IPEA INSTITUTO DE PLANEJAMENTO ECONÔMICO E SOCIAL

TEXTOS PARA DISCUSSÃO INTERNA

Nº 11

"Um Modelo de Comportamento do Fundo do Crédito Educativo"

Alberto de Mello e Souza
e Clóvis de Faro

Novembro de 1979

UM MODELO DE COMPORTAMENTO DO FUNDO DO CRÉDITO EDUCATIVO

Alberto de Mello e Souza
e Clóvis de Faro

A implementação tardia do Crédito Educativo no Brasil, embora possa ser explicada pela predominância, até 1969, das matrículas nas universidades públicas e gratuitas, aliada a uma dimensão modesta do ensino superior, nunca foi uma reivindicação de grupos estudantis ou de partidos políticos. Talvez por ter essa idéia sido concebida e implementada no âmbito do Executivo, sem ter havido um debate mais amplo a respeito, é que o modelo operacional adotado entre nós apresenta inconvenientes que só podem ser suprimidos através de uma reformulação bastante ampla. Neste sentido, são apresentadas sugestões em outro trabalho.[1]

Aqui, nossa preocupação é desenvolver um modelo que descreva a evolução do fundo de recursos utilizados pelo Crédito Educativo. Desta forma, seria possível determinar, dadas as condições operacionais do Crédito Educativo e estimativas da sua demanda por estudantes e do custo por aluno-ano, o montante de recursos necessários para manter o fundo. Esta informação é importante, especialmente para os países menos desenvolvidos, pois é sabido que a limitação de recursos do Crédito Educativo para atender aos estudantes necessitados é, em boa parte, provocada

---

[1]Alberto de Mello e Souza e Clóvis de Faro, "Crédito Educativo e Ensino Pago: Sugestões para o Financiamento do Ensino Superior", Textos para Discussão Interna, nº 10, IPEA/INPES, setembro de 1979.

pelos elevados subsídios que fazem com que, de cada cruzeiro emprestado, apenas uma pequena fração retorne eventualmente ao fundo do Crédito Educativo.

Um exemplo desses problemas é dado pelo ICETEX, instituição pioneira que administra o Crédito Educativo na Colômbia, desde 1950. Os empréstimos em 1975 alcançaram a *124* milhões de pesos colombianos, enquanto os reembolsos previstos para 1978 seriam de *35* milhões.[1] Em decorrência da grande dependência de recursos orçamentários, os beneficiários representavam apenas *8%* da população estudantil. Embora a maioria dos países latino-americanos já disponha de programas de Crédito Educativo, o seu alcance é limitado pela disponibilidade de recursos, seriamente prejudicada pelos altos subsídios.

Dado o funcionamento recente do Crédito Educativo no Brasil, os problemas decorrentes do subsídio ainda não apareceram, pois poucos mutuários já começaram a amortizar a dívida. Entretanto, sendo de *15%* a.a. a taxa de juros nominal, a elevada taxa de inflação irá corroer inelutavelmente os recursos próprios com que o Crédito Educativo poderá contar no futuro. Assim é que, considerando-se de cinco anos o período de utilização do crédito e o prazo de amortização (este é, por dispositivo legal, igual ao período de utilização) e fixando em um ano o prazo de carência, uma taxa de inflação de *40%* a.a. significa que apenas *31%* do montante emprestado retornará eventualmente ao fundo. Se a taxa de inflação for de *30%* a.a., esta propor-

---

[1]Edgardo Boeninger K., Políticas Alternativas de Financiamiento de la Educación Superior, apresentado ao Seminário sobre Financiamento de Educação na América Latina, México, dezembro de 1978, pp. 84-89.

ção aumenta para *48%*. Isto equivale a um subsídio de *52%*, ao qual deve ser incorporado o custo de oportunidade do capital.

Embora acreditemos que deva ser cobrada a correção monetária integral, especialmente em face do aumento real dos salários dos universitários ocorrido em anos recentes, o importante é poder antever as conseqüências para o fundo de recursos de decisões de subsidiar os empréstimos educativos. Isto permite estimar as disponibilidades futuras do fundo e aquilatar os recursos orçamentários necessários ao atendimento das solicitações dos alunos. Em outras palavras, as conseqüências, sobre o estrangulamento do fundo, das decisões de subsidiar os empréstimos podem ser antecipadas, e medidas corretivas tomadas visando a impedir que o Crédito Educativo deixe de atender a parcelas significativas das gerações futuras por causa das condições generosas concedidas à geração atual.

Nos Estados Unidos, a preocupação com a implementação do Crédito Educativo concentrou-se quase que exclusivamente, na questão de saber a proporção da renda que o recipiente teria que pagar durante certo período para amortizar o empréstimo. Para tal, foram feitos estudos desagregados da evolução da renda dos graduados e contemplados casos especiais como o da mulher que trabalha meio expediente e o do problema conhecido como seleção adversa.[1] Não havia preocupações com o montante de recursos adicionais exigido pelo Crédito Educativo porque esses

---

[1]Karl Shell *et alii*, "The Educational Opportunity Bank: An Economic Analysis of a Contingent Repayment Loan Program for Higher Education", *National Tax Journal* (março de 1968).

recursos, dado o grande número de programas de bolsas-de-estudo já existentes, não teriam maior expressão relativa e porque era intenção que os subsídios fossem menores que o custo de oportunidade do capital.

Já na América Latina, estudos citados por Brodersohn mostram que o fundo do Crédito Educativo pode chegar a parcelas expressivas do PIB que, na prática, o inviabilizariam.[1] E Urosa esboçou um modelo capaz de analisar os fluxos de caixa do fundo.[2] Seu modelo é bem mais restrito que o aqui desenvolvido, pois não considera a possibilidade de custos educacionais crescentes nem detalha suficientemente a operação do fundo. Em conseqüência, perguntas como as relativas às condições de estabilidade do fundo e aos montantes dos subsídios contábil e econômico, abordadas por nós, ficam sem resposta.

O modelo aqui desenvolvido abarca três situações diferentes. Na primeira, adotamos a hipótese de que o custo-aluno é constante ao longo do curso para um mesmo mutuário, embora cresça a uma mesma taxa anual para os novos participantes do programa. Estes devem estar necessariamente iniciando os seus estudos. Essas duas hipóteses são relaxadas, respectivamente, nas segunda e terceira versões do modelo. O número de participantes cresce a uma taxa anual constante. Os prazos durante o qual

---

[1] Mario S. Brodersohn, Financiamiento Publico y Privado de la Educación en America Latina: Una Revision de sus Principales Fuentes, apresentado ao Seminário sobre Financiamento da Educação na América Latina, México D.F., dezembro de 1978.

[2] José Dominguez Urosa, Student Loan Institutions in Selected Developing Countries, Tese de Doutoramento (Harvard University, 1973).

é recebida a ajuda, de carência e amortização são dados, e a prestação é calculada com base em um sistema de pagamentos constantes (Tabela Price). A taxa de juros real cobrada dos mutuários e o custo de oportunidade do capital também são informações conhecidas.

A segunda versão do modelo trata da possibilidade dos custos serem crescentes, para todos os mutuários. Finalmente, consideramos o evento de os mutuários, no primeiro ano de funcionamento do fundo, estarem cursando qualquer série. Como será visto, os resultados relativos à primeira versão permanecem válidos nas duas últimas. A cada versão do modelo corresponderá um tópico deste trabalho, que se encerra com as principais conclusões obtidas.

1 - MODELO COM CUSTOS CRESCENTES APENAS PARA DIFERENTES COORTES

O número das prestações anuais é conhecido e seu montante é determinado pelo tamanho da dívida. Embora esta característica retrate fielmente a sistemática atual do Crédito Educativo, não exclui a consideração de programas onde a prestação é proporcional à renda dos mutuários. Neste caso, cálculos adicionais devem ser feitos, de maneira a transformar o sistema de prestações proporcionais à renda em seu equivalente de prestações fixas. Outrossim, consideramos apenas o custo médio por aluno e o prazo médio dos cursos, por ser irrelevante, para o comportamento do fundo, a dispersão dos valores individuais.

A definição das variáveis usadas é a seguinte:

x_k - número de mutuários que ingressam no k-ésimo ano de funcionamento do Crédito Educativo;

δ - taxa de crescimento anual constante, do número de mutuários;

$x_k = x_1 \; (1 + \delta)^{k-1}, \; k = 1, 2, \ldots;$

C_k - desembolso (custo) médio anual, a preços constantes, relativo a um mutuário que ingressa no k-ésimo ano do fundo. Este custo é constante, ao longo do curso, para os mutuários que ingressaram num mesmo período. Porém, varia a uma taxa de crescimento anual constante β, entre mutuários que ingressam em períodos distintos;

$C_k = C_1 \; (1 + \beta)^{k-1}, \; k = 1, 2, \ldots;$

n - duração média dos diferentes cursos, em anos;

c - prazo de carência, em anos;

m - período de amortização ou número de prestações anuais;

$X_{j,k}$ - desembolso no k-ésimo ano do fundo com mutuários no j-ésimo ano do curso $j = 1, 2, \ldots, n$ e $k = 1, 2, \ldots$

$X_{1,1} = x_1 \; C_1 \equiv X$

$$X_{j,k} = \begin{cases} C_{k-j+1} \; x_{k-j+1} = C_1 \; x_1 \; [(1+\delta) \; (1+\beta)]^{k-j} = X \; (1+\alpha)^{k-j} = \\ \qquad = X \gamma^{k-j}, \; k \geq j \text{ e } j = 1, 2, \ldots \text{ (sendo } \gamma = 1 + \alpha = \\ \qquad = 1 + \delta + \beta + \delta\beta) \\ 0, \text{ se } k < j; \end{cases}$$

D_k - desembolso líquido do fundo no k-ésimo ano;

$\bar{D}_k$ - desembolso líquido acumulado do fundo no k-ésimo ano;

i - taxa anual de juros, em termos reais, cobrada pelo fundo, (sendo $R = 1 + i$).

Supõe-se que tanto desembolsos como receitas ocorrem no final do período a que se referem.[1] O modelo não contempla desistência, repetência, ou inadimplência. Enquanto a taxa de evasão age no sentido de reduzir o parâmetro n (duração média dos cursos), a repetência atua em sentido oposto. A introdução da taxa de inadimplência esperada tornará maior o valor da prestação anual.

1.1 - Evolução do Fundo

Os comportamentos de D_k e $\bar{D}_k$ serão examinados em quatro fases distintas, que permitem descrever a evolução do fundo. Desta forma, pode-se responder à pergunta crucial sobre as condições necessárias para que o fundo tenha um ponto de equilíbrio. A primeira fase refere-se à evolução do fundo desde a sua implantação até, após n períodos, o término do curso pelos primeiros beneficiários.

I - $1 \leq k \leq n$

$$D_k = \sum_{j=1}^{k} X_{j,k} = X \sum_{j=1}^{k} \gamma^{k-j} = X \left[\frac{1 - \gamma^k}{1 - \gamma} \right] = X\, \gamma_{(k)} \qquad (1.1)$$

$$\bar{D}_k = \sum_{\ell=1}^{k} D_\ell = X \sum_{\ell=1}^{k} \gamma_{(\ell)} = X \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1 - \gamma^\ell}{1 - \gamma} = \frac{X}{1 - \gamma} \left\{ k - \frac{\gamma - \gamma^{k+1}}{1 - \gamma} \right\} =$$

$$= \frac{X}{(1 - \gamma)^2} \{k - \gamma\, (1 + k - \gamma^k)\} = X\, \bar{\gamma}_{(k)} \qquad (1.2)$$

---

[1] Enquanto é razoável supor que, eventualmente, a taxa de juros reais seja nula, iremos admitir que $\beta\delta \neq 0$.

Nos anos imediatamente posteriores, correspondentes ao período de carência dos primeiros beneficiários, os comportamentos de D_k e $\bar{D}_k$ são os seguintes:

II - $n + 1 \leq k \leq n + c$

$$D_k = \sum_{j=1}^{n} X_{j,k} = X \sum_{j=1}^{n} \gamma^{k-j} = X\, \gamma^{k-n} \sum_{j=1}^{n} \gamma^{n-j} = X\, \gamma^{k-n} \gamma_{(n)} \qquad (1.3)$$

$$\bar{D}_k = \sum_{\ell=1}^{k} D_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} D_\ell + \sum_{\ell=n+1}^{k} D_\ell = X\, \bar{\gamma}_{(n)} + X\, \gamma_{(n)} \sum_{\ell=n+1}^{k} \gamma^{\ell-n}$$

Portanto, o desembolso acumulado reflete o desembolso relativo aos estudantes ainda cursando e àqueles que já terminaram seus estudos. Após manipulações, obtêm-se:

$$\bar{D}_k = \frac{X}{(1-\gamma)^2} \left\{ n - \gamma \left[n + \gamma^{k-n} (1 - \gamma^n) \right] \right\} = X\, \bar{\gamma}_{(n,k-n)} \qquad (1.4)$$

O estágio seguinte da evolução do fundo corresponde ao período de amortização dos primeiros beneficiários. Neste estágio, iniciam-se os pagamentos feitos pelos ex-alunos.

III - $n + c + 1 \leq k \leq n + c + m$

A dívida, no fim do prazo de carência, dos que ingressaram no programa do Crédito Educativo na época $k=1$ e o valor da prestação anual que esses deverão pagar, respectivamente F_1 e p_1, são:

$$F_1 = (1+i)^c \{X (1+i)^{n-1} + X (1+i)^{n-2} + \ldots + X\} =$$

$$= R^c X \left[\frac{1 - R^n}{1 - R} \right] = R^c X R_{(n)} \equiv F \qquad (1.5)$$

$$p_1 = F\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-m}}\right] = R^c \times \left[\frac{1-R^n}{1-R}\right]\left[\frac{R-1}{1-R^{-m}}\right] =$$

$$= R^c \times \left[\frac{1-R^n}{R^{-m}-1}\right] = R^{m+c} \times \left[\frac{1-R^n}{1-R^m}\right] \equiv p \qquad (1.6)$$

Por extensão, tem-se que $F_k = \gamma^{k-1} F$ e $p_k = \gamma^{k-1} p$; $k = 1, 2, \ldots$

O desembolso líquido é agora composto dos desembolsos feitos com os beneficiários que estão cursando, menos as receitas provenientes das amortizações feitas pelos formados após o período de carência. Assim:

$$D_k = \sum_{j=1}^{n} X_{j,k} - \sum_{j=1}^{k-n-c} p_j = X\,\gamma^{k-n}\,\Upsilon_{(n)} - p \sum_{j=1}^{k-n-c} \gamma^{j-1} =$$

$$= X\,\gamma^{k-n}\,\Upsilon_{(n)} - p\,\Upsilon_{(k-n-c)} \qquad (1.7)$$

$$\bar{D}_k = \sum_{\ell=1}^{k} D_\ell = \sum_{\ell=1}^{n+c} D_\ell + \sum_{\ell=n+c+1}^{k} D_\ell = X\,\bar{\Upsilon}_{(n,c)} + \sum_{\ell=n+c+1}^{k} X\,\gamma^{\ell-n}\,\Upsilon_{(n)} -$$

$$- p \sum_{\ell=n+c+1}^{k} \Upsilon_{(\ell-n-c)} = X\,\bar{\Upsilon}_{(n,k-n)} - p\,\bar{\Upsilon}_{(k-n-c)} \qquad (1.8)$$

Finalmente, temos o estágio no qual os primeiros beneficiários já amortizaram integralmente a dívida:

IV - $k \geq n + c + m + 1$

$$D_k = \sum_{j=1}^{n} X_{j,k} - \sum_{j=1}^{m} p\,\gamma^{k-n-c-j} = X\,\gamma^{k-n}\,\Upsilon_{(n)} - \gamma^{k-m-n-c}\,p\,\Upsilon_{(m)} =$$

$$= \gamma^{k-n}\left[X\,\Upsilon_{(n)} - \gamma^{-m-c}\,p\,\Upsilon_{(m)}\right] \qquad (1.9)$$

$$\bar{D}_k = \sum_{\ell=1}^{k} D_\ell = \sum_{\ell=1}^{n+c+m} D_\ell + \sum_{\ell=n+c+m+1}^{k} D_\ell =$$

$$= X\,\bar{\gamma}_{(n,c+m)} - p\,\bar{\gamma}_{(m)} + \sum_{\ell=n+c+m+1}^{k} \gamma^{\ell-n}\left[X\,\gamma_{(n)} - \gamma^{-m-c}\,p\,\gamma_{(m)}\right] =$$

$$= X\,\bar{\gamma}_{(n,k-n)} - p\,\bar{\gamma}_{(m,k-n-c-m)} \qquad (1.10)$$

Deste estágio em diante, a expressão geral do comportamento do fundo permanece a mesma. Observemos que o sinal do desembolso líquido, D_k, para $k = n+c+m+\ell$ e $\ell = 1, 2, \ldots,$ é o mesmo sinal do desembolso líquido D_{n+c+m}. Isto porque

$$D_{n+c+m+\ell} = X\,\gamma^{c+m+\ell}\,\gamma_{(n)} - p\,\gamma^{\ell}\,\gamma_{(m)} = \gamma^{\ell}\,\{X\,\gamma^{c+m}\,\gamma_{(n)} - p\,\gamma_{(m)}\} =$$

$$= \gamma^{\ell}\,D_{n+c+m} \qquad (1.11)$$

1.2 - Condições de Estabilidade

O simples exame da expressão (1.11) permite concluir que:

$D_{n+c+m+\ell} \gtreqless 0$ se $D_{n+c+m} \gtreqless 0$

Temos, então, três distintas possibilidades:

a) $X\,\gamma^{m+c}\,\gamma_{(n)} > p\,\gamma_{(m)}$, $D_{n+c+m} > 0$ e $D_k > 0$ para $k \geq n + c + m$

Nestas condições, o desembolso líquido crescerá continuamente, à taxa $\gamma - 1$, tornando o fundo explosivo. O fundo crescerá a uma taxa variável que, no limite, tenderá para $\gamma - 1$.

b) $X\,\gamma^{m+c}\,\gamma_{(n)} = p\,\gamma_{(m)}$, $D_k = 0$ para $k \geq n + c + m$.

Agora, o desembolso acumulado ficará estacionário, com o valor

$$\bar{D}_{n+m+c} = \bar{D}_{n+m+c-1} = X\,\bar{\gamma}_{(n,m+c)} - p\,\bar{\gamma}_{(m)}$$

Existem três taxas que determinam a condição de estabilidade do fundo: de um lado, a taxa de juros e, de outro, as taxas de crescimento do custo médio e do número de mutuários. Dadas estas últimas, a taxa de juros de equilíbrio é a solução da equação:

$$X\ \gamma^{m+c}\ \gamma_{(n)} = p\ \gamma_{(m)}$$

ou

$$X\ \gamma^{m+c} \left[\frac{1-\gamma^{n}}{1-\gamma}\right] = X\ (1+i)^{m+c} \left[\frac{1-(1+i)^{n}}{1-(1+i)^{m}}\right]\left[\frac{1-\gamma^{m}}{1-\gamma}\right]$$

ou

$$\gamma^{m+c} \left[\frac{1-\gamma^{n}}{1-\gamma^{m}}\right] = R^{m+c} \left[\frac{1-R^{n}}{1-R^{m}}\right]$$

Esta igualdade é satisfeita para

$\gamma = R$ ou $1+i = 1 + \delta + \beta + \beta\delta$

Portanto, a taxa real de juros i, que garante um comportamento estacionário do fundo, deve ser igual a $\delta+\beta+\delta\beta$. Isto revela a dificuldade para se obter um comportamento estacionário do fundo em um sistema universitário em expansão e de custos crescentes.

c) Finalmente, se $X\ \gamma^{m+c}\ \gamma_{(n)} < p\ \gamma_{(m)}$, ou seja, se $i > \delta+\beta+\delta\beta$, o desembolso líquido decrescerá à taxa $\gamma - 1$.

1.3 - Determinação dos Subsídios Contábil e Econômico

Outra pergunta relevante liga-se à questão do subsídio recebido pelos mutuários. Primeiro, podemos definir esse subsídio, em termos contábeis, como sendo a parcela do montante emprestado que não retorna ao fundo. Neste caso, a preocupação é verificar o impacto sobre o fundo do fato de se cobrar uma taxa de juros real negativa, que ocorre quando a taxa de juros nominal é inferior à taxa de inflação. Inicialmente, definimos a razão entre o total dos pagamentos feitos por uma coorte de alu nos cuja participação no fundo começa na época k e os desembolsos feitos à essa coorte:

$$W_k = \frac{P_k^*}{D_k^*} \qquad (1.12)$$

onde P_k^* e D_k^* representam, respectivamente, o total de pagamentos e dos desembolsos relativos à coorte.

Logo, $1 - W_k = S_k$ é a proporção dos subsídios recebidos por essa coorte em relação aos desembolsos.

Tem-se que:

$$D_k^* = X_{1,k} + X_{2,k+1} + \ldots + X_{n,k+n-1} = X\,\gamma^{k-1} + X\,\gamma^{k+1-2} + \ldots + X\,\gamma^{k+n-1-n} = n\,X\,\gamma^{k-1}$$

e

$$P_k^* = mp_k = m\,\gamma^{k-1}\,p = m\,\gamma^{k-1}\,R^{\,m+c}\,X\left[\frac{1-R^n}{1-R^m}\right]$$

Logo:

$$W_k = \frac{m\,R^{m+c}\,(1-R^n)}{n\,(1-R^m)} = \frac{m\,p}{n\,X} \qquad (1.13)$$

e, portanto, seu valor independe de k, sendo função apenas de m, c, n e R. Para se obter a taxa de juros real i, é preciso conhecer a taxa de juros nominal i' e a taxa de inflação i'', todas elas em termos anuais. Dadas as taxas i' e i'', tem-se:

$$i = \frac{i' - i''}{1 + i''}$$

Por exemplo, tomando-se $n = 5$, $c = 1$ e $m = 5$, teríamos:

$$W_k = (1 + i)^6$$

Fazendo $i' = 0,15$ e, sucessivamente, $i'' = 0,5$, $i'' = 0,4$ e $i'' = 0,3$, teríamos, respectivamente, $i = -0,233$, $i = -0,178$ e

$i = -0,115$. Correspondendo a essas taxas, encontraríamos os seguintes valores de W_k: $0,20$; $0,31$ e $0,48$; e, por conseguinte, as proporções dos subsídios são, respectivamente, $0,80$; $0,69$ e $0,52$.[1]

Agora, o subsídio será definido em termos econômicos. Neste caso, temos de considerar, adicionalmente, o custo de oportunidade dos recursos utilizados pelo fundo. Definindo a taxa anual de juros $\bar{i}$ como sendo aquela que representa esse custo de oportunidade ($\bar{R} = 1 + \bar{i}$), é necessário descontar, a essa taxa, os fluxos de desembolsos e pagamentos relativos à coorte cuja participação no fundo tem início na época k. Deste modo, ter-se-á agora:

$$\hat{D}_k^* = \sum_{j=1}^{n} X_{j,k+j-1} (1+\bar{i})^{n-j} = X \gamma^{k-1} \bar{R}^n \sum_{j=1}^{n} \bar{R}^{-j} =$$

$$= X \gamma^{k-1} \bar{R}^n \left[\frac{1-\bar{R}^{-n}}{\bar{R} - 1} \right] = X \gamma^{k-1} \left[\frac{\bar{R}^n - 1}{\bar{R} - 1} \right]$$

e

$$\hat{P}_k^* = (1+\bar{i})^{-c} \sum_{j=1}^{m} p_k (1+\bar{i})^{-j} = p_k \bar{R}^{-c} \left[\frac{1-\bar{R}^{-m}}{\bar{R} - 1} \right] =$$

$$= \gamma^{k-1} R^{m+c} X \left[\frac{1-R^n}{1-R^m} \right] \bar{R}^{-c} \left[\frac{1-\bar{R}^{-m}}{\bar{R} - 1} \right]$$

Logo:[2]

$$\hat{W}_k = \frac{\hat{P}_k^*}{\hat{D}_k^*} = \frac{R^{m+c} \left[1-R^n \right] \left[1-\bar{R}^{-m} \right] \bar{R}^{-c}}{\left[\bar{R}^n - 1 \right] \left[1 - R^m \right]} \qquad (1.14a)$$

---

[1] O exemplo, no que toca aos prazos n, c e m e à taxa de juros nominal, reflete a atual sistemática do Crédito Educativo.

[2] Observe que, se $i = \bar{i}$, temos $\hat{W}_k = 1$; ou seja, nessas condições não ocorrerá subsídio.

Observe-se que $\bar{R} > 1$, pois o custo de oportunidade é positivo; porém, pode acontecer que $R = 1$, se a taxa de juros real for zero. Neste caso,

$$p_k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} X \gamma^{k-1} = \frac{1}{m} n X \gamma^{k-1}$$

e, portanto:

$$\hat{p}_k^* = \frac{\bar{R}^{-c}}{m} n X \gamma^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \bar{R}^{-j} = \frac{\bar{R}^{-c}}{m} n X \gamma^{k-1} \left[\frac{1 - \bar{R}^{-m}}{\bar{R} - 1} \right]$$

Logo:

$$\hat{W}_k = \frac{\hat{P}_k^*}{\hat{D}_k^*} = \frac{n \bar{R}^{-c}}{m} \left[\frac{1 - \bar{R}^{-m}}{\bar{R} - 1} \right] \left[\frac{\bar{R} - 1}{\bar{R}^n - 1} \right] =$$

$$= \frac{n \bar{R}^{-c} \left[1 - \bar{R}^{-m}\right]}{m \left[\bar{R}^n - 1\right]} \qquad (1.14b)$$

A proporção do subsídio econômico também independe de k, sendo função apenas de m, n, c, $\bar{R}$ e R.[1] Se $R = 1$, essa proporção, dada por $1 - \hat{W}_k$, depende apenas das quatro primeiras variáveis.

É de interesse verificar a diferença entre os valores numéricos dos subsídios contábil e econômico. Para tal, a um custo de oportunidade de *5%* ao ano, e com os mesmos valores de n, m, c e i' anteriormente adotados, observa-se que as proporções dos subsídios passariam de *0,80* a *0,85* quando $i'' = 0,5$, e de *0,69* a *0,77* quando $i'' = 0,4$. Se tomarmos *10%* a.a. como sendo o custo de oportunidade, as proporções do subsídio econômico seriam, respectivamente, de *0,89* e *0,83*; ainda mais, se $i = 0$, a proporção seria de *0,44*.

[1] Outra maneira de obter a expressão (1.14b) é através do limite quando R tende para um da expressão (1.14a).

2 - MODELO COM CUSTOS CRESCENTES PARA TODOS OS ALUNOS

Neste caso, a cada ano, o custo aluno-ano cresce a uma taxa constante β para todos os alunos. Por conseguinte, o valor de $X_{j,k}$ difere agora do apresentado no primeiro caso. Chamemos de X_k ao dispêndio com todos os alunos matriculados no k-ésimo ano do fundo. Temos que:

$$X_1 = x_1 \ C_1 \equiv X$$

$$X_2 = x_2 \ C_2 + x_1 \ C_2 = (x_1 + x_2) \ C_2 = X_1 \left[1 + (1+\delta)\right] \ C_1 \ (1+\beta) =$$

$$= X \ \hat{\beta} \ \hat{\delta}_{(2)}$$

onde $\hat{\beta} = 1+\beta$ e $\hat{\delta}_{(j)} = \sum_{\ell=1}^{j} (1+\delta)^{\ell-1} = \dfrac{1 - \hat{\delta}^{j}}{1 - \hat{\delta}}$, para $\hat{\delta} = 1 + \delta$.

$$X_3 = x_3 \ C_3 + x_2 \ C_3 + x_1 \ C_3 = x_1 \left[1 + (1+\delta) + (1+\delta)^2\right] \ C_1 \ (1+\beta)^2 =$$

$$= X \ \hat{\beta}^2 \ \hat{\delta}_{(3)} .$$

$\vdots$

$$X_n = x_n \ C_n + x_{n-1} \ C_n + \ldots + x_1 \ C_n =$$

$$= x_1 \left[1 + (1+\delta) + \ldots + (1+\delta)^{n-1}\right] \ C_1 \ (1+\beta)^{n-1} = x \ \hat{\beta}^{n-1} \ \hat{\delta}_{(n)}$$

$$X_{n+1} = x_{n+1} \ C_{n+1} + \ldots + x_2 \ C_{n+1} = x_2 \left[1 + (1+\delta) + \ldots + (1+\delta)^{n-1}\right] C_1 (1+\beta)^n =$$

$$= x_1 \ (1+\delta) \ \hat{\delta}_{(n)} \ C_1 \ (1+\beta)^n = X \ \hat{\delta} \ \hat{\delta}_{(n)} \ \hat{\beta}^n$$

Por extensão:

$$X_{n+\ell} = X \ \hat{\delta}^{\ell} \ \hat{\delta}_{(n)} \ \hat{\beta}^{n+\ell-1}$$

Portanto:

$$X_{j,k} = \begin{cases} C_k \; x_{k-j+1} = C_1 \; x_1 \; (1+\beta)^{k-1} \; (1+\delta)^{k-j} = X \; \hat{\beta}^{k-1} \; \hat{\delta}^{k-j} = \\ \qquad = X \; \gamma^{k-j} \; \hat{\beta}^{j-1}, \; k \geq j, \; j = 1,2,\ldots n \\ 0, \; k < j \end{cases} \tag{2.1}$$

A partir de $X_{j,k}$ podemos obter D_k até o ano $n+c$, pois até este período não há pagamentos.

$$D_1 = X_{1,1} = X$$

$$D_2 = X_{1,2} + X_{2,2} = X \; \gamma + X \; \hat{\beta}$$

$$D_3 = X_{1,3} + X_{2,3} + X_{3,3} = X \; \gamma^2 + X \; \gamma \; \hat{\beta} + X \; \hat{\beta}^2$$

$$\vdots$$

$$D_n = X_{1,n} + X_{2,n} + \ldots + X_{n,m} = X \; \gamma^{n-1} + X \; \gamma^{n-2} \; \hat{\beta} + X \; \gamma^{n-3} \; \hat{\beta}^2 + \ldots +$$

$$+ X \; \hat{\beta}^{n-1}.$$

$$D_{n+1} = X_{1,n+1} + X_{2,n+1} + \ldots + X_{n,n+1} = X \; \gamma^n + X \; \gamma^{n-1} \; \hat{\beta} + \ldots +$$

$$+ X \; \gamma \; \hat{\beta}^{n-1} = \gamma \; D_n$$

$$\vdots$$

$$D_{n+c} = \gamma^c \; D_n$$

O montante da dívida existente no término do prazo de carência irá depender da época em que os alunos começarem a estudar. Chamando essa época de k, $(k = 1, 2, \ldots)$ é possível obter uma expressão da dívida.

$$F_1 = \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ (k=1)}}^{n} X_{j,k+j-1} \quad R^{n-j} \right\} R^c =$$

$$= \left\{ X_{1,1} R^{n-1} + X_{2,2} R^{n-2} + \ldots + X_{n,n} \right\} R^c =$$

$$= X \left\{ R^{n-1} + R^{n-2} \hat{\beta} + R^{n-3} \hat{\beta}^2 + \ldots + \hat{\beta}^{n-1} \right\} R^c$$

$$= XR^{n-1+c} \left\{ 1+\frac{\hat{\beta}}{R} + \left(\frac{\hat{\beta}}{R}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\hat{\beta}}{R}\right)^{n-1} \right\}$$

$$= XR^{n-1+c} \left\{ \frac{\hat{\beta}}{R} \right\}_{(n)}, \text{ se } i \neq \beta. \tag{2.2}$$

$$F_2 = \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ (k=2)}}^{n} X_{j,k+j-1} \quad R^{n-j} \right\} R^c =$$

$$= \left\{ X_{1,2} R^{n-1} + X_{2,3} R^{n-2} + \ldots + X_{n,n+1} \right\} R^c =$$

$$= \left\{ X \gamma R^{n-1} + X \gamma \hat{\beta} R^{n-2} + \ldots + X \gamma \hat{\beta}^{n-1} \right\} R^c =$$

$$= X \gamma R^{n-1+c} \left\{ 1 + \frac{\hat{\beta}}{R} + \left(\frac{\hat{\beta}}{R}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\hat{\beta}}{R}\right)^{n-1} \right\} =$$

$$X \gamma R^{n-1+c} \left\{ \frac{\hat{\beta}}{R} \right\}_{(n)} = \gamma F_1, \text{ se } i \neq \beta$$

$$\vdots$$

$$F_k = \left\{ \sum_{k,j=1}^{n} X_{j,k+j-1} \quad R^{n-j} \right\} R^c =$$

$$= \left\{ X_{1,k} R^{n-1} + X_{2,k+1} R^{n-2} + \ldots + X_{n,k+n-1} \right\} R^c =$$

$$= X \left\{ \gamma^{k-1} R^{n-1} + \gamma^{k-1} \hat{\beta} R^{n-2} + \ldots + \gamma^{k-1} \hat{\beta}^{n-1} \right\} R^c =$$

$$= \gamma^{k-1} F_1, \text{ se } i \neq \beta. \tag{2.3}$$

Observe que, caso $i = \beta$, teremos $F_1 = n\, X\, R^{n-1+c}$; porém, a relação $F_k = \gamma^{k-1} F_1$ permanece válida. Uma vez obtida a dívida de cada coorte, podemos determinar o valor das prestações, calculado no caso de serem constantes (Tabela Price).

Temos que:

$$P_1 = F_1 \left\{ \frac{i}{1-R^{-m}} \right\} = X\, R^{n-1+c} \left[\frac{1-\left(\frac{\hat{\beta}}{R}\right)^n}{1-\frac{\hat{\beta}}{R}} \right] \frac{i}{1-R^{-m}} =$$

$$= X\, R^{n-1+c} \left[\frac{R^n - \hat{\beta}^n}{R-\hat{\beta}} \right] \frac{R}{R^n} \left[\frac{i}{1-R^{-m}} \right] = X\, R^c \left[\frac{R^n - \hat{\beta}^n}{R-\hat{\beta}} \right] \frac{i\, R^m}{R^m - 1} = p \quad (2.4)$$

Logo, face à relação (2.3), segue-se que:

$$P_k = \gamma^{k-1}\, P_1 \quad (2.5)$$

Para o caso em que $i = \beta$, teremos:

$$P_1 = F_1 \left[\frac{i}{1-R^{-m}} \right] = F_1 \frac{R^m (R-1)}{R^m - 1} = n\, X\, R^{m+n+c-1} \left[\frac{R-1}{R^m - 1} \right] \quad (2.6)$$

com a relação (2.5) permanecendo.

2.1 - Evolução do Fundo

Podemos agora observar o comportamento de D_k e $\bar{D}_k$ nos quatro períodos em que foi dividida a análise.

I - $1 \leq k \leq n$

$$D_k = X \sum_{j=1}^{k} \gamma^{k-j} \hat{\beta}^{j-1} = X \gamma^k \hat{\beta}^{-1} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\hat{\beta}}{\gamma}\right)^j =$$

$$= X \gamma^k \hat{\beta}^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\hat{\beta}}{\gamma}\right)^{j-1} \right\} \frac{\hat{\beta}}{\gamma} = X \gamma^{k-1} \left(\frac{\hat{\beta}}{\gamma}\right)_{(k)} =$$

$$= X \gamma^{k-1} \frac{\gamma}{\gamma^k} \left[\frac{\gamma^k - \hat{\beta}^k}{\gamma - \hat{\beta}}\right] = X \left(\frac{\gamma^k - \hat{\beta}^k}{\gamma - \hat{\beta}}\right) \qquad (2.7)$$

e

$$\bar{D}_k = \sum_{\ell=1}^{k} D_\ell = X \sum_{\ell=1}^{k} \gamma^{\ell-1} \left[\frac{1 - \left(\frac{\hat{\beta}}{\gamma}\right)^\ell}{1 - \frac{\hat{\beta}}{\gamma}}\right] =$$

$$= \frac{\gamma X}{\gamma - \hat{\beta}} \sum_{\ell=1}^{k} \left(\gamma^{\ell-1} - \frac{\hat{\beta}^\ell}{\gamma}\right) = X \frac{\gamma}{\gamma - \hat{\beta}} \sum_{\ell=1}^{k} \left(\frac{\gamma^\ell - \hat{\beta}^\ell}{\gamma}\right) =$$

$$= \frac{X}{\gamma - \hat{\beta}} \left\{ \sum_{\ell=1}^{k} \gamma^\ell - \sum_{\ell=1}^{k} \hat{\beta}^\ell \right\} = \frac{X}{\gamma - \hat{\beta}} \left\{ \gamma\, \gamma_{(k)} - \hat{\beta}\, \hat{\beta}_{(k)} \right\} \qquad (2.8)$$

II - $n + 1 \leq k \leq n + c$

$$D_k = \gamma^{k-n} D_n = \gamma^{k-n} X \left[\frac{\gamma^n - \hat{\beta}^n}{\gamma - \hat{\beta}}\right] \qquad (2.9)$$

e

$$\bar{D}_k = \sum_{\gamma=1}^{k} D_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} D_\ell + \sum_{\ell=n+1}^{k} D_\ell = \bar{D}_n + D_n \sum_{\ell=n+1}^{k} \gamma^{\ell-n} =$$

$$= \bar{D}_n + X \left[\frac{\gamma^n - \hat{\beta}^n}{\gamma - \hat{\beta}}\right] \gamma^{-n} \left[\frac{\gamma^{n+1} - \gamma^{k+1}}{1 - \gamma}\right] =$$

$$= \frac{X}{\gamma - \hat{\beta}} \left\{ \gamma\, \gamma_{(n)} - \hat{\beta}\, \hat{\beta}_{(n)} \right\} + \frac{X\gamma}{1-\gamma} \left[\frac{\gamma^n - \hat{\beta}^n}{\gamma - \hat{\beta}} \right] (1 - \gamma^{k-n}) =$$

$$= \frac{X}{\gamma - \hat{\beta}} \left\{ \frac{\gamma\,(1-\gamma^n)}{1-\gamma} - \frac{\hat{\beta}\,(1-\hat{\beta}^n)}{1-\hat{\beta}} \right\} + \frac{X\gamma\,(1-\gamma^{k-n})}{1-\gamma} \left[\frac{\gamma^n - \hat{\beta}^n}{\gamma - \hat{\beta}} \right] =$$

$$= \frac{X}{\gamma - \hat{\beta}} \left\{ \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[1 - \gamma^n + (1-\gamma^{k-n})\,(\gamma^n - \hat{\beta}^n) \right] - \frac{\hat{\beta}\,(1-\hat{\beta}^n)}{1-\hat{\beta}} \right\} =$$

$$= \frac{X}{\gamma - \hat{\beta}} \left\{ \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[1 - \gamma^k - \hat{\beta}^n\,(1-\gamma^{k-n}) \right] - \hat{\beta}\, \hat{\beta}_{(n)} \right\} \quad (2.10)$$

III - $n + c + 1 \leq k \leq n + c + m$

$$D_k = \gamma^{k-n} D_n - \sum_{j=1}^{k-n-c} p_j = \gamma^{k-n} X \left[\frac{\gamma^n - \hat{\beta}^n}{\gamma - \hat{\beta}} \right] - p\, \gamma_{(k-n-c)} \quad (2.11)$$

e

$$\bar{D}_k = \bar{D}_{n+c} + \sum_{\ell=n+c+1}^{k} D_\ell = \bar{D}_{n+c} + \sum_{\ell=n+c+1}^{k} D_n\, \gamma^{\ell-n} -$$

$$- \sum_{\ell=n+c+1}^{k} p\, \gamma_{(\ell-n-c)} =$$

$$= \bar{D}_{n+c} + X \left[\frac{\gamma^n - \hat{\beta}^n}{\gamma - \hat{\beta}} \right] \left[\frac{\gamma^{c+1} - \gamma^{k-n+1}}{1-\gamma} \right] - p\, \bar{\gamma}_{(k-n-c)} =$$

$$= \frac{X}{\gamma - \hat{\beta}} \left\{ \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[1 - \gamma^{n+c} - \hat{\beta}^n\,(1-\gamma^c) \right] - \hat{\beta}\, \hat{\beta}_{(n)} \right\} +$$

$$+ \left[\frac{X}{\gamma - \hat{\beta}} \right] \left[\frac{\gamma}{1-\gamma} \right] (\gamma^n - \hat{\beta}^n)\,(\gamma^c - \gamma^{k-n}) - p\, \bar{\gamma}_{(k-n-c)} =$$

$$= \frac{X}{\gamma - \hat{\beta}} \left\{ \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[1 - \gamma^k - \hat{\beta}^n\,(1-\gamma^{k-n}) \right] - \hat{\beta}\, \hat{\beta}_{(n)} \right\} -$$

$$- p\, \bar{\gamma}_{(k-n-c)} \quad (2.12)$$

IV - $k \geq n + c + m + 1$

$$D_k = \gamma^{k-n} D_n - \sum_{j=1}^{m} p_{k-n-m-c+j}$$

$$= \gamma^{k-n} D_n - \sum_{j=1}^{m} p\, \gamma^{k-n-c-j-1} =$$

$$= \gamma^{k-n} X \left[\frac{\gamma^n - \hat{\beta}^n}{\gamma - \hat{\beta}} \right] - \gamma^{k-m-n-c} p\, \Upsilon_{(m)} =$$

$$= \gamma^{k-n} \left\{ X \left[\frac{\gamma^n - \hat{\beta}^n}{\gamma - \hat{\beta}} \right] - \gamma^{-m-c} p\, \Upsilon_{(m)} \right\} \qquad (2.13)$$

e

$$\bar{D}_k = \bar{D}_{n+c} + \sum_{\ell=n+c+1}^{k} D_\ell = \bar{D}_{n+c} + \sum_{\ell=n+c+1}^{k} D_n \gamma^{\ell-n} -$$

$$- \sum_{\ell=n+c+1}^{n+c+m} p\, \Upsilon_{(\ell-n-c)} - \sum_{\ell=n+c+m+1}^{k} p\, \Upsilon_{(m)} \gamma^{\ell-n-c-m}$$

Porém, de (2.12) tem-se que:

$$\bar{D}_{n+c} + \sum_{\ell=n+c+1}^{k} D_n \gamma^{\ell-n} =$$

$$= \frac{X}{\gamma - \hat{\beta}} \left\{ \frac{\gamma}{1 - \gamma} \left[1 - \gamma^k - \hat{\beta}^n (1 - \gamma^{k-n}) \right] - \hat{\beta}\, \hat{\beta}_{(n)} \right\} (2.14a)$$

Por outro lado:

$$\sum_{\ell=n+c+1}^{n+c+m} p\, \Upsilon_{(\ell-n-c)} + \sum_{\ell=n+c+m+1}^{k} p\, \Upsilon_{(m)} \gamma^{\ell-n-c-m} =$$

$$= p \left[\bar{\Upsilon}_{(m)} + \Upsilon_{(m)} \gamma \Upsilon_{(k-n-c-m)} \right] =$$

$$= \frac{p}{(1-\gamma)^2} \left[m - \gamma(1 + m - \gamma^m) + (1 - \gamma^m)\ \gamma\ (1 - \gamma^{k-n-c-m}) \right] =$$

$$= \frac{p}{(1-\gamma)^2} \left\{ m - \gamma \left[m + \gamma^{k-n-c-m} (1 - \gamma^m) \right] \right\} \qquad (2.14b)$$

somando (2.14a) e (2.14b) obtemos a expressão para $\overline{D}_k$.

2.2 - Condições de Estabilidade

De novo, podemos determinar as condições para as quais os desembolsos líquidos passam a ser nulos; ou seja, o desembolso líquido acumulado fica constante. Para tal, observemos que, tendo em vista (2.13):

$$D_{n+c+m+\ell} = \gamma^{\ell} \left\{ \gamma^{m+c} \times \left[\frac{\gamma^n - \hat{\beta}^n}{\gamma - \hat{\beta}} \right] - p\ \gamma_{(m)} \right\} =$$

$$= \gamma^{\ell}\ D_{n+m+c} \qquad (2.15)$$

e, portanto, $D_{n+c+m+\ell} \lesseqgtr 0$ se $D_{n+c+m} \lesseqgtr 0$.

Em conseqüência, basta observarmos o valor de D_{n+c+m} Assim:

a) $D_{n+c+m} > 0$ se $\gamma^{m+c} \times \left[\frac{\gamma^n - \hat{\beta}^n}{\gamma - \hat{\beta}} \right] > p\ \gamma_{(m)}$

Neste caso, D_k cresce à taxa $\gamma - 1$.

b) $D_{n+c+m} = 0$ se $\gamma^{m+c} \times \left[\frac{\gamma^n - \hat{\beta}^n}{\gamma - \hat{\beta}} \right] = p\ \gamma_{(m)}$

ou:

$$\gamma^{m+c} \times \left[\frac{\gamma^n - \hat{\beta}^n}{\gamma - \hat{\beta}}\right] = X\ R^c \left[\frac{R^n - \hat{\beta}^n}{R - \hat{\beta}}\right] \frac{i\ R^m}{R^m - 1} \left[\frac{1 - \gamma^m}{1 - \gamma}\right]$$

Igualdade que é verificada se $R = \gamma$ e, conseqüentemente, $i = \gamma - 1$.[1]

c) $D_{n+c+m} < 0$ se $\gamma^{m+c} \times \left[\frac{\gamma^n - \hat{\beta}^n}{\gamma - \hat{\beta}}\right] < p\ \gamma_{(m)}$

Agora, D_k decresce à mesma taxa anual $\gamma - 1$.

Comparando esses resultados com aqueles obtidos anteriormente, vemos que as condições que influenciam a trajetória do fundo não são alteradas pelo fato de considerarmos custos crescentes anualmente para todos os mutuários do Crédito Educativo, ao invés de, como no caso anterior, apenas para os mutuários entrantes em um dado ano.

2.3 - Determinação dos Subsídios Contábil e Econômico

Também podemos obter a expressão relativa à proporção do subsídio contábil, S_k. Como definido anteriormente:

$$W_k = \frac{P_k^*}{D_k^*} \quad e \quad S_k = 1 - W_k$$

Com:

$$P_k^* = m\ P_k = m\ \gamma^{k-1} \ X\ R^c \left[\frac{R^n - \hat{\beta}^n}{R - \hat{\beta}}\right] \frac{i\ R^m}{R^m - 1}$$

e

$$D_k^* = \sum_{j=1}^{n} X_{j,k+j-1} = X \sum_{j=1}^{n} \gamma^{k-1}\ \hat{\beta}^{j-1} = X\ \gamma^{k-1} \left[\frac{1 - \hat{\beta}^n}{1 - \hat{\beta}}\right]$$

---

[1] Esta solução é válida mesmo no caso onde $i = \beta$.

Logo:

$$W_k = \frac{p_k^*}{D_k^*} = m\,R^c \left[\frac{R^n - \hat{\beta}^n}{R - \hat{\beta}}\right] \frac{i\ R^m}{R^m - 1} \left[\frac{1 - \hat{\beta}}{1 - \hat{\beta}^n}\right] \qquad (2.16a)$$

Como se verifica facilmente, para o caso limite em que $i = \beta$ têm-se:

$$W_k = \frac{mnR^{n+c+m-1}\ (1-R)^2}{(R^m - 1)\ (1 - R^n)} \qquad (2.16b)$$

Por outro lado, para obtermos o subsídio econômico, temos que:

$$\hat{D}_k^* = \sum_{j=1}^{n} X_{j,k+j-1}\ \bar{R}^{\,n-j} = X \sum_{j=1}^{n} \gamma^{k-1}\ \hat{\beta}^{j-1}\ \bar{R}^{\,n-j} =$$

$$= X\ \gamma^{k-1}\ \bar{R}^n\ \hat{\beta}^{-1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\hat{\beta}}{\bar{R}}\right)^j$$

$$= \begin{cases} n\ X\ \gamma^{k-1}\ \bar{R}^{\,n-1}, \text{ se } \beta = \bar{i} \\ X\ \gamma^{k-1}\ \bar{R}^{\,n}\ \hat{\beta}^{-1} \dfrac{\dfrac{\hat{\beta}}{\bar{R}} - \left(\dfrac{\hat{\beta}}{\bar{R}}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{\hat{\beta}}{\bar{R}}} = X\ \gamma^{k-1} \left[\dfrac{\bar{R}^n - \hat{\beta}^n}{\bar{R} - \hat{\beta}}\right], \\ \text{se } \beta \neq \bar{i} \end{cases}$$

e

$$\hat{p}_k^* = \bar{R}^{\,-c} \sum_{j=1}^{m} p_k\ \bar{R}^{\,-j} = \bar{R}^{\,-c}\ p_k \left[\frac{1 - \bar{R}^{\,-m}}{\bar{R} - 1}\right] =$$

$$= \begin{cases} \bar{R}^{\,-c}\,\gamma^{k-1}\ X\ R^{c+m} \left[\dfrac{R^n - \hat{\beta}^n}{R - \hat{\beta}}\right] \left[\dfrac{R - 1}{R^m - 1}\right] \left[\dfrac{1 - \bar{R}^{\,-m}}{\bar{R} - 1}\right], \text{ se } i \neq \beta \end{cases}$$

$$= \Bigg\} \; n \, X \, \gamma^{k-1} \; \bar{R}^{-c} \; R^{m+n+c-1} \left[\frac{R - 1}{R^m - 1} \right] \left[\frac{1 - \bar{R}^{-m}}{\bar{R} - 1} \right], \text{ se } i=\beta$$

Logo, para a razão $\hat{P}^*_k/\hat{D}^*_k$, tendo em vista as três possíveis combinações para os parâmetros i, $\bar{i}$ e β teremos, respectivamente:

a) Se $i = \bar{i}$, para qualquer valor de β

$$\hat{W}_k = 1 \tag{2.17a}$$

Ou seja, tais condições tornam inexistente o subsídio econômico;

b) Se $i \neq \beta$ com $\bar{i} = \beta$

$$\hat{W}_k = \frac{R^{m+c} \, \hat{\beta}^{-n-m-c+1}}{n} \left[\frac{R^n - \hat{\beta}^n}{R - \hat{\beta}} \right] \left[\frac{R - 1}{R^m - 1} \right] \left[\frac{\hat{\beta}^m - 1}{\hat{\beta} - 1} \right] \tag{2.17b}$$

Para o caso limite em que $R = 1$, teremos:

$$\lim_{R \to 1} \hat{W}_k = \frac{\hat{\beta}^{1-n-m-c} \, (\hat{\beta}^n - 1) \, (\hat{\beta}^m - 1)}{n \, m \, (\hat{\beta} - 1)^2}$$

c) Se $i = \beta$ com $\bar{i} \neq \beta$

$$\hat{W}_k = \frac{n \, R^{m+n+c-1} \, (R - 1) \, (\bar{R}^m - 1) \, (\bar{R} - R)}{\bar{R}^{m+c} \, (R^m - 1) \, (\bar{R} - 1) (\bar{R}^n - R^n)} \tag{2.17c}$$

d) Se $i \neq \beta \neq \bar{i}$

$$\hat{W}_k = \frac{\bar{R}^{-c} \, R^{m+c} \, (\bar{R} - \hat{\beta})}{\bar{R}^n - \hat{\beta}^n} \left[\frac{R^n - \hat{\beta}^n}{R - \hat{\beta}} \right] \left[\frac{R - 1}{R^m - 1} \right] \left[\frac{1 - \bar{R}^{-m}}{\bar{R} - 1} \right] \tag{2.17d}$$

Na eventualidade em que a taxa i seja nula, teremos:

$$\lim_{R \to 1} \hat{W}_k = \frac{\bar{R}^{-m-c} (\bar{R} - \hat{\beta}) (1 - \hat{\beta}^n) (\bar{R}^m - 1)}{m (\bar{R}^n - \hat{\beta}^n) (1 - \hat{\beta}) (\bar{R} - 1)}$$

Em qualquer caso, a proporção de subsídio será:

$$\hat{S}_k = 1 - \hat{W}_k$$

3 - MODELO PARA QUANDO O FUNDO COMEÇA COM AS n SÉRIES SIMULTANEAMENTE

Primeiramente, adotaremos a hipótese de C_k constante ao longo do curso, para alunos que ingressam na época k. Ou seja, qualquer que seja a série em que esteja o aluno ao entrar para o Crédito Educativo em seu primeiro ano de funcionamento, o custo permanece constante até terminar o curso.

Seja m_j, $j = 1, 2, \dots n$, com $m_n \equiv m$, o prazo de amortização para os alunos que, no primeiro ano do Crédito Educativo ($k = 1$), cursam somente as j últimas séries, ou seja, entram na série $\ell = n-j+1$. Em geral, dever-se-á ter $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m$. Admite-se que o prazo de carência seja o mesmo para todos os alunos.

Seja X'_ℓ o dispêndio na época $k = 1$ com alunos que estão na série ℓ $(\ell = 2, \dots n)$.

D_k e $\bar{D}_k$ permanecem com o mesmo significado anterior, respectivamente, desembolso líquido e desembolso líquido acumulado na época k apenas para os alunos que, na época $k = 1$, estavam na 1ª série. Chamemos de D'_k e $\bar{D}'_k$, respectivamente, os desembolsos totais líquido e líquido acumulado na época k. Tanto

D_k e D'_k como $\overline{D}_k$ e $\overline{D}'_k$ diferem porque na época $k=1$ entraram alunos que estavam numa série ℓ, $(\ell = 2,\ldots n)$.

Para $k > (n-1) + c + m_{n-1}$, $D_k = D'_k$,

pois os alunos acima já saíram do Fundo. Conseqüentemente, nesse intervalo:

$$\overline{D}'_k = \overline{D}_k + \sum_{\ell=2}^{n} (n - \ell + 1)\, X'_\ell - \sum_{j=1}^{n-1} m_j\, p'_j$$

onde

$$p'_j = F'_j\, R^c \left[\frac{i}{1-R^{-m_j}}\right] = \sum_{\ell=1}^{j} X'_{n-j+1}\, R^{\ell-1}\, R^c \left[\frac{R^{m_j}(R-1)}{R^{m_j}-1}\right] =$$

$$= X'_{n-j+1}\, R^{c+m_j}\left[\frac{R^j - 1}{R^{m_j}-1}\right]$$

Logo:

$$\overline{D}'_k = \overline{D}_k + \sum_{\ell=2}^{n} (n-\ell+1)\, X'_\ell - \sum_{j=1}^{n=1} m_j\, X'_{n-j+1}\, R^{c+m_j}\left[\frac{R^j-1}{R^{m_j}-1}\right] \quad (3.1)$$

Portanto, como a partir de $k > (n-1) + c + m_{n-1}$, $D_k = D'_k$, o comportamento do Fundo será idêntico ao comportamento observado no primeiro modelo, determinado pelos parâmetros R e γ. Os subsídios contábil e econômico terão também os mesmos valores do primeiro modelo.

Se adotarmos a hipótese de C_k crescer para todos os alunos, os resultados básicos serão idênticos aos obtidos anteriormente no modelo 2. A única diferença é que o desembolso líquido acumulado é maior, pois:

$$\bar{D}'_k - \bar{D}_k = \sum_{\ell=2}^{n} X'_\ell \, \hat{\beta} \; (n - \ell + 1) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n-1} \begin{cases} m_j \; R^{c+m_j+j-1} \; X'_{n-j+1} \left\{ \dfrac{\hat{\beta}}{R} \right\}_{(j)} \left\{ R \right\}^{-1}_{(j)}, \text{ se } \; i \neq \beta \\ \\ jm_j \; R^{c+m_j+j-1} \; X'_{n-j+1} \left\{ R \right\}^{-1}_{(j)}, \text{ se } i = \beta \end{cases} \qquad (3.2)$$

4 - CONCLUSÕES

Estudamos o comportamento do fundo de Crédito Educativo em três situações distintas. Primeiro, adotamos a hipótese de que, embora crescesse anualmente para os novos mutuários, o custo seria constante para aqueles já no programa. Observamos que a condição necessária e suficiente para que o desembolso líquido anual fosse, eventualmente, nulo seria dada pela igualdade entre a taxa de juros e a superposição das taxas de crescimento do custo e do número de participantes no programa ($i = \delta + \beta + \delta\beta$). Como, mesmo uma taxa de juros real positiva cobrada pelo Crédito Educativo dificilmente atenderá à condição acima, verificamos que o Crédito Educativo necessitará de recursos crescentes à taxa $\delta + \beta + \delta\beta$.

Por outro lado, coloca-se o problema do subsídio concedido a uma coorte de mutuários. Este pode ser visto de duas perspectivas. Primeiro, definimos o subsídio contábil como resultado da cobrança de uma taxa de juros real negativa. Neste caso, a soma das prestações pagas pelo mutuário é inferior à quantia recebida do programa. Ao obtermos a proporção desses subsídios definida como a unidade, menos a razão entre os pagamentos feitos e a ajuda recebida, podemos observar que essa proporção é a mesma para todas as coortes.

Após definirmos o subsídio econômico, que difere do anterior porque se considera no seu cálculo o custo de oportunidade dos recursos do fundo, constatamos igualmente que a proporção desse subsídio é a mesma para qualquer coorte.

O segundo modelo incorpora a situação de custos crescentes para um mesmo mutuário. Pudemos observar que, embora as expressões analíticas sejam diferentes, as propriedades do modelo são iguais às observadas anteriormente, quer em relação à condição para que o fundo apresente, eventualmente, um desembolso líquido nulo, quer quanto aos subsídios contábil e econômico.

Finalmente, introduzimos a possibilidade de o mutuário, no primeiro ano do fundo, não estar cursando a primeira série do seu curso. Feitas as hipóteses de custos constantes ou crescentes para um mesmo mutuário, observou-se que, semelhantemente ao segundo modelo, as conclusões obtidas anteriormente não eram alteradas.