TEXTO PARA DISCUSSÃO N° 1069

COMPARANDO MEDIDAS DE PRODUTIVIDADE: DEA, FRONTEIRA DE PRODUÇÃO ESTOCÁSTICA

Ajax R. B. Moreira
Thais C. R. Fonseca

Rio de Janeiro, fevereiro de 2005

TEXTO PARA DISCUSSÃO N° 1069

COMPARANDO MEDIDAS DE PRODUTIVIDADE: DEA, FRONTEIRA DE PRODUÇÃO ESTOCÁSTICA

Ajax R. B. Moreira*
Thais C. R. Fonseca**

Rio de Janeiro, fevereiro de 2005

* Da Diretoria de Estudos Macroeconômicos do IPEA.
ajax@ipea.gov.br

** Da Universidade Federal Fluminense.
thais@dme.ufrj.br

Governo Federal

Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão

Ministro – Nelson Machado (interino)
Secretário-Executivo – Nelson Machado

ipea **Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada**

Fundação pública vinculada ao Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão, o IPEA fornece suporte técnico e institucional às ações governamentais, possibilitando a formulação de inúmeras políticas públicas e programas de desenvolvimento brasileiro, e disponibiliza, para a sociedade, pesquisas e estudos realizados por seus técnicos.

Presidente
Glauco Arbix

Diretora de Estudos Sociais
Anna Maria T. Medeiros Peliano

Diretor de Administração e Finanças
Celso dos Santos Fonseca

Diretor de Cooperação e Desenvolvimento
Luiz Henrique Proença Soares

Diretor de Estudos Regionais e Urbanos
Marcelo Piancastelli de Siqueira

Diretor de Estudos Setoriais
Mario Sergio Salerno

Diretor de Estudos Macroeconômicos
Paulo Mansur Levy

Chefe de Gabinete
Persio Marco Antonio Davison

Assessor-Chefe de Comunicação
Murilo Lôbo

URL: http:/www.ipea.gov.br

Ouvidoria: http:/www.ipea.gov.br/ouvidoria

ISSN 1415-4765

JEL C1, C13, C29.

TEXTO PARA DISCUSSÃO

Uma publicação que tem o objetivo de divulgar resultados de estudos desenvolvidos, direta ou indiretamente, pelo IPEA e trabalhos que, por sua relevância, levam informações para profissionais especializados e estabelecem um espaço para sugestões.

As opiniões emitidas nesta publicação são de exclusiva e inteira responsabilidade dos autores, não exprimindo, necessariamente, o ponto de vista do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada ou do Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão.

É permitida a reprodução deste texto e dos dados contidos, desde que citada a fonte. Reproduções para fins comerciais são proibidas.

SUMÁRIO

SINOPSE

ABSTRACT

1 INTRODUÇÃO 1

2 METODOLOGIA 2

3 RESULTADOS 4

APÊNDICE 11

BIBLIOGRAFIA 13

SINOPSE

Os modelos análise envoltória de dados (DEA) e fronteira de produção estocástica (SF) obtêm estimativas da produtividade utilizando abordagens complementares, o que dificulta a comparabilidade entre eles, particularmente quando se admite uma componente estocástica nos dados. Propomos: *a*) um critério de avaliação para a estimativa da produtividade obtida por cada modelo — índice de erro de classificação (IEC); *b*) uma abordagem empírica da simulação para comparar esses modelos; e *c*) uma versão bayesiana para o modelo SF que permite derivar o valor esperado do posto da produtividade.

Os resultados mostram que maiores IECs — resultados piores — estão relacionados com: *a*) retornos variáveis de escala quando o DEA é utilizado; *b*) pequenas amostras ($n < 30$) quando o SF é utilizado; e *c*) menor razão entre a variância da produtividade e a variância do ruído, para os dois modelos (< 3).

ABSTRACT

Data envelopment analysis (DEA) and stochastic production frontier (SF) models obtain productivity measures using complementary approaches, which makes the comparability between these models a difficult task, especially when data has a stochastic component. We propose: *a*) one criteria to evaluate the performance of each model in estimating the productivity — the classification error index (CEI) — *b*) an empirical Monte Carlo approach to compare the performance of these models; and *c*) a Bayesian version for stochastic production frontier that can estimate the expected value of the rank of productivity.

The results show that higher CEI — worst results — is related to: *a*) variable return of scale when DEA is used; *b*) small sample ($n < 40$) when SF is used; and *c*) lower ratio between productivity (< 3) and error variance for both models.

1 INTRODUÇÃO

A medida da produtividade técnica ou econômica tem muitas aplicações. Reguladores utilizam medidas de produtividade para desenhar mecanismo de incentivo em setores regulados, analistas utilizam para descrever de forma comparativa o estado de um segmento de atividades. Em todos os casos admite-se que exista um conjunto de agentes, ou unidades de decisão, que utiliza recursos para produzir, e o agente mais eficiente é o que utiliza menor quantidade de fatores por unidade de produto, ou vice-versa, que produza a maior quantidade de produto dada uma dotação de recursos.

Quando o processo produtivo envolve apenas um produto ou fator de produção, o agente tecnicamente mais eficiente é o que tem a maior relação entre as quantidades de produto/fator. Quando o processo envolve mais que um produto e fator, e os preços dos produtos e dos fatores são conhecidos, o agente economicamente mais eficiente é o que tem a maior relação receita/custos.[1] No entanto, os processos produtivos são mais complexos e funcionam com múltiplos produtos e fatores, e, freqüentemente, envolvem produtos e fatores que não têm mercado ou que não têm preço conhecido.

Os modelos de fronteira de produção determinística ou estocástica medem a produtividade técnica de processos com múltiplos produtos e fatores, e a produtividade econômica quando pelo menos um dos preços não é conhecido. Na literatura existem dois modelos concorrentes: análise envoltória de dados (DEA) e fronteira estocástica (SF), e até onde os autores estão informados não existe um consenso sobre qual o modelo mais adequado. Um dos motivos é a comparabilidade entre eles. O DEA é um modelo não-paramétrico que supõe apenas a concavidade da função de produção e ignora o ruído contido no dado; por outro lado, o SF considera o ruído, mas depende da especificação funcional da função de produção.

Um resumo do SF e uma breve história do pensamento no assunto podem ser vistos em Kumbhakar e Lovell (2000). A literatura sobre DEA é muito extensa, começou com Farrell (1957), foi colocada como um problema de otimização por Charnes, Cooper e Rodes (1979) e estendido por diversos autores. Mais recentemente, diversos autores têm buscado comparar as duas abordagens, em particular Cubbin e Tzanidakis (2000) apresentam uma discussão interessante.

Procurando aproximar as abordagens, Banker (1993) incorpora ao modelo DEA a hipótese de que a produtividade tem uma distribuição de probabilidade, e que o dado não tem ruído, para provar que a produtividade medida pelo DEA é um estimador de máxima verossimilhança. No caso em que o dado não contém ruído, o DEA é então um modelo superior ao SF porque não depende de hipóteses sobre a forma da função de produção e da distribuição de probabilidade da produtividade, e obtém um estimador de máxima verossimilhança.

No entanto, em muitos casos não se pode rejeitar que o dado tem ruído, e portanto não é possível garantir qual dos dois modelos é o mais adequado. Na falta de

1. Pode-se argumentar que, na verdade, todos os agentes são igualmente eficientes, e que as eventuais improdutividades decorrem da omissão de alguns custos ou restrições relevantes. Portanto, os resultados de medidas de produtividade são condicionais àquela lista de produtos e fatores.

um resultado teórico, neste texto vamos comparar empiricamente o desempenho desses modelos, considerando que o dado contém ruído e buscando identificar as situações em que esses modelos sejam mais vulneráveis.

Admitindo que a fragilidade dos dois modelos não está relacionada com o número de fatores e produtos, e aceitando a limitação da fronteira estocástica que não dispõe ainda de um modelo amplamente aceito para múltiplos produtos e fatores,[2] vamos considerar um processo produtivo com dois fatores e um produto, ou o que é equivalente, um fator e dois produtos.

A capacidade de cada um dos modelos de avaliar a produtividade é, naturalmente, a capacidade de recuperar o verdadeiro valor da produtividade de cada agente, ou, pelo menos a verdadeira ordenação dos agentes segundo a sua produtividade. Uma forma de comparar os modelos é submeter aos dois modelos um mesmo conjunto de dados para o qual conhecemos os valores verdadeiros da produtividade e comparar os erros cometidos por cada um dos modelos. Para esse exercício empírico serão geradas amostras de 500 observações, que serão submetidas a cada um dos modelos, exercício replicado 30 vezes para obter uma estimativa da incerteza dos estimadores da produtividade. O trabalho está organizado em quatro seções, incluindo esta introdução. A Seção 2 apresenta a metodologia, a Seção 3 os resultados e a Seção 4 conclui.

2 METODOLOGIA

O modelo DEA constrói uma envoltória dos dados resolvendo repetidamente — para cada uma (i) das N unidades de decisão — o problema (1), onde a produtividade é medida pela distância θ entre cada observação e a envoltória. O modelo da fronteira de produção estocástica é descrito por (2), onde a medida de produtividade ($-u$) é identificada admitindo que tenha uma distribuição assimétrica, no caso, que tenha distribuição normal truncada no 0.

$$\text{min } \theta_i, \text{ tal que } \sum_{j=1}^{N} \lambda_j y_j >= y_i \qquad \sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_{jk} =< \theta_i x_i \qquad k = 1...p \quad (1)$$

$$y = x\beta + e$$

onde:

$$e = v - u \qquad v \sim N(0,\sigma^2) \text{ e } u \sim N^0(0,\tau^2) \quad (2)$$

O modelo DEA foi calculado utilizando o algoritmo de Coelli (1996*a* e *b*). O modelo SF pode ser especificado e estimado na forma clássica ou bayesiana. No caso clássico, Coelli (1996*a* e *b*), o modelo é estimado por máxima verossimilhança. Essa abordagem obtém estimativas pontuais de todos os parâmetros, e em particular da produtividade $\{\hat{u}\}$ com o qual podemos calcular o posto correspondente $p(\hat{u})$.

No caso bayesiano, ver Fonseca (2004) e um resumo no Apêndice, o modelo equivalente foi estimado utilizando o método das Cadeias de Markov de Monte

2. O DEA, ao contrário do SF, considera situações de múltiplos produtos e fatores. A literatura recente de SF tem propostas para corrigir essa produtividade. Fernandez, Koop e Steel (2000) e Medrano e Migon (2003) propõem modelos que consideram múltiplos produtos e fatores dentro da abordagem do SF.

Carlo (MCMC) [ver Gamerman (1997)], que obtém uma amostra da distribuição dos estimadores, e em particular da distribuição do estimador da produtividade $\{u\}$. Nesse caso, podemos calcular o posto correspondente a cada realização da distribuição da produtividade e, portanto, obter o seu valor esperado $E(p(u))$. Estatística que é diferente de $p(\hat{u})$ pois a operação posto não é linear. Será visto a seguir que $E(p)$, que só pode ser obtida através do estimador de MCMC, apresenta maior capacidade de recuperar o verdadeiro ordenamento das unidades de decisão.

Quando se dispõe de apenas uma, ou um número insuficiente de observações por agente, é necessário introduzir uma hipótese para distinguir ruído de informação. Em geral, admite-se que a distribuição da produtividade é assimétrica, sob o argumento de que o maior contingente de agentes encontra-se próximo da fronteira. Distinguir, empiricamente, a distribuição do ruído da distribuição da produtividade pode ser um problema especialmente quando a amostra for pequena. Liseo e Loperfido (2004) provam que existe uma probabilidade positiva de que o estimador de máxima verossimilhança seja infinito para amostras muito pequenas. Por exemplo, para n = 10 essa probabilidade é de 50%, mas para n = 30, essa probabilidade é de 13%. Naturalmente isso impõe uma limitação ao uso de fronteira de produção estocástica quando a amostra é pequena. No nosso exercício utilizamos uma amostra de n = 500, mas verificamos o efeito da redução do tamanho da amostra.

O DEA é um modelo não-paramétrico que, portanto, não tem um processo gerador de dados explícito. Por esse motivo, os dados foram gerados utilizando o modelo SF e as produtividades avaliadas, repetidamente — 30 vezes — para avaliar a distribuição do erro do estimador. Gerado dessa forma o exercício introduz um viés a favor da SF uma vez que este dispõe de informação adicional sobre a forma da função de produção.

O desempenho de cada modelo foi avaliado segundo dois critérios. A capacidade de recuperar a verdadeira ordenação entre os agentes e o viés da estimativa produtividade (V). A capacidade de recuperar a verdadeira ordenação foi medida pelo índice de erro de classificação (IEC). O primeiro critério mede o desvio entre o posto verdadeiro e o posto estimado para cada percentil q. Assim, IEC (10%) é a proporção dos agentes para os quais o desvio entre o posto verdadeiro e o estimado é maior do que 10%. Naturalmente, quanto maior o valor de IEC pior o resultado, e isso é tão mais relevante quanto para maior o valor de q. Formalmente temos:

$$\text{IEC}\ (q|u,\hat{u}) = \sum_i f(p(i|u) - p(i|\hat{u}))$$

onde:

$f(x) = 1$ se $|x| > qN$;

$p(i|u)$ = posto do i-ésimo agente, dado o conjunto das produtividades verdadeiras; e

$p(i|\hat{u})$ = posto do i-ésimo agente, dado o conjunto das produtividades estimadas.

Por construção, espera-se que o valor desse índice seja menor para maiores valores de q. Como elemento de comparação foi construído também um IEC supondo que a produtividade foi sorteada de uma distribuição uniforme — esse índice será chamado de IEC não-informativo (IECNI).

O outro critério é uma medida do desvio entre o valor médio da produtividade medido por classe de percentil, formalmente:

$$V(q) = (\sum_{i \in I(q)} E(\hat{u}_i) - \sum_{i \in I(q)} E(u_i))/q^*N$$

onde $I(q)$ é o conjunto das produtividades dos agentes pertences ao intervalo $[q - \Delta q, q + \Delta q]$.

Os dois modelos têm limitações conhecidas. O SF é vulnerável: *a*) ao tamanho da amostra, pois para amostras pequenas não é possível distinguir a distribuição do ruído da distribuição da produtividade;[3] *b*) à proporção entre a variância da produtividade do ruído e da produtividade $-\gamma = \tau^2/(\sigma^2 + \tau^2)$, pois quando esse parâmetro tende a 0 a distribuição de $(e - u)$ tende à distribuição normal e não é possível mais estimar as produtividades; e *c*) ao erro de especificação da forma funcional. Por outro lado, o DEA é vulnerável: *a*) à não utilização da informação dos determinantes da produtividade quando conhecidos; *b*) à magnitude relativa do ruído; *c*) à forma da função de produção, pois para retornos variáveis de escala o DEA tende a considerar na fronteira uma proporção maior dos agentes, reduzindo a sua capacidade de distinguir entre os agentes; e finalmente *d*) à existência de ponto espúrio.

De forma resumida as propriedades do DEA são: *a*) não-paramétrico; *b*) ignora o ruído contido no dado, misturando ruído com a medida de produtividade; *c*) a existência de ponto espúrio prejudica o resultado; e *d*) tempo de processamento proporcional à quarta potência do tamanho da amostra. Por outro lado, o SF: *a*) é paramétrico e depende da forma funcional; *b*) separa do dado o que é informação; *c*) depende, quando se dispõe de um número insuficiente de observações por agente, da hipótese sobre o formato da distribuição da produtividade; *d*) permite incorporar informação relativa aos determinantes da produtividade, o que pode ser crítico quando γ é pequeno;[4] *e*) não distingue produtividade do ruído quando a amostra é pequena ($N < 30$); e *f*) tempo de processamento proporcional ao tamanho da amostra.

3 RESULTADOS

Inspirado nas condições de vulnerabilidade dos dois modelos, foram definidos seis conjuntos de dados, que foram gerados de uma função de produção translog:

$$\mathrm{Lg}(q_i) = \beta_0 + \beta_1 \lg(x_i) + \beta_2 \lg(w_i) + \beta_3 \lg(x_i)^2 + \beta_4 \lg(w_i)^2 + \beta_5 \lg(x_i)\lg(w_i) - u_i + e_i$$

$$e_i \sim N(0,\sigma^2), \qquad u_i \sim N^+(\delta^*,\tau^2)$$

onde $\beta = k$ (0,3, 0,7, –0,1, 0,1, 0,2) que corresponde à função de produção com retornos constantes de escala quando $k = 1$. A alteração da forma da função é obtida multiplicando todos os coeficientes, exceto o intercepto, por um fator k. Isso faz com que a função deixe de apresentar retornos constantes.

3. Liseo e Loperfido (2004) provam que existe uma probabilidade positiva de que o estimador de máxima verossimilhança seja infinito para amostras muito pequenas. Por exemplo, para $n = 10$ essa probabilidade chega a 50%, mas para $n = 30$, ela cai para 13%.

4. A distribuição do estimador da produtividade é da forma $u|y - Xb \sim N^+((1 - \gamma)Zd + \gamma(y - Xb), \gamma\sigma^2)$, que mostra que à medida que γ reduz cresce a importância dos determinantes da produtividade.

TABELA 1
DEFINIÇÃO DAS AMOSTRAS

Amostra	κ	γ	N	σ^2	δ^*
R	1	0,9	500	0,5	0
K	2	0,9	500	0,5	0
G	1	0,4	500	0,5	0
N	1	0,9	50	0,5	0
$\sigma^2\|\gamma$	1	0,9	500	2	0
D	1	0,4	500	0,5	δz

No Apêndice é mostrado o diagrama de dispersão de $\log(x1/q)$ x $\log(w1/q)$, onde as esferas distinguem o efeito do ruído, as mais claras excluem e as mais escuras incluem. Os gráficos sugerem, para cada amostra, o efeito do ruído sobre os resultados, explicitando as duas fronteiras, a efetiva e a decorrente, de ignorar o ruído.

As Tabelas 2 e 3 mostram, respectivamente, o valor esperado e o desvio-padrão do IEC para percentis selecionados para o DEA e o SF medido pelo $E(P)$. Essas tabelas serão analisadas de várias formas. Mas inicialmente considere os percentis 10° e 25°, que correspondem à proporção dos pontos em que os métodos cometem erros de classificação superior a um decil e um quartil, respectivamente. Para o decil vemos que os dois modelos cometem erros elevados e são pouco melhores que a ausência de modelo. Já para o quartil os modelos são expressiva e significativamente, do ponto de vista estatístico, melhores do que a ausência de modelo, e mais o DEA e o SF têm desempenhos diferentes entre si e dependentes da amostra {*r*, *k*, *g*, *n*, *s*, *d*}.

TABELA 2
VALOR ESPERADO DO IEC POR PERCENTIL — MÉTODO

P	IECNI	DEA						Fe|$\sigma(\hat{u})$					
		R	*K*	*G*	*N*	*S*	*d*	Ref	*k*	*g*	*n*	*s*	*d*
0,10	0,82	0,48	0,60	0,72	0,47	0,52	0,62	0,47	0,48	0,71	0,51	0,48	0,51
0,15	0,76	0,32	0,46	0,61	0,34	0,35	0,47	0,32	0,33	0,60	0,39	0,32	0,36
0,20	0,70	0,21	0,35	0,51	0,21	0,23	0,36	0,21	0,21	0,50	0,25	0,21	0,24
0,25	0,65	0,13	0,26	0,42	0,15	0,14	0,27	0,13	0,13	0,42	0,19	0,13	0,16
0,30	0,60	0,08	0,19	0,35	0,08	0,08	0,20	0,07	0,08	0,34	0,12	0,08	0,10
0,35	0,55	0,04	0,14	0,28	0,06	0,05	0,14	0,04	0,04	0,27	0,09	0,04	0,06
0,40	0,50	0,02	0,09	0,22	0,03	0,03	0,10	0,02	0,02	0,22	0,05	0,02	0,03
0,45	0,45	0,01	0,06	0,17	0,02	0,01	0,06	0,01	0,01	0,17	0,03	0,01	0,02
0,50	0,40	0,01	0,04	0,13	0,01	0,01	0,04	0,01	0,00	0,13	0,01	0,01	0,01

TABELA 3
DESVIO-PADRÃO DO ESTIMADOR DO IEC — MÉTODO

P	IECN	DEA						*Fe|P**					
		R	*K*	*G*	*N*	*s*	*D*	Ref	*k*	*G*	*n*	*s*	*d*
0,10	0,02	0,02	0,02	0,02	0,07	0,04	0,03	0,02	0,03	0,02	0,08	0,03	0,02
0,15	0,02	0,03	0,03	0,02	0,07	0,04	0,03	0,02	0,03	0,02	0,08	0,02	0,02
0,20	0,02	0,02	0,03	0,02	0,07	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,07	0,02	0,02
0,25	0,02	0,02	0,02	0,02	0,06	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,07	0,02	0,02
0,30	0,02	0,02	0,02	0,02	0,04	0,02	0,02	0,01	0,01	0,02	0,05	0,01	0,02
0,35	0,02	0,01	0,02	0,02	0,03	0,01	0,02	0,01	0,01	0,02	0,04	0,01	0,01
0,40	0,02	0,01	0,02	0,02	0,03	0,01	0,02	0,01	0,01	0,02	0,03	0,01	0,01
0,45	0,02	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,02	0,03	0,00	0,01
0,50	0,02	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00

Os resultados serão comparados testando a hipótese de que a diferença entre as estimativas é nula. Assim, foi calculado $E(X)/V(E(X)$^.5, onde X = IEC|DEA – IEC|*SF*), razão que, sob normalidade, tem distribuição $N(0,1)$. A Tabela 4 compara para cada amostra {*r*, *k*, *g*, *n*, *s*, *d*}, os dois modelos, considerando as duas medidas derivadas da SF, $p(\hat{u})$ e $E(p)$.

TABELA 4
COMPARANDO MÉTODOS: SIGNIFICÂNCIA (IEC|DEA – IEC|SF)

P	DEA X $p(\hat{u})$						DEA X $E(P)$					
	R	*k*	*G*	*n*	*s*	*D*	*R*	*k*	*G*	*N*	*s*	*d*
0,10	1	18	1	–2	5	16	–3	16	–6	–8	2	13
0,15	0	19	1	–3	3	17	0	20	–6	–6	2	17
0,20	0	22	1	–2	2	19	3	25	–2	–6	4	21
0,25	0	23	0	–2	2	18	4	26	5	–3	6	22
0,30	0	24	1	–3	1	18	6	29	11	–3	7	23
0,35	1	27	1	–3	2	18	6	33	16	0	8	22
0,40	1	22	0	–2	2	18	5	26	20	1	7	23
0,45	0	20	0	–1	1	15	5	23	25	2	6	20
0,50	1	18	0	–2	2	16	5	20	29	1	5	18

Os resultados mostram que:

• para a amostra de referência (*r*), o DEA e $p(\hat{u})$ produzem resultados, estatisticamente indistintos, mas quando comparado com o $E(P)$, o IEC obtido com o DEA é significativamente maior em todos os casos, exceto para o primeiro percentil;

• para a amostra *G*, que distingue o efeito do parâmetro γ, o DEA e $p(\hat{u})$ são indistintos, mas o IEC|DEA é maior do que o IEC|$E(P)$;

• na amostra com dimensão reduzida, o IEC|DEA é significativamente menor do que o IEC| $p(\hat{u})$, mas não quando comparado com o $E(P)$; e

• para as demais amostras (k, s, d) os resultados do IEC|SF são significativamente menores do que o IEC|DEA para todos os percentis e para as duas medidas $p(\hat{u})$, $E(P)$.

TABELA 5
EFEITO DA PARAMETRIZAÇÃO (IEC|*i*– IEC|ref)

P	DEA|DEA$_r$					$p(\hat{u})\|p_r(\hat{u})$					$E(p)\|E(p_r)$				
	K	G	n	S	K*	k	G	n	s	D	k	G	n	s	D
0,10	20	44	0	6	16	1	44	3	1	17	1	36	9	1	18
0,15	21	52	2	3	15	1	54	5	1	17	1	49	9	1	17
0,20	22	56	0	3	15	1	55	4	1	20	1	58	9	1	18
0,25	23	59	2	3	14	1	57	5	1	18	1	57	7	1	18
0,30	23	55	1	2	14	2	59	5	1	19	2	61	7	1	17
0,35	26	55	2	2	15	1	54	5	1	20	1	52	4	1	17
0,40	21	49	2	2	16	1	48	4	1	19	1	47	2	0	12
0,45	20	47	2	2	16	0	48	3	1	16	0	37	2	0	8
0,50	17	47	0	1	16	–1	44	3	0	16	–2	22	1	–1	4

As amostras definidas na Tabela 1 diferem da amostra de referência (r) em apenas um dos elementos. Isso permite atribuir ao elemento que variou a fonte do efeito sobre a capacidade do modelo em medir a produtividade. A Tabela 5 apresenta para o DEA e para o SF avaliado segundo as duas medidas $p(\hat{u})$ e $E(p)$, o efeito da alteração da especificação da amostra comparando cada uma delas com a amostra de referência, exceto as colunas k^* e d.

A coluna k^* refere-se à comparação, para a amostra k, entre os resultados do DEA supondo que a função de produção tem retornos de escala variáveis e constantes. A coluna d refere-se à comparação, para a amostra d, entre o modelo de SF especificado com e sem os determinantes da produtividade.

Os resultados da Tabela 5 mostram que:

a) o efeito escala não afeta o SF;

b) o efeito escala afeta o DEA nos dois casos, com a produtividade medida supondo retornos de escala constantes e variáveis. Nesse último caso o IEC é significativamente maior do que o obtido com retornos constantes, sugerindo a incapacidade do DEA em lidar com funções de produção com retornos variáveis de escala quando dado o ruído;

c) a redução do γ aumenta significativamente o IEC das duas abordagens;

d) a redução do tamanho da amostra afeta marginalmente o DEA, mas afeta de forma significativa o SF;

e) o aumento da variância do ruído afeta o DEA mas não afeta o SF; e

f) a omissão dos determinantes da produtividade (δZ) aumenta o erro de classificação neste caso – $\gamma = 0{,}4$.[5]

Em seguida apresentamos os resultados para a medida de viés. A Tabela 6 apresenta a razão que testa a hipótese de o desvio ser nulo, e a Tabela 7, o desvio quadrático médio dessa medida.

TABELA 6
TESTANDO SE O VIÉS É NULO

	DEA						FE					
	r	*k*	*g*	*n*	*s*	*d*	*r*	*k*	*g*	*N*	*s*	*d*
0,10	1	2	4	0	1	2	0	0	0	0	0	0
0,30	2	2	5	0	1	2	0	0	0	0	0	0
0,50	2	3	3	0	1	2	0	0	0	0	1	0
0,70	2	3	2	0	1	2	0	0	1	0	0	0
0,90	1	1	1	0	1	1	1	1	3	0	1	1

TABELA 7
DESVIO QUADRÁTICO MÉDIO

	DEA						FE					
	R	*K*	*g*	*n*	*s*	*d*	*r*	*k*	*G*	*N*	*s*	*d*
0,10	0,02	0,03	0,33	0,02	0,00	0,11	0,03	0,03	0,10	0,19	0,01	0,03
0,30	0,09	0,11	0,46	0,08	0,01	0,23	0,07	0,06	0,05	0,22	0,05	0,05
0,50	0,19	0,23	0,54	0,15	0,06	0,35	0,08	0,08	0,05	0,20	0,09	0,06
0,70	0,33	0,41	0,60	0,25	0,20	0,48	0,03	0,03	0,11	0,12	0,07	0,10
0,90	0,44	0,59	0,51	0,28	0,50	0,49	0,14	0,14	0,17	0,14	0,17	0,16

Os resultados mostram que:

a) o estimador da produtividade obtido pela fronteira é não-viesado e o obtido pelo DEA é viesado; e

b) o desvio quadrático médio do DEA é superior ao obtido pelo SF.

As figuras do Gráfico 1 mostram os resultados relativos ao IEC para alguns dos casos apresentados, onde a abscissa refere-se ao percentil para o qual o erro de classificação está medido, e o sufixo (m, M) indica o menor e o maior valor do IEC obtido na amostra em cada percentil, respectivamente, para o modelo DEA (dn, dM) e do SF (fm, fM). Nas figuras a linha estacada no quadrante superior refere-se ao IEC não-informativo.

5. Resultados não apresentados mostram que essa característica depende fortemente do nível do parâmetro γ, o que estava previsto pela nota 4. Sempre que este parâmetro estiver em uma região favorável γ da ordem de 0,9, a introdução de variáveis explicativas no modelo da produtividade é irrelevante, seja para o DEA ou para a SF.

GRÁFICO 1
COMPARANDO A DISTRIBUIÇÃO DO IEC|DEA, IEC|SF PARA AS DIVERSAS AMOSTRAS

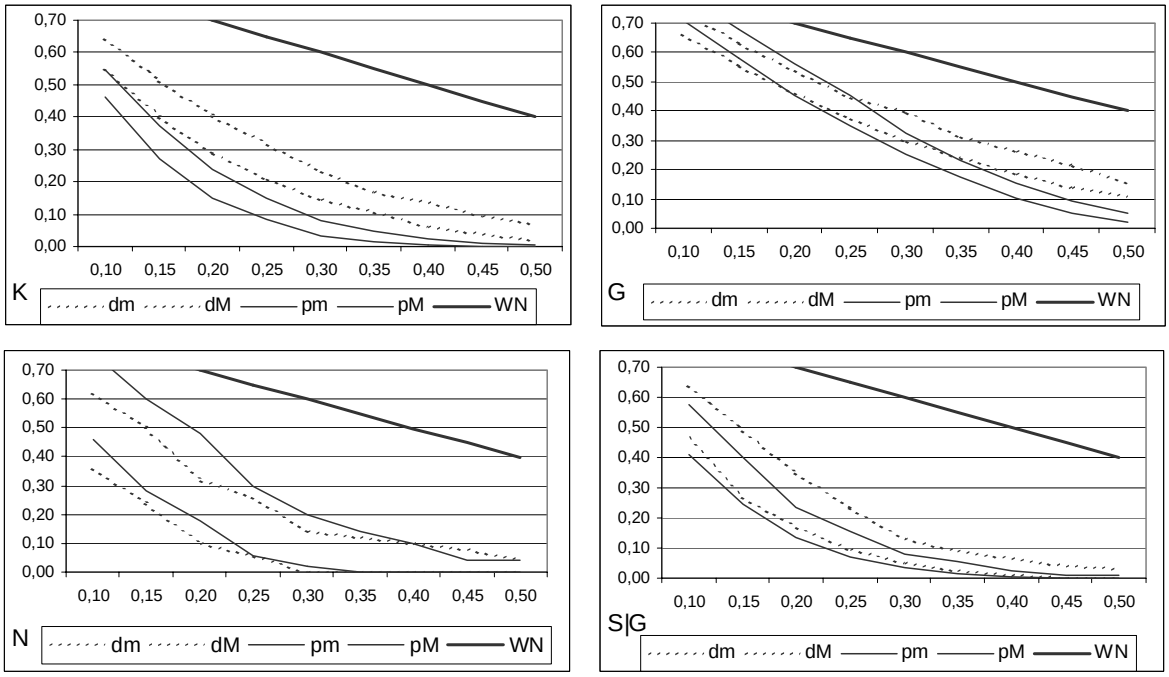
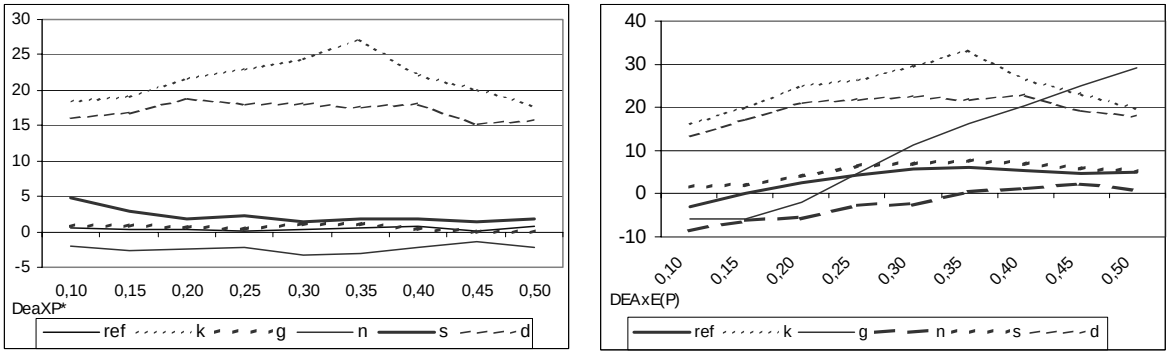
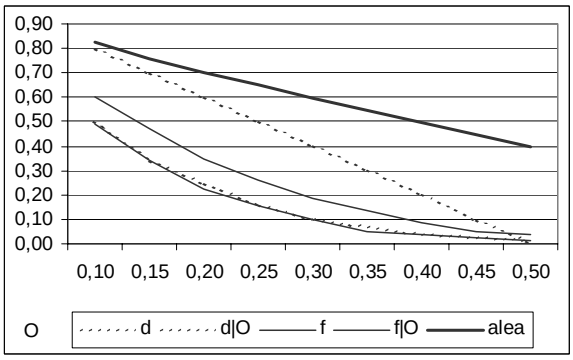


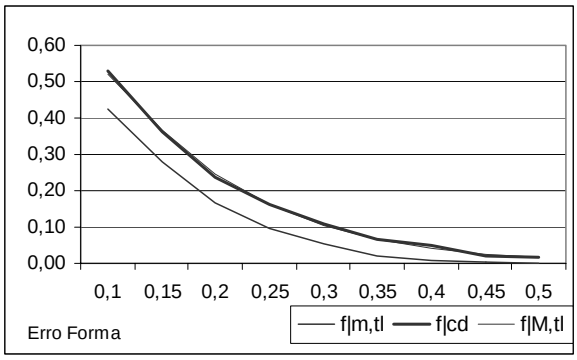
GRÁFICO 2
SIGNIFICÂNCIA DA DIFERENÇA ENTRE OS DOIS MODELOS



A seguir, comentamos exercícios complementares que, apesar de realizados com apenas uma replicação, são informativos. Na figura à esquerda do Gráfico 3 apresentamos o IEC para a parametrização de referência, em que foram incluídos na amostra 5% de pontos espúrios — o produto (*y*) é deslocado por um fator de 10 — e submetido aos dois modelos. Pode-se observar que o efeito sobre o DEA é maior do que sobre o SF. Na figura à direita é apresentado o intervalo de variação para a amostra de referência e o resultado obtido pelo SF estimado, considerando erradamente que a função de produção é uma Cobb-Douglas. Pode-se observar que o resultado piora mas fica ainda dentro do intervalo de densidade *a posteriori* do IEC.

GRÁFICO 3
RESULTADOS COMPLEMENTARES — PONTO ESPÚRIO E ERRO DE ESPECIFICAÇÃO

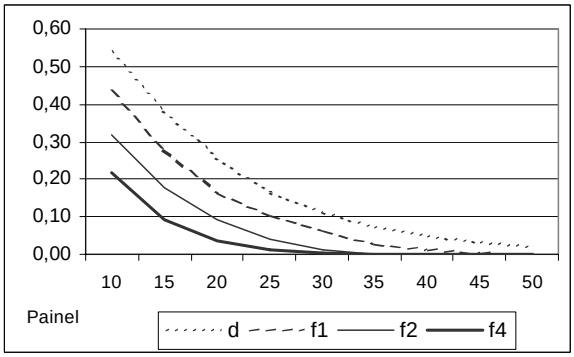


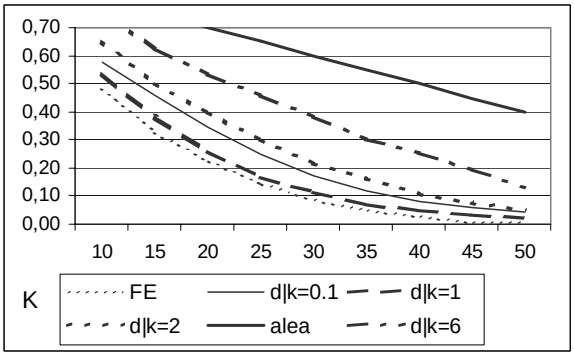


As figuras do Gráfico 4 avaliam os efeito da estimativa com dados em painel e o do erro de especificação da função de produção. No caso do dado em painel o mesmo agente é representado por mais de uma observação, e é imposta a restrição de um comportamento tendencial, como em Coelli (1996*a* e *b*) para a evolução temporal da produtividade. Nesse caso é possível melhorar a estimativa da produtividade e do IEC, como mostra a figura da direita. Finalmente, a figura da esquerda mostra o efeito da forma da função de produção sobre o IEC.

Os resultados mostram que, apesar de o DEA ser uma abordagem não-paramétrica, o IEC aumenta quando a forma da função se afasta da condição de retorno constante de escala, mesmo quando se admitem retornos variáveis de escala na construção da medida de produtividade do DEA. Para reforçar esse ponto foram construídos outros conjuntos de dados admitindo diferentes valores para *k*. Os resultados mostram que o efeito do retorno de escala é crescente e aproxima o IEC do DEA do IEC não-informativo.

GRÁFICO 4
DADOS EM PAINEL E EFEITO DO RETORNO DE ESCALA





4 CONCLUSÃO

Os resultados apresentados são empíricos e, portanto, condicionais à escolha das amostras, além disso, tendem a favorecer o modelo SF uma vez que a definição da forma funcional é conhecida nesse caso. Ainda assim podemos extrair algumas conclusões.

O estimador da produtividade obtido com o modelo DEA é viesado em todos os casos considerados.O modelo DEA, apesar de não dispor da forma funcional, é capaz

de apresentar resultados tão bons, em termos do IEC, quanto o modelo da fronteira, desde que a função de produção apresente retornos constantes de escala.

O modelo SF, ao contrário do DEA, é prejudicado pela redução do tamanho da amostra, o que é coerente com o resultado teórico que indica a impossibilidade de estimar modelos desse tipo com amostras menores do que 30. O modelo DEA é afetado pela forma da função de produção. À medida que esta se afasta dos retornos constantes, o IEC obtido com o DEA aumenta progressivamente.

O IEC obtido utilizando o valor esperado do posto calculado com a abordagem bayesiana é sistemática e significativamente menor do que o conseguido com o posto esperado obtido com a abordagem clássica.

Os dois modelos são igualmente afetados pela redução da proporção da variância da produtividade (γ). Esse é um resultado esperado teoricamente para o SF, mas que afeta igualmente o DEA. Quando a variância do ruído é proporcionalmente pequena — γ mais próximo de 1 — o IEC obtido com os dois modelos é semelhante e a incorporação dos determinantes da produtividade não é relevante. Por outro lado, se esse parâmetro está na região desfavorável, o SF pode ter seu desempenho melhorado pela incorporação dos determinantes da produtividade.

Os resultados obtidos são condicionais ao formato da função de produção adotada. Naturalmente é necessário avaliar em que medida os resultados obtidos permanecem quando os dados são gerados com outros formatos para a função de produção. Para isso, pretende-se reproduzir a mesma metodologia com dados gerados com outras funções de produção — CES, Diwert, proporção fixa.

APÊNDICE

A.1 RESUMO DA ESTIMAÇÃO BAYESIANA DA FRONTEIRA ESTOCÁSTICA

No modelo (2) a densidade da diferença $e - u$ é dada por:

$$g(e) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e-u)h(u)du \tag{A1}$$

Após alguns cálculos, obtemos a seguinte densidade:[6]

$$g(e) = \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{\eta}{\tau}\right)}{\sqrt{\sigma^2+\lambda^2\tau^2}}\phi\left(\frac{e-\lambda\eta}{\sqrt{\sigma^2+\lambda^2\tau^2}}\right)\Phi\left(\frac{\lambda\tau(e-\lambda\eta)}{\sigma\sqrt{\sigma^2+\lambda^2\tau^2}}+\frac{\eta\sqrt{\sigma^2+\lambda^2\tau^2}}{\sigma\tau}\right) \tag{A2}$$

onde ϕ é a função de densidade da Normal-padrão e Φ é a função de distribuição acumulada da Normal-padrão. Podemos escrever:

$$w = \frac{e-\lambda\eta}{\sqrt{\sigma^2+\lambda^2\tau^2}},\ \lambda^* = \lambda\frac{\tau}{\sigma},\ \eta^* = \eta\frac{\sqrt{\sigma^2+\lambda^2\tau^2}}{\sigma\tau}$$

Logo,

6. Para maiores detalhes, ver Gupta, González e Molina (2004).

$$g(w) = \Phi^{-1}\left(\frac{\eta}{\sqrt{1+\lambda^{*2}}}\right)\phi(w)\Phi\left(\lambda^{*}w+\eta^{*}\right) \tag{A3}$$

que é uma generalização para a distribuição *skew*-normal descrita em Azzalini (1999).

Quando o conjunto de dados é observado, a atualização da informação é feita através do Teorema de Bayes:

$$p(\theta \mid y) = \frac{l(\theta; y)\,p(\theta)}{p(y)} \propto l(\theta; y)\,p(\theta) \tag{A4}$$

Foram utilizadas as prioris vagas e independentes para os parâmetros do modelo:

$$\beta \sim N_{p+1}(b_0, H_0) \qquad \delta \sim N_{q+1}(b_1, H_1)$$

$$\sigma^2 \sim GI(n_0, a_0) \qquad \tau^2 \sim GI(n_1, a_1) \tag{A5}$$

A distribuição obtida para os parâmetros a partir de (11), (12) e (13) não possui forma analítica fechada, então utilizamos o algoritmo de Metropolis Hastings para obter amostras dos parâmetros e assim uma aproximação para a distribuição de interesse, $p(\theta \mid y)$. O algoritmo de Metropolis Hastings baseia-se em gerações consecutivas de uma cadeia de Markov cuja distribuição limite é a distribuição de interesse.[7]

A.1.1 Blocos de Amostragem

Para aumentar a velocidade de convergência do algortimo de Metropolis é conveniente sortear conjuntamente os parâmetros relacionados. A análise da dependência entre os estimadores dos parâmetros indicou os seguintes blocos de amostragem:

Bloco 1: (β_0, δ_0) Bloco 2: $(\beta_1, ..., \beta_p)$

Bloco 3: $(\delta_1, ..., \delta_k)$ Bloco 4: (σ^2, τ^2)

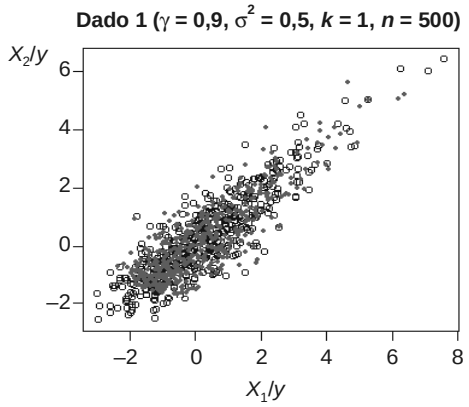
com média no passo anterior da cadeia e desvio-padrão d_{05}.

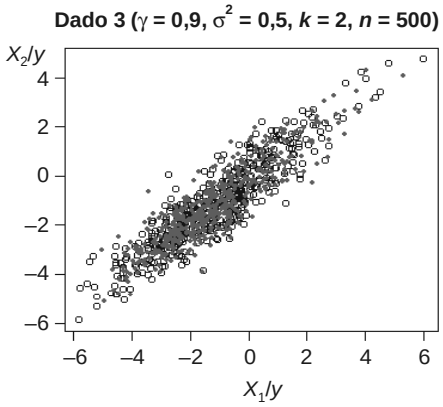
Conhecida a distribuição dos parâmetros do modelo é possível obter a distribuição da produtividade que é dada por:

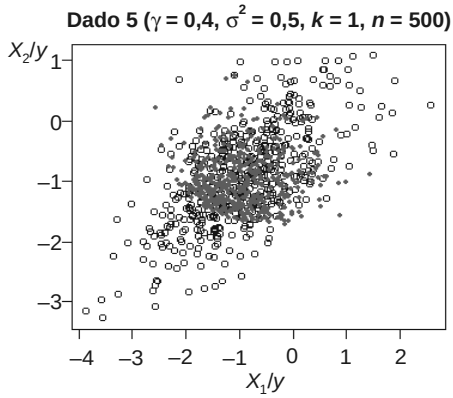
$$u \mid y - Xb \sim N+((1-\gamma)Zd + \gamma\,(y - Xb),\ \gamma\,\sigma 2) \tag{A6}$$

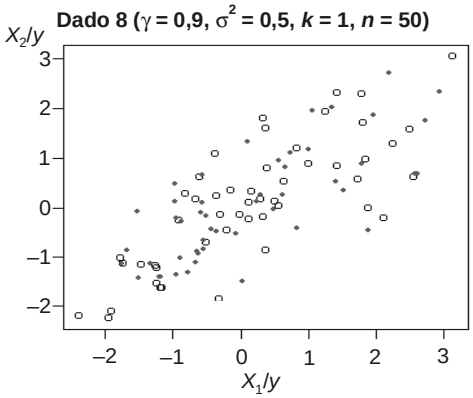
7. Para maiores detalhes sobre o método, ver Gamerman (1997).

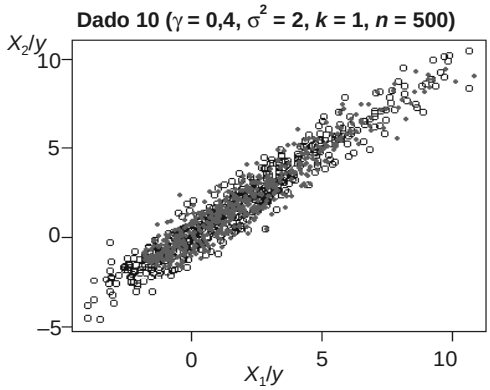
A.2 FRONTEIRA DE PRODUÇÃO NORMALIZADA PELO PRODUTO

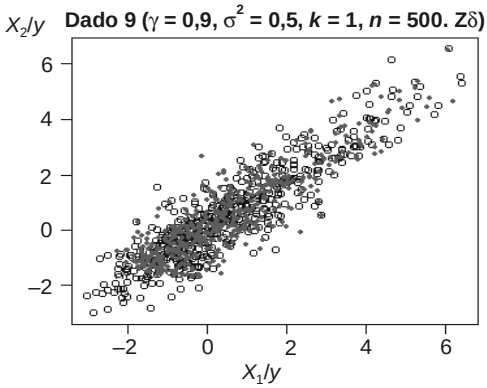












BIBLIOGRAFIA

AIGNER, D., LOVELL, K., SCHMIDT, P. Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of Econometrics*, v. 6, p. 21-37, 1977.

AZZALINI, A., CAPITANIO, A. Statistical applications of the multivariate skew-normal distributions appears. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, v. 61, p. 579-602, 1999.

BANKER, R. D. Maximum likelihood, consistency and data envelopment analysis: a statistical foundation. *Management Science*, v. 39, n. 10, 1993.

BANKER, R. D., CHARNES, A., COOPER, W. W. Some models or estimating technical and scale efficiency evaluation. *Management Science*, p. 1.078-1.092, 1984.

BANKER, R. D., CONRAD, R., STRAUSS, R. A comparative application of DA and translog methods: an illustrative study of hospital production. *Management Science,* v. 32, p. 30-44, 1986.

BATTESE, G. E., COELLI, T. J. Prediction of firm level technical efficiency with generalized frontiers production function and panel data. *Journal of Econometrics*, v. 38, p. 387-399, 1988.

_____. A model for technical inefficiency effects in a stochastic frontier production function for panel data. *Empirical Economics*, v. 20, p. 325-332, 1995.

BAUER, P. Recent developments in the econometric estimation of frontiers. *Journal of Econometrics*, v. 46, p. 39-56, 1990.

COELLI, T. J. *A guide to Frontier version 4.1: a computer program for stochastic frontier production and cost function estimation*. 1996*a* (Working Paper).

_____. *A guide to Deap version 2.1: a data envelopment analysis (computer) program*. 1996*b* (Working Paper).

CUBBIN, J., TZANIDAKIS, G. Regression versus DEA for efficiency measurement: an application to the England and Wales regulated water industry. *Utilities Policy*, v. 7, p. 75-85, 1998.

FARRELL, M. J. The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society,* (A, geral) 120, pt. 3, p. 253-281, 1957.

FERNANDEZ, C., KOOP, G., STEEL, M. A Bayesian analysis of multiple output production frontiers. *Journal of Econometrics*, v. 98, p. 47-79, 2000.

FONSECA, T. *Fronteira estocástica utilizando uma abordagem bayesiana*. IPEA, 2004 (Texto para Discussão).

FOX, K. Specification of functional form and the estimation of technical progress. *Applied Economics*, v. 28, p. 947-956, 1996.

GAMERMAN, D. *Markov Chain Monte Carlo*. Chapman-Hall, 1997.

GREENE, W. A gamma distributed stochastic frontier model. *Journal of Econometrics*, v. 46, p. 141-164, 1990.

GUPTA, A. K., GONZÁLEZ, G., MOLINA, D. J. A. Multivariate skew normal distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 89, p. 181-190, 2004.

KUMBHAKAR, S., LOVELL, C. A. *Stochastic frontier analysis*. Cambridge University Press, 2000.

LISEO, B., LOPERFIDO, N. Default Bayesian analysis of the skew-normal distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2004 (to appear).

MEDRANO, L., MIGON, H. *Fronteiras de produção estocástica para múltiplos outputs: uma abordagem bayesiana*. 2003, mimeo.

RITTER, C., SIMAR, L. Pitfalls of normal-gamma stochastic frontier models. *Journal of Productivity Analysis*, v. 8, p. 167-182, 1997.

SCHIMIDT, P., LIN, T. F. Simple test of alternative specifications in stochastic frontier models. *Journal of Econometrics*, v. 24, n. 3, p. 349-361, Mar. 1984.

SIMAR, L. Aspects of statistical analysis in DEA-type frontier models. *The Journal of Productivity Analysis*, v. 7, p. 177-185, 1996.

_____. *How to improve the performances of DA-FDH estimators in the presence of noise*. Aug. 2003, mimeo.

STEVENSON, R. Likelihood functions for generalized stochastic frontiers estimation. *Journal of Econometrics,* v. 13, p. 57-66, 1980.

TSIONAS, E. Combinig DEA and stochastic frontier models: an empirical bayes approach. *European Journal of Operational Research*, v. 147, p. 499-510, 2003.

© Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada – **Ipea** 2005

EDITORIAL

Coordenação
Silvania de Araujo Carvalho

Supervisão
Helena Rodarte Costa Valente

Revisão
André Pinheiro
Elisabete de Carvalho Soares
Lucia Duarte Moreira
Marcio Alves de Albuquerque
Míriam Nunes da Fonseca
Alejandro Augusto S. V. A. Poinho (estagiário)

Editoração
Carlos Henrique Santos Vianna
Joanna Silvestre Friques de Sousa
Roberto das Chagas Campos

Brasília
SBS – Quadra 1 – Bloco J – Ed. BNDES,
9º andar – 70076-900 – Brasília – DF
Fone: (61) 315-5336
Fax: (61) 315-5314
Correio eletrônico: editbsb@ipea.gov.br

Rio de Janeiro
Av. Presidente Antônio Carlos, 51, 14º andar
20020-010 – Rio de Janeiro – RJ
Fone: (21) 3804-8118
Fax: (21) 2220-5533
Correio eletrônico: editrj@ipea.gov.br

Tiragem: 142 exemplares

COMITÊ EDITORIAL

Secretário-Executivo
Marco Aurélio Dias Pires

SBS – Quadra 1 – Bloco J – Ed. BNDES,
9º andar – 70076-900 – Brasília – DF
Fone: (61) 315-5336
Fax: (61) 315-5314
Correio eletrônico: madp@ipea.gov.br