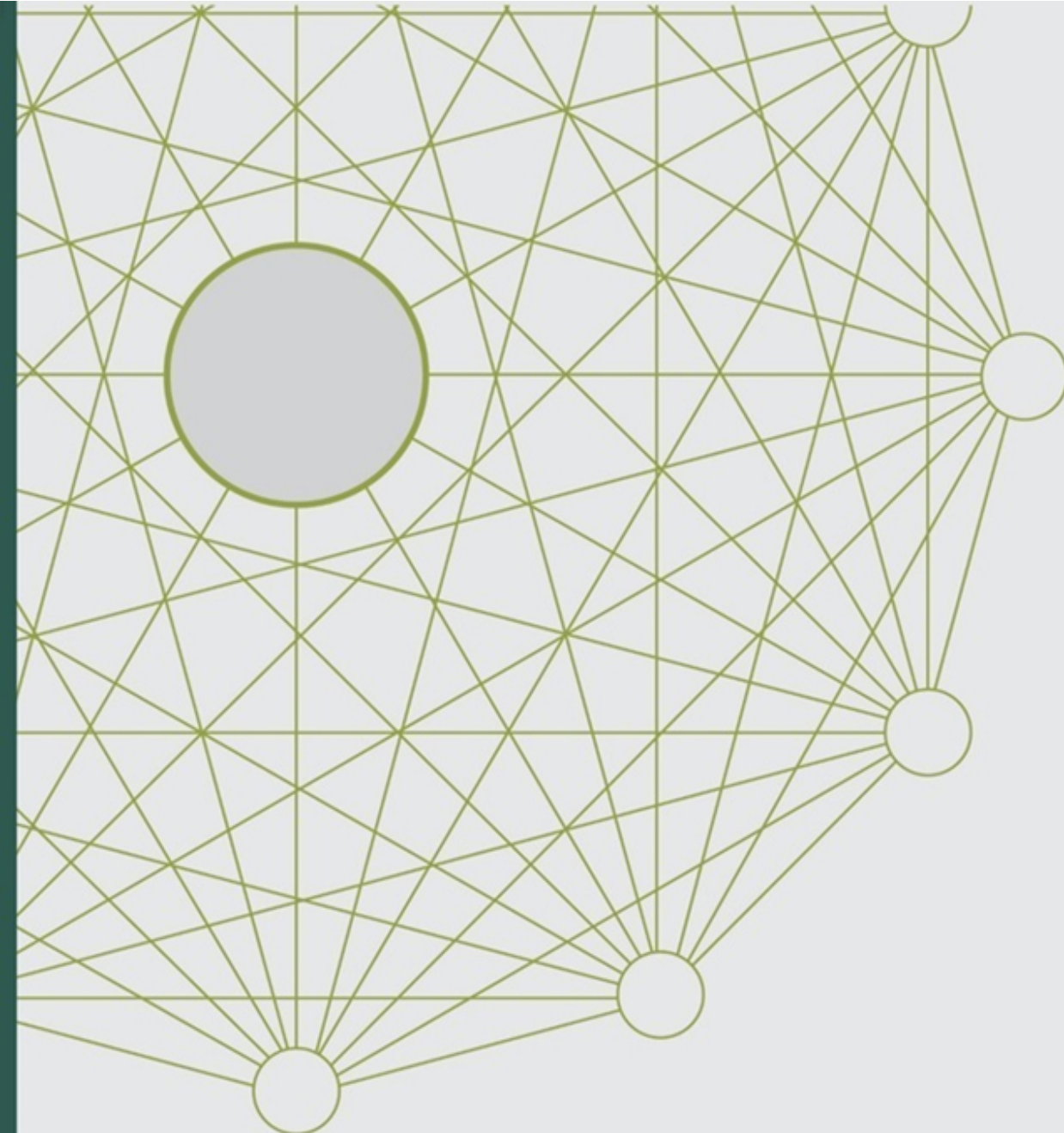




Julho - Setembro

2016

NOTA TÉCNICA - ELASTICIDADE-RENTA DA
ARRECADAÇÃO TRIBUTÁRIA FEDERAL



32

CONJUNTURA

CARTA DE

Governo Federal
Ministério do Planejamento, Desenvolvimento e Gestão
Ministro interino Dyogo Henrique de Oliveira



Fundação pública vinculada ao Ministério do Planejamento, Desenvolvimento e Gestão, o Ipea fornece suporte técnico e institucional às ações governamentais – possibilitando a formulação de inúmeras políticas públicas e programas de desenvolvimento brasileiro – e disponibiliza, para a sociedade, pesquisas e estudos realizados por seus técnicos.

Presidente

Ernesto Lozardo

Diretor de Desenvolvimento Institucional

Juliano Cardoso Eleutério

Diretor de Estudos e Políticas do Estado, das Instituições e da Democracia

João Alberto De Negri

Diretor de Estudos e Políticas Macroeconômicas

Claudio Hamilton Matos dos Santos

Diretor de Estudos e Políticas Regionais, Urbanas e Ambientais

Alexandre Xavier Ywata de Carvalho

Diretora de Estudos e Políticas Setoriais de Inovação, Regulação e Infraestrutura

Fernanda De Negri

Diretora de Estudos e Políticas Sociais

Lenita Maria Turchi

Diretora de Estudos e Relações Econômicas e Políticas Internacionais

Alice Pessoa de Abreu

Chefe de Gabinete, Substituto

Márcio Simão

Assessora-chefe de Imprensa e Comunicação

Maria Regina Costa Alvarez

Ouvidoria: <http://www.ipea.gov.br/ouvidoria>

URL: <http://www.ipea.gov.br>

NOTA TÉCNICA

Elasticidade-Renda da Arrecadação Tributária Federal¹

Mário Jorge Mendonça²

Luis Alberto Medrano³

1 INTRODUÇÃO

A receita tributária bruta (RTB) de uma determinada economia é dada pela soma dos recursos que o governo recolhe compulsoriamente do setor privado. Tudo o mais permanecendo constante, aumentos na RTB reduzem a renda disponível do setor privado⁴ e, portanto, os recursos disponíveis para o financiamento das despesas de consumo e/ou investimento de famílias e firmas. Por outro lado, incrementos na RTB aumentam (via de regra, pelo menos) os recursos à disposição do governo e, dessa forma, permitem diminuições no nível de endividamento público e/ou aumentos na oferta de bens e serviços públicos à população. A dinâmica da RTB é, assim, um determinante crucial das dinâmicas de diversas outras grandezas macroeconômicas relevantes.

Neste momento, onde a economia brasileira se encontra numa séria crise na qual o produto da economia vem se retraindo de modo acentuado já por um longo tempo, uma questão importante para a política fiscal é saber qual o efeito que o comportamento do PIB tem sobre a arrecadação. Sem que essa questão seja respondida, torna-se difícil planejar de modo confiável o ajuste fiscal, tendo em vista que o resultado primário depende diretamente das receitas de tributos. Um modo de responder a essa questão é conhecer o valor da elasticidade-renda da arrecadação, ou seja, qual a variação percentual na arrecadação devido a uma variação percentual no produto da economia.

O objetivo desta nota técnica é estimar a elasticidade-renda da arrecadação de tributos federais. Mendonça, Sachsida e Medrano (2010) fizeram uso do modelo linear dinâmico (MLD) com coeficientes variáveis para uma série trimestral agregada da carga tributária bruta do setor público consolidado no período 1995-2009. Entre as principais conclusões deste estudo podemos citar que: i) o produto interno bruto (PIB) é certamente a principal variável explicativa da dinâmica da RTB no período em questão; ii) a elasticidade-PIB parece estar próxima da unidade.

Neste estudo, revisitamos o artigo citado tomando por base a arrecadação no âmbito federal no período de dezembro de 2000 a maio de 2016. Os tributos considerados na amostra são os seguintes: o Imposto de Renda (pessoa física, jurídica e

¹ Os autores gostariam de agradecer a José Ronaldo de Castro Souza Júnior e a Bernardo Patta Schettini pelos comentários e sugestões.

² Técnico de Planejamento e Pesquisa da Diretoria de Estudos e Políticas Macroeconômicas (Dimac) do Ipea. E-mail: mario.mendonca@ipea.gov.br

³ Assistente de Pesquisa da Dimac/Ipea e professor da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). E-mail: imedrano10@msn.com

⁴ O aumento de carga tributária pode ter como contrapartida aumentos de transferências de renda, que podem manter até mesmo inalterada a renda disponível da população.

retido na fonte), a Contribuição Social sobre o Lucro Líquido das Pessoas Jurídicas (CLPJ), a Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social (COFINS), o Imposto sobre Produtos Industrializados (IPI), o Imposto sobre Operações Financeiras (IOF), o Imposto sobre Importação (II), a Contribuição de Intervenção no Domínio Econômico (CIDE)⁵ e o PIS/PASEP. Além desses tributos, também são inclusos na base as Contribuições Previdenciárias do Regime Geral de Previdência Social (RGPS) operado pelo INSS.

2 Especificação econométrica

Claro está que a arrecadação total depende positivamente tanto da alíquota média tomada em relação a todos os tributos que a compõe quanto do montante do “fato gerador” do tributo. Dito de outro modo, é natural supor, por exemplo, que (tudo o mais permanecendo constante) a arrecadação do imposto sobre importações crescerá com o volume das importações, ou que a arrecadação do IOF crescerá com o volume das operações de crédito. Note-se, entretanto, que na arrecadação agregada é que se considere o PIB como *proxy* para fato gerador de toda a arrecadação. Naturalmente, espera-se que elevações/quedas no PIB estejam associadas às elevações/quedas na arrecadação tributária.

Também a inflação (INFLA) é usualmente listada como uma variável explicativa importante da dinâmica da CTB medida em termos reais. O sinal da mesma é incerto, entretanto. Por um lado, elevações da inflação podem diminuir a arrecadação (real) caso os pagamentos (nominais) de tributos sejam recolhidos com atraso pelo governo (Tanzi, 1977). Por outro lado, elevações na inflação reduzem o valor real das “faixas de isenção” (assumindo que as mesmas fiquem fixas em níveis nominais), por exemplo, do imposto de renda – aumentando assim a base de arrecadação do mesmo e, desta forma, a própria arrecadação tributária. Em suma, é de se supor que a inflação afete as receitas públicas de modos diferentes em contextos diferentes.

Por fim, note-se ainda que vários estudos buscam explicar a dinâmica dos fluxos das receitas (e dos gastos) correntes do governo a partir de considerações sobre as implicações dinâmicas desses fluxos sobre o endividamento público. A hipótese básica desses estudos é que os governos fixam suas receitas e gastos de modo a manter o endividamento público “sob controle”, por assim dizer. Parece lícito, então, acrescentar o comportamento da “Dívida Líquida do Setor Público” (DLSP) entre os determinantes (potenciais, pelo menos) da dinâmica da carga tributária.

Tendo em vista as considerações acima, optamos por iniciar nossa investigação econométrica com a especificação do Modelo Linear Dinâmico (MDL) que aparece na equação (1) abaixo. Note-se que a introdução da “constante” nesta especificação não é ingênua, pois é lícito assumir que uma parcela da arrecadação tributária não está relacionada a nenhum dos fatores descritos acima.

⁵ Incidente sobre a importação e a comercialização de gasolina e suas correntes, *diesel* e suas correntes, querosene de aviação e outros querosenes, óleos combustíveis (*fuel-oil*), gás liquefeito de petróleo (GLP), inclusive o derivado de gás natural e de nafta, e álcool etílico combustível”.

Equação (1)

$$RTBF_t = b_0(t) + b_1(t)PIB_t + b_2(t)INFLA_t + b_3(t)DLSP_t + S_t + v_t$$

$$b_i(t) = \varphi_i b_i(t-1) + w_i(t),$$

$$i = 0, \dots, 2$$

onde $RTBF(t)$ representa a receita tributária bruta oriunda de tributos federais no período t . Ainda tem-se $w_i(t) \sim N(0, W_i)$, para $i = 0, \dots, 3$, enquanto φ_i é o componente autorregressivo da equação de estado para cada b_i . $S_i(t)$ é o componente sazonal, modelado endogenamente com base na representação de Fourier (WEST e HARRISON, 1997), tal como mostrada a seguir:

Equação (2)

$$S_i(t) = \sum_{j=1}^2 \left[a_{ij} \sin\left(\frac{2\pi j t}{4}\right) + b_{ij} \cos\left(\frac{2\pi j t}{4}\right) \right] = Z_t \gamma_i$$

Onde:

$$Z_t = \left(\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) \quad \sin\left(\frac{2\pi 2t}{4}\right) \quad \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) \quad \cos\left(\frac{2\pi 2t}{4}\right) \right)^T \quad \text{e} \quad \gamma_i = (\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \gamma_{i3}, \gamma_{i4}).$$

De modo a fazer com que as estimativas obtidas expressem os valores das elasticidades, empregou-se a transformação logarítmica em cada variável. Deve-se ressaltar que o procedimento bayesiano adotado para a estimação do modelo DLM elimina o problema da ordem de integração das séries, bem como diminui a relevância do tamanho da amostra. SIMS e UHLIG (1991) advogam vigorosamente em favor da alternativa bayesiana sobre a abordagem clássica mais tradicional usada no que se refere à questão da raiz unitária. Por exemplo, sabe-se que os testes do tipo Dickey-Fuller Aumentado (ADF) são de baixa potência frente a alternativas plausíveis, especialmente em relação à hipótese alternativa de tendência estacionária. A abordagem bayesiana, por sua vez, revelaria que as hipóteses de raiz unitária e de tendência estacionária apresentariam probabilidades bastante similares quanto às suas funções *a posteriori*. Assim, a abordagem bayesiana fornece um sumário mais razoável da informação amostral que a abordagem clássica.

Outro problema com os testes clássicos de raiz unitária é a descontinuidade gerada na teoria assintótica (SIMS, 1988). A abordagem bayesiana, por ser baseada na função de distribuição *a posteriori*, não apresenta o problema da descontinuidade. Koop (1992) assinala que na abordagem clássica os valores críticos gerados a partir de pequenas amostras podem diferir substancialmente dos valores críticos assintóticos. A abordagem bayesiana, visto que é condicional à amostra observada, fornece resultados para pequenas amostras mais exatos. Em resumo, o problema da raiz unitária não é um ponto crítico na estatística bayesiana.

Por fim, diferentemente da abordagem clássica, a prática bayesiana não é dependente do teorema central do limite, o que elimina o uso de propriedades assintóticas (GELMAN *et al.*, 2003). Isto traz uma importante vantagem em termos da

habilidade de obter estimativas mais confiáveis num contexto de pequenas amostras e alta dimensionalidade paramétrica. As variáveis usadas neste estudo são descritas do seguinte modo:

RTBF : soma acumulada dos tributos federais nos últimos 12 meses. Fonte: Secretaria do Tesouro Nacional (STN); *DLSP* : razão entre a dívida líquida do setor público consolidado e o PIB (acumulado nos últimos 12 meses e valorizado pelo IGP-DI). Fonte: Banco Central do Brasil (BCB);

INFLA : taxa de inflação medida pela variação da média do IPCA no trimestre. Fonte: IBGE;

PIB : produto interno bruto a preços de mercado acumulado nos últimos 12 meses. Fonte: Banco Central do Brasil.

3 Resultados

Nesta seção são apresentados os resultados finais da estimação do modelo “inicial” da representação pela especificação que aparece na equação (1). A metodologia econométrica está descrita no apêndice. De início, podemos destacar que não encontramos significância estatística. Segundo, não encontramos significância estatística para as variáveis *INFLA* e *DLSP*. O critério para não significância de um parâmetro na abordagem bayesiana é que o zero esteja incluído na banda de erro ou banda bayesiana⁶. Assim sendo, o modelo foi novamente estimado usando apenas o PIB como regressor.

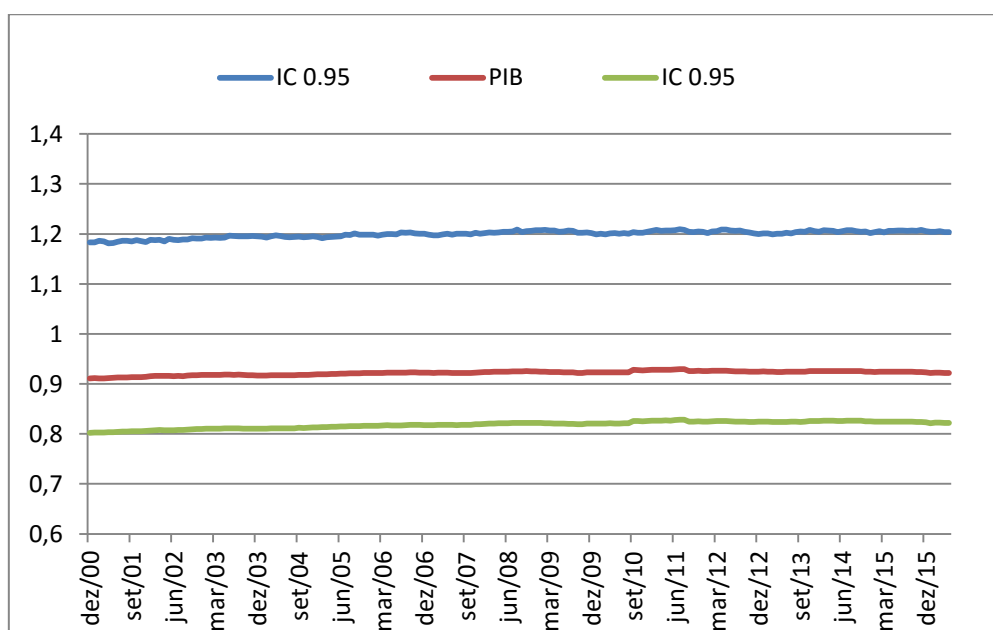
A figura 1 mostra a cronologia da evolução do coeficiente da elasticidade-renda da arrecadação tomada com base na mediana da distribuição a posteriori. Conforme pode ser visto, não podemos descartar a hipótese de que a elasticidade da arrecadação em relação ao produto esteja próxima de 1. Observa-se que as eventuais mudanças ocorridas na economia brasileira não tiveram efeito sobre a elasticidade-renda da arrecadação tendo em vista que o coeficiente estimado representativo dessa medida de acordo com a figura 1 não apresenta variação. É possível que tais variações possam ser percebidas quando tratamos os tributos de modo individualizado,⁷ de modo que quando a arrecadação é tomada de forma agregada o efeito seja anulado. Isso pode significar que a perda de arrecadação de um tributo é sistematicamente compensada pelo aumento de outro tributo.

⁶ Equivalente ao intervalo de confiança no enfoque clássico ou frequentista.

⁷ Ver MENDONÇA, MEDRANO; SACHSIDA (2013)

Figura 1

Mediana a posteriori de β_1 (PIB)



Fonte: Elaboração feita pelos autores.

4 Comentários Finais

Nesta nota, mostramos que a elasticidade-renda da arrecadação de tributos federais tem se permanecido praticamente constante e próxima à unidade desde 2000. Outro ponto importante é que, pelo menos, quando se trata da arrecadação agregada, o fator gerador da arrecadação parece ser somente o PIB, tendo em vista que tanto a dívida líquida quanto a inflação não apresentaram significância no modelo. Estes resultados estão em acordo com o obtido anteriormente por Mendonça, Sachsida e Medrano (2010).

Com relação à inflação, a ausência de significância estatística pode ser explicada pela possível mudança da relação entre essa variável e as finanças públicas após o plano real. No passado, quando a inflação era muito alta, havia uma relação direta da inflação com a arrecadação e gastos (efeito Tanzi e efeito Bacha). Esse mecanismo não é mais tão importante. Atualmente, o nível da inflação (abaixo ou acima da meta) reflete o estado das relações entre o Tesouro e o BC. Segundo essa interpretação, a política econômica teria mudado de regime no período da nova matriz (BC relaxando a política monetária e o Tesouro a política fiscal via desonerações e gastos) levando a mais inflação e menos arrecadação.

No caso da falta de significância da dívida, pelo menos duas justificativas podem ser empregadas. Primeiro, trazendo a coisa para dentro do contexto da política fiscal, talvez não seja a arrecadação que responda às mudanças do endividamento público, mas sim o resultado primário. Não é sem razão que os estudos empíricos que visam a estimar a função de reação fiscal fazem uso em geral do resultado primário como variável dependente e não a arrecadação (MENDONÇA, SANTOS, SACHSIDA,

2009). Além disso, como foi de certo modo mencionado no parágrafo anterior, parece que a economia, desde a introdução da nova matriz econômica, tem sido submetida a um regime de dominância fiscal. O que, em resumo, significa uma combinação de descontrolado dos gastos públicos, aumento do endividamento e pouco caso com a inflação.

1. Referências

CARTER, C. K.; KOHN, R. On gibbs sampling for state space models. *Biometrika* n. 81 (3), p. 541-553, 1994.

FRUWIRTH-SCHMATTER, S. Data augmentation and dynamic linear models. *Journal of Time Series Analysis* 15, 183–202, 1994.

GELMAN, A., CARLIN, J. B., STERN, H. S.; RUBIN, D. B. *Bayesian data analysis*. Chapman & Hall/CRC, 2003.

KOOP, G. ‘Objective’ Bayesian unit root tests. *Journal of Applied Econometrics* 7, 65-82, 1992.

MENDONÇA, M. J.; MEDRANO, L. A E SACHSIDA, A.. T. Um modelo econométrico com parâmetros variáveis para carga tributária bruta trimestral. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, 41(1), p. 133-162, 2011.

MENDONÇA, M. J.; MEDRANO, L. A. T; SACHSIDA, A. Um Modelo Econométrico para Previsão de Receita Tributária no Brasil. *Economia Aplicada*, 17(2), 295-329, 2013.

MENDONÇA, M. J.; SANTOS, C. H.; SACHSIDA, A. (2009). Revisitando a Função de Reação Fiscal no Brasil pós-Real: uma abordagem de mudanças de regime”. *Estudos Econômicos*, 39(4), 2009.

SIMS, C., UHILG, H. Understanding Unit Rooters: A Helicopter Tour. *Econometrica* 59(6): 1591-1599, 1991.

TANZI, V. Inflation, lags in collection, and the real value of tax revenue. *International Monetary Fund Staff Papers*. Washington, v.24, n.1, 1977.

WEST, M.; HARRISON, J. (1997). *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*. Springer

APÊNDICE

A.1 Modelo de regressão linear dinâmico

A forma geral do modelo DLM (*dynamic linear model*) pode ser definida da seguinte forma:

$$y_t = X_t \theta_t + S_t + v_t' \quad (\text{A.1})$$

$$\theta_t = \Gamma_1 \theta_{t-1} + \dots + \Gamma_p \theta_{t-p} + \omega_t' \quad (\text{A.2})$$

onde y_t é a variável endógena e X_t é um vetor $k \times 1$ de variáveis exógenas. Este modelo permite ainda a presença de um componente sazonal, S_t , que pode ser modelado segundo a representação do tipo de Fourier (WEST e HARRISON, 1997), de modo que

$$S_t = \sum_{j=1}^2 \left[a_j \sin\left(\frac{2\pi j t}{4}\right) + b_j \cos\left(\frac{2\pi j t}{4}\right) \right] = Z_t \varphi, \text{ onde}$$

$$Z_t = \left(\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) \quad \sin\left(\frac{2\pi 2t}{4}\right) \quad \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) \quad \cos\left(\frac{2\pi 2t}{4}\right) \right)^T \text{ e } \varphi = (a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2),$$

sendo θ_t o vetor $k \times 1$ de parâmetros que segue um processo autorregressivo de ordem p , em que os coeficientes estão contidos na matriz diagonal Γ_i , $k \times k$, para $i = 1, \dots, p$. Supõe-se que $\omega_t' \sim N(0_{k \times 1}, W_{k \times k})$ e $v_t' \sim N(0, V)$, admitindo-se ainda que ω_t' e v_t' não são correlacionados. Por simplicidade, admite-se também que $W = \text{diag}(w_1, \dots, w_k)$.

A ideia da aplicação da forma de Fourier para tratar sazonalidade está ligada ao fato de que qualquer padrão cíclico pode ser representado em termos da combinação linear de funções periódicas.⁸ Outra motivação para o uso desta abordagem, além da flexibilidade, é a facilidade de se obter interpretação, já que as trajetórias em forma de ondas podem ser associadas aos variados padrões observados na prática. Mais uma forma de tratar a sazonalidade seria introduzi-la diretamente na equação de estado. Neste caso, a equação A.2 assumiria a seguinte forma:

$$\theta_t = \Gamma_1 \theta_{t-1} + \dots + \Gamma_p \theta_{t-p} + S_t + \omega_t' \quad (2.2')$$

⁸. Uma função $g(t)$ é dita periódica se, para algum inteiro $p > 1$, e todo $n, t > 0$, tem-se que $g(t + np) = g(t)$.

Por fim, a sazonalidade pode tomar uma forma dinâmica. Neste caso, seria possível ter um modelo no qual a equação da medida é dada da seguinte forma: $y_t = F_t \theta_t^* + v_t'$, onde $F = [X_t, Z_t]$ e $\theta_t^* = [\theta_t, \varphi_t]$.

Será feito agora uso da seguinte notação para encaixar as equações numa forma mais compacta, que reduz o sistema expresso pelas equações (2.1-2.2) numa forma de espaço-estado de ordem um:

$$\underline{\theta}_t = \begin{bmatrix} \theta_t \\ \theta_{t-1} \\ \vdots \\ \theta_{t-p+1} \end{bmatrix}_{kp \times 1}, \quad G = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_{p-1} & \Gamma_p \\ I_k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_k & 0 \end{bmatrix}_{kp \times kp}, \quad \underline{\omega}_t = \begin{bmatrix} \omega_t' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{kp \times 1} \quad \text{e} \quad F_t' = \begin{bmatrix} X_t' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{kp \times 1}$$

Visto isso, tem-se que:

$$y_t = F_t \underline{\theta}_t + z_t \varphi + v_t' \quad (\text{A.3})$$

$$\underline{\theta}_t = G \underline{\theta}_{t-1} + \underline{\omega}_t \quad (\text{A.4})$$

onde (A.3) representa a equação da medida ou do movimento, enquanto (A.4) define a equação de estado.

A função de verossimilhança de (θ, G, φ, V) é dada por

$$p(y | \theta, G, \varphi, V) = (2\pi)^{-T/2} V^{T/2} \exp\left(-\frac{1}{2V} \sum_{t=1}^T (y_t - F_t \underline{\theta}_t - z_t \varphi)^2\right), \quad \text{onde}$$

$y = (y_1 \quad \dots \quad y_T)$, $\theta = (\underline{\theta}_1 \quad \dots \quad \underline{\theta}_T)$ e $\Gamma = (\Gamma_1 \quad \dots \quad \Gamma_p)$.

A.2 Procedimento de inferência

Nesta seção, é realizado um procedimento de inferência baseado no paradigma bayesiano. Inicialmente apresentam-se distribuições *a priori* para todos os parâmetros. Em seguida, o algoritmo MCMC é utilizado para obter amostras *a posteriori* de todos os parâmetros do modelo.

Distribuição *a priori*

Por simplicidade, distribuições *a priori* conjugadas são utilizadas para todos os parâmetros. A distribuição *a priori* para θ_t é especificada na equação (A.4) e completada pela informação inicial θ_0 tal que $\theta_0 \sim N(m_0, C_0)$, onde m_0 e C_0 são

hiperparâmetros conhecidos. As distribuições *a priori* para os parâmetros V , W , Γ e φ são as seguintes: i) $V \sim GI(n_V/2, n_V S_V/2)$; ii) $w_j \sim GI(n_W/2, n_W S_W/2)$, $j=1, \dots, k$; iii) $\Gamma_j \sim N(m_\Gamma, S_\Gamma)$, $j=1, \dots, p$; e iv) $\varphi \sim N(m_\varphi, S_\varphi)$, onde $n_V, S_V, n_W, S_W, m_\Gamma, S_\Gamma, m_\varphi$ e S_φ são hiperparâmetros conhecidos. Os valores dos hiperparâmetros utilizados foram os seguintes:

$$m_0 = 0, C_0 = 100, n_V = 2, n_V S_V = 0.1, n_W = 2, n_W S_W = 0.1, m_\Gamma = 0, S_\Gamma = 100, \\ m_\varphi = 0, S_\varphi = 100$$

Inferência a posteriori

A distribuição *a posteriori* conjunta de $(\theta, \Gamma, \varphi, V, W)$ é dada por

$$p(\theta, \Gamma, \varphi, V, W | y) \propto \prod_{t=1}^T p(y_t | \underline{\theta}_t, \varphi, V) \prod_{t=1}^T p(\underline{\theta}_t | \underline{\theta}_{t-1}, W, \Gamma) p(\underline{\theta}_0 | m_0, C_0) P(\varphi) p(V) p(W) p(\Gamma)$$

, a qual é analiticamente intratável e, por conseguinte, a inferência *a posteriori* exata é feita utilizando-se o esquema MCMC. Neste caso, o vetor da variável de estado é amostrado conjuntamente, utilizando-se o algoritmo FFBS (*forward filtering backward sampling*) de CARTER e KOHN (1994) e FRÜHWIRTH-SCHNATTER (1994). Para o resto de parâmetros Γ , φ , V e W , todas as distribuições condicionais completas são distribuições normais ou distribuições gama inversa. Todas as distribuições condicionais completas estão listadas a seguir.

a) A distribuição condicional de V é $(V | \theta, W, \varphi, \Gamma) \sim GI(n_V^*/2, n_V^* S_V^*/2)$,

$$\text{onde } n_V^* = n_V + T \text{ e } n_V^* S_V^* = n_V S_V + \sum_{t=1}^T (y_t - F_t \underline{\theta}_t - z_t \varphi)^2.$$

b) A distribuição condicional de $W = \text{diag}(w_1, \dots, w_k)$ é $(w_j | \theta, V, \varphi, \Gamma) \sim GI(n_W^*/2, n_W^* S_W^*/2)$ para $j=1, \dots, k$, onde

$$n_W^* = n_W + T - 1 \text{ e } n_W^* S_W^* = n_W S_W + \sum_{t=2}^T (\underline{\theta}_t - G \underline{\theta}_{t-1})^T (\underline{\theta}_t - G \underline{\theta}_{t-1}).$$

c) A distribuição condicional de $\Gamma = (\Gamma_1 \dots \Gamma_p)$ é $(\Gamma_j | \theta, V, W, \varphi) \sim N(m_\Gamma^*, S_\Gamma^*)$ para $j=1, \dots, k$, onde

$$S_\Gamma^* = (S_\Gamma^{-1} I_{p \times p} + w_j^{-1} H_j^T H_j)^{-1} \quad m_\Gamma^* = S_\Gamma^{-1} (S_\Gamma^{-1} I_{p \times p} \mathbf{1}_p + w_j^{-1} B_j^T H_j) \text{ para}$$

$$H_j = \begin{pmatrix} \theta_{p,j} & \theta_{p-1,j} & \cdots & \theta_{1,j} \\ \theta_{p+1,j} & \theta_{p,j} & \cdots & \theta_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{T-1,j} & \theta_{T-2,j} & \cdots & \theta_{T-p,j} \end{pmatrix} \text{ e } B_j = \begin{pmatrix} \theta_{p+1,j} \\ \theta_{p+2,j} \\ \vdots \\ \theta_{T,j} \end{pmatrix}.$$

d) A distribuição condicional de φ é $(\varphi | \theta, V, W, \Gamma) \sim N(m_\varphi^*, S_\varphi^*)$, onde $S_\varphi^* = (S_\varphi^{-1} I_{4 \times 4} + V^{-1} Z^T Z)^{-1}$ e $m_\varphi^* = S_\varphi^{-1} (S_\varphi^{-1} I_{4 \times 4} \mathbf{1}_4 + V^{-1} Z^T (y - F\theta))$.

Os estados $\theta_1, \dots, \theta_T$ são amostrados conjuntamente, utilizando-se o algoritmo FFBS, condicional sobre Γ , φ , V e W . A distribuição condicional completa conjunta segue a decomposição retrospectiva $p(\theta | y) = p(\theta_T | D_T) \prod_{t=1}^{T-1} p(\theta_t | \theta_{t+1}, D_t)$, onde $D_T = \{y_1, y_2, \dots, y_T\}$, $t = 1, \dots, T$ e D_0 representam a informação inicial. Iniciando com $\theta_0 \sim N(m_0, C_0)$, através do Filtro de Kalman pode ser mostrado que

$\theta_t | D_t \sim N(m_t, C_t)$, onde $m_t = a_{t-1} + A(y_t - f_t - z_t \varphi)$, $C_t = R_t - A_t Q_t A_t'$, $a_t = G m_{t-1}$, $R_t = G C_{t-1} G' + W$, $f_t = F_t' a_t + z_t \varphi$, $Q_t = F_t' R_t F_t + V$ e $A_t = R_t F_t Q_t^{-1}$, para $t = 1, \dots, T$;

θ_T é amostrado de $p(\theta_T | D_T)$ (passo denominado *forward filtering*). Para $t = T-1, T-2, \dots, 2, 1$, θ_t é amostrado de $p(\theta_t | \theta_{t+1}, D_t) = N(\tilde{a}_t, \tilde{C}_t)$, onde $\tilde{a}_t = m_t + B_t(f_{t+1} - a_{t+1})$, $\tilde{C}_t = C_t - B_t R_{t+1} B_t'$ e $B_t = C_t G' R_{t+1}^{-1}$ (passo denominado *backward sampling*).