\frac{\left(r_t^k\right)^{\eta_K^s}\left(w_t\right)^{\eta_L^s}\left(p_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{A_t^s}\Gamma\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{p}_{s,t}=\eta_K^s\hat{r}_t^k+\eta_L^s\hat{w}_t+\left(1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)\right)\hat{p}_{T,t}^{\times}-\hat{A}_t^s \qquad [8.10]$$

• Cálculo da aproximação de primeira ordem de [32] (expressão para o preço ótimo cobrado pelas firmas domésticas "produtoras" quando há rigidez de preços):

De [32]: $$P_{j,s,0}=\left(1+\mu_s\right)\frac{E_0\sum_{t=0}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^t\frac{\lambda_t}{\lambda_0}Y_{s,t}^{tot}\left(\frac{\Upsilon_{0,t}^s}{P_{s,t}}\right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}}CMg\left(Y_{j,s,t}\right)}{E_0\sum_{t=0}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^t\frac{\lambda_t}{\lambda_0}\Upsilon_{0,t}^sY_{s,t}^{tot}\left(\frac{\Upsilon_{0,t}^s}{P_{s,t}}\right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}}}$$

$\Downarrow$ (mudando a referência de tempo, levando em conta

$\Downarrow$ que todas as firmas sorteadas para reajustar escolhem

$\Downarrow$ o mesmo preço ótimo e também que o custo marginal

$\Downarrow$ independe da quantidade produzida)

$$P_{s,t}^{\bullet}=\left(1+\mu_s\right)\frac{E_t\sum_{j=0}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^j\frac{\lambda_{t+j}}{\lambda_t}Y_{s,t+j}^{tot}\left(\frac{\Upsilon_{t,t+j-1}^s}{P_{s,t+j}}\right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}}CMg\left(Y_{s,t+j}^{tot}\right)}{E_t\sum_{j=0}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^j\frac{\lambda_{t+j}}{\lambda_t}\Upsilon_{t,t+j-1}^sY_{s,t+j}^{tot}\left(\frac{\Upsilon_{t,t+j-1}^s}{P_{s,t+j}}\right)^{-\frac{1+\mu_s}{\mu_s}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{P}_{s,t}^{\bullet} = \left(1-\alpha_p^s\beta\right) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha_p^s\beta\right)^j \left(d\left(CMg\left(Y_{s,t+j}^{tot} \right)\right) - \hat{\Upsilon}_{t,t+j-1}^s \right) \right\}$$

Observação:

$$\Upsilon_{0,t}^s = \left(\pi_0^\circ \times \pi_1^\circ \times \pi_2^\circ \times \ldots \times \pi_{t-1}^\circ \right)^{\gamma_s} \left(\overline{\pi}_0^\circ \times \overline{\pi}_1^\circ \times \overline{\pi}_2^\circ \times \ldots \times \overline{\pi}_{t-1}^\circ \right)^{1-\gamma_s}$$

$$\Downarrow$$

$$\Upsilon_{t,t+j-1}^s = \left(\pi_t^\circ \times \pi_{t+1}^\circ \times \pi_{t+2}^\circ \times \ldots \times \pi_{t+j-1}^\circ \right)^{\gamma_s} \left(\overline{\pi}_t^\circ \times \overline{\pi}_{t+1}^\circ \times \overline{\pi}_{t+2}^\circ \times \ldots \times \overline{\pi}_{t+j-1}^\circ \right)^{1-\gamma_s}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\Upsilon}_{t,t+j-1}^s = \gamma_s \sum_{i=0}^{j-1} \pi_{t+i} + \left(1-\gamma_s\right) \sum_{i=0}^{j-1} \overline{\pi}_{t+i}$$

Demonstrações anteriores sugerem que:

$$E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha_p^s\beta\right)^j \hat{\Upsilon}_{t,t+j-1}^s \right\} = E_t \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\alpha_p^s\beta\right)^j \hat{\Upsilon}_{t,t+j-1}^s \right\} = \ldots$$

$$\ldots = \gamma_s \frac{\alpha_p^s\beta}{1-\alpha_p^s\beta} E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha_p^s\beta\right)^j \pi_{t+j} \right\} + \left(1-\gamma_s\right) \frac{\alpha_p^s\beta}{1-\alpha_p^s\beta} E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha_p^s\beta\right)^j \overline{\pi}_{t+j} \right\}$$

Continuando a derivação com a introdução, esse resultado...

$$\hat{P}_{s,t}^{\bullet} = \left(1-\alpha_p^s\beta\right) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha_p^s\beta\right)^j d\left(CMg\left(Y_{s,t+j}^{tot} \right)\right) \right\} - \ldots$$

$$\ldots - \alpha_p^s\beta E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha_p^s\beta\right)^j \left(\gamma_s \pi_{t+j} + \left(1-\gamma_s\right) \overline{\pi}_{t+j} \right) \right\}$$

De [11]:

$$P_{s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}} = \int_0^1 P_{j,s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}} dj \Rightarrow P_{s,t}^{-\frac{1}{\mu_s}} = \left(1-\alpha_p^s\right) P_{s,t}^{\bullet} + \alpha_p^s \int_0^{\alpha_s} \left(P_{j,s,t-1} \left(\pi_{t-1}^\circ \right)^{\gamma_s} \left(\overline{\pi}_{t-1}^\circ \right)^{1-\gamma_s} \right)^{-\frac{1}{\mu_s}} dj \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \hat{P}_{s,t} = \left(1-\alpha_p^s\right) \hat{P}_{s,t}^{\bullet} + \alpha_p^s \left(\hat{P}_{s,t-1} + \gamma_s \pi_{t-1} + \left(1-\gamma_s\right) \overline{\pi}_{t-1} \right) \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow 0 = \left(1-\alpha_p^s\right)\left(\hat{P}_{s,t}^{\bullet} - \hat{P}_{s,t} \right) - \alpha_p^s \left(\pi_t^s - \left(\gamma_s \pi_{t-1} + \left(1-\gamma_s\right) \overline{\pi}_{t-1} \right) \right) \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \hat{P}_{s,t}^{\bullet} - \hat{P}_{s,t} = \frac{\alpha_p^s}{1-\alpha_p^s} \left(\pi_t^s - \left(\gamma_s \pi_{t-1} + \left(1-\gamma_s\right) \overline{\pi}_{t-1} \right) \right)$$

Logo:

$$\hat{P}^{\bullet}_{s,t} - \hat{P}_{s,t} = \left(1-\alpha_p^s\beta\right)E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^j\left(d\left(CMg^r_{s,t+j}\right)+\hat{P}_{t+j}-\hat{P}_{s,t+j}\right)\right\}+\ldots$$

$$\ldots+\left(1-\alpha_p^s\beta\right)E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^j\left(\hat{P}_{s,t+j}-\hat{P}_{s,t}\right)\right\}-\alpha_p^s\beta E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^j\left(\gamma_s\pi_{t+j}+\left(1-\gamma_s\right)\overline{\pi}_{t+j}\right)\right\}$$

$$\frac{\alpha_p^s}{1-\alpha_p^s}\left(\pi_t^s-\left(\gamma_s\pi_{t-1}+\left(1-\gamma_s\right)\overline{\pi}_{t-1}\right)\right)=\left(1-\alpha_p^s\beta\right)E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^j\left(d\left(CMg^r_{s,t+j}\right)+\hat{P}_{t+j}-\hat{P}_{s,t+j}\right)\right\}+\ldots$$

$$\ldots+\left(1-\alpha_p^s\beta\right)E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^j\left(\hat{P}_{s,t+j}-\hat{P}_{s,t}\right)\right\}-\alpha_p^s\beta E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^j\left(\gamma_s\pi_{t+j}+\left(1-\gamma_s\right)\overline{\pi}_{t+j}\right)\right\}$$

$$\frac{\alpha_p^s}{1-\alpha_p^s}\left(\pi_t^s-\left(\gamma_s\pi_{t-1}+\left(1-\gamma_s\right)\overline{\pi}_{t-1}\right)\right)=\left(1-\alpha_p^s\beta\right)E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^j\left(d\left(CMg^r_{s,t+j}\right)+\hat{P}_{t+j}-\hat{P}_{s,t+j}\right)\right\}+\ldots$$

$$\ldots+E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^{j+1}\pi^s_{t+j+1}\right\}-\alpha_p^s\beta E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^j\left(\gamma_s\pi_{t+j}+\left(1-\gamma_s\right)\overline{\pi}_{t+j}\right)\right\} \qquad [\bullet]$$

Agora é só aplicar o mesmo procedimento anterior:

(1) separam-se os termos associados a $j=0$; (2) avalia-se [•] no período $t+1$; (3) escreve-se a expressão resultante em termos de $k=j+1$; (4) multiplica-se o resultado anterior por $\alpha_p^{(\ldots)}\beta$; (5) calcula-se, pela Lei das Expectativas Iteradas, o valor esperado no período-t da expressão resultante do passo (4); e (6) usa-se o resultado do passo anterior na expressão obtida no passo (1).

(1)

$$\frac{\alpha_p^s}{1-\alpha_p^s}\left(\pi_t^s-\left(\gamma_s\pi_{t-1}+\left(1-\gamma_s\right)\bar{\pi}_{t-1}\right)\right)=\left(1-\alpha_p^s\beta\right)\left(d\left(CMg_{s,t}^r\right)+\hat{P}_t-\hat{P}_{s,t}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\alpha_p^s\beta E_t\left[\pi_{t+1}^s-\left(\gamma_s\pi_t+\left(1-\gamma_s\right)\bar{\pi}_t\right)\right]+\ldots$$

$$\ldots+\left(1-\alpha_p^s\beta\right)E_t\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^j\left(d\left(CMg_{s,t+j}^r\right)+\hat{P}_{t+j}-\hat{P}_{s,t+j}\right)\right\}+\ldots$$

$$\ldots+E_t\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^{j+1}\pi_{t+j+1}^s\right\}-\alpha_p^s\beta E_t\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^j\left(\gamma_s\pi_{t+j}+\left(1-\gamma_s\right)\bar{\pi}_{t+j}\right)\right\}$$

(2), (3), (4), (5)

$$\alpha_p^s\beta\times\frac{\alpha_p^s}{1-\alpha_p^s}E_t\left[\pi_{t+1}^s-\left(\gamma_s\pi_t+\left(1-\gamma_s\right)\bar{\pi}_t\right)\right]=\ldots$$

$$\ldots=\left(1-\alpha_p^s\beta\right)E_t\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^k\left(d\left(CMg_{s,t+j}^r\right)+\hat{P}_{t+j}-\hat{P}_{s,t+j}\right)\right\}+\ldots$$

$$\ldots+E_t\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^{k+1}\pi_{t+k+1}^s\right\}-\alpha_p^s\beta E_t\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_p^s\beta\right)^k\left(\gamma_s\pi_{t+k}+\left(1-\gamma_s\right)\bar{\pi}_{t+k}\right)\right\}$$

(6)

$$\pi_t^s-\left(\gamma_s\pi_{t-1}+\left(1-\gamma_s\right)\bar{\pi}_{t-1}\right)=\kappa_p^s\left(d\left(CMg_{s,t}^r\right)+\hat{P}_t-\hat{P}_{s,t}\right)+\beta E_t\left[\pi_{t+1}^s-\left(\gamma_s\pi_t+\left(1-\gamma_s\right)\bar{\pi}_t\right)\right]$$

onde $\kappa_p^s=\dfrac{\left(1-\alpha_p^s\right)\left(1-\alpha_p^s\beta\right)}{\alpha_p^s}$.

Deve-se lembrar que:

$$CMg_{s,t}=\frac{\left(R_t^k\right)^{\eta_K^s}\left(W_t\right)^{\eta_L^s}\left(P_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{A_t^s}\Gamma\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)$$

$$\Downarrow$$

$$CMg_{s,t}^r=\frac{CMg_t}{P_t}=\frac{\left(r_t^k\right)^{\eta_K^s}\left(w_t\right)^{\eta_L^s}\left(p_{T,t}^{\times}\right)^{1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)}}{A_t^s}\Gamma\left(\eta_K^s,\eta_L^s\right)$$

$$\Downarrow$$

$$d\left(CMg_{s,t}^r\right)=\eta_K^s\hat{r}_t^k+\eta_L^s\hat{w}_t+\left(1-\left(\eta_K^s+\eta_L^s\right)\right)\hat{p}_{T,t}^{\times}-\hat{A}_t^s$$

onde $r_t^k=\dfrac{R_t^k}{P_t},w_t=\dfrac{W_t}{P_t},p_{T,t}^{\times}=\dfrac{P_{T,t}^{\times}}{P_t}$.

Logo:

Preço relativo ótimo em caso de preços flexíveis $\Rightarrow \hat{p}_{H,t}^{flex}$

$$\begin{aligned} &\pi_t^s - \left(\gamma_s \pi_{t-1} + (1-\gamma_s)\overline{\pi}_{t-1}\right) = \beta E_t\left[\pi_{t+1}^s - \left(\gamma_s \pi_t + (1-\gamma_s)\overline{\pi}_t\right)\right] + \ldots \\ &\ldots + \overbrace{\kappa_p^s\left(\eta_K^s \hat{r}_t^k + \eta_L^s \hat{w}_t + \left(1-\left(\eta_K^s + \eta_L^s\right)\right)\hat{p}_{T,t}^{\times}\right.} - \hat{A}_t^s - \hat{p}_{s,t}\Big) \end{aligned} \qquad [8.11]$$

• Cálculo das aproximações de primeira ordem das expressões envolvendo os níveis gerais de preços:

De [17]: $\left(P_t\right)^{-\frac{1}{\psi}} = \phi\left(P_{L,t}\right)^{-\frac{1}{\psi}} + (1-\phi)\left(P_{A,t}\right)^{-\frac{1}{\psi}} \Rightarrow \hat{P}_t = \phi \hat{P}_{L,t} + (1-\phi)\hat{P}_{A,t}$

De [18]: $\left(P_{L,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}} = \gamma\left(P_{T,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}} + (1-\gamma)\left(P_{NT,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}} \Rightarrow \hat{P}_{L,t} = \gamma \hat{P}_{T,t} + (1-\gamma)\hat{P}_{NT,t}$

Substituindo os resultados uns nos outros...

$$\hat{P}_t = \phi\left(\gamma \hat{P}_{T,t} + (1-\gamma)\hat{P}_{NT,t}\right) + (1-\phi)\hat{P}_{A,t} \Rightarrow \hat{P}_t = \phi\gamma \hat{P}_{T,t} + \phi(1-\gamma)\hat{P}_{NT,t} + (1-\phi)\hat{P}_{A,t}$$

O resultado também é válido para o instante $t-1$:

$$\hat{P}_{t-1} = \phi\gamma \hat{P}_{T,t-1} + \phi(1-\gamma)\hat{P}_{NT,t-1} + (1-\phi)\hat{P}_{A,t-1}$$

Calculando a diferença entre ambos, chega-se a:

$$\pi_t = \phi\gamma \pi_{T,t} + \phi(1-\gamma)\pi_{NT,t} + (1-\phi)\pi_{A,t}$$

Também se pode chegar a uma relação de equilíbrio entre os preços relativos que será útil na análise do equilíbrio com preços flexíveis:

$$\hat{P}_t = \phi\gamma \hat{P}_{T,t} + \phi(1-\gamma)\hat{P}_{NT,t} + (1-\phi)\hat{P}_{A,t} \Rightarrow 0 = \phi\gamma \hat{p}_{T,t} + \phi(1-\gamma)\hat{p}_{NT,t} + (1-\phi)\hat{p}_{A,t}$$

• Cálculo da aproximação de primeira ordem da lei de movimento para o estoque de capital:

De [20]: $K_t^{tot} = (1-\delta)K_{t-1}^{tot} + I_t\left(1 - S\left(\varepsilon_t^I \dfrac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right)$

$$\begin{aligned} &K_t^{tot} - (1-\delta)K_{t-1}^{tot} - I_t\left(1 - S\left(\varepsilon_t^I \frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right) = \overline{K}^{tot} - (1-\delta)\overline{K}^{tot} - \overline{I} + \ldots \\ &\ldots + \left(K_t^{tot} - \overline{K}^{tot}\right) - \left(1-\delta(1)\right)\left(K_{t-1}^{tot} - \overline{K}^{tot}\right) - \left(I_t - \overline{I}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\hat{K}_t^{tot} - (1-\delta)\hat{K}_{t-1}^{tot} - \frac{\overline{I}}{\overline{K}^{tot}}\hat{I}_t = 0 \Rightarrow \hat{K}_t^{tot} - (1-\delta)\hat{K}_{t-1}^{tot} - \delta\hat{I}_t = 0 \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \hat{K}_t^{tot} = (1-\delta)\hat{K}_{t-1}^{tot} + \delta \hat{I}_t \qquad [8.12]$$

porque $\bar{K}^{tot} = (1-\delta)\bar{K}^{tot} + \bar{I} \Rightarrow \bar{I} = \delta \bar{K}^{tot} \Rightarrow \frac{\bar{I}}{\bar{K}^{tot}} = \frac{\bar{I}}{\bar{K}} = \delta$.

• Cálculo das aproximações de primeira ordem das expressões que caracterizam as escolhas ótimas da firma "acumuladora" de capital:

Obs.: Podem-se escrever as condições de primeira ordem em termos reais da seguinte forma:

De [21]: $R_t^k - P_t \frac{d\Psi}{du_t} = 0 \Rightarrow r_t^k - \frac{d\Psi}{du_t} = 0$

De [22]: $\varphi_t = E_t\left[\Theta_{t,t+1}\left(\varphi_{t+1}\left(1-\delta\left(u_{t+1}\right)\right) - \left(R_{t+1}^k u_{t+1} - P_{t+1}\Psi\left(u_{t+1}\right)\right)\right)\right] \Rightarrow \ldots$

$$\ldots \Rightarrow \frac{\varphi_t}{P_t} = E_t\left[\Theta_{t,t+1}\frac{P_{t+1}}{P_t}\left(\frac{\varphi_{t+1}}{P_{t+1}}\left(1-\delta\left(u_{t+1}\right)\right) - \left(\frac{R_{t+1}^k}{P_{t+1}}u_{t+1} - \Psi\left(u_{t+1}\right)\right)\right)\right] \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \varphi_t^r = E_t\left[\Theta_{t,t+1}\pi_{t+1}^{\circ}\left(\varphi_{t+1}^r\left(1-\delta\left(u_{t+1}\right)\right) - \left(r_{t+1}^k u_{t+1} - \Psi\left(u_{t+1}\right)\right)\right)\right],$$ onde

$$\varphi_t^r = \frac{\varphi_t}{P_t}$$

De [23]:

$$P_t = -\varphi_t\left(1 - S\left(\varepsilon_t^I \frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right) + \varphi_t I_t \frac{\partial S}{\partial(\arg S)}\frac{\varepsilon_t^I}{I_{t-1}} - E_t\left[\Theta_{t,t+1}\varphi_{t+1}\frac{\partial S}{\partial(\arg S)}\frac{\varepsilon_{t+1}^I\left(I_{t+1}\right)^2}{\left(I_t\right)^2}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$1 = -\varphi_t^r\left(1 - S\left(\varepsilon_t^I \frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right) + \varphi_t^r I_t \frac{\partial S}{\partial(\arg S)}\frac{\varepsilon_t^I}{I_{t-1}} - E_t\left[\Theta_{t,t+1}\pi_{t+1}^{\circ}\varphi_{t+1}^r\frac{\partial S}{\partial(\arg S)}\frac{\varepsilon_{t+1}^I\left(I_{t+1}\right)^2}{\left(I_t\right)^2}\right]$$

De [21] escrito em termos reais:

$$r_t^k - \frac{d\Psi}{du_t} = 0 \Rightarrow \bar{r}^k + \left.\frac{d\Psi}{du_t}\right|_{SS} + \left(r_t^k - \bar{r}^k\right) - \left.\frac{d^2\Psi}{du_t^2}\right|_{SS}\left(u_t - 1\right) = 0 \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \left(r_t^k - \bar{r}^k\right) - \left.\frac{d^2\Psi}{du_t^2}\right|_{SS}\left(u_t - 1\right) = 0 \Rightarrow \hat{r}_t^k - \frac{1}{\bar{r}^k}\left.\frac{d^2\Psi}{du_t^2}\right|_{SS}\hat{u}_t = 0 \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \hat{r}_t^k = \frac{\left.\frac{d^2\Psi}{du_t^2}\right|_{SS}}{\left.\frac{d\Psi}{du_t}\right|_{SS}}\hat{u}_t \qquad [8.13]$$

porque $\bar{r}^k - \left.\frac{d\Psi}{du_t}\right|_{SS} = 0 \Rightarrow \bar{r}^k = \left.\frac{d\Psi}{du_t}\right|_{SS}$.

De [22] escrito em termos reais:

$$\varphi_t^r = E_t\left[\Theta_{t,t+1}\pi_{t+1}^{\circ}\left(\varphi_{t+1}^r\left(1-\delta\left(u_{t+1}\right)\right)-\left(r_{t+1}^k u_{t+1}-\Psi\left(u_{t+1}\right)\right)\right)\right], \text{ onde } \Theta_{t,t+1} = \beta\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}$$

$$\varphi_t^r - \beta E_t\left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\pi_{t+1}^{\circ}\left(\varphi_{t+1}^r\left(1-\delta\left(u_{t+1}\right)\right)-\left(r_{t+1}^k u_{t+1}-\Psi\left(u_{t+1}\right)\right)\right)\right] = 0 \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \bar{\varphi}^r - \beta\left(\bar{\varphi}^r(1-\delta)-\bar{r}^k\right)+\left(\varphi_t^r-\bar{\varphi}^r\right)-\beta\frac{1}{\bar{\lambda}}\left(\bar{\varphi}^r(1-\delta)-\bar{r}^k\right)E_t\left[\left(\lambda_{t+1}-\bar{\lambda}\right)\right]-\ldots$$

$$\ldots-\beta\left(\bar{\varphi}^r(1-\delta)-\bar{r}^k\right)E_t\left[\pi_{t+1}\right]+\beta\frac{1}{\bar{\lambda}}\left(\bar{\varphi}^r(1-\delta)-\bar{r}^k\right)\left(\lambda_t-\bar{\lambda}\right)-\ldots$$

$$\ldots-\beta(1-\delta)E_t\left[\left(\varphi_{t+1}^r-\bar{\varphi}^r\right)\right]+\beta E_t\left[\left(r_{t+1}^k-\bar{r}^k\right)\right]+\beta\underbrace{\left(\bar{r}^k-\left.\frac{d\Psi}{du_t}\right|_{SS}\right)}_{0}E_t\left(u_{t+1}-1\right)=0\Rightarrow\ldots$$

$$\ldots\Rightarrow\hat{\varphi}_t^r-\beta\left((1-\delta)-\frac{\bar{r}^k}{\bar{\varphi}^r}\right)E_t\left[\left(\hat{\lambda}_{t+1}-\hat{\lambda}_t+\pi_{t+1}\right)\right]-\beta(1-\delta)E_t\left[\hat{\varphi}_{t+1}^r\right]+\beta\frac{\bar{r}^k}{\bar{\varphi}^r}E_t\left[\hat{r}_{t+1}^K\right]=0\Rightarrow\ldots$$

$$\ldots\Rightarrow$$

$$\hat{\varphi}_t^r-\beta(1-\delta)E_t\left[\hat{\varphi}_{t+1}^r\right]=\beta\left((1-\delta)-\frac{\bar{r}^k}{\bar{\varphi}^r}\right)E_t\left[\left(\hat{\lambda}_{t+1}-\hat{\lambda}_t+\pi_{t+1}\right)\right]-\beta\frac{\bar{r}^k}{\bar{\varphi}^r}E_t\left[\hat{r}_{t+1}^k\right]$$

Só que, de [1.2], $\lambda_t = \beta R_t E_t\left[\lambda_{t+1}\right] \Rightarrow \hat{\lambda}_t = \hat{R}_t + E_t\left[\hat{\lambda}_{t+1}\right]$. Adicionalmente, $\bar{\varphi}^r - \beta\left(\bar{\varphi}^r(1-\delta)-\bar{r}^k\right)=0 \Rightarrow \bar{\varphi}^r = \beta\bar{\varphi}^r(1-\delta)-\beta\bar{r}^k \Rightarrow \frac{1}{\beta}=(1-\delta)-\frac{\bar{r}^k}{\bar{\varphi}^r}$. Logo a expressão pode ser reescrita como:

$$\hat{\varphi}_t^r-\beta(1-\delta)E_t\left[\hat{\varphi}_{t+1}^r\right]=-\hat{R}_t+E_t\left[\pi_{t+1}\right]+\left(1-\beta(1-\delta)\right)E_t\left[\hat{r}_{t+1}^k\right] \qquad [8.14]$$

De [23] escrito em termos reais:

$$1=-\varphi_t^r\left(1-S\left(\varepsilon_t^I\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right)+\varphi_t^r\frac{\partial S}{\partial(\arg S)}\frac{\varepsilon_t^I I_t}{I_{t-1}}-\beta E_t\left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\pi_{t+1}^{\circ}\varphi_{t+1}^r\frac{\partial S}{\partial(\arg S)}\frac{\varepsilon_{t+1}^I\left(I_{t+1}\right)^2}{\left(I_t\right)^2}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_t^r\left[\left(1-S\left(\varepsilon_t^I\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right)-\frac{\partial S}{\partial(\arg S)}\frac{\varepsilon_t^I I_t}{I_{t-1}}\right]+\beta E_t\left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\pi_{t+1}^{\circ}\varphi_{t+1}^r\frac{\partial S}{\partial(\arg S)}\frac{\varepsilon_{t+1}^I\left(I_{t+1}\right)^2}{\left(I_t\right)^2}\right]+1=0$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{I}_t=\frac{1}{1+\beta}\hat{I}_{t-1}+\frac{\beta}{1+\beta}E_t\left[\hat{I}_{t+1}\right]+\frac{\lozenge}{1+\beta}\hat{Q}_t-\hat{\varepsilon}_t^I+\beta E_t\left[\hat{\varepsilon}_{t+1}^I\right] \qquad [8.15]$$

onde se define $\lozenge=\dfrac{1}{\left.\dfrac{\partial^2 S}{\partial(\arg S)^2}\right|_{SS}}$.

De [14]: $Y_{A,t}=(1-\phi)Y_t\left(\dfrac{P_{A,t}}{P_t}\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}}\Rightarrow\hat{Y}_{A,t}=\hat{Y}_t-\dfrac{1+\psi}{\psi}\hat{p}_{A,t}$

De [15]:

$$Y_{T,t}=\gamma\phi Y_t\left(\frac{P_{L,t}}{P_t}\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}}\left(\frac{P_{T,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}}\Rightarrow\hat{Y}_{T,t}=\hat{Y}_t-\frac{1+\psi}{\psi}\hat{p}_{L,t}-\frac{1+\eta}{\eta}\left(\hat{p}_{T,t}-\hat{p}_{L,t}\right)$$

De [16]:

$$Y_{NT,t}=(1-\gamma)\phi Y_t\left(\frac{P_{L,t}}{P_t}\right)^{-\frac{1+\psi}{\psi}}\left(\frac{P_{NT,t}}{P_{L,t}}\right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}}\Rightarrow\hat{Y}_{NT,t}=\hat{Y}_t-\frac{1+\psi}{\psi}\hat{p}_{L,t}-\frac{1+\eta}{\eta}\left(\hat{p}_{NT,t}-\hat{p}_{L,t}\right)$$

onde:

- $\left(P_t\right)^{-\frac{1}{\psi}}=\phi\left(P_{L,t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}+(1-\phi)\left(P_{A,t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}\Rightarrow$ ([17]) implica $0=\phi\hat{p}_{L,t}+(1-\phi)\hat{p}_{A,t}$.

- $\left(P_{L,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}}=\gamma\left(P_{T,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}}+(1-\gamma)\left(P_{NT,t}\right)^{-\frac{1}{\eta}}$ ([18]) implica $\hat{p}_{L,t}=\gamma\hat{p}_{T,t}+(1-\gamma)\hat{p}_{NT,t}$.

• Cálculo da aproximação de primeira ordem da expressão para a demanda total por cestas de bens *tradables* produzidos na economia doméstica:

$$Y_{T,t}^{tot}=Y_{T,t}+Y_{T,t}^*\Rightarrow Y_{T,t}^{tot}-\overline{Y}_H^{tot}=\left(Y_{T,t}-\overline{Y}_H\right)+\left(Y_{T,t}^*-\overline{Y}_H^*\right)\Rightarrow\ldots$$

$$\ldots\Rightarrow\frac{Y_{T,t}^{tot}-\overline{Y}_T^{tot}}{\overline{Y}_T^{tot}}=\frac{\overline{Y}_T}{\overline{Y}_T^{tot}}\frac{Y_{T,t}-\overline{Y}_T}{\overline{Y}_T}+\frac{\overline{Y}_T^*}{\overline{Y}_T^{tot}}\frac{Y_{T,t}^*-\overline{Y}_T^*}{\overline{Y}_T^*}\Rightarrow\hat{Y}_{T,t}^{tot}=\frac{\overline{Y}_T}{\overline{Y}_T^{tot}}\hat{Y}_{T,t}+\frac{\overline{Y}_T^*}{\overline{Y}_T^{tot}}\hat{Y}_{T,t}^*$$

Mas $\overline{Y}_T^{tot}=\overline{Y}_T+\overline{Y}_T^*\Rightarrow 1=\dfrac{\overline{Y}_T}{\overline{Y}_T^{tot}}+\dfrac{\overline{Y}_T^*}{\overline{Y}_T^{tot}}\Rightarrow 1-\dfrac{\overline{Y}_T^*}{\overline{Y}_T^{tot}}=\dfrac{\overline{Y}_T}{\overline{Y}_T^{tot}}$. Logo:

$$Y_{T,t}^{tot} = Y_{T,t} + Y_{T,t}^{*} \Rightarrow \hat{Y}_{T,t}^{tot} = \left(1 - \frac{\overline{Y}_T^{*}}{\overline{Y}_T^{tot}}\right)\hat{Y}_{T,t} + \frac{\overline{Y}_T^{*}}{\overline{Y}_T^{tot}}\hat{Y}_{T,t}^{*}$$

• Cálculo da aproximação de primeira ordem da expressão para a demanda externa por cestas de bens *tradables* produzidos na economia doméstica:

De [12]:

$$Y_{T,t}^{*} = \left(\frac{P_{T,t}}{e_t P_t^{*}}\right)^{-\frac{1+\tau^{*}}{\tau^{*}}} Y_t^{*} \Rightarrow Y_{T,t}^{*} = \left(\frac{P_{T,t}}{P_t}\frac{P_t}{e_t P_t^{*}}\right)^{-\frac{1+\tau^{*}}{\tau^{*}}} Y_t^{*} \Rightarrow Y_{T,t}^{*} = \left(\frac{p_{T,t}}{e_t^{r}}\right)^{-\frac{1+\tau^{*}}{\tau^{*}}} Y_t^{*} \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \hat{Y}_{T,t}^{*} = \hat{Y}_t^{*} - \frac{1+\tau^{*}}{\tau^{*}}\left(\hat{p}_{T,t} - \hat{e}_t^{r}\right)$$

• Cálculo da aproximação de primeira ordem da condição usos = recursos da economia ([35]):

$$Y_t = C_t^{tot} + I_t + G_t + \Psi(u_t)\tilde{K}_{t-1}^{s} + \left(e_t P_{B,t}^{*}\frac{B_t^{*}}{P_t} - e_t\frac{B_{t-1}^{*}}{P_t}\right) + \left(\frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t}Q_t - \frac{P_{T,t}}{P_t}Y_{T,t}^{*}\right)$$

onde também se define $\chi_t = \left(e_t P_{B,t}^{*}\frac{B_t^{*}}{P_t} - e_t\frac{B_{t-1}^{*}}{P_t}\right) + \left(\frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t}Q_t - \frac{P_{T,t}}{P_t}Y_{T,t}^{*}\right)$ (esta variável pode ser vista como o resultado do balanço de pagamentos da economia doméstica medido em termos reais). Continuando...

$$Y_t = C_t^{tot} + G_t + I_t + \Psi(u_t)K_{t-1}^{tot} + \chi_t \Rightarrow Y_t - C_t^{tot} - G_t - I_t - \Psi(u_t)K_t^{tot} - \chi_t = 0 \Rightarrow \ldots$$

Como...

$$Y_t - C_t^{tot} - G_t - I_t - \Psi(u_t)K_{t-1}^{tot} - \chi_t = \overline{Y} - \overline{C}^{tot} - \overline{I} - \overline{G} - \Psi(1)\overline{K}^{tot} - \overline{\chi} + \ldots$$

$$\ldots + \left(Y_t - \overline{Y}\right) - \left(C_t^{tot} - \overline{C}^{tot}\right) - \left(I_t - \overline{I}\right) - \left(G_t - \overline{G}\right) - \ldots$$

$$\ldots - \left.\frac{d\Psi}{du_t}\right|_{SS}\overline{K}^{tot}\cancelto{0}{(u_t - 1)} - \Psi(1)\left(K_{t-1}^{tot} - \overline{K}^{tot}\right) - \left(\chi_t - \overline{\chi}\right) = \ldots$$

$$\ldots = \left(Y_t - \overline{Y}\right) - \left(C_t^{tot} - \overline{C}^{tot}\right) - \left(I_t - \overline{I}\right) - \left(G_t - \overline{G}\right) - \left.\frac{d\Psi}{du_t}\right|_{SS}\overline{K}^{tot}(u_t - 1) - \left(\chi_t - \overline{\chi}\right)$$

segue que...

$$\hat{Y}_t - \frac{\overline{C}^{tot}}{\overline{Y}}\hat{C}_t^{tot} - \frac{\overline{I}}{\overline{Y}}\hat{I}_t - \frac{\overline{G}}{\overline{Y}}\hat{G}_t - \overline{r}^{k}\frac{\overline{K}}{\overline{Y}}\hat{u}_t - \frac{\chi_t}{\overline{Y}} = 0$$

onde se supõe que $\bar{\chi} = 0$, o que equivale a dizer que o resultado do balanço de pagamentos deve ser zero em *steady-state* (também são usados os resultados $\bar{K}^{tot} = \bar{K}$ e $\left.\frac{d\Psi}{du_t}\right|_{SS} = \bar{r}^k$). Indo um pouco mais longe e supondo BP zero para todo t ($\chi_t = 0 \ \forall t$), fica-se simplesmente com...

$$\hat{Y}_t - \frac{\bar{C}^{tot}}{\bar{Y}}\hat{C}_t^{tot} - \frac{\bar{G}}{\bar{Y}}\hat{G}_t - \bar{r}^k\frac{\bar{K}}{\bar{Y}}\hat{u}_t - \frac{\bar{K}}{\bar{Y}}\frac{\bar{I}}{\bar{K}}\hat{I}_t = 0$$

Exigir que o balanço de pagamentos da economia doméstica seja zero para todo *t* equivale a dizer que uma balança comercial deficitária deve ser necessariamente financiada por uma queda no valor dos "direitos" que os residentes da economia doméstica possuem no resto do mundo, ou mesmo pela cessão de "direitos" a estrangeiros.

Pois bem, nesse caso... (Obs.: lembrar que $b_t^* = \frac{B_t^*}{P_t^*}$, $P_{T,t}^{\times} = e_t P_{T,t}^*$ e $P_{B,t}^* = \frac{1}{\theta_t R_t^*}$)

$$\chi_t = \left(e_t P_{B,t}^* \frac{B_t^*}{P_t} - e_t \frac{B_{t-1}^*}{P_t}\right) + \left(\frac{P_{T,t}^{\times}}{P_t}Q_t - \frac{P_{T,t}}{P_t}Y_{T,t}^*\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{e_t P_t^*}{P_t}P_{B,t}^*\frac{B_t^*}{P_t^*} - \frac{e_t P_t^*}{P_t}\frac{B_{t-1}^*}{P_{t-1}^*}\frac{P_{t-1}^*}{P_t^*}\right) + \left(\frac{e_t P_{T,t}^*}{P_t}Q_t - \frac{P_{T,t}}{P_t}Y_{T,t}^*\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{b_t^*}{\theta_t R_t^*} - \frac{b_{t-1}^*}{\pi_t^{*,\circ}}\right) + \left(p_{T,t}^* Q_t - \frac{p_{T,t}}{e_t^r}Y_{T,t}^*\right) = 0$$

→

$$\frac{b_t^*}{\theta_t R_t^*} - \frac{b_{t-1}^*}{\pi_t^{*,\circ}} = \frac{\bar{b}^*}{\bar{\theta}\bar{R}^*} - \bar{b}^* + \frac{1}{\bar{\theta}\bar{R}^*}\left(b_t^* - \bar{b}^*\right) - \frac{\bar{b}^*}{\bar{R}^*}\frac{1}{\bar{\theta}^2}\left(\theta_t - \bar{\theta}\right) - \frac{\bar{b}^*}{\bar{\theta}}\frac{1}{\left(\bar{R}^*\right)^2}\left(R_t^* - \bar{R}^*\right) - \ldots$$

$$\ldots - \left(b_{t-1}^* - \bar{b}^*\right) + \bar{b}^*\pi_t^* + O^2$$

$$\Rightarrow \frac{b_t^*}{\theta_t R_t^*} - \frac{b_{t-1}^*}{\pi_t^{*,\circ}} = \frac{\bar{b}^*}{\bar{\theta}\bar{R}^*} - \bar{b}^* + \frac{\bar{b}^*}{\bar{\theta}\bar{R}^*}\hat{b}_t^* - \frac{\bar{b}^*}{\bar{\theta}\bar{R}^*}\hat{\theta}_t - \frac{\bar{b}^*}{\bar{\theta}\bar{R}^*}\hat{R}_t^* - \ldots$$

$$\ldots - \bar{b}^*\hat{b}_{t-1}^* + \bar{b}^*\pi_t^* + O^2 \qquad \text{[a]}$$

$$\rightarrow\; p_{T,t}^{*}Q_t - \frac{p_{T,t}}{e_t^r}Y_{T,t}^{*} = \overline{p}_T^{*}\overline{Q} - \frac{\overline{p}_T}{\overline{e}^r}\overline{Y}_T^{*} + \overline{Q}\left(p_{T,t}^{*} - \overline{p}_T^{*}\right) + \overline{p}_T^{*}\left(Q_t - \overline{Q}\right) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{\overline{Y}_T^{*}}{\overline{e}^r}\left(p_{T,t} - \overline{p}_T\right) - \frac{\overline{p}_T}{\overline{e}^r}\left(Y_{T,t}^{*} - \overline{Y}_T^{*}\right) + \frac{\overline{p}_T}{\left(\overline{e}^r\right)^2}\overline{Y}_T^{*}\left(e_t^r - \overline{e}^r\right) + O^2 \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow p_{T,t}^{*}Q_t - \frac{p_{T,t}}{e_t^r}Y_{T,t}^{*} = \overline{p}_T^{*}\overline{Q} - \frac{\overline{p}_T}{\overline{e}^r}\overline{Y}_T^{*} + \overline{p}_T^{*}\overline{Q}\hat{p}_{T,t}^{*} + \overline{p}_T^{*}\overline{Q}\hat{Q}_t - \ldots$$

$$\ldots - \frac{\overline{p}_T\overline{Y}_T^{*}}{\overline{e}^r}\hat{p}_{T,t} - \frac{\overline{p}_T\overline{Y}_T^{*}}{\overline{e}^r}\hat{Y}_{T,t}^{*} + \frac{\overline{p}_T\overline{Y}_T^{*}}{\overline{e}^r}\hat{e}_t^r + O^2 \qquad \text{[b]}$$

Juntando [a] e [b]:

$$\frac{\overline{b}^{*}}{\overline{\theta}\,\overline{R}^{*}} - \overline{b}^{*} + \frac{\overline{b}^{*}}{\overline{\theta}\,\overline{R}^{*}}\hat{b}_t^{*} - \frac{\overline{b}^{*}}{\overline{\theta}\,\overline{R}^{*}}\hat{\theta}_t - \frac{\overline{b}^{*}}{\overline{\theta}\,\overline{R}^{*}}\hat{R}_t^{*} - \overline{b}^{*}\hat{b}_{t-1}^{*} + \overline{b}^{*}\pi_t^{*} + \overline{p}_T^{*}\overline{Q} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{\overline{p}_T}{\overline{e}^r}\overline{Y}_T^{*} + \overline{p}_T^{*}\overline{Q}\hat{p}_{T,t}^{*} + \overline{p}_T^{*}\overline{Q}\hat{Q}_t - \frac{\overline{p}_T\overline{Y}_T^{*}}{\overline{e}^r}\hat{p}_{T,t} - \frac{\overline{p}_T\overline{Y}_T^{*}}{\overline{e}^r}\hat{Y}_{T,t}^{*} + \frac{\overline{p}_T\overline{Y}_T^{*}}{\overline{e}^r}\hat{e}_t^r = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\overline{b}^{*}}{\overline{\theta}\,\overline{R}^{*}}\hat{b}_t^{*} - \frac{\overline{b}^{*}}{\overline{\theta}\,\overline{R}^{*}}\hat{\theta}_t - \frac{\overline{b}^{*}}{\overline{\theta}\,\overline{R}^{*}}\hat{R}_t^{*} - \overline{b}^{*}\hat{b}_{t-1}^{*} + \overline{b}^{*}\pi_t^{*} + \ldots$$

$$\ldots + \overline{p}_T^{*}\overline{Q}\hat{p}_{T,t}^{*} + \overline{p}_T^{*}\overline{Q}\hat{Q}_t - \frac{\overline{p}_T\overline{Y}_T^{*}}{\overline{e}^r}\hat{p}_{T,t} - \frac{\overline{p}_T\overline{Y}_T^{*}}{\overline{e}^r}\hat{Y}_{T,t}^{*} + \frac{\overline{p}_T\overline{Y}_T^{*}}{\overline{e}^r}\hat{e}_t^r = 0$$

Suponha-se que $\overline{P}_B^{*} = \frac{1}{\overline{R}^{*}} = \beta$ em *steady-state* (o que equivale a dizer que $\overline{\theta} = 1$) e que isto acontece quando a relação entre o valor dos ativos externos e o valor do PIB é igual a um. Neste caso $\overline{e}\overline{B}^{*} = \overline{P}\overline{Y}$ e portanto $\overline{e}^r\overline{b}^{*} = \overline{Y}$. Logo, a expressão se transforma em:

$$\beta\overline{b}^{*}\left(\hat{b}_t^{*} - \hat{\theta}_t - \hat{R}_t^{*}\right) - \overline{b}^{*}\left(\hat{b}_{t-1}^{*} - \pi_t^{*}\right) = \frac{\overline{p}_T\overline{Y}_T^{*}}{\overline{e}^r}\left(\hat{p}_{T,t} + \hat{Y}_{T,t}^{*} - \hat{e}_t^r\right) - \overline{p}_T^{*}\overline{Q}\left(\hat{p}_{T,t}^{*} + \hat{Q}_t\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\beta\left(\hat{b}_t^{*} - \hat{\theta}_t - \hat{R}_t^{*}\right) - \left(\hat{b}_{t-1}^{*} - \pi_t^{*}\right) = \frac{\overline{p}_T\overline{Y}_T^{*}}{\overline{e}^r\overline{b}^{*}}\left(\hat{p}_{T,t} + \hat{Y}_{T,t}^{*} - \hat{e}_t^r\right) - \frac{\overline{e}^r\,\overline{p}_T^{*}\overline{Q}}{\overline{e}^r\overline{b}^{*}}\left(\hat{p}_{T,t}^{*} + \hat{Q}_t\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\beta\left(\hat{b}_t^{*} - \hat{\theta}_t - \hat{R}_t^{*}\right) - \left(\hat{b}_{t-1}^{*} - \pi_t^{*}\right) = \overline{p}_T\frac{\overline{Y}_T^{*}}{\overline{Y}}\left(\hat{p}_{T,t} + \hat{Y}_{T,t}^{*} - \hat{e}_t^r\right) - \overline{e}^r\,\overline{p}_T^{*}\frac{\overline{Q}}{\overline{Y}}\left(\hat{p}_{T,t}^{*} + \hat{Q}_t\right)$$

• Linearizacão das equações que definem a demanda total por fatores:

$$K_t = K_{T,t} + K_{NT,t} + K_{A,t}\,, \quad \text{com} \quad K_{T,t} = \int_0^1 K_{j,T,t}dj\,, \quad K_{NT,t} = \int_0^1 K_{j,NT,t}dj \quad \text{e}$$

$$K_{A,t} = \int_0^1 K_{j,A,t}dj$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{K}_t = \frac{\overline{K}_T}{\overline{K}}\hat{K}_{T,t} + \frac{\overline{K}_{NT}}{\overline{K}}\hat{K}_{NT,t} + \frac{\overline{K}_A}{\overline{K}}\hat{K}_{A,t}\,, \text{ onde } \frac{\overline{K}_T}{\overline{K}} + \frac{\overline{K}_{NT}}{\overline{K}} + \frac{\overline{K}_A}{\overline{K}} = 1$$

Analogamente:

$$\hat{L}_t = \frac{\overline{L}_T}{\overline{L}}\hat{L}_{T,t} + \frac{\overline{L}_{NT}}{\overline{L}}\hat{L}_{NT,t} + \frac{\overline{L}_A}{\overline{L}}\hat{L}_{A,t}\,, \text{ onde } \frac{\overline{L}_T}{\overline{L}} + \frac{\overline{L}_{NT}}{\overline{L}} + \frac{\overline{L}_A}{\overline{L}} = 1$$

$$\hat{Q}_t = \frac{\overline{Q}_T}{\overline{Q}}\hat{Q}_{T,t} + \frac{\overline{Q}_{NT}}{\overline{Q}}\hat{Q}_{NT,t} + \frac{\overline{Q}_A}{\overline{Q}}\hat{Q}_{A,t}\,, \text{ onde } \frac{\overline{Q}_T}{\overline{Q}} + \frac{\overline{Q}_{NT}}{\overline{Q}} + \frac{\overline{Q}_A}{\overline{Q}} = 1$$

• Linearizacão das equações que definem o consumo da população do tipo *RC* e sua relação com o consumo agregado:

[1]: $P_t\,C_t^c = W_t^{min} \Rightarrow C_t^c = w_t^{min} \Rightarrow \hat{C}_t^c = \hat{w}_t^{min}$

[2]:

$$C_t^{tot} = \int_0^1 C_{i,t}di + \int_0^{\zeta} C_{i,t}^c di \Rightarrow C_t^{tot} = C_t + \zeta C_t^c \Rightarrow \left(C_t^{tot} - \overline{C}^{tot}\right) = \left(C_t - \overline{C}\right) + \zeta\left(C_t^c - \overline{C}^c\right) \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \left(\frac{C_t^{tot} - \overline{C}^{tot}}{\overline{C}^{tot}}\right) = \frac{\overline{C}}{\overline{C}^{tot}}\left(\frac{C_t - \overline{C}}{\overline{C}}\right) + \zeta\,\frac{\overline{C}^c}{\overline{C}^{tot}}\left(\frac{C_t^c - \overline{C}^c}{\overline{C}^c}\right) \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \hat{C}_t^{tot} = \frac{\overline{C}}{\overline{C}^{tot}}\hat{C}_t + \zeta\,\frac{\overline{C}^c}{\overline{C}^{tot}}\hat{C}_t^c$$

onde $\overline{C}^{tot} = \overline{C} + \zeta\overline{C}^c \Rightarrow 1 = \frac{\overline{C}}{\overline{C}^{tot}} + \zeta\,\frac{\overline{C}^c}{\overline{C}^{tot}}$ (ver a análise do *steady-state*).

REFERÊNCIAS

ADOLFSON, M.; LASÉEN, S.; LINDÉ, J.; VILLANI, M. Evaluating an estimated new Keynesian small open economy model. **Journal of Economic Dynamics and Control**, 32: 2690–2721, 2008.

______. RAMSES: a new general equilibrium model for monetary policy analysis. **Risksbank Economic Review**, Vol. 2, 2007a.

ADOLFSON, M.; ADERSSON, M.; LINDÉ, J.; VILLANI, M.; VREDIN, A. Modern forecasting models in action: improving macroeconomic analyses at central banks. **International Journal of Central Banking**, vol. 3, n. 4, p. 111-144, December, 2007b.

ALVAREZ-LOIS, P.; HARRISON, R.; PISCITELLI, L.; SCOTT, A. On the application and use of DSGE models. **Journal of Economic Dynamics and Control**, 32: 2428–2452, 2008.

AN, S.; SCHORFHEIDE, F. Bayesian analysis of DSGE models. **Econometric Reviews**, 26 (2-4): 113–172, 2007.

ARAÚJO, M.; BUGARIN, M.; MUINHOS, M.; SILVA, J. R. **The effect of adverse supply shocks on monetary policy and output**, Texto para Discussão n. 103, Banco Central do Brasil, 2006.

AREOSA, W. D.; MEDEIROS, M. Inflation dynamics in Brazil: the case of a small open economy. **Brazilian Review of Econometrics**, 27(1), 131–166, 2007.

BERNANKE, B.; GERTLER, M.; GILCHRIST, S. The financial accelerator in a quantitative business cycle framework. *In*: TAYLOR, J.; M. WOODFORD (Eds.), **Handbook of Macroeconomics**, vol. 1, 1341-1393, 1999.

BEVILAQUA, A.; MESQUITA, M.; MINELLA, A. **Brazil**: taming inflation expectations. Texto para Discussão n. 129, Banco Central do Brasil, 2007.

BLANCHARD, O. J.; KAHN, C. M. The solution of linear difference models under rational expectations. **Econometrica**, vol. 48, n. 5, p. 1305-1312, 1980.

BRZOZA-BRZEZINA, M.; MAKARSKI, K. **Credit crunch in a small open economy.** MPRA Paper No. 18595, 2009.

CALVO, G. A. Staggered price setting in a utility-maximizing framework. **Journal of Monetary Economics**, 12: 383–398, 1983.

CANOVA, F.; SALA, L. **Back to square one: identification issues in DSGE models.** Documentos de Trabajo n. 0715, Banco de España, 2007.

CARNEIRO, D. E DUARTE, P. **Inércia de juros e Regras de Taylor**: explorando as funções de resposta a impulso em um modelo de equilíbrio geral com parâmetros estilizados para o Brasil. Texto para Discussão n. 450, Departamento de Economia, PUC - Rio, julho de 2001.

CARROLL, C. Requiem for the representative consumer? Aggregate implications of microeconomic consumption behavior. **American Economic Review**, vol. 90, n. 2, 110-115, 2000.

CATÃO, L.; LAXTON, D.; PAGAN, A. **Monetary transmission in an emerging targeter: the case of Brazil**. IMF Working Paper 08-191, 2008.

CESPEDES, B.; LIMA, E.; MAKA, A. Monetary policy, inflation and the level of economic activity in Brazil after the real plan: stylized facts from SVAR models. **Revista Brasileira de Economia**, 62(2): 123-160, Abr. - Jun., 2008.

CHRISTENSEN, I.; DIB, A. The financial accelerator in an estimated New Keynesian model. **Review of Economic Dynamics**, 11, 155-178, 2008.

CHRISTIANO, L.; EICHEMBAUM, M.; EVANS, C. Nominal rigidities and the dynamic effects to a shock of monetary policy. **Journal of Political Economy**, 113: 1-45, 2005.

CHRISTOFFEL, K., COENEN, G.; WARNE, A. **The new Area-Wide Model of the euro area**: a micro-founded Open-Economy Model for forecasting and policy analysis. Working Paper 944, European Central Bank, 2008.

CLARIDA, R.; GALI, J.; GERTLER, M. Monetary policy rules in practice: some international evidence. **European Economic Review**, 42: 1033-1067, 1998.

DIB, A. **Monetary policy in estimated models of small open and closed economies.** Bank of Canada Working Paper n. 27, 2003.

ELEKDAG, S.; JUSTINIANO, A.; TCHAKAROV, I. **An estimated small open economy model of the financial accelerator.** IMF Working Paper 05/44, 2005.

ELLERY JR. R.; GOMES, V.; SACHSIDA, A. Business cycle fluctuations in Brazil. **Revista Brasileira de Economia**, 56(2):269-308, Abr. – Jun., 2002.

FERNANDES, M.; TORO, J. O mecanismo de transmissão monetária na economia brasileira pós-plano real. **Revista Brasileira de Economia**, 59(1): 5-32, 2005.

FUKAC, M.; PAGAN, A. **Issues in adopting DSGE models for use in the policy process.** CAMA Working Paper Series 10/2006, The Australian National University, 2006.

FUJIWARA, I.; HARA N.; HIROSE, Y.; TERANISHI, Y. **The Japanese Economic Model (JEM)**. Monetary and Economic Studies, May, 2005.

GILCHRIST, S.; ORTIZ, A.; ZAKRAJSEK, E. **Credit risk and the macroeconomy: evidence from an estimated DSGE model.** Trabalho apresentado na Conferência "Financial Markets and Monetary Policy", Federal Reserve Board, Washington D.C., June 4 - 5, 2009.

GOUVEA, S.; MINELLA, A.; SANTOS, R.; SOUZA-SOBRINHO, N.; SUGAHARA, T. **Samba: Stochastic Analytical Model with a Bayesian Approach** – DSGE Model Project for Brazil's Economy. Banco Central do Brasil, Research Department, X Seminar on Inflation Targeting, August 4th, 2008. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/Pec/Depep/Seminarios/2008_XSemAnualMetasInflBCB/Arquivos/2008_XSemAnualMetasInflBCB_AndreMinella.pdf>.

HARRISON, R.; NIKOLOV, K.; QUINN, M.; RAMSAY, G.; SCOTT, A.; THOMAS, R. **The Bank of England Quarterly Model.** Bank of England, 2005.

IACOVIELLO, M. House prices, borrowing constraints, and monetary policy in the business cycle. **American Economic Review**, 95(3), 739-764, 2005.

JUILLARD, M.; KARAM, P.; LAXTON, D.; PESENTI, P. **Welfare-based monetary policy rules in an estimated DSGE model of the US economy**. ECB Working Paper 613, 2006.

KANCZUK, F. Juros reais e ciclos reais brasileiros. **Revista Brasileira de Economia**, 56(2): 249-267, Abr. - Jun., 2002.

KING, R. G.; WATSON, M. W. The solution of singular linear difference systems under rational expectations. **International Economic Review**, vol. 39, n. 4, 1998.

KLEIN, P. Using the generalized Schur form to solve a multivariate linear rational expectations model. **Journal of Economic Dynamics and Control**, vol. 24, n. 10, 2000.

LEES, K.; MATHESON, T.; SMITH, C. **Open economy DSGE-VAR forecasting and policy analysis: head to head with the RBNZ published forecasts.** Reserve Bank of New Zealand Discussion Paper Series 2007/01, 2007.

MEDINA, J. P.; SOTO, C. **Model for analysis and simulations**: a small open economy DSGE for Chile. Conference Paper, Central Bank of Chile, 2006.

MINELLA, A. Monetary policy and inflation in Brazil (1975-2000): A VAR estimation. **Revista Brasileira de Economia**, 57(3):605–635, 2003.

MINELLA, A.; FREITAS, P. S.; GOLDFAJN, I.; MUINHOS, M. **Inflation targeting in Brazil**: lessons and challenges. Texto para Discussão n. 53, Banco Central do Brasil, 2003a.

______. **Inflation Targeting in Brazil**: constructing credibility under exchange rate volatility. Texto para Discussão n. 77, Banco Central do Brasil, 2003b.

MURCHISON, S. E RENNISON, A. **ToTEM**: The Bank of Canada's New Quarterly Projection Model. Technical Report 97, Bank of Canada, 2006.

PERES, M. A. F.; ELLERY, R. G. Efeitos dinâmicos dos choques fiscais do Governo Central no PIB do Brasil. **Pesquisa e Planejamento Econômico**, 39(2), 2009.

RATTO, M.; ROEGER, W.; IN'T VELD, J. An estimated open-economy DSGE model of the euro area with fiscal and monetary policy. **Economic Modelling**, 26: 222-233, 2009.

ROTEMBERG, J.; WOODFORD, M. An optimization-based econometric framework for the evaluation of monetary policy. *In:* BERNANKE, B. S.; ROTEMBERG, J. J. (Eds.), **NBER Macroeconomics Annual 1997**. MIT Press, Cambridge, p. 297-346, 1997.

RUGE-MURCIA, F. J. Methods to estimate dynamic stochastic general equilibrium models. **Journal of Economic Dynamics and Control**, 31: 2599 -2636, 2007.

SILVEIRA, M. A. C. **Using a Bayesian Approach to estimate and compare New Keynesian DSGE Models for the Brazilian economy**: the role for endogenous persistence. RBE, 62(3): 333-357, Jul. - Set., 2008.

SLOBODYAN, S.; WOUTERS, R. **Learning in an estimated medium-scale DSGE model**. Working Paper Series 396, CERGE-EI, 2009.

SMETS, F.; WOUTERS, R. An estimated dynamic stochastic general equilibrium model of the euro area. **Journal of the European Economic Association**, MIT Press, vol. 1(5), 2003.

TAYLOR, J. **Discretion versus policy rules in practice**. Carnegie-Rochester Series on Public Policy, 39, 195 – 214, North-Holland, Amsterdam, 1993.

TOVAR, E. C. **DSGE models and central Banks.** Bank for International Settlements, BIS Working Paper n. 258, 2008.

WOODFORD, M. **Interest and prices:** foundations of a Theory of Monetary Policy. Princeton University Press, 2003.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

ALVES, S.; AREOSA, W. **Targets and inflation dynamics.** Texto para Discussão n. 100, Banco Central do Brasil, 2005.

BLINDER, A. S.; CANETTI, E. R. D.; LEBOW, D.; RUDD, J. **Asking about prices:** a new approach to understanding price stickiness. New York: Russel Sage Foundation, 1998.

BOGDANSKI, J.; TOMBINI, A.; WERLANG, S. **Implementing inflation targeting in Brazil.** Texto para Discussão n. 1, Banco Central do Brasil, 2000.

BONOMO, M.; BRITO, R. **Regras monetárias e dinâmica macroeconômica no Brasil**: uma abordagem de expectativas racionais. RBE, 56(4):551-589, Out. - Dez., 2002.

CHRISTIANO, L.; EICHEMBAUM, M.; EVANS, C. Monetary policy shocks: what have we learned and to what end? *In*: TAYLOR, J. B.; WOODFORD, M. (Eds.). **Handbook of Macroeconomics**. North-Holland, Amsterdam, 1998.

CLARIDA, R.; GALI, J.; GERTLER, M. The science of monetary policy: a new Keynesian perspective. **Journal of Economic Literature**, 37: 1661-1707, 1999.

GALI, J.; MONACELLI, T. Monetary policy and exchange rate volatility in a small open economy. **Review of Economic Studies**, 72: 707-734, 2005.

GALI, J.; GERTLER, M.; LOPEZ-SALIDO, J. **European Inflation Dynamics.** NBER Working Paper n. 8218, 2001.

GIANNONI, M.; WOODFORD, M. Optimal inflation targeting rules. *In:* BERNANKE, B. S.; WOODFORD, M. (Eds.). **Inflation Targeting**. Chicago: University of Chicago Press, 2003.

GRIFFOLIO, T. M. **DYNARE user manual**: an introduction to the solution and estimation of DSGE models. Unpublished Manuscript, 2007.

KANCZUK, F. **Choques de oferta em modelos de metas inflacionárias**. RBE, 58(4): 559-581, Out. - Dez., 2004.

MARTINS, B. **Calibrando e simulando o modelo do acelerador financeiro para a economia brasileira**. Dissertação de Mestrado, Escola de Pós-Graduação em Economia – EPGE, Fundação Getúlio Vargas, 2005.

MINELLA, A.; SOUZA-SOBRINHO, N. **Monetary policy in Brazil through the lens of a Semi-Structural Model.** Texto para Discussão n. 181, Banco Central do Brasil, 2009.

MONACELLI, T. **Monetary policy in a low pass-through environment.** European Central Bank, Working Paper n. 227, 2003.

SCHMIDTT-GROHÉ, S.; URIBE, M. Closing small open economy models. **Journal of International Economics**, 61: 163-185, 2003.

TOMBINI, A.; ALVES, S. **The recent Brazilian disinflation process and costs.** Texto para Discussão n. 109, Banco Central do Brasil, 2006.

EDITORIAL

Coordenação
Iranilde Rego

Revisão
Cláudio Passos de Oliveira
Luciana Dias Jabbour
Marco Aurélio Dias Pires
Reginaldo da Silva Domingos
Leonardo Moreira de Souza (estagiário)
Maria Angela de Jesus Silva (estagiária)

Editoração
Bernar José Vieira
Cláudia Mattosinhos Cordeiro
Everson da Silva Moura
Renato Rodrigues Bueno

Livraria do Ipea
SBS – Quadra 1 – Bloco J – Ed. BNDES, 9º andar 70076-900 – Brasília – DF
Fone: (61) 3315-5336
Correio eletrônico: livraria@ipea.gov.br
Tiragem: 130 exemplares